

КОГЕЗИЙНА МОДЕЛЬ ЗОНИ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ БІЛЯ ВЕРШИНИ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ

Дудик М. В., Решітник Ю. В.

ВСТУП

Поширення тріщини по межі поділу з'єднаних матеріалів є однією з найімовірніших причин руйнування композитів. Цьому процесу передують утворення біля вершини міжфазної тріщини зони передруйнування, в якій матеріал внаслідок підвищеного рівня напружень виходить за межу пружності.

На початковому етапі розвитку зона передруйнування може бути ефективно описана в рамках моделі Леонова – Панасюка – Дагдейла¹, що подає зону лінією розриву переміщення, на якій задана деяка умова переходу матеріалу в передруйнівний стан. Зокрема, у випадку крихкого матеріалу в зоні передруйнування переважають відривні деформації, тому вона моделюється лінією розриву нормального переміщення, на якій нормальне напруження дорівнює опору відриву матеріалу². Для пластичного матеріалу зону передруйнування моделюють лінією, на якій зазнає стрибка дотичне переміщення, а дотичне напруження дорівнює межі текучості матеріалу. Такі моделі більш прийнятні для опису бічних зон у одному із з'єднаних матеріалів^{3,4,5,6,7}, оскільки їх орієнтація при використанні різних

¹ Panasyuk V. V., Savruk M. P. Model for plasticity bands in elastoplastic failure mechanics. *Mater. Sci.* 1992. Vol. 28, No. 1. P. 41–57.

² Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев : Наук. думка, 1980. 246 с.

³ Kaminsky A. A., Dudik M. V., Kipnis L. A. On the direction of development of a thin prefracture process zone at the tip of an interfacial crack between dissimilar media. *Int. Appl. Mech.* 2006. Vol. 42, No. 2. P. 136-144.

⁴ Kaminsky A. A., Dudik M. V., Kipnis L. A. Initial kinking of an interfacial crack between two elastic media. *Int. Appl. Mech.* 2007. Vol. 43. No. 10. P.1090-1099.

⁵ Kaminsky A. A., Dudik M. V., Kipnis L. A. Initial kinking of an interface crack between two elastic media under tension and shear. *Int. Appl. Mech.* 2009. Vol. 45, No. 6. P. 635-642.

⁶ Dudyk M. V., Dikhtyarenko Yu. V. Investigation of the initial stage of kinking of an interface crack at an angular point of the interface of two media. *Materials Science.* 2012. Vol. 47. No. 5. P. 627-635.

⁷ Діхтяренко Ю. В. Моделювання початкової пластичної смуги у кутовій

критеріїв вибору напрямку поширення виявляється близькою до напрямків максимуму відривних нормальних або дотичних напружень, в яких переважають відповідні деформації. Проте у випадку міжфазної зони передруйнування немає притаманної бічним зонам варіативності орієнтації, і оскільки через відсутність симетрії в полі напружень біля вершини тріщини зазвичай наявні I і II моди, це вимагає брати до уваги у побудові її моделі стрибки як відривних, так і зсувних деформацій. Такі ефекти враховані у когезійній моделі міжфазної тріщини, що стрімко розвивалась впродовж останніх двох десятиліть^{8,9,10,11,12,13,14}, і в деяких інших моделях^{15,16}.

В когезійній моделі вводиться певна потенціальна функція, яка пов'язує напруження зі стрибками переміщення. Складність визначальних рівнянь у когезійній зоні призвела до того, що їх розв'язання здійснюється головним чином числовими методами.

В даній роботі приведено аналітичне розв'язання задачі про розрахунок параметрів міжфазної зони передруйнування в рамках когезійної моделі. В основу розв'язання покладено модель Леонова – Панасюка – Дагдейла з використанням для напружень у зоні критерію міцності Мізеса – Хілла. У першій частині роботи розглядається модель когезійної зони у з'єднувальному матеріалі на плоскій межі розділу матеріалів. За допомогою інтегрального

точці межі розділу середовищ з міжфазною тріщиною. *Вісник Одес. нац. ун-ту. Матем. і мех.* 2011. Т. 16, вип. 16. С. 76-86.

⁸ Tvergaard V., Hutchinson J. H. On the toughness of ductile adhesive joints. *J. Mech. Phys. Solids.* 1996. V. 44, No. 5. P. 789-800.

⁹ Kishimoto K., Omiya M., Yang W. Fracture mechanics of bonding interface: a cohesive zone. *Sensors and Actuators.* 2002. V. A 99. P. 198-206.

¹⁰ Tvergaard V. Influence of plasticity on interface toughness in a layered solid with residual stresses. *Int. Journal of Solids and Structures.* 2003. V. 40. P. 5769-5779.

¹¹ Tvergaard V. Cohesive zone representations of failure between elastic or rigid solids and ductile solids. *Engineering Fracture Mechanics.* 2003. V. 70. P. 1859-1868.

¹² Jin Z.-H., Sun C. T. Cohesive zone modeling of interface fracture in elastic bi-materials. *Engineering Fracture Mechanics.* 2005. V. 72. P. 1805-1817.

¹³ Sun C. T., Jin Z.-H. Modeling of composite fracture using cohesive zone and bringing models. *Composites Science and Technology.* 2006. V. 66. P. 1297-1302.

¹⁴ Lee M. Y., Cho T. M., Kim W. S., Lee B. C., Lee J. J. Determination of cohesive parameters for a mixed-mode cohesive zone model. *Int. Journal of Adhesion & Adhesives.* 2010. V. 30. P. 322-328.

¹⁵ Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н. Моделирование трещиностойкости композиционных материалов. *Вычислительная механика сплошных сред.* 2009. Т. 2, No. 2. С. 22-39.

¹⁶ Волошко О. І., Лобода В. В. Числове дослідження зон передруйнування тріщини в адгезійному прошарку між двома ізотропними матеріалами. *Машинознавство.* 2009. No.12. С. 9-16.

перетворення Мелліна задача зведена до матричного рівняння Вінера – Гопфа, яке розв’язано за допомогою формул Храпкова. У другій частині досліджується когезійна модель зони передруйнування біля вершини тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі розділу матеріалів. Задача зведена до векторного рівняння Вінера – Гопфа, аналітичний розв’язок якого знайдено за допомогою методу послідовних наближень. З отриманого розв’язку виведено рівняння для визначення довжини зони передруйнування і фазового кута напруження в зоні та вираз для розкриття тріщини в її вершині. Виконано числове дослідження параметрів зони передруйнування.

1. Когезійна зона передруйнування у з’єднувальному матеріалі біля вершини міжфазної тріщини на плоскій межі розділу

Постановка задачі. В умовах плоскої деформації розглядається задача про визначення параметрів маломасштабної зони передруйнування у з’єднувальному матеріалі біля вершини міжфазної тріщини, розташованої на плоскій межі розділу двох пружних однорідних ізотропних матеріалів з модулями Юнга E_1, E_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2 . Враховуючи притаманну когезійним моделям анізотропію характеристик з’єднувального матеріалу у зоні та нехтуючи товщиною з’єднувального прошарку, моделюватимемо зону передруйнування лінією розриву переміщення, на якій нормальне і дотичне напруження задовольняють критерій міцності Мізеса – Хілла

$$(\sigma_\theta / \sigma_0)^2 + (\tau_{r\theta} / \tau_0)^2 = 1, \quad (1.1)$$

де σ_0, τ_0 – опори відриву та зсуву з’єднувального матеріалу, що визначаються експериментально як середні значення нормального і дотичного напружень у зоні при відповідній моді навантаження однорідного матеріалу.

На початковому етапі розвитку довжина зони передруйнування l значно менша від довжини тріщини L та всіх інших розмірів тіла, і оскільки напружено-деформований стан досліджується лише в околі зони, то вихідна задача зводиться до задачі про лінію розриву скінченної довжини, що поширюється з вершини півнескінченної міжфазної тріщини по межі розділу двох пружних пів-площин (рис. 1.1).

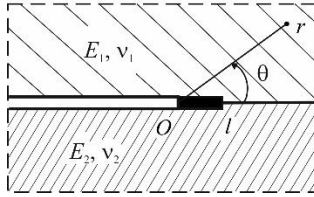


Рис. 1.1. Розрахункова схема задачі

На нескінченності формулюється умова можливості зшивання на відстанях $l \ll r \ll L$ шуканого розв'язку з розв'язком аналогічної задачі теорії пружності без лінії розриву^{17,18,19,20,21} і характеризується просторовими осциляціями переміщень і напружень при наближенні до вершини тріщини. Враховуючи умову (1.1) та вважаючи береги тріщини вільними від навантажень, приходимо до статичної крайової задачі теорії пружності з граничними умовами:

$$\theta = -\pi \cup \pi: \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0; \quad (1.2)$$

$$\theta = 0: \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0; \quad (1.3)$$

$$\theta = 0, \quad r < l: \quad \sigma_\theta = \sigma_0 \cos \psi(r), \quad \tau_{r\theta} = \tau_0 \sin \psi(r);$$

$$\theta = 0, \quad r > l: \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0; \quad (1.4)$$

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow \infty: \quad \sigma_\theta \sim C_1 r^{-1/2+i\omega} + \bar{C}_1 r^{-1/2-i\omega}, \quad \tau_{r\theta} \sim C_2 r^{-1/2+i\omega} + \bar{C}_2 r^{-1/2-i\omega}, \quad (1.5)$$

де $\psi(r)$ – фазовий кут напруження в зоні переддруйнування, який в подальшому через малість її розмірів і для спрощення умови задачі та її розв'язання вважатимемо сталим і рівним його середньому значенню Ψ ;

$$C_1 = e'KL^{-i\omega}, \quad C_2 = -iC_1, \quad K = K_1 + iK_2,$$

риска над C_1 і C_2 означає комплексне спряження; K – комплексний КІН;

¹⁷ England A. H. A crack between dissimilar media. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1965. Vol. 32, No. 2. P. 400-402.

