

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

МАТЕМАТИКА В СУЧАСНОМУ ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Матеріали
IX Міжнародної
науково-практичної конференції
Київ, 28–29 грудня 2020 року

Вінниця
2021

УДК 51(082)
М34

Матеріали IX Міжнар. наук.-практ. конф. «Математика в сучасному технічному університеті», Київ, 28–29 грудня 2020 р. — Вінниця: Видавець ФОП Кушнір Ю. В., 2021. — 330 с. — Укр., рос., англ., білорус.

Материалы IX Межд. науч.-практ. конф. «Математика в современном техническом университете», Киев, 28–29 декабря 2020 г. — Винница: Видавець ФОП Кушнір Ю. В., 2021. — 330 с. — Укр., рус., англ., белорус.

Proceedings of Ninth International Scientific-Practical Conference “Mathematics in Modern Technical University”, Kyiv, December, 28–29, 2020. Vinnytsia: Publisher FOP Kushnir Yu. V., 2021. 330 pp.

ISBN 978-617-7721-27-6

Програмний комітет

IX Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»:

Проф. О. І. Клесов (Київ, Україна), (голова)
Проф. Н. О. Вірченко (Київ, Україна)
Проф. О. В. Іванов (Київ, Україна)
Проф. П. В. Задерей (Київ, Україна)
Доц. О. О. Диховичний (Київ, Україна)

Організаційний комітет

Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»

Доц. В. О. Гайдей (Україна), голова
В. В. Бовсуновська (Київ, Україна)
Ю. Є. Приходько (Київ, Україна)

УДК 51(082)

Матеріали подано в авторській редакції

ISBN 978-617-7721-27-6

©Автори

©КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021

Наближений метод розв'язання систем функціональних рівнянь Вінера — Гопфа

М. В. Дудик

Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини,

Умань, Україна

dudik_m@hotmail.com

Запропоновано метод послідовних наближень для розв'язання системи функціональних рівнянь Вінера — Гопфа. Метод використовує подання матричного коефіцієнта системи у вигляді суми двох матриць, одна з яких допускає точну факторизацію, а відносно іншої — матриці-збурення — передбачається умова її малості порівняно з першим доданком в області задання системи. Розв'язок системи шукається у вигляді розвинень за степенями матриці-збурення. На кожному кроці наближення розв'язання системи здійснюється за допомогою методу Вінера — Гопфа з використанням факторизації основної складової матричного коефіцієнта.

Ключові слова: матричне функціональне рівняння Вінера — Гопфа, метод послідовних наближень.

Чимало плоских крайових задач математичної і теоретичної фізики, прикладної механіки за наявності двох і більше точок зміни граничних умов за допомогою інтегральних перетворень можуть бути зведені до системи функціональних рівнянь у комплексній площині, які розв'язуються за допомогою методу Вінера — Гопфа (Noble, 1988). Ключовою проблемою їх розв'язання є факторизація матричного коефіцієнта системи. Однак, на сьогоднішній день відомий лише один вузький нетривіальний клас матричних функцій комплексної змінної, що допускають точну факторизацію в замкнутій аналітичній формі. Запропонований Г. М. Чеботарьовим і розвинений А. О. Храпковим (Khrapkov, 2001) метод факторизації даного класу матриць успішно застосовувався для розв'язання окремих задач механіки руйнування, теорії розсіювання електромагнітних і пружних хвиль, контактних задач тощо. У той же час, метод Чеботарьова — Храпкова виявився неспроможним у випадку складніших матриць, що стимулювало розвиток методів наближеної факторизації матричних функцій.

У даній роботі пропонується метод послідовних наближень для розв'язання системи функціональних рівнянь Вінера — Гопфа, який використовує подання матричного коефіцієнта системи у вигляді суми двох матриць, одна з яких, $G_0(p)$, допускає точну факторизацію, а щодо іншої — матриці-збурення $G'(p)$ — передбачається умова малості порівняно з $G_0(p)$ в області задання системи:

$$\begin{aligned}\Phi^+(p) + f(p) &= G(p)\Phi^-(p) \quad (p \in D), \\ G(p) &= G_0(p) + G'(p) \quad (|G_0(p)| \gg |G'(p)|),\end{aligned}\tag{1}$$

де $\Phi^+(p)$, $\Phi^-(p)$ — невідомі лінійні вектори, аналітичні в областях D^+ і D^- відповідно, $D = D^+ \cap D^-$; $f(p)$ і $G(p)$ — задані лінійний вектор і квадратна матриця, причому $G_0(p)$ факторизується за допомогою аналітичних в областях D^+ і D^- матриць:

$$G_0(p) = G_0^+(p)G_0^-(p).$$

За допомогою методу Вінера — Гопфа при виконанні умови $p \rightarrow \infty$, $(G_0^+(p))^{-1} \Phi_0^+(p) \rightarrow 0$ отримуємо розв'язок системи (1) у нульовому наближенні у вигляді

$$\Phi_0^+(p) = -G_0^+(p)f_0^+(p) \quad (p \in D^+), \quad \Phi_0^-(p) = -\left(G_0^-(p)\right)^{-1} f_0^-(p) \quad (p \in D^-),$$

$$f_0^\pm(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\left(G_0^+(z)\right)^{-1} f(z)}{z - p} dz \quad (\gamma \in D, \quad p \in D^\pm),$$

