

## ДОСЛІДЖЕННЯ ПОЧАТКОВОГО ЕТАПУ РУЙНУВАННЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ТІЛА З МІЖФАЗНОЮ ТРІЩИНОЮ ПРИ СТИСКАННІ ВЗДОВЖ МЕЖІ ПОДІЛУ

*Розглядається початковий етап процесу руйнування кусково-однорідного тіла при стисканні вздовж плоскої межі поділу матеріалів, що містить міжфазну тріщину. Виконано аналітичний розрахунок параметрів маломасштабної зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі поблизу вершин. Знайдено величину розходження меж зони, яка використовується в подальшому в деформаційному критерії утворення в ній вторинної мікротріщини. Запропоновано механізм зрушення початкової тріщини, який передбачає її злиття зі зростаючою мікротріщиною при збільшенні навантаження.*

**Ключові слова:** міжфазна тріщина, стискання уздовж межі поділу, контакт берегів, зона передруйнування, вторинна мікротріщина, механізм зрушення тріщини.

**Вступ.** Однією з актуальних проблем механіки деформівного твердого тіла є дослідження механізму руйнування тіл при стисканні. До цього класу проблем відноситься задача про зрушення тріщини при стисканні тіла в напрямку, паралельному площині її розташування. При такому навантаженні в полі напружень біля вершин тріщини відсутні сингулярні складові (коефіцієнти інтенсивності напружень дорівнюють нулеві), що виключає можливість застосування критеріїв лінійної механіки руйнування.

Дослідженнями поведінки тріщин при стисканні тіла паралельно до площини їх розміщення було з'ясовано, що причиною руйнування тіла в цьому випадку є локальна втрата стану рівноваги біля вершин тріщини [2, 12]. Наслідком втрати стійкості може стати вигин берегів тріщини в різні сторони, в одну сторону з контактом берегів або в одну сторону з утворенням зазору між берегами. Ці процеси призводять до концентрації напружень та утворення зон передруйнування в околі вершин, що на даному етапі допускає застосування традиційних методів дослідження умов зрушення тріщини в рамках лінійної механіки руйнування.

У цій статті розглядаємо початковий етап процесу руйнування кусково-однорідного тіла при його стисканні вздовж плоскої межі поділу матеріалів, що містить міжфазну тріщину. У припущенні, що внаслідок втрати стійкості рівноважного стану відбувається спільне викривлення тріщини з контактом її берегів в сторону менш жорсткого матеріалу, виконано розрахунок параметрів маломасштабної зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі в околі вершин тріщини. Знайдено величину розходження меж зони, яку використовуємо в подальшому у деформаційному критерії утворення вторинної мікротріщини в зоні. Запропоновано механізм зрушення початкової тріщини, який передбачає її злиття зі зростаючою мікротріщиною при збільшенні навантаження. Аналогічний механізм зрушення міжфазної тріщини в умовах зсувних навантажень описано в [6].

**1. Постановка задачі.** В умовах плоскої деформації розглядаємо задачу про напружено-деформований стан в околі вершини міжфазної тріщини, розміщеної на плоскій межі поділу двох різних однорідних ізотропних пружних матеріалів з модулями Юнга  $E_1$ ,  $E_2$  і сталими коефіцієнтами Пуассона  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  відповідно. Досліджуване кусково-однорідне тіло піддається стисканню у напрямку, паралельному до площини з'єднання і берегів тріщини, що призводить до вигину берегів тріщини в бік менш жорсткого

✉ dudik\_m@hotmail.com

матеріалу (для визначеності – першого,  $E_1 < E_2$ ), появи концентрації напружень і утворення зон передруйнування в тонкому шарі з'єднувального матеріалу в околі вершин, який передбачається менш тріщиностійким порівняно з матеріалами з'єднаних частин тіла (рис. 1а). Будемо вважати, що прикладені навантаження не порушують прямолінійності межі поділу поза тріщиною, що у випадку рівномірно розподіленого стискального навантаження, прикладеного до торців тіла, вимагає виконання умови, встановленої J. R. Rice, G. C. Sih [14]:

$$p_2 = \frac{E_2}{E_1} \frac{1 - \nu_1^2}{1 - \nu_2^2} p_1.$$

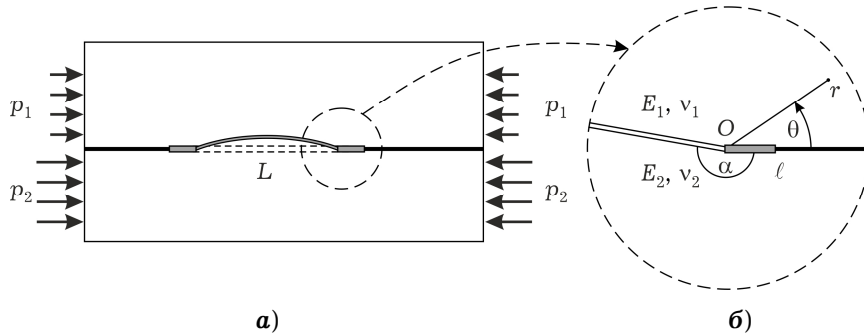


Рис. 1. а) – Кусково-однорідне тіло з міжфазної тріщиною в умовах стиснення; б) – Розрахункова схема задачі.

На початковому етапі навантаження розміри зон передруйнування малі, тому довжину  $\ell$  кожної з зон вважатимемо набагато меншою порівняно з довжиною тріщини  $L$ . Це дозволяє обмежитися дослідженням напружено-деформованого стану тільки локальної області в околі однієї з вершин і звести вихідну задачу до задачі про розрахунок параметрів маломасштабної зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі біля вершини півнескінченної міжфазної тріщини у кусково-однорідній площині, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу (рис. 1б).

Оскільки розвиток тріщини відбувається за крихким механізмом, зону передруйнування моделюватимемо прямою лінією розриву нормального переміщення, на якій нормальне напруження дорівнює опору відриву з'єднувального матеріалу  $\sigma_0$ . Припускаючи наявність контакту берегів тріщини з тертям за законом Кулона, приходимо до статичної крайової задачі теорії пружності з граничними умовами:

$$\begin{aligned} \theta = 0: \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_r \rangle = 0, \\ \theta = -\alpha \cup (2\pi - \alpha): \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = 0, \quad \tau_{r\theta} = -\mu \sigma_\theta, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \theta = 0, \quad r < \ell: \quad \sigma_\theta = \sigma_1, \\ \theta = 0, \quad r > \ell: \quad \langle u_\theta \rangle = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\langle f \rangle$  – стрибок величини  $f$ ;  $\mu$  – коефіцієнт тертя між берегами тріщини.