¹⁸ Erdogan F. Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1965. Vol. 32, No. 2. P. 403-410.

¹⁹ Erdogan F. Stress distribution in non-homogeneous elastic plane with cracks. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1963. Vol. 30, No. 1. P. 232-236.

²⁰ Rice J. R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1988. Vol. 55, No. 3. P. 98-103.

²¹ Rice J. R., Sih G. C. Plane problems of cracks in dissimilar media. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1965. Vol. 32, No. 2. P. 418-423.

$$e' = \frac{1}{\sqrt{8\pi \cdot (1 - \beta^2)}}, \quad \omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 - \beta}{1 + \beta}, \quad \beta = \frac{(1 + e\kappa_2) - (e + \kappa_1)}{(1 + e\kappa_2) + (e + \kappa_1)};$$

$$e = \frac{E_1}{E_2} \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1}, \quad \kappa_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)}.$$

Передбачається виконання умови $\cos \psi \geq 0$, необхідної для відривного характеру нормального напруження в зоні передруйнування.

В кінці зони передруйнування реалізується асимптотика, яка відповідає сингулярній частині розв'язку однорідної крайової задачі про півнескінченну лінію розриву переміщень на прямолінійній межі розділу двох різних пружних матеріалів, аналогічну міжфазній тріщині. Зокрема, для напружень має місце асимптотика²⁰:

$$r \rightarrow l + 0, \quad \sigma_0(r, 0) + i\tau_{r0}(r, 0) = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} (r - l)^{-1/2+i\omega}, \quad (1.6)$$

де $k = k_1 + ik_2$ – локальний КІН в кінці зони.

Розв'язання задачі. Розв'язок сформульованої крайової задачі будемо шукати у вигляді суми наступних двох задач. Перша відрізняється від неї тим, що замість першої пари умов в (1.4) використовуємо умови

$$\theta = 0, \quad r < l: \quad \sigma_0 = \sigma_0 \cos \psi - C_1 r^{-1/2+i\omega} - \bar{C}_1 r^{-1/2-i\omega},$$

$$\tau_{r0} = \tau_0 \sin \psi - C_2 r^{-1/2+i\omega} - \bar{C}_2 r^{-1/2-i\omega}, \quad (1.7)$$

а на нескінченності напруження спадають як $o(1/r)$. Друга задача – аналогічна задача без зони передруйнування, розв'язок якої відомий^{17,18,19,20,21}, тому завдання полягає у розв'язанні першої задачі.

Для побудови розв'язку застосуємо інтегральне перетворення Мелліна до рівнянь рівноваги, умови сумісності деформацій, закону Гука і граничних умов (1.2-1.3). Врахувавши умови (1.7) і другу пару умов (1.4), прийдемо до векторного рівняння Вінера – Гопфа першої задачі у смугі $-\varepsilon_1 < Re p < \varepsilon_2$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – достатньо малі додатні числа), що містить уявну вісь:

$$\Phi^+(p) + \mathbf{F}(p) = -A \operatorname{tg} p\pi G(p) \mathbf{Q}(p) \Phi^-(p); \quad (1.8)$$

$$\Phi^+(p) = \begin{pmatrix} \Phi_1^+(p) \\ \Phi_2^+(p) \end{pmatrix} = \int_1^\infty \begin{pmatrix} \sigma_0(\rho l, 0) \\ \tau_{r0}(\rho l, 0) \end{pmatrix} \rho^p d\rho,$$

$$\Phi^-(p) = \begin{pmatrix} \Phi_1^-(p) \\ \Phi_2^-(p) \end{pmatrix} = \frac{E_1}{4(1 - \nu_1^2)} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_r \end{pmatrix}_{r=\rho l} \rho^p d\rho,$$

$$\mathbf{F}(p) = \begin{pmatrix} F_1(p) \\ F_2(p) \end{pmatrix}, \quad F_1(p) = \frac{\sigma_0 \cos \psi}{p+1} - \frac{C_1 I^{-1/2+i\omega}}{p+1/2+i\omega} - \frac{\bar{C}_1 I^{-1/2-i\omega}}{p+1/2-i\omega},$$

$$F_2(p) = \frac{\tau_0 \sin \psi}{p+1} - \frac{C_2 I^{-1/2+i\omega}}{p+1/2+i\omega} - \frac{\bar{C}_2 I^{-1/2-i\omega}}{p+1/2-i\omega},$$

$$G(p) = \frac{4(e + \kappa_1)(1 + e\kappa_2) \cos^2 p\pi}{(e + \kappa_1)^2 + (1 + e\kappa_2)^2 + 2(e + \kappa_1)(1 + e\kappa_2) \cos 2p\pi},$$

$$A = \frac{(1 + \kappa_1)(1 + \kappa_1 + e(1 + \kappa_2))}{2(e + \kappa_1)(1 + e\kappa_2)}, \quad \mathbf{Q}(p) = \mathbf{I} + g(p)\mathbf{J}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

де \mathbf{I} – одинична матриця, $g(p) = i\beta \operatorname{tg} p\pi$, а матриця \mathbf{J} володіє необхідною для факторизації матриці $\mathbf{Q}(p)$ властивістю $\mathbf{J}^2 = \Delta(p)\mathbf{I}$ ($\Delta(p) \equiv 1$)²².

Матричний коефіцієнт рівняння (1.8) відноситься до типу матриць Храпкова – Чеботарьова^{23,24,25} і факторизується за формулами:

$$\mathbf{Q}(p) = \mathbf{Q}^+(p)\mathbf{Q}^-(p) \quad (\operatorname{Re} p = 0),$$

$$\mathbf{Q}^\pm(p) = r^\pm(p) \left[\operatorname{ch} \theta^\pm(p)\mathbf{I} + \operatorname{sh} \theta^\pm(p)\mathbf{J} \right],$$

де матриці $\mathbf{Q}^+(p)$ і $\mathbf{Q}^-(p)$ аналітичні у півплощинах $\operatorname{Re} p < 0$ і $\operatorname{Re} p > 0$ відповідно. Функції $r^\pm(p)$ і $\theta^\pm(p)$ задовольняють скалярним функціональним рівнянням

$$r^\pm(p)r^\mp(p) = \sqrt{1 - g^2(p)}, \quad \theta^+(p) + \theta^-(p) = \operatorname{arth} g(p) \quad (\operatorname{Re} p = 0),$$

які мають розв'язки²⁵:

$$r^\pm(p) = (1 - \beta^2)^{1/4} \exp \left[\mp \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln H_1(t)}{it - p} dt \right], \quad H_1(t) = \frac{1 - \beta^2 \operatorname{th}^2 \pi t}{1 - \beta^2},$$

$$\theta^\pm(p) = \frac{\pm p}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_2(t)}{t + ip} dt, \quad H_2(t) = \frac{\operatorname{arth}(\beta \cdot \operatorname{th} \pi t)}{t}.$$

²² Khrapkov A. A. Wiener-Hopf method in mixed elasticity theory problems. SPb.: B.E. Vedenev VNIIG Publishing House, 2001. 144 p.

²³ Khrapkov A. A. Wiener-Hopf method in mixed elasticity theory problems. SPb.: B.E. Vedenev VNIIG Publishing House, 2001. 144 p.

²⁴ Khrapkov A. A. Certain cases of the elastic equilibrium of an infinite wedge with a nonsymmetric notch at the vertex, subjected to concentrated forces. *J. Appl. Math. Mech.* 1971. Vol. 35. P. 625–637.

²⁵ Khrapkov A. A. Closed form solutions of the problems on the elastic equilibrium of an infinite wedge with a nonsymmetric notch at the apex. *J. Appl. Math. Mech.* 1971. Vol. 35. P. 1009–1016.