де $\left(G_0^-(p)\right)^{-1}$ — матриця, обернена $G_0^-(p)$, γ — нескінченна лінія у смугі аналітичності системи (1). Шляхом послідовних ітерацій, виконаних подібно до попереднього етапу, знаходимо загальний розв'язок системи (1):

$$\Phi^+(p) = -G_0^+(p) \sum_{n=0}^{\infty} f_n^+(p) \quad (p \in D^+), \quad \Phi^-(p) = -\left(G_0^-(p)\right)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} f_n^-(p) \quad (p \in D^-),$$

$$f_n^\pm(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\left(G_0^+(z)\right)^{-1} G'(z) \left(G_0^-(z)\right)^{-1} f_{n-1}^\pm(z)}{z - p} dz \quad (\gamma \in D, \quad p \in D^\pm).$$

З формальної точки зору цей розв'язок можна вважати точним. Умовою коректності розв'язку є збіжність його рядів, тобто виконання нерівності

$$\left| f_n^\pm(p) \right| < \left| f_{n-1}^\pm(p) \right|.$$

Згідно з визначенням $f_n^\pm(p)$ цій нерівності еквівалентна умова

$$\left| \left(G_0^+(p)\right)^{-1} G'(p) \left(G_0^-(p)\right)^{-1} \right| < 1.$$

У той же час, практичне застосування розв'язку для числових розрахунків наштовхується на зростання кратності інтегралів типу Коші в кожному наступному наближенні. Ця обставина змушує обмежуватись у розв'язку невеликим числом доданків, які враховуються при обчисленнях, і накладає більш жорстке обмеження на матрицю-збурення:

$$\left| \left(G_0^+(p)\right)^{-1} G'(p) \left(G_0^-(p)\right)^{-1} \right| \ll 1.$$

Переваги методу надає можливість уникнення факторизації матричного коефіцієнта $\mathbf{G}(p)$ вихідного рівняння (1).

Список літератури

- Noble, B. (1988). *Methods based on the Wiener–Hopf technique*. New York: Chelsea Publ. Comp.
- Khrapkov, A. A. (2001). *Wiener–Hopf method in mixed elasticity theory problem*. St. Petersburg: B. E. VNIIG Inc.

ЗМІСТ

Секція 1. Застосування математики в суміжних науках

Borysenko O. V. <i>Non-autonomous stochastic predator-prey model with jumps</i>	4
Boychuk L. M. <i>A force investigation of automatic systems</i>	8
Kolomiets T. Yu., Pogorui A. A. <i>Monogenic functions in Clifford algebras and their applications</i>	13
Kovalchuk V. <i>Differential equations in modeling the bond behaviour between reinforcement and concrete</i>	17
Sakhno L. M., Hopkalo H. M. <i>Sample paths properties of ϕ-sub-Gaussian processes related to the random heat equation</i>	20
Антоненко Н. М., Ткаченко І. Г. <i>Осесиметрична задача термoprужності для двошарової плити з неідеальним тепловим контактом між шарами</i>	23
Антонова А. О., Погребецька Т. О. <i>Про умови існування граничного циклу в моделі економічного циклу Гудвіна з необмеженою “стелею” Хікса</i>	26
Біленко В. І., Боженок К. В. <i>Поліноміальні методи аналізу фрактальних моделей дифузійних процесів</i>	30
Богданов В. Л., Григоренко А. Я., Сороченко Г. В., Тормахов Н. Н. <i>Распределение нагрузки в резьбовом соединении имплантата с костью</i>	33
Богун В. А., Маринич О. В. <i>Асимптотика згорток Лебега — Стілтєсса функцій лінійного росту</i>	37
Буценко Ю. П., Лабжинський В. А. <i>Узагальнення математичної моделі навчання нейромережевих алгоритмів на базі багатошарового перцептрона</i>	40
Гаєвський М. В., Задерей П. В., Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д. <i>Наближення аналітичних функцій сумами Валле Пуссена</i>	42
Гай В. В., Ванельчук Д. І., Гузик Н. М. <i>Застосування диференціальних рівнянь у військово-прикладних задачах</i>	45
Голуб В. П. <i>Об одном методе определения параметров ядер наследственности с использованием весовых функций</i>	49
Горалік Є.Т., Крюков М. М., Лупіна Т. О. <i>Рівняння фази обертання руху тіла, що скочується з похилої плоскої опори, в декартових і узагальнених координатах</i>	53
Горленко С. В. <i>Теорема про точки неперервності похідної та її узагальнення</i>	57
Гречко А. Л. <i>Математична модель сили Коріоліса в метеорології</i>	60
Дудик М. В. <i>Наближений метод розв’язання систем функціональних рівнянь Вінера – Гопфа</i>	62
Зеленська І. О. <i>Задача Коші для системи сингулярно збурених</i>	65
Капусто А. В., Банщиков Д. О. <i>Моделирование английского аукциона</i>	68
Капусто А. В., Костюкова С. Н. <i>Статистические методы анализа данных в оценке эффективности игровых методик обучения</i>	72
Кобзар Ю. М. <i>Моделювання процесу руйнування стрижня внаслідок втоми в умовах багато циклового кручення за допомогою рекурентних співвідношень</i>	76