

Практичний курс класичної механіки

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів
фізико-математичних спеціальностей

Дудик М.В., Решітник Ю.В., Феньків В.М.

Умань 2020

Рецензенти:

Дякон В. М., кандидат фізико-математичних наук, доцент, директор Уманської філії ПВНЗ «Європейський університет»;

Краснобокий Ю. М., кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фізики та інтегративних технологій навчання природничих наук Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини.

*Рекомендовано вченою радою факультету фізики,
математики та інформатики Уманського державного педагогічного
університету імені Павла Тичини
(протокол №4 від 29.10.2020 р.)*

Д81 Практичний курс класичної механіки: навчальний посібник для студентів закладів вищої освіти фізико-математичних спеціальностей / Укл. М.В.Дудик, Ю.В.Решітник, В.М.Феньків. – Бровари : АНФ груп, 2020. – 124 с.

У посібнику зібрано більше 500 задач з різних розділів класичної механіки і спеціальної теорії відносності відповідно до програм державних стандартів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів. Задачі упорядковані за окремими темами, мають приблизно однаковий рівень складності, що дозволяє використовувати посібник для забезпечення студентів індивідуальними домашніми завданнями. В посібнику приведені також теоретичні відомості до тем та приклади розв'язування задач. Посібник може бути корисним для викладачів при підготовці до практичних занять з класичної механіки.

© Дудик М.В., Решітник Ю.В., Феньків В.М.
© АНФ груп, 2020

ЗМІСТ

Передмова	4
Тема 1. Кінематика матеріальної точки	5
Тема 2. Пряма задача динаміки.....	14
Тема 3. Обернена задача динаміки	22
Тема 4. Рівняння Лагранжа I роду	32
Тема 5. Функція та рівняння Лагранжа II роду.....	38
Тема 6. Теорема про рух центра мас матеріальної системи	48
Тема 7. Закони збереження в класичній механіці	59
Тема 8. Закони Кеплера та формули Біне.....	69
Тема 9. Розсіяння частинок.....	79
Тема 10. Основи теорії коливань	86
Тема 11. Динаміка обертального руху твердих тіл	94
Тема 12. Основи механіки рідин	103
Тема 13. Ефекти спеціальної теорії відносності.....	112
Рекомендована література	121
Інформаційні ресурси.....	121
Таблиця похідних елементарних функцій	122
Таблиця основних інтегралів.....	123

Передмова

Класична механіка є розділом теоретичної фізики, який широко використовує сучасний математичний апарат. Тому її вивчення складає важливу частину підготовки вчителів фізико-математичних спеціальностей.

Даний посібник призначений для самостійної роботи студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Він складається з методичних рекомендацій та вказівок до 13 практичних занять з класичної механіки, що відповідають програмі державного стандарту цієї дисципліни.

В «Практичному курсі класичної механіки» пропонуються задачі, частина з яких є оригінальними, а інша частина взята з поширених збірників, список яких подано в кінці посібника.

На початку кожної теми коротко викладено основні закони, рівняння та співвідношення, які необхідні для розв'язання задач. Методичні вказівки та приклади розв'язування окремих задач допоможуть студентам краще зрозуміти та засвоїти даний курс. Кожна тема містить велику кількість однотипних задач для самостійного розв'язування, що дозволяє кожному студенту задавати індивідуальні домашні завдання. Автори відмічають, що для розв'язання задач, пропонованих в посібнику, потрібні ґрунтовні знання з курсів математичного аналізу та теорії диференціальних рівнянь. Для полегшення розв'язування задач в кінці даного видання розміщені таблиці похідних та інтегралів основних функцій.

Тема 1. Кінематика матеріальної точки

Теоретичні відомості

Кінематика – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух матеріальних тіл в просторі без врахування причин, що викликають цей рух.

Характеристиками, що описують рух у просторі й часі, є рівняння руху та траєкторія. Тому основним завданням даного розділу є визначення кінематичних характеристик тіл у вибраній системі відліку.

Матеріальна точка – це тіло, розмірами якого можна знехтувати за даних умов.

Є три основні способи задання руху точки: векторний, координатний та натуральний.

Векторний спосіб характеризується радіус-вектором \vec{r} рухомої точки, що є функцією часу:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.1)$$

Знаючи закон руху точки (1.1), можна визначити її основні кінематичні величини швидкість: \vec{v} та прискорення \vec{a} :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t), \quad (1.2)$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \ddot{\vec{v}}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t); \quad (1.3)$$

тут крапка над символом позначає похідну по часу, а дві крапки – другу похідну.

Координатний спосіб полягає у заданні трьох декартових координат точки x , y , z . Тоді законом руху точки є система рівнянь:

$$\begin{cases} x = X(t) \\ y = Y(t) \\ z = Z(t), \end{cases} \quad (1.4)$$

де $X(t)$, $Y(t)$ та $Z(t)$ – неперервні функції часу.

Зв'язок між радіус-вектором \vec{r} і декартовими координатами точки виражається рівністю:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (1.5)$$

де \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} – одиничні орти вибраної СК.

Якщо рух точки відбувається в одній площині, то іноді зручніше користуватись полярною системою координат ρ , φ . Тоді рівняння руху мають вигляд:

$$\begin{cases} \rho = \rho(t) \\ \varphi = \varphi(t). \end{cases} \quad (1.6)$$

Натуральний спосіб характеризується заданням траєкторії та закону руху точки по цій траєкторії. Рух точки по траєкторії можна задати рівнянням відстані

$$s = s(t) \quad (1.7)$$

або рівнянням в дугових координатах

$$\sigma = \sigma(t). \quad (1.8)$$

Дугова координата σ – це довжина дуги, що пройшла точка. Вона може бути як додатною так і від'ємною.

Шлях пройдений тілом за час t дорівнює:

$$s(t) = \int \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt + C_1 \quad (1.9)$$

або в полярних координатах

$$s(t) = \int \sqrt{\dot{\rho}^2(t) + \rho^2(t)\dot{\varphi}^2(t)} dt + C_2, \quad (1.10)$$

де під інтегралами розуміють відповідні первісні, а константи C_1 або C_2 знаходяться з умови $s(0)=0$.

Для знаходження траєкторії точки необхідно із системи рівнянь (1.4) або (1.6) виключити час t як параметр. Крива, рівняння якої ми отримали, є траєкторією руху точки.

Задачі на визначення швидкості та прискорення зводяться до складання законів руху точки (1.4) у вибраній СК, з яких

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \quad (1.11)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}. \quad (1.12)$$

Модуль швидкості та прискорення дається формулами:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1.13)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.14)$$

Напрямок швидкості та прискорення визначається напрямними косинусами:

$$\cos(\vec{v}; \vec{i}) = \frac{v_x}{v}; \cos(\vec{v}; \vec{j}) = \frac{v_y}{v}; \cos(\vec{v}; \vec{k}) = \frac{v_z}{v}, \quad (1.15)$$

$$\cos(\vec{a}; \vec{i}) = \frac{a_x}{a}; \cos(\vec{a}; \vec{j}) = \frac{a_y}{a}; \cos(\vec{a}; \vec{k}) = \frac{a_z}{a}, \quad (1.16)$$

Якщо рівняння руху задано у натуральній формі, то швидкість