Скалярні коефіцієнти рівняння (1.8) факторизуються за формулами^{25, 26}.

$$G(p) = \frac{G^+(p)}{G^-(p)} \quad (\operatorname{Re} p = 0), \quad \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p), & \operatorname{Re} p < 0, \\ G^-(p), & \operatorname{Re} p > 0; \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} p\pi = \frac{p}{K^+(p)K^-(p)}, \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(0, 5 \mp p)}$$

($\Gamma(z)$ – гамма-функція Ейлера). Тоді рівняння (1.8) набуває вигляду:

$$\frac{K^+(p)}{pG^+(p)} \tilde{\mathbf{Q}}^+(p)(\mathbf{\Phi}^+(p) + \mathbf{F}(p)) = -\frac{A\mathbf{Q}^-(p)\mathbf{\Phi}^-(p)}{K^-(p)G^-(p)} \quad (\operatorname{Re} p = 0), \quad (1.9)$$

де $\tilde{\mathbf{Q}}^+(p)$ – обернена до $\mathbf{Q}^+(p)$ матриця:

$$\tilde{\mathbf{Q}}^+(p) = [\mathbf{Q}^+(p)]^{-1} = [r^+(p)]^{-1} [\operatorname{ch} \theta^+(p)\mathbf{I} - \operatorname{sh} \theta^+(p)\mathbf{J}].$$

Розщепивши другий доданок у (1.9) за формулою

$$\frac{K^+(p)}{pG^+(p)} \tilde{\mathbf{Q}}^+(p)\mathbf{F}(p) = \tilde{\mathbf{F}}^+(p) - \tilde{\mathbf{F}}^-(p),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}^+(p) &= \frac{1}{p+1} \left[\frac{K^+(p)\tilde{\mathbf{Q}}^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-1)\tilde{\mathbf{Q}}^+(-1)}{G^+(-1)} \right] \begin{pmatrix} \sigma_0 \cos \psi \\ \tau_0 \sin \psi \end{pmatrix} - \\ &- \frac{l^{-1/2+i\omega}}{p+1/2+i\omega} \left[\frac{K^+(p)\tilde{\mathbf{Q}}^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-1/2-i\omega)\tilde{\mathbf{Q}}^+(-1/2-i\omega)}{(1/2+i\omega)G^+(-1/2-i\omega)} \right] \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} - \\ &- \frac{l^{-1/2-i\omega}}{p+1/2-i\omega} \left[\frac{K^+(p)\tilde{\mathbf{Q}}^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-1/2-i\omega)\tilde{\mathbf{Q}}^+(-1/2-i\omega)}{(1/2-i\omega)G^+(-1/2-i\omega)} \right] \begin{pmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}^-(p) &= \frac{1}{p+1} \frac{K^+(-1)\tilde{\mathbf{Q}}^+(-1)}{G^+(-1)} \begin{pmatrix} \sigma_0 \cos \psi \\ \tau_0 \sin \psi \end{pmatrix} - \\ &- \frac{l^{-1/2+i\omega}}{p+1/2+i\omega} \frac{K^+(-1/2-i\omega)\tilde{\mathbf{Q}}^+(-1/2-i\omega)}{(1/2+i\omega)G^+(-1/2-i\omega)} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} - \\ &- \frac{l^{-1/2-i\omega}}{p+1/2-i\omega} \frac{K^+(-1/2-i\omega)\tilde{\mathbf{Q}}^+(-1/2-i\omega)}{(1/2-i\omega)G^+(-1/2-i\omega)} \begin{pmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

отримаємо замість (1.9) векторне рівняння

$$\begin{aligned} &\frac{K^+(p)}{pG^+(p)} \tilde{\mathbf{Q}}^+(p)\mathbf{\Phi}^+(p) + \tilde{\mathbf{F}}^+(p) = \\ &= -\frac{A}{K^-(p)G^-(p)} \mathbf{Q}^-(p)\mathbf{\Phi}^-(p) + \tilde{\mathbf{F}}^-(p) \quad (\operatorname{Re} p = 0). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Ліва частина рівняння (1.10) аналітична у півплощині $\operatorname{Re} p < 0$, а права – у півплощині $\operatorname{Re} p > 0$. Тоді, згідно з принципом

²⁶Noble B. Methods Based on the Wiener – Hopf Technique for the solution of partial differential equations, 2nd ed. New York: Chelsea Pub. Co., 1988. 246 p.

аналітичного продовження, повинна існувати єдина векторна функція, аналітична у всій комплексній площині, яка дорівнює лівій і правій частині цього рівняння у відповідних півплощинах.

Враховуючи особливості поведінки напружень і переміщень біля вершини міжфазної зони передруйнування, за теоремою абелевого типу знаходимо:

$$\Phi_1^+(p) + i\Phi_2^+(p) \sim \frac{k}{\sqrt{-2pl}} \Gamma(1/2 + i\omega)(-p)^{-i\omega} \quad (p \rightarrow \infty). \quad (1.11)$$

Взявши також до уваги обмеженість на нескінченності функцій $G^\pm(p)$ і $Q^\pm(p)$ та асимптотики $K^+(p) \sim \sqrt{-p}$ ($p \rightarrow \infty$, $\text{Re } p < 1/2$) і $K^-(p) \sim \sqrt{p}$ ($p \rightarrow \infty$, $\text{Re } p > -1/2$), приходимо до висновку, що ліва і права частини рівняння (1.10) прямують до нуля при $p \rightarrow \infty$. Тому за теоремою Ліувілля єдина аналітична векторна функція тотожно дорівнює нулю у всій комплексній площині, що дозволяє знайти точний розв'язок рівняння (1.10):

$$\begin{aligned} \Phi^+(p) &= -\frac{pG^+(p)}{K^+(p)} Q^+(p) \tilde{F}^+(p), \\ \Phi^-(p) &= \frac{K^-(p)G^-(p)}{A} \tilde{Q}^-(p) \tilde{F}^-(p), \end{aligned} \quad (1.12)$$

де $\tilde{Q}^-(p) = [Q^-(p)]^{-1}$.

Визначення параметрів зони передруйнування. Порівнюючи асимптотику розв'язку (1.12) при $p \rightarrow \infty$ з (1.11) та враховуючи обмеженість напружень в кінці лінії розриву, внаслідок якої локальний коефіцієнт інтенсивності $k = k_1 + ik_2$ слід прирівняти до нуля, приходимо до векторного рівняння

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{11}^-(\infty) \cdot \mathbf{X} &= 0, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \\ X_1 &= \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} \left[\tilde{Q}_{11}^+(-1)\sigma_0 \cos \psi + \tilde{Q}_{12}^+(-1)\tau_0 \sin \psi \right] - \\ &- 2 \text{Re} \left(N l^{-1/2+i\omega} \left[\tilde{Q}_{11}^+(-1/2-i\omega)C_1 + \tilde{Q}_{12}^+(-1/2-i\omega)C_2 \right] \right), \\ X_2 &= \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} \left[\tilde{Q}_{21}^+(-1)\sigma_0 \cos \psi + \tilde{Q}_{22}^+(-1)\tau_0 \sin \psi \right] - \\ &- 2 \text{Re} \left(N l^{-1/2+i\omega} \left[\tilde{Q}_{21}^+(-1/2-i\omega)C_1 + \tilde{Q}_{22}^+(-1/2-i\omega)C_2 \right] \right), \\ N &= \frac{K^+(-1/2-i\omega)}{(1/2+i\omega)G^+(-1/2-i\omega)}. \end{aligned}$$

Оскільки коефіцієнт цього рівняння має відмінний від нуля визначник $\det \tilde{\mathbf{Q}}^{-}(\infty) = [r^{-}(\infty)]^{-2} = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, то рівняння має лише тривіальний розв'язок $\mathbf{X} = 0$, що приводить до трансцендентних рівнянь для визначення відносної довжини $x = l / L$ і фазового кута ψ напруження, які після перетворень можуть бути записані у вигляді, зручному для числового розв'язання:

$$x = C\sigma^2 \left\{ \frac{\cos^2(\omega \ln x + \varphi + \xi + \zeta)}{n^2} + \sin^2(\omega \ln x + \varphi + \xi + \zeta) \right\},$$

$$\operatorname{tg} \psi = n \cdot \operatorname{tg}(\omega \ln x + \varphi + \xi + \zeta),$$

де

$$C = \pi \left[\frac{2e'|N| \cdot |q'| G^+(-1)}{q} \right]^2, \quad q = q_0^2 + q_1^2, \quad q' = (q_0 \tilde{q}_0 + q_1 \tilde{q}_1) + i(q_1 \tilde{q}_0 + q_0 \tilde{q}_1),$$

$$q_0 = \tilde{Q}_{11}^+(-1), \quad q_1 = \tilde{Q}_{12}^+(-1), \quad \tilde{q}_0 = \tilde{Q}_{11}^+(-1/2 - i\omega), \quad \tilde{q}_1 = \tilde{Q}_{12}^+(-1/2 - i\omega),$$

$$\sigma = \frac{|K_1 + iK_2|}{\tau_0 \sqrt{L}} - \text{безрозмірний параметр зовнішнього навантаження},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{K_2}{K_1} - \text{його фазовий кут}; \quad n = \sigma_0 / \tau_0, \quad \xi = \arg N, \quad \zeta = \arg q'.$$

Випадкам крихкого або пластичного з'єднувального матеріалу відповідають граничні переходи $n \rightarrow 0$, $\psi \rightarrow 0$ і $n \rightarrow \infty$, $\psi \rightarrow \pm \pi / 2$, які приводять до моделей, розглянутих в^{27,28}.

Отриманий вище розв'язок дозволяє визначити розкриття тріщини у її вершині як результат стрибків компонент переміщення в зоні передруйнування, що виражаються через трансформанту $\Phi^-(0)$:

$$\delta u_\theta(0, 0) = - \left\langle \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^* \right\rangle \Big|_{p=0, \theta=0} = - \frac{4(1 - \nu_1^2)}{E_1} I \Phi_1^-(0),$$

$$\delta u_r(0, 0) = - \left\langle \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^* \right\rangle \Big|_{p=0, \theta=0} = - \frac{4(1 - \nu_1^2)}{E_1} I \Phi_2^-(0).$$

Використовуючи (1.12), після перетворень знайдемо остаточно

$$\delta u_\theta(0, 0) = - \frac{4(1 - \nu_1^2)L}{E_1} \frac{2e'|N| \cdot |\tilde{q}|}{A\sqrt{\pi(1 - \beta^2)}} \sigma \sqrt{x} \cos(\omega \ln x + \varphi + \xi + \zeta - 2\eta),$$

²⁷ Kaminskii A. A., Kipnis L. A., Kolmakova V. A. The slip line at the end of a cut at the interface of different media. *Int. Appl. Mech.* 1995. Vol. 31, No. 6. P. 491–495.