Для формулювання умови на нескінченності використовуємо метод зрощування асимптотичних розв'язків [13], який передбачає зшивання на відстанях  $\ell \ll r \ll L$  шуканого розв'язку з відомим розв'язком аналогічної задачі теорії пружності без зони передруйнування [3]:

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow \infty: \quad \sigma_\theta = CF(\alpha)r^\lambda + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned}
F(\alpha) &= (1-e)^2 f_1 + (1-e)(1+x_2)f_2 + e(1-e)(1+x_2)f_3 + \\
&\quad + e(1+x_1)(1+x_2)f_4 + e^2(1+x_2)^2 f_5, \\
f_1 &= -4\mu\delta_{11}t_1, \quad f_2 = 4t_1[\cos\lambda\beta - \mu\sin(\lambda+2)\beta], \\
f_3 &= \delta_{11}\delta_{32} - 2\lambda\delta_{22}\delta_1(\beta) + \mu[(\lambda+2)\delta_{12}\delta_{31} + 2\delta_{21}\delta_1(\beta) + 4\delta_{11}\delta_1(\alpha)], \\
f_4 &= 2\sin\lambda\pi[2\sin\lambda(\pi-\alpha)\delta_1(\alpha) - \delta_{31}\cos\lambda(\pi-\alpha) + \\
&\quad + \sin(\lambda+2)\beta[\delta_{23}\sin\lambda(\pi-\alpha) + \lambda\delta_{22}\cos\lambda(\pi-\alpha) - 2\mu\delta_2]], \\
f_5 &= 4\sin\lambda\pi\delta_2[\cos(\lambda+2)\alpha + \mu\sin(\lambda+2)\alpha], \\
t_1 &= (\lambda+1)^2\sin^2\alpha - \sin^2(\lambda+1)\alpha, \\
\delta_{11} &= \lambda\sin(\lambda+2)\beta - (\lambda+2)\sin\lambda\beta, \quad \delta_{12} = \cos\lambda\beta - \cos(\lambda+2)\beta, \\
\delta_{21} &= \lambda\sin(\lambda+2)\alpha - (\lambda+2)\sin\lambda\alpha, \quad \delta_{22} = \cos\lambda\alpha - \cos(\lambda+2)\alpha, \\
\delta_{23} &= (\lambda+2)\sin(\lambda+2)\alpha - \lambda\sin\lambda\alpha, \\
\delta_{31} &= -(\lambda+1)\sin 2\alpha + \sin 2(\lambda+1)\alpha, \\
\delta_{32} &= (\lambda+1)\sin 2\alpha + \sin 2(\lambda+1)\alpha, \\
\delta_1(x) &= (\lambda+1)\sin^2 x + \sin^2(\lambda+1)x, \\
\delta_2 &= (\lambda+1)\sin\alpha\cos(\lambda\pi+\alpha) - \sin(\lambda+1)\alpha\cos[(\lambda+1)\alpha - \lambda\pi], \\
\beta &= 2\pi - \alpha, \quad e = \frac{E_1}{E_2} \frac{1+v_2}{1+v_1}, \quad x_{1(2)} = 3 - 4v_{1(2)},
\end{aligned}$$

де  $\lambda$  – показник сингулярності напружень, який визначаємо як найменший на інтервалі  $(-1, 0)$  корінь характеристичного рівняння задачі

$$D_0(\lambda) = 0, \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned}
D_0(\lambda) &= D_{01}(\lambda) + \mu D_{02}(\lambda), \\
D_{01}(\lambda) &= (1-e)[0.5(1+x_1)D_{11}t_1 - 0.5e(1+x_2)D_{12}t_3 + e(1+x_1)(1+x_2)d_3] + \\
&\quad + e(1+x_1)(1+x_2)D_{13}, \\
D_{02}(\lambda) &= (1-e)\{(1+x_1)D_{21}t_1 - e(1+x_2)[D_{22}t_3 - (1+x_1)d_4] + 2(1-e)^2 t_1 t_3\} + \\
&\quad + e(1+x_1)(1+x_2)D_{23}, \\
D_{11}(\lambda) &= (1-e)d_5 + (1+x_1)\sin 2(\lambda+1)(2\pi-\alpha), \\
D_{12}(\lambda) &= e(1+x_2)\sin 2(\lambda+1)\alpha + (1-e)d_2, \\
D_{13}(\lambda) &= \sin^2\lambda\pi[(1+x_1)d_7 - e(1+x_2)d_9], \\
D_{21}(\lambda) &= (1-e)d_6 - (1+x_1)t_2, \\
D_{22}(\lambda) &= e(1+x_2)t_4 + (1-e)d_1, \\
D_{23}(\lambda) &= \sin^2\lambda\pi[(1+x_1) - e(1+x_2)]d_8,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_2 &= \sin^2(\lambda + 1)\beta, & t_3 &= (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - t_2, & t_4 &= \sin^2(\lambda + 1)\alpha, \\
d_1 &= (\lambda + 1) \sin^2 \alpha + 3t_4, & d_2 &= (\lambda + 1) \sin 2\alpha + \sin 2(\lambda + 1)\alpha, \\
d_3 &= [(\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin(\lambda + 1)\beta] \sin 2(\lambda + 1)(\alpha - \pi) - \\
&\quad - 2(\lambda + 1) \sin^2 \lambda \pi \sin 2\alpha \cos^2(\lambda + 1)(\pi - \alpha), \\
d_4 &= 2[(\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin(\lambda + 1)\beta] \sin^2(\lambda + 1)(\pi - \alpha) - \\
&\quad - 4 \sin^2 \lambda \pi [(\lambda + 1) \sin^2 \alpha \cos^2(\lambda + 1)(\pi - \alpha) + \\
&\quad + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin(\lambda + 1)\beta], \\
d_5 &= (\lambda + 1) \sin 2\alpha - \sin 2(\lambda + 1)\beta, & d_6 &= (\lambda + 1) \sin^2 \alpha + 3t_2, \\
d_7 &= (\lambda + 1) \sin \alpha \cos \alpha - \sin(\lambda + 1)\alpha \cos(\lambda + 1)\beta, \\
d_8 &= (\lambda + 1) \sin^2 \alpha + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin(\lambda + 1)\beta, \\
d_9 &= (\lambda + 1) \sin \alpha \cos \alpha + \cos(\lambda + 1)\alpha \sin(\lambda + 1)\beta.
\end{aligned}$$

Під дією стискальних навантажень більш м'який верхній матеріал в околі правої вершини тріщини (рис. 1а) зміщується вліво відносно нижнього матеріалу, тому коефіцієнт тертя  $\mu$  повинен бути від'ємним. Сталу  $C$ , аналогічну за змістом до коефіцієнта інтенсивності напружень біля вершини тріщини, вважаємо заданою за умовою. Передбачається, що в задачі, яка відповідає тому етапу процесу деформування, коли зона передруйнування ще не появилася, нормальне напруження при  $\theta = 0$  в околі вершини тріщини є розтягувальним ( $\theta = 0$ ,  $\sigma_\theta > 0$ ). Це вимагає виконання умови  $CF(\alpha) > 0$  додатково до вимоги існування стискального напруження  $\sigma_\theta < 0$  на берегах тріщини  $\theta = -\alpha \cup (2\pi - \alpha)$ , необхідного для контакту берегів.

У кінці лінії розриву, яка моделює зону передруйнування, відповідно до загальних положень про напружено-деформований стан в околі гострокінцевих концентраторів [9], напруження мають кореневу особливість:

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow \ell + 0: \quad \sigma_\theta \sim \frac{1 + \alpha_1 + e(1 + \alpha_2)}{2(1 + \alpha_1)} \frac{k}{\sqrt{2\pi(r - \ell)}}, \quad (5)$$

де  $k$  – коефіцієнт інтенсивності напружень, який підлягає розрахунку в ході розв'язання задачі.

Розв'язок сформульованої крайової задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді суми наступних двох задач. *Перша задача* відрізняється від сформульованої тим, що в (2) замість першої умови покладаємо

$$\theta = 0, \quad r < \ell: \quad \sigma_\theta = \sigma_0 - CF(\alpha)r^\lambda, \quad (6)$$

а на нескінченості напруження спадають, як  $o(1/r)$ . *Другою задачею* є аналогічна *першій* задачі без лінії розриву, розв'язок якої отримано в [3], тому завдання зводиться до розв'язання першої задачі.

**2. Розв'язання задачі.** Застосувавши до рівнянь рівноваги, умови сумісності деформацій, закону Гука та граничних умов (1) інтегральне перетворення Мелліна [8] і використавши другу з умов (2) і умову (6), приходимо до функціонального рівняння Вінера – Гопфа першої задачі:

$$\Phi^+(p) + \frac{\sigma_0}{p+1} - \frac{CF(\alpha)\ell^\lambda}{p+1+\lambda} = A \operatorname{ctg} p\pi G(p)\Phi^-(p), \quad -\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2, \quad (7)$$

де

$$\Phi^+(p) = \int_1^\infty \sigma_\theta(\rho\ell, 0)\rho^p d\rho, \quad \Phi^-(p) = \frac{E_1}{4(1-v_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \Big|_{r=\rho d} \Big|_{\theta=0} \rho^p d\rho,$$

$$A = \frac{(1+x_1)[1+x_1+e(1+x_2)]}{2(e+x_1)(1+ex_2)}, \quad G(p) = \frac{(1+x_1)D_1(p) \sin p\pi}{2AD_0(-1-p) \cos p\pi},$$

$$D_1(p) = -(1+x_1)^2 \cos(p+1)\beta\Delta_1\Delta_5 - e^2(1+x_2)^2 \cos(p+1)\alpha\Delta_4\Delta_6 + \\ + \mu(1-e)(1+x_1)\Delta_1\Delta_3 - \mu e(1-e)(1+x_2)\Delta_2\Delta_4 + \\ + 2e(1+x_1)(1+x_2)[\cos(p+1)(\pi-\alpha)\Delta_7\Delta_8 + \sin^2 p\pi\Delta_9],$$

$$\Delta_1(p) = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha, \quad \Delta_2(p) = p \sin 2\alpha - \sin 2p\alpha,$$

$$\Delta_3(p) = p \sin 2\alpha + \sin 2p\beta, \quad \Delta_4(p) = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\beta,$$

$$\Delta_5(p) = \cos(p-1)\beta + \mu \sin(p-1)\beta, \quad \Delta_6(p) = \cos(p-1)\alpha - \mu \sin(p-1)\alpha,$$

$$\Delta_7(p) = p^2 \sin^2 \alpha + \sin p\alpha \sin p\beta,$$

$$\Delta_8(p) = \cos(p-1)(\pi-\alpha) + \mu \sin(p-1)(\pi-\alpha),$$

$$\Delta_9(p) = p^2 \sin^2 \alpha - 2\mu p \sin \alpha \cos p(\pi-\alpha) \cos[p(\pi-\alpha)-\alpha] - \\ - \sin p\alpha \sin p\beta,$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – достатньо малі додатні числа.