²⁸ Kaminskii A. A., Kipnis L. A., Kolmakova V. A. On the Dugdaill model for a crack at the interface of different media. *Int. Appl. Mech.* 1999. Vol. 35, No. 1. P. 58–63.

$$\delta u_r(0,0) = -\frac{4(1-\nu_1^2)L}{E_1} \frac{2e'|N| \cdot |\tilde{q}|}{A\sqrt{\pi(1-\beta^2)}} \sigma\sqrt{x} \sin(\omega \ln x + \varphi + \xi + \zeta - 2\eta),$$

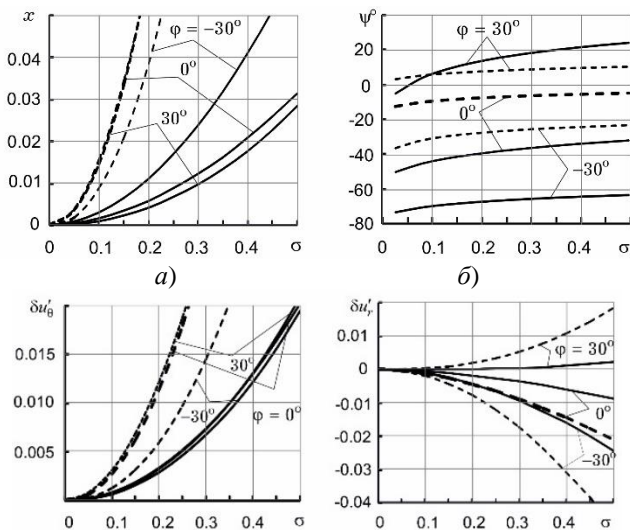
де $\tilde{q} = \tilde{q}_0 + i\tilde{q}_1$, $\zeta = \arg \tilde{q}$, $\eta = \arctg 2\omega$. Знайдені стрибки нормального і дотичного переміщень у вершині тріщини можуть бути використані для пошуку граничного навантаження за прийнятою в моделі когезійної зони умовою $(\delta u_\theta / \delta_n)^2 + (\delta u_r / \delta_t)^2 = 1$, де δ_n , δ_t – їх критичні значення, досягнення яких приводить до зрушення тріщини при суто відривному або зсувному характері деформацій у зоні передруйнування^{8, 9}.

Зазначимо, що відривний характер нормального напруження у зоні передруйнування передбачає виконання умови $\delta u_\theta(0,0) \geq 0$. У випадку ж, коли нормальне напруження в зоні має стискальний характер, більш прийнятним може бути моделювання зони передруйнування лінією ковзання зі зчепленням²⁷.

Аналіз отриманих результатів. Результати числових розрахунків параметрів зони передруйнування для $E_1 / E_2 = 0,25$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ наведено на рис. 1.2-1.4. На всіх рисунках, позначених як *a*, показана відносна довжина x ; θ – фазовий кут ψ навантаження у зоні; δ_n , δ_t – нормовані нормальне і дотичне розкриття

$$\delta u'_\theta = \frac{\delta u_\theta(0,0)}{L} \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \quad \text{і} \quad \delta u'_r = \frac{\delta u_r(0,0)}{L} \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)}$$

відповідно.



в)

г)

Рис. 1.2. Залежність параметрів зони передруйнування від безрозмірного параметра навантаження σ .
Штрихові лінії – $n = 0,5$; суцільні лінії – $n = 2$

На рис. 1.3 подано залежність параметрів зони передруйнування від фазового кута зовнішнього навантаження φ . Згідно рис. 1.3а, довжина зони у цій залежності має мінімум у випадку більш пластичного ($n > 1$) і максимум – у випадку більш крихкого ($n < 1$) з'єднувального матеріалу. Фазовий кут напружень ψ у зоні зростає синхронно з ростом фазового кута зовнішнього навантаження, залишаючись, проте, меншим від нього (рис. 1.3б). Дотичне і нормальне розкриття мають різну поведінку при зміні фазового кута навантаження: дотичне розкриття зростає з ростом φ , тоді як нормальне розкриття при $n \leq 1$ має максимум, а при $n > 1$ його залежність від φ є менш вираженою і немонотонною (рис. 1.3в).

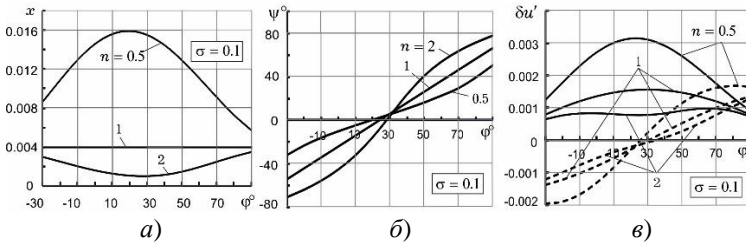


Рис. 1.3. Залежність параметрів зони передруйнування від фазового кута φ зовнішнього навантаження

На рис. в) штрихові лінії – $\delta u'_t$; суцільні – $\delta u'_n$.

На параметри зони передруйнування суттєво впливає відношення опорів відриву і зсуву з'єднувального матеріалу $n = \sigma_0 / \tau_0$.

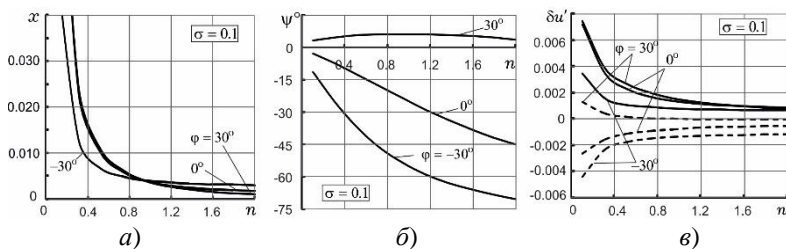


Рис. 1.4. Залежність параметрів зони передруйнування від відношення n опорів з'єднувального матеріалу відриву і зсуву.

На рис. в) штрихові лінії – $\delta u'_r$, суцільні – $\delta u'_0$.

Як видно з рис. 1.4а і 1.4в, зі збільшенням опору відриву при сталому параметрі навантаження довжина зони передруйнування і розкриття тріщини в вершині зменшуються. Фазовий кут навантаження при $\varphi \leq 0$ є від'ємним і швидко спадає з ростом n , тоді як при $\varphi > 0$ він додатний і слабо залежить від n (рис. 1.4б).

2. Когезійна модель зони передруйнування біля вершини тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі розділу

Постановка задачі. В умовах плоскої деформації розглядаємо задачу про розрахунок параметрів маломасштабної зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі біля вершини міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі розділу двох пружних однорідних ізотропних матеріалів з модулями Юнга E_1, E_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2 . Подібно до п. 1, моделюємо зону лінією розриву переміщення, на якій нормальне і дотичне напруження задовольняють критерій міцності Мізеса – Хілла (1.1), та приходимо до задачі про лінію розриву скінченної довжини, що поширюється в кусково-однорідній площині з вершини півнескінченної міжфазної тріщини у кутовій точці ламаної межі розділу двох різних пружних матеріалів (Рис. 2.1). Умову на нескінченності формулюємо як вимогу зрощування

шуканого розв'язку на відстанях $l \ll r \ll L$ з розв'язком аналогічної задачі теорії пружності без лінії розриву, який відомий з робіт^{29,30}.

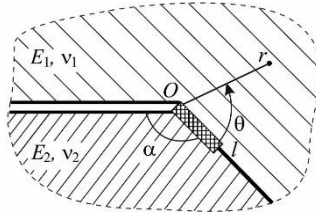


Рис. 2.1. Розрахункова схема задачі

Граничні умови відповідної крайової задачі теорії мають вигляд

$$\theta = -\alpha \cup 2\pi - \alpha: \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0;$$

$$\theta = 0: \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0;$$

$$\theta = 0, \quad r < l: \quad \sigma_\theta = \sigma_0 \cos \psi(r), \quad \tau_{r\theta} = \tau_0 \sin \psi(r);$$

$$\theta = 0, \quad r > l: \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0;$$

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow \infty: \quad \sigma_\theta \sim \sum_i C_i F_\sigma(\alpha, \lambda_i) r^{\lambda_i}, \quad \tau_{r\theta} \sim \sum_i C_i F_\tau(\alpha, \lambda_i) r^{\lambda_i}, \quad (2.1)$$

де $F_\sigma(\alpha, \lambda)$, $F_\tau(\alpha, \lambda)$ – відомі функції $F(\lambda)$ з робіт²⁹⁻³⁰ відповідно; C_i – довільні сталі, які характеризують інтенсивність зовнішнього навантаження і вважаються заданими за умовою; λ_i ($-1 < \text{Re} \lambda_i < 0$) – показники сингулярності напружень в околі вершини тріщини, що є коренями характеристичного рівняння аналогічної задачі без зони передруйнування²⁹⁻³⁰:

$$D(\lambda) = 0,$$

$$D(\lambda) = -(1 + \kappa_1)^2 t_1 - 4(1 + \kappa_1)(e - 1)t_1 t_2 - e^2(1 + \kappa_2)^2 t_3 + \\ + 4(e - 1)^2 t_1 t_3 + 4e(1 + \kappa_2)(e - 1)t_3 t_4 + 2e(1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1)t_5,$$

²⁹ Dudyk M. V., Dikhtyarenko Yu. V. Development of a prefracture zone from an interface crack at a corner point of an interface of two elastic media. *J. Math. Sci.* 2012. V.184, No.2. P. 121-135.