Розв'язок функціонального рівняння (7), знайдений за допомогою методу Вінера – Гопфа [7] подібно до розв'язків аналогічних рівнянь у роботах [4–6], має вигляд

$$\Phi^+(p) = -\mathcal{K}^+(p)G^+(p) \left\{ \frac{\sigma_0}{p+1} \left[ \frac{1}{\mathcal{K}^+(p)G^+(p)} - \frac{1}{\mathcal{K}^+(-1)G^+(-1)} \right] - \right. \\ \left. - \frac{CF(\alpha)\ell^\lambda}{p+\lambda+1} \left[ \frac{1}{\mathcal{K}^+(p)G^+(p)} - \frac{1}{\mathcal{K}^+(-1-\lambda)G^+(-1-\lambda)} \right] \right\}, \\ \operatorname{Re} p < 0,$$

$$\Phi^-(p) = \frac{pG^-(p)}{A\mathcal{K}^-(p)} \left\{ \frac{\sigma_0}{p+1} \frac{1}{\mathcal{K}^+(-1)G^+(-1)} - \right. \\ \left. - \frac{CF(\alpha)\ell^\lambda}{p+\lambda+1} \frac{1}{\mathcal{K}^+(-1-\lambda)G^+(-1-\lambda)} \right\}, \quad \operatorname{Re} p > 0, \quad (8)$$

де

$$\mathcal{K}^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(0.5 \mp p)},$$

$$G(p) = \frac{G^+(p)}{G^-(p)}, \quad \operatorname{Re} p = 0,$$

$$\exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p), & \operatorname{Re} p < 0, \\ G^-(p), & \operatorname{Re} p > 0, \end{cases}$$

$\Gamma(p)$  – гамма-функція Ейлера.

**3. Визначення параметрів зони передруйнування.** Застосувавши до асимптотики (5) теорему абелевого типу [7], отримаємо

$$\Phi^+(p) \sim \frac{x_1 + 1 + e(1 + x_2)}{2(e + x_1)} \frac{k}{\sqrt{-2p\ell}}, \quad p \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} p < 0.$$

Порівнюючи цю асимптотику з асимптотикою розв'язку (8) при  $p \rightarrow \infty$ ,  $\operatorname{Re} p < 0$ :

$$\Phi^+(p) \sim \frac{1}{\sqrt{-p}} \left\{ \frac{\sigma_0}{\mathcal{K}^+(-1)G^+(-1)} - \frac{CF(\alpha)\ell^\lambda}{\mathcal{K}^+(-1-\lambda)G^+(-1-\lambda)} \right\},$$

знайдемо коефіцієнт інтенсивності напружень біля кінця лінії розриву нормального переміщення:

$$k = \sqrt{2\ell} \frac{2(e + x_1)}{x_1 + 1 + e(1 + x_2)} \left\{ \frac{\sigma_0}{\mathcal{K}^+(-1)G^+(-1)} - \frac{CF(\alpha)\ell^\lambda}{\mathcal{K}^+(-1-\lambda)G^+(-1-\lambda)} \right\}.$$

Відповідно до вимоги обмеженості напружень у кінці зони передруйнування, покладаємо коефіцієнт інтенсивності  $k$  рівним нулеві, звідки отримуємо аналітичний вираз для довжини зони:

$$\ell = \left( \frac{2CF(\alpha)J(0)}{\sqrt{\pi}\sigma_0\mathcal{K}^+(-\lambda-1)J(\lambda)} \right)^{-1/\lambda}, \quad (9)$$

де

$$J(x) = \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{(x+1) \ln |G(it)| + t \cdot \arg(G(it))}{t^2 + (x+1)^2} dt \right].$$

Згідно з (9), довжина зони передруйнування нелінійно зростає зі збільшенням зовнішнього навантаження, до якого множник  $C$  є прямо пропорційним. Крім того, довжина зони передруйнування є тим більшою, чим меншим є опір відриву з'єднувального матеріалу  $\sigma_0$ .

Знайдений розв'язок (8) рівняння Вінера – Гопфа задачі із залученням оберненого перетворення Мелліна і теореми про лишки дозволяє визначити поле напружень в околі вершини тріщини, яке змінилося в результаті утворення зони передруйнування. Загальна структура тензора напружень на відстанях  $r \ll \ell$  має вигляд

$$\sigma_{mn}(r, \theta) = \sigma_{mn}^0(\theta) + \sum_i g_{mn}(\theta, \lambda'_i) r^{\lambda'_i}, \quad r \rightarrow 0, \quad (10)$$

де  $\sigma_{mn}^0(\theta)$ ,  $g_{mn}(\theta, \lambda'_i)$  – відомі функції,  $\lambda'_i$  – корені рівняння

$$D_1(-1-x) = 0, \quad (11)$$

які внаслідок вимоги обмеженості переміщень задовольняють умову  $\operatorname{Re} \lambda'_i > -1$ . Зокрема, кореням рівняння (11) у смугі  $-1 < \operatorname{Re} \lambda'_i < 0$  відповідатимуть сингулярні складові в розвиненні (10), що зумовлюють концентрацію напружень біля вершини тріщини.

На досліджуваному початковому етапі розвитку зони передруйнування розкриття тріщини в її вершині, згідно з прийнятими в (1) граничними умовами, дорівнює нулеві, тому, відповідно до деформаційного критерію руйнування, зрушення тріщини здається неможливим. Однак можна уявити механізм її зрушення, за яким спочатку відбудеться розрив міжчастинкових зв'язків у зоні передруйнування у місці максимального розходження меж зони, яке дорівнює стрибку нормального переміщення  $\delta u(r) = \langle u_\theta(r, 0) \rangle$ , при досягненні ним деякого критичного значення  $\delta u_{\text{cr}}$ , що є характеристикою

з'єднувального матеріалу. В результаті всередині зони передруйнування утворюється мікротріщина (див. рис. 2), яка збільшується за розмірами зі збільшенням навантаження аж до досягнення нею вершини початкової тріщини, що і призводить до зрушення тріщини.

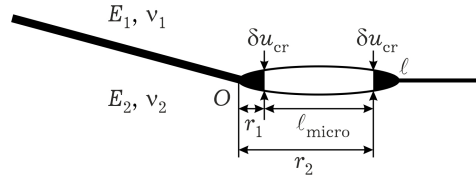


Рис. 2. Модель структури зони передруйнування з мікротріщиною.