³⁰ Dudyk M. V., Dikhtyarenko Yu. V., Dyakon V. M. Influence of the plasticity of a joining material on the kink of an interface crack at the corner point of the interface of media. *Mater. Sci.* 2014. V. 50, No. 1. P. 46-54.

$$\begin{aligned}
t_1 &= (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)\alpha, & t_2 &= \sin^2(\lambda + 1)(2\pi - \alpha), \\
t_3 &= (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)(2\pi - \alpha), \\
t_4 &= \sin^2(\lambda + 1)\alpha, & t_5 &= t_1 + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin 2\lambda\pi \cos(\lambda + 1)(2\pi - \alpha), \\
e &= \frac{1 + v_2}{1 + v_1} \cdot \frac{E_1}{E_2}, & \kappa_{1(2)} &= 3 - 4v_{1(2)}.
\end{aligned}$$

Граничні умови (2.1) доповнюються асимптотиками (1.6) в кінці зони передруйнування.

За допомогою інтегрального перетворення Мелліна крайова задача (2.1) зводиться до векторного функціонального рівняння Вінера – Гопфа у смузї, що містить уявну вісь:

$$\Phi^+(p) + \mathbf{F}(p) = \mathbf{G}(p)\Phi^-(p) \quad (-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2), \quad (2.2)$$

$$\Phi^+(p) = \int_1^\infty \begin{pmatrix} \sigma_\theta(\rho l, 0) \\ \tau_{r\theta}(\rho l, 0) \end{pmatrix} \rho^p d\rho, \quad \Phi^-(p) = \frac{E_1}{4(1 - v_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} u_\theta \\ u_r \end{pmatrix} \right\rangle \Big|_{r=\rho l}^{\theta=0} \rho^p d\rho,$$

$$\mathbf{F}(p) = \begin{pmatrix} F_1(p) \\ F_2(p) \end{pmatrix}, \quad F_1(p) = \frac{\sigma_0 \cos \psi}{p + 1} - \sum_i \frac{C_i F_\sigma(\alpha, \lambda_i) l^{\lambda_i}}{p + 1 + \lambda_i},$$

$$F_2(p) = \frac{\tau_0 \sin \psi}{p + 1} - \sum_i \frac{C_i F_\tau(\alpha, \lambda_i) l^{\lambda_i}}{p + 1 + \lambda_i},$$

$$\mathbf{G}(p) = \frac{-(1 + \kappa_1)}{D(-1 - p)} \begin{pmatrix} g_{11}(p) & 2g_{12}(p) \\ 2g_{21}(p) & g_{22}(p) \end{pmatrix},$$

$$g_{11}(p) = e(1 + \kappa_2)d_1(p)d_6(p) - (1 + \kappa_1)d_2(p)d_4(p),$$

$$g_{12}(p) = 2(1 - e)d_1(p)d_2(p) + e(1 + \kappa_2)d_1(p)d_8(p) - (1 + \kappa_1)d_2(p)d_7(p),$$

$$g_{21}(p) = e(1 + \kappa_2)d_1(p)d_5(p) - 2(1 - e)d_1(p)d_2(p) - (1 + \kappa_1)d_2(p)d_5(p),$$

$$g_{22}(p) = (1 + \kappa_1)d_2(p)d_3(p) - e(1 + \kappa_2)d_1(p)d_{10}(p),$$

$$d_1(p) = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p(2\pi - \alpha), \quad d_2(p) = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha,$$

$$d_3(p) = p \sin 2\alpha - \sin 2p(2\pi - \alpha), \quad d_4(p) = p \sin 2\alpha + \sin 2p(2\pi - \alpha),$$

$$d_5(p) = p \sin^2 \alpha + \sin^2 p(2\pi - \alpha), \quad d_6(p) = p \sin 2\alpha - \sin 2p\alpha,$$

$$d_7(p) = p \sin^2 \alpha - \sin^2 p(2\pi - \alpha), \quad d_8(p) = p \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha,$$

$$d_9(p) = p \sin^2 \alpha + \sin^2 p\alpha, \quad d_{10}(p) = p \sin 2\alpha + \sin 2p\alpha$$

($\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – достатньо малі додатні числа).

Розв'язання рівняння (2.2) передбачає факторизацію матриці $\mathbf{G}(p)$, тобто подання її у вигляді добутку двох матриць $\mathbf{G}^+(p)$, $\mathbf{G}^-(p)$, аналітичних у півплощинах $\operatorname{Re} p < \varepsilon_2$ і $\operatorname{Re} p > -\varepsilon_1$ відповідно. Проте, матриця $\mathbf{G}(p)$ не відноситься до жодного з відомих типів, які допускають точну факторизацію у замкнутій аналітичній формі. У

зв'язку з цим припускаємо можливість її розкладання на дві матриці, одна з яких допускає точну факторизацію, а стосовно іншої передбачається умова її малості у порівнянні з першою матрицею в області задання рівняння (2.2):

$$\mathbf{G}(p) = \mathbf{G}_0(p) + \mathbf{G}'(p) \quad (|\mathbf{G}_0(p)| \gg |\mathbf{G}'(p)|, \quad -\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2) \quad (2.3)$$

В якості $\mathbf{G}_0(p)$ беремо матрицю $\mathbf{G}(p)$ в рівнянні Вінера – Гопфа (1.8) із розв'язання задачі про когезійну зону переддруйнування на плоскій межі розділу:

$$\mathbf{G}_0(p) = \mathbf{G}(p)|_{\alpha=\pi} = -A \cdot \operatorname{tg} p\pi G(p)\mathbf{Q}(p),$$

яка, згідно з п. 1, факторизується на уявній вісі за формулами:

$$\mathbf{G}_0(p) = \mathbf{G}_0^+(p)\mathbf{G}_0^-(p) \quad (\operatorname{Re} p = 0), \quad (2.4)$$

$$\mathbf{G}_0^+(p) = \frac{pG^+(p)}{K^+(p)} \mathbf{Q}^+(p) \quad (\operatorname{Re} p < 0), \quad \mathbf{G}_0^-(p) = \frac{-A}{G^-(p)K^-(p)} \mathbf{Q}^-(p) \quad (\operatorname{Re} p > 0).$$

У відповідності з прийнятими вище припущеннями подамо розв'язок рівняння (2.2) у вигляді розвинень за степенями матриці-збурення $\mathbf{G}'(p)$:

$$\Phi^+(p) = \Phi_0^+(p) + \Phi_1^+(p) + \Phi_2^+(p) + \dots \quad (2.5)$$

та скористаємось наближеним методом розв'язання матричних рівнянь Вінера – Гопфа, розвинутих в³¹. З урахуванням (2.3)-(2.4) у нульовому наближенні (2.2) зводиться до рівняння

$$[\mathbf{G}_0^+(p)]^{-1} (\Phi_0^+(p) + \mathbf{F}_0(p)) = \mathbf{G}_0^-(p)\Phi_0^-(p) \quad (\operatorname{Re} p = 0), \quad (2.6)$$

де степінь «-1» позначає обернену матрицю. Розв'язок рівняння (2.6) подібний знайденому у п. 1; подамо його у вигляді:

$$\Phi_0^+(p) = -\mathbf{G}_0^+(p)\mathbf{F}_0^+(p) \quad (\operatorname{Re} p < 0),$$

$$\Phi_0^-(p) = -[\mathbf{G}_0^-(p)]^{-1} \mathbf{F}_0^-(p) \quad (\operatorname{Re} p > 0), \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0^+(p) &= \frac{1}{p+1} ([\mathbf{G}_0^+(p)]^{-1} - [\mathbf{G}_0^+(-1)]^{-1}) \begin{pmatrix} \sigma_0 \cos \psi \\ \tau_0 \sin \psi \end{pmatrix} - \\ &- \sum_i \frac{C_i I_i^{\lambda_i}}{p+1+\lambda_i} ([\mathbf{G}_0^+(p)]^{-1} - [\mathbf{G}_0^+(-1-\lambda_i)]^{-1}) \begin{pmatrix} F_{\sigma}(\alpha, \lambda_i) \\ F_{\tau}(\alpha, \lambda_i) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{F}_0^-(p) &= -\frac{[\mathbf{G}_0^+(-1)]^{-1}}{p+1} \begin{pmatrix} \sigma_0 \cos \psi \\ \tau_0 \sin \psi \end{pmatrix} + \sum_i \frac{C_i I_i^{\lambda_i}}{p+1+\lambda_i} [\mathbf{G}_0^+(-1-\lambda_i)]^{-1} \begin{pmatrix} F_{\sigma}(\alpha, \lambda_i) \\ F_{\tau}(\alpha, \lambda_i) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

³¹ Дудик М. Наближений метод розв'язання матричних рівнянь Вінера – Гопфа в задачах прикладної механіки. *Дослідження в математиці і механіці*. 2020. Т. 25, вип. 1(35). С. 62-81.