Використовуючи розв'язок (8) рівняння Вінера – Гопфа задачі, знаходимо залежність  $\delta u(r)$ :

$$\delta u(r) = \frac{2(1 + \nu_1)}{E_1} r \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{D_0(-1 - \lambda'_i) \mathcal{K}^+(-1 - \lambda'_i) J(\lambda'_i) \lambda}{D'_1(-1 - \lambda'_i) \mathcal{K}^+(-1) J(0) \lambda'_i (1 + \lambda'_i) (\lambda'_i - \lambda)} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left( \frac{r}{\ell} \right)^{\lambda'_i} \right] + \frac{D'_0(-1)}{D'_1(-1)} \right\}. \quad (12)$$

Умова максимуму розходження меж зони передруйнування  $\delta u(r)$  приводить до рівняння для розрахунку відстані  $r_m$ , на якій слід очікувати утворення мікротріщини:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{D_0(-1 - \lambda'_i) \mathcal{K}^+(-1 - \lambda'_i) J(\lambda'_i) \lambda}{D'_1(-1 - \lambda'_i) \mathcal{K}^+(-1) J(0) \lambda'_i (\lambda'_i - \lambda)} \left( \frac{r}{\ell} \right)^{\lambda'_i} \right] + \frac{D'_0(-1)}{D'_1(-1)} = 0. \quad (13)$$

Відповідно значення найбільшого розходження меж зони дорівнюватиме  $\delta u(r_m)$ . Прирівнявши максимальне розходження і критичне значення, яке відповідає цілковитому розриву міжчастинкових зв'язків у досліджуваній частині зони передруйнування, отримуємо рівняння  $\delta u(r_m) = \delta u_{cr}$ , з якого можна визначити навантаження, що відповідає моменту зародження мікротріщини. Подальше збільшення навантаження буде супроводжуватися зміною кута відхилення  $\alpha$  тріщини від площини межі поділу матеріалів і зростанням довжини мікротріщини. Положення кінців мікротріщини та її довжину можна визначити з рівнянь  $\delta u(r_{1(2)}) = \delta u_{cr}$ , де  $0 < r_1 \leq r_m \leq r_2 < \ell$ , і  $\ell_{micro} = r_2 - r_1$  (рис. 2). При цьому слід мати на увазі, що наявна мікротріщина буде істотно впливати на напружено-деформований стан в області зони передруйнування. Тому розглянута вище модель зони передруйнування і знайдений розв'язок задачі про її параметри є коректними лише за виконання умови  $\ell_{micro} \ll \ell$ .

Відмітимо, що в (12), (13) підсумовування передбачається за всіма коренями рівняння (11), які задовольняють умову  $\text{Re } \lambda'_i > -1$ . Проте в дійсності виявляється, що внаслідок підвищеного рівня напружень в околі вершини тріщини справджується нерівність  $r_m \ll \ell$ , тому достатня точність визначення  $r_m$  досягається при врахуванні всього лише 4÷6 перших коренів, і тільки на відстанях одного порядку з  $\ell$  у сумі ряду (12) потрібно брати набагато більше доданків.

**4. Аналіз отриманих результатів.** Як впливає з попереднього розгляду, обчислення параметрів маломасштабної зони передруйнування вимагає знання кута відхилення тріщини від початкового напрямку і коефіцієнта  $C$

в умові (3) при заданій величині стискального навантаження. У зв'язку з цим будемо вважати, що виконуються такі припущення. Зовнішнє навантаження будемо задавати безрозмірним параметром  $\sigma = |C|L^\lambda/\sigma_0$ . Кут відхилення тріщини  $\alpha$  залежить як від величини стискального навантаження, так і від пружних характеристик з'єднаних матеріалів. Оскільки відсутні достовірні відомості про таку залежність, то приймемо за перше наближення лінійне співвідношення  $\alpha(\sigma, e) = 180^\circ + \eta(e)\sigma$ , де  $\eta(e)$  – деяка невідома функція біматеріального параметра  $e$ , означеного у блоці формул після (3).

Результати обчислень параметрів зони передруйнування і мікротріщини: кута  $\alpha$ , відносних довжин зони передруйнування  $x = \ell/L$  і мікротріщини  $x_{\text{micro}} = (r_2 - r_1)/L$ , відстані  $r_m/L$  до положення максимального розходження меж зони і нормоване значення цього розходження  $\delta\tilde{u}_m = \frac{\delta u(r_m)E_1}{2(1 + \nu_1)L\sigma_0}$ , положення вершин мікротріщини  $r_1/L$ ,  $r_2/L$ , наведені у табл. 1 і на рис. 3 для таких значень характеристик з'єднаних матеріалів:

$$E_1/E_2 = 0.5, \quad \nu_1 = \nu_2 = 0.3, \quad \mu = -0.5, \quad \eta = 400,$$

нормоване значення критичного розходження  $\delta\tilde{u}_{\text{cr}} = 8 \cdot 10^{-5}$ .

Таблиця 1. Параметри зони передруйнування і мікротріщини.

$\sigma$	$\alpha, ^\circ$	$x$	$r_m/L$	$\delta\tilde{u}_m$	$r_1/L$	$r_2/L$	$x_{\text{micro}}$
0.001	180.2	$2.42 \cdot 10^{-8}$	$2.07 \cdot 10^{-9}$	$6.63 \cdot 10^{-9}$	Мікротріщина не утворюється		
0.002	180.4	$4.19 \cdot 10^{-7}$	$3.59 \cdot 10^{-8}$	$1.15 \cdot 10^{-7}$			
0.003	180.6	$2.22 \cdot 10^{-6}$	$1.90 \cdot 10^{-7}$	$6.07 \cdot 10^{-7}$			
0.004	180.8	$7.22 \cdot 10^{-6}$	$6.19 \cdot 10^{-7}$	$1.98 \cdot 10^{-6}$			
0.005	181.0	$1.80 \cdot 10^{-5}$	$1.55 \cdot 10^{-6}$	$4.93 \cdot 10^{-6}$			
0.006	181.2	$3.81 \cdot 10^{-5}$	$3.26 \cdot 10^{-6}$	$1.04 \cdot 10^{-5}$			
0.007	181.4	$7.16 \cdot 10^{-5}$	$6.13 \cdot 10^{-6}$	$1.96 \cdot 10^{-5}$			
0.008	181.6	$1.24 \cdot 10^{-4}$	$1.06 \cdot 10^{-5}$	$3.38 \cdot 10^{-5}$			
0.009	181.8	$2.00 \cdot 10^{-4}$	$1.72 \cdot 10^{-5}$	$5.47 \cdot 10^{-5}$			
0.010	182.0	$3.08 \cdot 10^{-4}$	$2.64 \cdot 10^{-5}$	$8.42 \cdot 10^{-5}$	$1.28 \cdot 10^{-5}$	$4.81 \cdot 10^{-5}$	$3.54 \cdot 10^{-5}$
0.011	182.2	$4.55 \cdot 10^{-4}$	$3.90 \cdot 10^{-5}$	$1.24 \cdot 10^{-4}$	$3.09 \cdot 10^{-6}$	$1.67 \cdot 10^{-4}$	$1.64 \cdot 10^{-4}$
0.012	182.4	$6.50 \cdot 10^{-4}$	$5.56 \cdot 10^{-5}$	$1.77 \cdot 10^{-4}$	$1.36 \cdot 10^{-6}$	$3.25 \cdot 10^{-4}$	$3.23 \cdot 10^{-4}$
0.013	182.6	$9.02 \cdot 10^{-4}$	$7.71 \cdot 10^{-5}$	$2.46 \cdot 10^{-4}$	$7.14 \cdot 10^{-7}$	$5.37 \cdot 10^{-4}$	$5.36 \cdot 10^{-4}$
0.014	182.8	$1.22 \cdot 10^{-3}$	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$3.33 \cdot 10^{-4}$	$4.13 \cdot 10^{-7}$	$8.13 \cdot 10^{-4}$	$8.13 \cdot 10^{-4}$
0.015	183.0	$1.62 \cdot 10^{-3}$	$1.38 \cdot 10^{-4}$	$4.41 \cdot 10^{-4}$	$2.56 \cdot 10^{-7}$	$1.16 \cdot 10^{-3}$	$1.17 \cdot 10^{-3}$