Для поправок $\Phi_1^+(p)$ у першому наближенні з (2.2) отримаємо рівняння

$$\Phi_1^+(p) = \mathbf{G}_0(p)\Phi_1^-(p) + \mathbf{G}'(p)\Phi_0^-(p) \quad (\operatorname{Re} p = 0)$$

в якому матрицю-збурення $\mathbf{G}'(p)$, згідно з (2.3), визначаємо як різницю матриць $\mathbf{G}(p) - \mathbf{G}_0(p)$. Введемо векторну функцію $\mathbf{F}_1(p) = -\mathbf{G}'(p)\Phi_0^-(p)$ та з урахуванням факторизації (2.4) матриці $\mathbf{G}_0(p)$ прийдемо до рівняння

$$\left[\mathbf{G}_0^+(p)\right]^{-1} (\Phi_1^+(p) + \mathbf{F}_1(p)) = \mathbf{G}_0^-(p)\Phi_1^-(p) \quad (\operatorname{Re} p = 0), \quad (2.8)$$

подібного (2.6). Виконавши за допомогою інтегралів типу Коші заміну $\left[\mathbf{G}_0^+(p)\right]^{-1} \mathbf{F}_1(p)$ різницею крайових значень аналітичних векторів25:

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{G}_0^+(p)\right]^{-1} \mathbf{F}_1(p) &= \mathbf{F}_1^+(p) - \mathbf{F}_1^-(p), \quad (2.9) \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\left[\mathbf{G}_0^+(z)\right]^{-1} \mathbf{F}_1(z)}{z-p} dz &= \begin{cases} \mathbf{F}_1^+(p), & \operatorname{Re} p < 0, \\ \mathbf{F}_1^-(p), & \operatorname{Re} p > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

розв'язуємо (2.8) за допомогою методу Вінера – Гофпа аналогічно розв'язанню у п. 1 рівняння (1.10) та знаходимо поправку першого порядку за збуренням до розв'язку (2.7):

$$\Phi_1^+(p) = -\mathbf{G}_0^+(p)\mathbf{F}_1^+(p) \quad (\operatorname{Re} p < 0),$$

$$\Phi_1^-(p) = -\left[\mathbf{G}_0^-(p)\right]^{-1} \mathbf{F}_1^-(p) \quad (\operatorname{Re} p > 0). \quad (2.10)$$

Наступні наближення отримуємо з (2.8)-(2.10) шляхом послідовних замін $\Phi_{i-1}^\pm(p) \rightarrow \Phi_i^\pm(p)$, $\mathbf{F}_i(p) \rightarrow \mathbf{F}_i^\pm(p) = -\mathbf{G}'(p)\Phi_{i-1}^\pm(p)$ ($i=2, 3, \dots$). В результаті приходимо до загального розв'язку рівняння (2.2):

$$\begin{aligned} \Phi^+(p) &= -\mathbf{G}_0^+(p) \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}_n^+(p) \quad (\operatorname{Re} p < 0), \\ \Phi^-(p) &= -\left[\mathbf{G}_0^-(p)\right]^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}_n^-(p) \quad (\operatorname{Re} p > 0), \quad (2.11) \\ \mathbf{F}_n^\pm(p) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\left(\mathbf{G}_0^\pm(z)\right)^{-1} \mathbf{G}'(z) \left(\mathbf{G}_0^\mp(z)\right)^{-1} \mathbf{F}_{n-1}^\mp(z)}{z-p} dz. \end{aligned}$$

Умовою коректності розв'язку (2.11) є збіжність його рядів, тобто виконання нерівностей $|\mathbf{F}_n^\pm(p)| < |\mathbf{F}_{n-1}^\pm(p)|$, які еквівалентні умові

$$\left|\left[\mathbf{G}_0^+(p)\right]^{-1} \mathbf{G}'(p) \left[\mathbf{G}_0^-(p)\right]^{-1}\right| < 1. \quad (2.12)$$

Визначення параметрів зони передруйнування. З розв'язку (2.11) отримуємо асимптотику

$$\Phi^+(p) \sim -\frac{1}{\sqrt{-p}} \mathbf{Q}^+(p) \left\{ [\mathbf{G}_0^+(-1)]^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_0 \cos \psi \\ \tau_0 \sin \psi \end{pmatrix} - \sum_i C_i I^{\lambda_i} [\mathbf{G}_0^+(-1 - \lambda_i)]^{-1} \begin{pmatrix} F_\sigma(\alpha, \lambda_i) \\ F_\tau(\alpha, \lambda_i) \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} [\mathbf{G}_0^+(z)]^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}_n^+(z) dz \right\} \quad (p \rightarrow \infty).$$

Порівнюючи її з (1.11) та враховуючи обмеженість напружень в кінці зони передруйнування, що призводить до умови $k=0$, отримуємо векторне рівняння

$$[\mathbf{G}_0^+(-1)]^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_0 \cos \psi \\ \tau_0 \sin \psi \end{pmatrix} - \sum_i C_i I^{\lambda_i} [\mathbf{G}_0^+(-1 - \lambda_i)]^{-1} \begin{pmatrix} F_\sigma(\alpha, \lambda_i) \\ F_\tau(\alpha, \lambda_i) \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} [\mathbf{G}_0^+(z)]^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}_n(z) dz = 0.$$

Перейшовши до його скалярного подання, прийдемо до трансцендентного рівняння для розрахунку довжини зони передруйнування

$$\left(\sum_i \frac{C_i I^{\lambda_i} K^+(-1 - \lambda_i)}{\sigma_0(1 + \lambda_i) G^+(-1 - \lambda_i)} X_1(\lambda_i) \right)^2 + \left(\sum_i \frac{C_i I^{\lambda_i} K^+(-1 - \lambda_i)}{\tau_0(1 + \lambda_i) G^+(-1 - \lambda_i)} X_2(\lambda_i) \right)^2 = 1$$

з наступним обчисленням фазового кута напруження у зоні за формулою

$$\psi = \arctg \left[\sigma_0 \sum_i \frac{C_i I^{\lambda_i} K^+(-1 - \lambda_i)}{(1 + \lambda_i) G^+(-1 - \lambda_i)} X_2(\lambda_i) \middle/ \tau_0 \sum_i \frac{C_i I^{\lambda_i} K^+(-1 - \lambda_i)}{(1 + \lambda_i) G^+(-1 - \lambda_i)} X_1(\lambda_i) \right]$$

де

$$\begin{pmatrix} X_1(\lambda) \\ X_2(\lambda) \end{pmatrix} = \mathbf{M}_0^{-1} \left\{ \mathbf{I} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{(\mathbf{G}_0^+(z))^{-1} \mathbf{G}'(z) (\mathbf{G}_0^-(z))^{-1}}{z + 1 + \lambda} dz \right\} [\mathbf{Q}^+(-1 - \lambda)]^{-1} \begin{pmatrix} F_\sigma(\alpha, \lambda) \\ F_\tau(\alpha, \lambda) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_0 = \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} \left\{ \mathbf{I} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{(\mathbf{G}_0^+(z))^{-1} \mathbf{G}'(z) (\mathbf{G}_0^-(z))^{-1}}{z + 1} dz \right\} [\mathbf{Q}^+(-1)]^{-1}.$$

Подібно до результатів п. 1, отримуємо компоненти стрибка переміщення у вершині тріщини для пошуку граничного навантаження:

$$\delta u(0, 0) = -\frac{4(1 - \nu_1^2)}{E_1} \Phi^-(0) = \frac{4(1 - \nu_1^2)}{E_1} [\mathbf{G}_0^-(0)]^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}_n^-(0).$$

Чисельний аналіз розв'язку. Чисельна реалізація знайденого розв'язку задачі при урахуванні наближень високого порядку ускладнена зростанням у (2.11) кратності інтегралів типу Коші. Це

змушує обмежуватись невеликим числом доданків, які враховуються при обчисленнях, накладаючи замість (2.12) більш жорстку умову на матрицю-збурення:

$$\left| \left[\mathbf{G}_0^+(p) \right]^{-1} \mathbf{G}'(p) \left[\mathbf{G}_0^-(p) \right]^{-1} \right| \ll 1. \quad (2.13)$$

У зв'язку з цим найвищу ефективність наближеного розв'язку задачі про маломасштабну зону передруйнування очікуємо при кутах зламу межі розділу матеріалів α , близьких до $\alpha_0 = 180^\circ$, якому відповідає нульове наближення (2.4) матричного коефіцієнта рівняння (2.2). При таких кутах зламу, як виявлено в [29, 30], НДС біля вершини міжфазної тріщини визначається двома комплексно спряженими показниками сингулярності $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \lambda_r + i\lambda_m$ і комплексним КІН $K = K_1 + iK_2$, який входить у коефіцієнти C_1, C_2 розвинень (2.1). Тому, розглядаючи лише випадки малих відхилень форми межі розділу від плоскої поверхні, подібно до [0, 0], задаватимемо зовнішнє навантаження безрозмірним параметром $\sigma = (2\pi L)^{\lambda_r} |K| / \sigma_0$ і фазовим кутом $\varphi = \arctg(K_2 / K_1)$.