Розрахунки підтверджують попередній висновок про нелінійне зростання довжини зони передруйнування при збільшенні навантаження, отриманий на основі аналізу формули (9). Пропорційно до довжини зони передруйнування збільшуються відстань від вершини початкової тріщини до точки максимального розходження берегів зони  $r_m/\ell \approx \text{const}$  і величина цього розходження  $\delta_m/\ell \approx \text{const}$ .



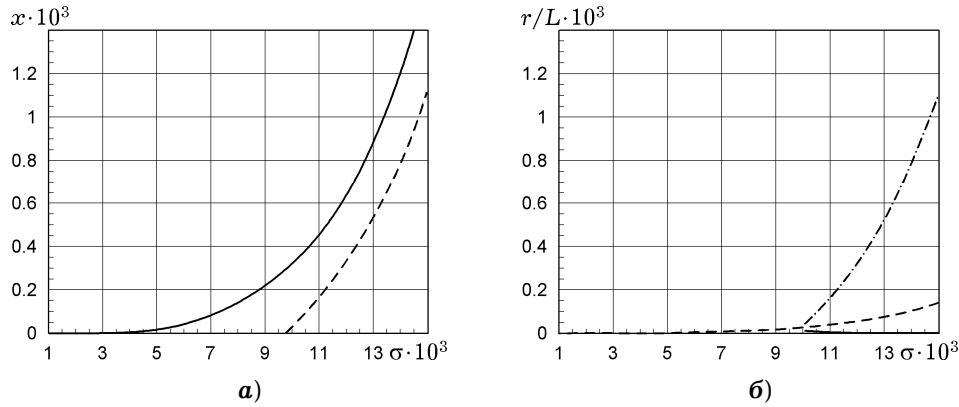


Рис. 3. Залежність від безрозмірного параметра навантаження  $\sigma$ : **а)** – відносних довжин зони передруйнування  $x = \ell/L$  (суцільна лінія) і мікротріщини  $x_{\text{micro}}$  (штрихова лінія); **б)** – відносних відстаней  $r_m/L$  (штрихова лінія),  $r_1/L$  (суцільна лінія),  $r_2/L$  (штрихпунктирна лінія) для  $E_1/E_2 = 0.5$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ ,  $\mu = -0.5$ ;  $\eta = 400$ .

Після утворення мікротріщини її довжина  $\ell_{\text{micro}}$  зі збільшенням навантаження зростає швидше, ніж довжина зони передруйнування (рис. 3а), досягаючи значення більше половини довжини зони при розглянутому максимальному навантаженні. При цьому ближній кінець мікротріщини істотно зближується з вершиною початкової тріщини ( $r_1 \rightarrow 0$ , рис. 3б), і подальші розрахунки стають некоректними через необхідність урахування впливу мікротріщини на напружено-деформований стан в околі вершини і її можливого злиття з початковою тріщиною. Відстань  $r_2$  від вершини початкової тріщини до віддаленого кінця мікротріщини зі збільшенням навантаження зростає швидше, ніж  $r_m$  і  $\ell$  (рис. 3б), і при досить високих навантаженнях визначає довжину мікротріщин ( $r_2 \approx \ell_{\text{micro}}$ ).

Згідно з результатами, наведеними у табл. 1 і на рис. 3б, порівняно невелике збільшення навантаження супроводжується швидким зближенням мікротріщини з вершиною початкової тріщини, що призводить до розкриття початкової тріщини, подальшого поширення шляхом злиття з мікротріщиною і можливого руйнування кусково-однорідного тіла шляхом його поділу по межі поділу матеріалів. Це припущення дозволяє оцінити граничне навантаження, при якому відбувається зрушення тріщини, за значенням критичного навантаження  $\sigma_{\text{cr}}$ , що визначається з умови  $\delta u(r_m) = \delta u_{\text{cr}}$ , при якому відбувається зародження мікротріщини. Рис. 4а демонструє, як безрозмірне критичне навантаження залежить від відношення пружних параметрів з'єднаних матеріалів. Виявляється, значення  $\sigma_{\text{cr}}$ , так само, як і відповідний кут відхилення тріщини від початкового напрямку  $\Delta\alpha_{\text{cr}} = \alpha(\sigma_{\text{cr}}, e) - 180^\circ$  (рис. 4б), зменшуються при зближенні модулів Юнга з'єднаних матеріалів ( $E_1/E_2 \rightarrow 1$ ). Проте ці висновки не є остаточними, тому що через невідому залежність  $\eta(e)$  під час розрахунків параметр  $\eta$  покладался сталим. Як бачимо на рис. 4, більшим значенням  $\eta$  ( $\eta = 400$ , суцільні криві) відповідають менші значення критичного навантаження  $\sigma_{\text{cr}}$  та більші значення кута відхилення  $\Delta\alpha_{\text{cr}}$  тріщини від початкового напрямку.

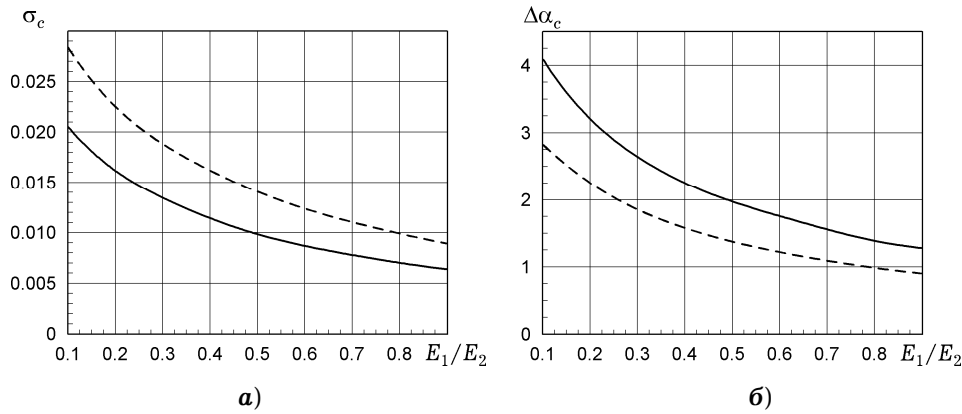


Рис. 4. Залежність від відношення модулів Юнга  $E_1 / E_2$ : **а)** – критичного навантаження  $\sigma_{cr}$ ; **б)** – критичного кута відхилення тріщини  $\Delta\alpha_{cr}$  для  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ ,  $\mu = -0.5$  ( $\eta = 200$  – пунктирні лінії,  $\eta = 400$  – суцільні лінії).

У процесі навантаження тіла з подальшим вигином тріщини і утворенням зони передруйнування відбувається зміна показника сингулярності напружень. Результати розрахунків коренів рівнянь (4) і (11) показують, що наявність зони передруйнування призводить до посилення концентрації напружень: найменший на інтервалі  $(-1, 0)$  корінь  $\lambda'_1$  рівняння (11) виявляється меншим, ніж аналогічний корінь  $\lambda_1 \equiv \lambda$  рівняння (4) (рис. 5).

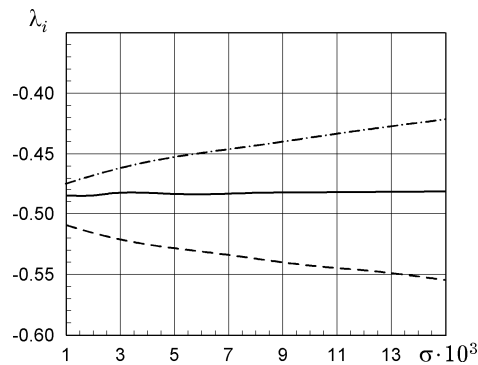


Рис. 5. Залежність від навантаження  $\sigma$  показників сингулярності напружень в околі вершини вигнутої тріщини при відсутності зони передруйнування ( $\lambda_1$  – суцільна лінія) та її наявності ( $\lambda'_1$  – штрихова лінія;  $\lambda'_2$  – штрихпунктирна лінія).

Якщо показник сингулярності  $\lambda_1$  незначно зростає при збільшенні навантаження, залишаючись близьким за величиною до показника сингулярності

$$\lambda_c = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arccotg} \frac{(1 + e\alpha_2) - (e + \alpha_1)}{(1 + e\alpha_2) + (e + \alpha_1)}$$

в кінці тріщини на плоскій межі поділу в рамках моделі Comninou з фрикційним контактом берегів [10], то показник  $\lambda'_1$ , навпаки, знижується, що призводить до подальшого посилення концентрації напружень (рис. 5). Крім того, у виразі (10) для компонент тензора напружень при утворенні зони передруйнування появляється ще один істотний сингулярний доданок з по-

казником сингулярності  $\lambda'_2 > \lambda_1$ , що призводить до додаткового посилення концентрації напружень. Відмітимо, що рівняння (4) і (11) мають також досить близькі до нуля від'ємні корені  $\lambda_2$  і  $\lambda'_3$  відповідно, які не впливають істотно на напружено-деформований стан в околі вершини тріщини і параметри зони передруйнування.

Утворення зони передруйнування в околі концентратора напружень зазвичай супроводжується розвантаженням матеріалу в цій області. Проте, як встановлено вище, в цій моделі спостерігається зворотний процес – зростання рівня напружень, наслідком якого є утворення і розвиток мікротріщини. Але, крім утворення мікротріщини, можливим є також механізм зниження рівня концентрації напружень, який полягає в утворенні безпосередньо біля вершини початкової тріщини зони деструкції матеріалу (зони процесу руйнування). На відміну від описаної вище моделі зони передруйнування, в зоні деструкції високого рівня досягають не тільки деформації відриву, але і деформації зсуву. Зокрема, комплексна модель зони передруйнування, яка враховує наявність в ній маломасштабної зони деструкції, для міжфазної тріщини на плоскій межі поділу середовищ реалізована в роботах [6, 11]. Для дослідженої в цій роботі проблеми руйнування при стисканні розгляд задачі про утворення зони деструкції може бути актуальним для пояснення власне зрушення початково закритої тріщини.