Результати числових розрахунків параметрів зони передруйнування у першому наближенні наведено на рис. 2.2-2.5 (на рисунках, позначених як *a*, показана відносна довжина $x=l/L$; *b* – фазовий кут ψ напруження у зоні; *в* – нормоване розкриття $\delta u' = \frac{|\delta u(0,0)|}{L} \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)}$). Всі обчислення виконано для $E_1 / E_2 = 0,5$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$. Для відношення опорів відриву і зсуву з'єднувального матеріалу введено позначення n ($n = \sigma_0 / \tau_0$).

Згідно з рис. 2.2, параметри зони передруйнування залежать від кута зламу межі розділу матеріалів α , відхиляючись як в сторону збільшення, так і зменшення від значень, що відповідають плоскій межі.

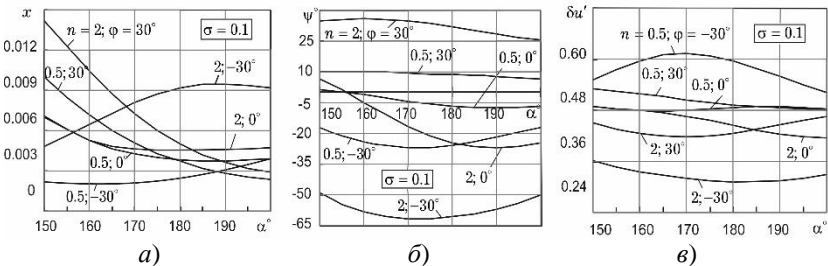


Рис. 2.2. Залежність параметрів зони передруйнування від кута зламу α

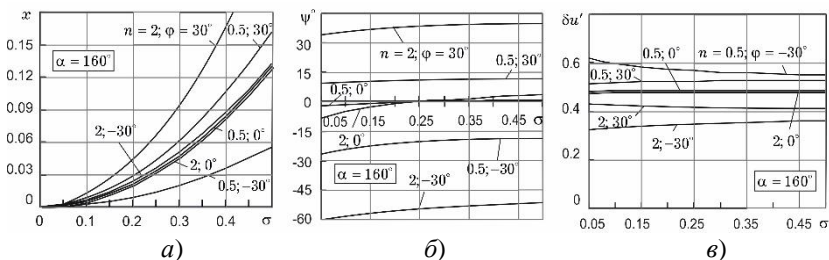


Рис. 2.3. Залежність параметрів зони передруйнування від безрозмірного параметра навантаження σ

Довжина зони передруйнування нелінійно зростає за величиною зі збільшенням зовнішнього навантаження, заданого безрозмірним параметром σ (рис. 2.3.а). Залежність фазового кута напруження у зоні від σ менш виражена, проте також спостерігається його повільне зростання зі збільшенням абсолютного значення навантаження (рис. 2.3.б). Розкриття зони передруйнування у вершині тріщини слабо залежить від безрозмірного параметра навантаження σ (рис. 2.3.в).

На рис. 2.4 подано залежність параметрів зони передруйнування від фазового кута зовнішнього навантаження φ . Згідно з рис. 2.4.а, у випадку більш пластичного з'єднувального матеріалу ($n > 1$), довжина зони спочатку дещо зменшується зі збільшенням фазового кута зовнішнього навантаження, досягає мінімуму, потім збільшується, досягає максимуму і знову зменшується. У випадку більш крихкого з'єднувального матеріалу ($n < 1$), довжина зони зі збільшенням фазового кута зовнішнього навантаження збільшується, досягає максимуму, потім зменшується, досягає мінімуму і знову збільшується. Фазовий кут напружень у зоні передруйнування спочатку зростає синхронно з ростом фазового кута зовнішнього навантаження (рис. 2.4.б), залишаючись, проте, меншим від нього, а потім стрибком набуває від'ємного значення з наступним збільшенням. Причиною стрибка є зміна знаку дотичного напруження в зоні. Поведінка розкриття тріщини в її вершині при зміні фазового кута навантаження виявляється протилежною поведінці довжини зони (рис. 2.4.в).

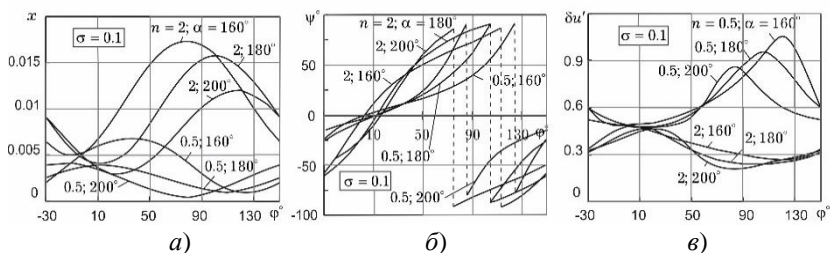


Рис. 2.4. Залежність параметрів зони передруйнування від фазового кута φ зовнішнього навантаження

На параметри зони передруйнування суттєво впливає відношення опорів відриву і зсуву з'єднувального матеріалу $n = \sigma_0 / \tau_0$. Як видно з рис. 2.5.а, зі збільшенням опору відриву при сталому параметрі навантаження довжина зони передруйнування збільшується. Фазовий кут напруження в зоні при $\varphi \leq 0$ є від'ємним і швидко спадає з ростом n , тоді як при $\varphi > 0$ він додатний і зростає зі збільшенням n (рис. 2.5.б).

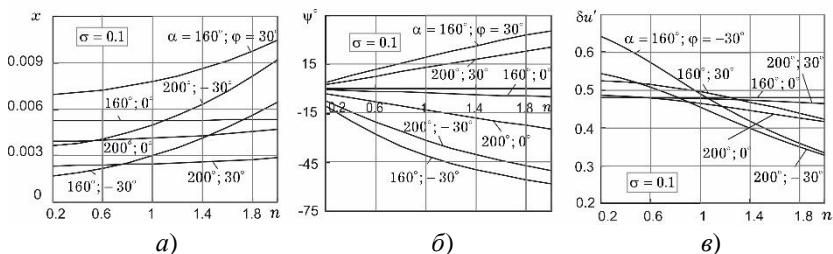


Рис. 2.5. Залежність параметрів зони передруйнування від відношення n опорів з'єднувального матеріалу відриву і зсуву

Згідно з рис. 2.5.в, зі збільшенням опору відриву при сталому параметрі навантаження розкриття тріщини в її вершині зменшується.

Виконавши зворотне перетворення Мелліна знайдених в ході розв'язання задачі трансформант напружень, із залученням теореми про лишки можна визначити розвинення напружень у асимптотичні ряди в околі вершини тріщини після утворення зони передруйнування. Головні члени розвинень визначатимуться полюсами матричного коефіцієнта $\mathbf{G}(p)$ рівняння (2.2) в інтервалі

$-1 < \operatorname{Re} p < 0$, яким відповідають нулі функції $D(-1-p)$ у цьому ж інтервалі, що визначають, за постановкою задачі, показники сингулярності напружень біля вершини тріщини за відсутності зони. Як зазначалось вище, для кутів зламу, близьких до $\alpha_0 = 180^\circ$, рівняння $D(-1-p)$ має комплексні корені. Таким чином, на відміну від моделей зони передруйнування^{29,30} з розривом лише однієї з компонент переміщення і умовою передруйнування Треска – Сен-Венана, у розглянутій когезійній моделі з використанням критерію Мізеса – Хілла утворення зони передруйнування не змінює вихідний осцилюючий характер сингулярності у вершині тріщини. Такий результат є наслідком прийнятого в когезійній моделі припущення про розрив і нормального, і дотичного переміщень, що робить зону передруйнування подібною міжфазній тріщині, до берегів якої прикладені сталі відривні і зсувні напруження. Для усунення просторових осциляцій переміщень і напружень в околі кутової точки слід врахувати додаткові фактори, що впливають на напружено-деформований стан біля вершини тріщини, зокрема, контакт її берегів та утворення в безпосередньому околі кутової точки області деструкції матеріалу з підвищеним рівнем деформацій.

ВИСНОВКИ

В умовах плоскої деформації за допомогою методу Вінера – Гопфа знайдено аналітичний розв'язок задачі про розрахунок в рамках моделі Леонова – Панасюка – Дагдейла з використанням елементів когезійної моделі параметрів маломасштабної зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі в кінці міжфазної тріщини, розташованої на плоскій або ламаній межі розділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів. Отримано рівняння для визначення довжини зони передруйнування і параметра змішування мод напружень в ній та формули для обчислення розкриття тріщини в її вершині. Показана можливість їх застосування для визначення граничного навантаження. Здійснено числовий розрахунок параметрів зони та якісний аналіз їх залежності від кута зламу межі поділу матеріалів, зовнішнього навантаження і характеристик з'єднувального матеріалу, який привів до наступних висновків:

- довжина когезійної зони передруйнування нелінійно зростає зі збільшенням зовнішнього навантаження. Спостерігається повільне зростання фазового кута напруження у зоні зі збільшенням модуля зовнішнього навантаження;

– довжина когезійної зони як функція фазового кута зовнішнього навантаження має мінімум у випадку більш пластичного і максимум – у випадку більш крихкого з’єднувального матеріалу;

– фазовий кут напружень у зоні зростає синхронно з ростом фазового кута зовнішнього навантаження, залишаючись, проте, меншим від нього. При зміні знаку дотичного напруження в зоні фазовий кут напружень у зоні стрибком набуває від’ємного значення з наступним збільшенням.

АНОТАЦІЯ

В умовах плоскої деформації виконано дослідження когезійної моделі зони передруйнування у з’єднувальному матеріалі кусково-однорідного тіла на продовженні тріщини, розташованої на межі розділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів. Зона моделюється лінією розриву переміщення, на якій напруження задовольняє критерій міцності Мізеса – Хілла. За допомогою інтегрального перетворення Мелліна задача зведена до векторного функціонального рівняння Вінера – Гопфа. У першій частині роботи за допомогою формул Храпкова отримано точний аналітичний розв’язок векторного функціонального рівняння задачі про когезійну зону передруйнування у з’єднувальному матеріалі в кінці міжфазної тріщини на плоскій межі розділу матеріалів. Знайдений розв’язок використано у другій частині роботи для наближеного розв’язання задачі про розрахунок параметрів зони передруйнування у з’єднувальному матеріалі на продовженні міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі розділу матеріалів. Для обох конфігурацій кусково-однорідного тіла виведено рівняння для визначення довжини зони передруйнування і фазового кута напруження в зоні та вираз для розкриття тріщини в її вершині. Виконано числове дослідження параметрів зони передруйнування.

ЛІТЕРАТУРА

1. Panasyuk V. V., Savruk M. P. Model for plasticity bands in elastoplastic failure mechanics. *Mater. Sci.* 1992. Vol. 28, No. 1. P. 41–57. URL: <https://doi.org/10.1007/BF00723631>
2. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. К.: Наук. думка, 1980. 246 с.
3. Kaminsky A. A., Dudik M. V., Kipnis L. A. On the direction of development of a thin prefracture process zone at the tip of an interfacial

crack between dissimilar media. *Int. Appl. Mech.* 2006. Vol. 42, No. 2. P. 136–144. URL: <https://doi.org/10.1007/s10778-006-0068-1>

4. Kaminsky A. A., Dudik M. V., Kipnis L. A. Initial kinking of an interfacial crack between two elastic media. *Int. Appl. Mech.* 2007. Vol. 43. No. 10. P. 1090–1099. URL: <https://doi.org/10.1007/s10778-007-0109-4>

5. Kaminsky A. A., Dudik M. V., Kipnis L. A. Initial kinking of an interface crack between two elastic media under tension and shear. *Int. Appl. Mech.* 2009. Vol. 45, No. 6. P. 635–642. URL: <https://doi.org/10.1007/s10778-009-0214-7>

6. Dudyk M. V., Dikhtyarenko Yu. V. Investigation of the initial stage of kinking of an interface crack at an angular point of the interface of two media. *Materials Science.* 2012. Vol. 47. No.5. P. 627–635. URL: <https://doi.org/10.1007/s11003-012-9437-6>

7. Діхтяренко Ю. В. Моделювання початкової пластичної смуги у кутовій точці межі розділу середовищ з міжфазною тріщиною. *Вісник Одес. нац. ун-ту. Матем. і мех.* 2011. Т. 16, вип. 16. С. 76–86.

8. Tvergaard V., Hutchinson J. H. On the toughness of ductile adhesive joints. *J. Mech. Phys. Solids.* 1996. V. 44, No. 5. P. 789–800. URL: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(96\)00011-7](https://doi.org/10.1016/0022-5096(96)00011-7)

9. Kishimoto K., Omiya M., Yang W. Fracture mechanics of bonding interface: a cohesive zone. *Sensors and Actuators.* 2002. V. A 99. P. 198–206. URL: [https://doi.org/10.1016/S0924-4247\(01\)00884-6](https://doi.org/10.1016/S0924-4247(01)00884-6)

10. Tvergaard V. Influence of plasticity on interface toughness in a layered solid with residual stresses. *Int. Journal of Solids and Structures.* 2003. V. 40. P. 5769–5779. URL: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00342-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00342-1)

11. Tvergaard V. Cohesive zone representations of failure between elastic or rigid solids and ductile solids. *Engineering Fracture Mechanics.* 2003. V. 70. P. 1859–1868. URL: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(03\)00128-0](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(03)00128-0)

12. Jin Z.-H., Sun C. T. Cohesive zone modeling of interface fracture in elastic bi-materials. *Engineering Fracture Mechanics.* 2005. V. 72. P. 1805–1817. URL: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2004.09.011>

13. Sun C. T., Jin Z.-H. Modeling of composite fracture using cohesive zone and bringing models. *Composites Science and Technology.* 2006. V. 66. P. 1297–1302. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2005.10.013>

14. Lee M. Y., Cho T. M., Kim W. S., Lee B. C., Lee J. J. Determination of cohesive parameters for a mixed-mode cohesive zone

model. *Int. Journal of Adhesion & Adhesives*. 2010. V. 30. P. 322–328. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2009.10.005>

15. Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н. Моделирование трещиностойкости композиционных материалов. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2009. Т. 2, No.2. С. 22–39. URL: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2009.2.2.10>

16. Волошко О. І., Лобода В. В. Числове дослідження зон передруйнування тріщини в адгезійному прошарку між двома ізотропними матеріалами. *Машинознавство*. 2009. No.12. С. 9–16. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/maz_2009_12_2

17. England A. H. A crack between dissimilar media. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1965. Vol. 32, No. 2. P. 400–402. URL: <https://doi.org/10.1115/1.3625813>

18. Erdogan F. Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1965. Vol. 32, No. 2. P. 403–410. URL: <https://doi.org/10.1115/1.3625814>

19. Erdogan F. Stress distribution in non-homogeneous elastic plane with cracks. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1963. Vol. 30, No. 1. P. 232–236. URL: <https://doi.org/10.1115/1.3636517>

20. Rice J. R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1988. Vol. 55, No. 3. P. 98–103. URL: <https://doi.org/10.1115/1.3173668>

21. Rice J. R., Sih G. C. Plane problems of cracks in dissimilar media. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1965. Vol. 32, No. 2. P. 418–423. URL: <https://doi.org/10.1115/1.3625816>

22. Khrapkov A. A. Wiener-Hopf method in mixed elasticity theory problems. SPb.: B.E. Vedeneev VNIIG Publishing House, 2001. 144 p.

23. Khrapkov A. A. Certain cases of the elastic equilibrium of an infinite wedge with a nonsymmetric notch at the vertex, subjected to concentrated forces. *J. Appl. Math. Mech.* 1971. Vol. 35. P. 625–637. URL: [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(71\)90056-6](https://doi.org/10.1016/0021-8928(71)90056-6)

24. Khrapkov A. A. Closed form solutions of the problems on the elastic equilibrium of an infinite wedge with a nonsymmetric notch at the apex. *J. Appl. Math. Mech.* 1971. Vol. 35. P. 1009–1016. URL: [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(71\)90105-5](https://doi.org/10.1016/0021-8928(71)90105-5)

25. Gakhov F. D. Boundary Value Problems. Oxford: Pergamon Press. 1966. 561 p.

26. Noble B. Methods Based on the Wiener – Hopf Technique for the solution of partial differential equations, 2nd ed. New York: Chelsea Pub. Co., 1988. 246 p.

27. Kaminskii A. A., Kipnis L. A., Kolmakova V. A. The slip line at the end of a cut at the interface of different media. *Int. Appl. Mech.* 1995. Vol. 31, No. 6. P. 491–495. URL: <https://doi.org/10.1007/BF00846803>

28. Kaminskii A. A., Kipnis L. A., Kolmakova V. A. On the Dugdaill model for a crack at the interface of different media. *Int. Appl. Mech.* 1999. Vol. 35, No. 1. P. 58–63. URL: <https://doi.org/10.1007/BF02682063>

29. Dudyk M. V., Dikhtyarenko Yu. V. Development of a prefracture zone from an interface crack at a corner point of an interface of two elastic media. *J. Math. Sci.* 2012. V.184, No.2. P. 121–135. URL: <https://doi.org/10.1007/s10958-012-0857-5>

30. Dudyk M. V., Dikhtyarenko Yu. V., Dyakon V. M. Influence of the plasticity of a joining material on the kink of an interface crack at the corner point of the interface of media. *Mater. Sci.* 2014. V. 50, No. 1. P. 46–54. URL: <https://doi.org/10.1007/s11003-014-9690-y>

31. Дудик М. Наближений метод розв'язання матричних рівнянь Вінера – Гопфа в задачах прикладної механіки. *Дослідження в математиці і механіці*. 2020. Т. 25, вип. 1(35). С. 62–81. URL: [https://doi.org/10.18524/2519-206x.2020.1\(35\).222345](https://doi.org/10.18524/2519-206x.2020.1(35).222345)

Information about the authors:

Dudyk Mykhailo Volodymyrovych,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Professor at Department of Physics and Integrative
Technologies of Natural Sciences
Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University
2, Sadova str., Uman, Cherkasy region, 20300, Ukraine

Reshitnyk Yuliia Volodymyrivna,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor at Department of Physics and Integrative
Technologies of Natural Sciences
Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University
2, Sadova str., Uman, Cherkasy region, 20300, Ukraine