**Висновки.** Запропоновано модель початкового етапу процесу руйнування кусково-однорідного тіла при стисканні вздовж плоскої межі поділу матеріалів, що містить міжфазну тріщину. В її основі лежить припущення про спільний вигин берегів тріщини в сторону менш жорсткого матеріалу, у поєднанні з їх фрикційним контактом і утворенням зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі в околі вершини тріщини. Моделюванням зони передруйнування лінією розриву нормального переміщення отримано розв'язок задачі про розрахунок параметрів зони, за яким встановлено співвідношення, які визначають довжину і розходження меж зони. За допомогою деформаційного критерію сформульовано умову зародження мікротріщини в зоні передруйнування, яке використано для визначення граничного навантаження, що відповідає моменту зародження мікротріщини, та для дослідження залежності її розмірів від навантаження. Запропоновано механізм зрушення початкової тріщини і подальшого руйнування тіла при стисканні, що передбачає злиття тріщини зі зростаючою мікротріщиною при збільшенні навантаження. У рамках дослідженої моделі виконано числовий розрахунок параметрів маломасштабної зони передруйнування і мікротріщини, аналіз яких привів до наступних висновків:

- Дія стискального навантаження уздовж плоскої межі поділу матеріалів кусково-однорідного тіла, що містить міжфазну тріщину, призводить до відхилення берегів тріщини в сторону менш жорсткого матеріалу на кут, який зростає зі збільшенням навантаження.
- Довжина зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі і розходження її меж нелінійно зростають зі збільшенням стискального навантаження. Відстань від вершини початкової тріщини до точки максимального розходження берегів зони і величина цього розходження майже прямо пропорційні до довжини зони передруйнування.
- Після досягнення критичного розходження берегів зони передруйнування відбувається утворення мікротріщини, довжина якої зі збільшенням навантаження зростає швидше, ніж довжина зони передруйнування. При цьому порівняно невелике збільшення навантаження супроводжується швидким зближенням мікротріщини з початковою тріщиною.
- Критичне навантаження, що відповідає моменту утворення мікротріщини, є тим більшим, чим сильніше відрізняються пружні характеристики з'єднаних матеріалів.

- Утворення зони передруйнування призводить до посилення концентрації напружень біля вершини тріщини, яке можна усунути деструкцією матеріалу в околі вершини тріщини.

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.  
Te same: *Gakhov F. D.* Boundary value problems. – Oxford etc.: Pergamon Press, 1966. – xix+564 p.
2. *Гузъ А. Н.* О построении основ механики разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (обзор) // Прикладная механика. – 2014. – **50**, № 1. – С. 5–88.  
Te same: *Guz' A. N.* Establishing the foundations of the mechanics of fracture of materials compressed along cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, No. 1. – P. 1–57. – <https://doi.org/10.1007/s10778-014-0609-y>.
3. *Дудик М. В., Решитник Ю. В., Феньків В. М.* Асимптотичний аналіз напружено-деформованого стану біля вершини міжфазної тріщини, що виходить із кутової точки ламаної межі розділу матеріалів // Вісн. Запоріз. нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2020. – № 1. – С. 27–37.  
– <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-04>.
4. *Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А.* О направлении развития тонкой пластической зоны в вершине трещины на границе раздела различных сред // Прикл. механика. – 2006. – **42**, № 2. – С. 14–23.  
Te same: *Kaminsky A. A., Dudik M. V., Kipnis L. A.* On the direction of development of a thin fracture process zone at the tip of an interfacial crack between dissimilar media // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, No. 2. – P. 136–144.  
– <https://doi.org/10.1007/s10778-006-0068-1>.
5. *Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А.* О начальном повороте трещины, расположенной на границе раздела двух упругих сред // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 10. – С. 28–41.  
Te same: *Kaminsky A. A., Dudik M. V., Kipnis L. A.* Initial kinking of an interface crack between two elastic media // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, No. 10. – P. 1090–1099. – <https://doi.org/10.1007/s10778-007-0109-4>.
6. *Каминський А. О., Дудик М. В., Кіпніс Л. А.* Дослідження зони передруйнування біля вершини міжфазної тріщини у пружному тілі при зсуві в рамках комплексної моделі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 4. – С. 95–108.  
Te same: *Kamins'kyi A. O., Dudyk M. V., Kipnis L. A.* Investigation of the process zone near the tip of an interface crack in the elastic body in shear within the framework of the complex model // J. Math. Sci. – 2017. – **220**, No. 2. – P. 117–132. – <https://doi.org/10.1007/s10958-016-3171-9>.
7. *Нобл Б.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.  
Te same: *Noble B.* Methods based on the Wiener – Hopf technique for the solution of partial differential equations. – New York: Chelsea, 1958. – 246 p.
8. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1968. – 402 с.  
Te same: *Uflyand Ya. S.* Survey of articles on the application of integral transforms in the theory of elasticity. – North Carolina State Univ., 1965. – 402 p.
9. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 640 с.  
Te same: *Cherepanov G. P.* Mechanics of brittle fracture. – New York: McGraw-Hill, 1979. – 939 p.
10. *Comninou M.* Interface crack with friction in the contact zone // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – **44**, No. 4. – P. 780–781. – <https://doi.org/10.1115/1.3424179>.
11. *Dudyk M. V., Kipnis L. A.* Model of the structure of the near tip area of interface crack in a piece-homogeneous elastic-plastic body // Strength, Fracture and Complexity. – 2018. – **11**, No. 1. – P. 31–50. – DOI: 10.3233/SFC-180211.
12. *Guz A. N., Bogdanov V. L., Nazarenko V. M.* Fracture of materials under compression along cracks. – Ser. Advanced Structured Materials. Vol. 138. – Springer, 2020. –xvi+490 p. – DOI: 10.1007/978-3-030-51814-1.
13. *Nayfeh A. H.* Perturbation methods. – New York: J. Wiley & Sons, 1973. – xii+425 p.
14. *Rice J. R., Sih G. C.* Plane problems of cracks in dissimilar media // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1965. – **32**, No. 2. – P. 418–423. – <https://doi.org/10.1115/1.3625816>.

**INVESTIGATION OF THE INITIAL STAGE OF FRACTURE OF A PIECE-HOMOGENEOUS BODY WITH INTERFACE CRACK UNDER COMPRESSION ALONG THE INTERFACE**

*The initial stage of the fracture process of a piecewise homogeneous body under compression along a flat interface of materials, containing an interface crack, is considered. An analytical calculation of parameters of a small-scale pre-fracture zone in the joint material near the tips is performed. The value of zone boundaries deviation is found. It is used later in the deformation criterion for the formation of a secondary microcrack in it. The mechanism of a crack starting is proposed, which provides its coalescence with a growing microcrack under an increasing load.*

**Key words:** *interfacial crack, compression along interface, faces contact, pre-fracture zone, secondary microcrack, crack starting mechanism.*

<sup>1</sup> Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ,  
<sup>2</sup> Уманськ. держ. пед. ун-т ім. П. Тичини, Умань

Одержано  
01.10.20