

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

**ПРАКТИКУМ З РОЗВ'ЯЗУВАННЯ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ТА
ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ**

Навчальний посібник

Укладач Дудик Михайло Володимирович

Бровари
АНФ груп
2021

УДК 517.9(076)

П69

Рецензенти:

Годованюк Т. Л., доктор педагогічних наук, доцент, проректор з наукової роботи, професор кафедри вищої математики та методики навчання математики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини;

Дякон В. М., кандидат фізико-математичних наук, доцент, директор Уманської філії ПВНЗ "Європейський університет".

*Рекомендовано до друку вченою радою факультету фізики,
математики та інформатики Уманського державного
педагогічного університету імені Павла Тичини
(протокол № 3 від 28.10.2021 р.)*

П69 **Практикум** з розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь : навч. посіб. / МОН України, Уманський держ. пед. ун-т імені Павла Тичини ; уклад. М. В. Дудик. – Бровари : АНФ груп, 2021. – 107 с.

Посібник містить теоретичні відомості і приклади розв'язання задач з курсу "Диференціальні та інтегральні рівняння". Задачі упорядковані за окремими темами, що відповідають різним типам і методам розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь. До кожної теми підготовлено збірку задач наближено однакового рівня складності, що дозволяє використовувати посібник для забезпечення студентів індивідуальними домашніми завданнями.

Посібник призначений для викладачів при підготовці до практичних занять з курсу "Диференціальні та інтегральні рівняння" та для самостійної роботи студентів.

УДК 517.9(076)

© Дудик М. В., уклад., 2021

Зміст

Передмова	4
Опис навчальної дисципліни	5
Тема 1. Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь	14
Тема 2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними	21
Тема 3. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку	28
Тема 4. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами	35
Тема 5. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n -го порядку	43
Тема 6. Системи звичайних диференціальних рівнянь	57
Тема 7. Методи інтегрування систем диференціальних рівнянь	68
Тема 8. Інтегральні рівняння: класифікація та приклади застосування	80
Тема 9. Методи розв'язування лінійних інтегральних рівнянь	88
Тема 10. Інтегральні рівняння з виродженими ядрами. Теорема Фредгольма	97

ПЕРЕДМОВА

Метою посібника є ознайомлення студентів з основними типами звичайних диференціальних рівнянь та їх систем, інтегральних рівнянь, навчання методам їх розв'язування. Робота з посібником сприятиме вивченню дисципліни "Диференціальні та інтегральні рівняння", засвоєнню основних положень теорії, оволодінню методами, прийомами і способами розв'язування диференціальних рівнянь та їх систем, інтегральних рівнянь різного типу, що є передумовою успішного застосування набутих знань при оволодінні окремим дисциплінами науково-предметної підготовки здобувачів вищої освіти спеціальності Середня освіта з таких спеціалізацій як інформатика, математика, фізика та інші.

Посібник призначений для самостійної роботи студентів і складається з методичних рекомендацій та вказівок до 10 практичних занять, що відповідають навчальній програмі дисципліни. Приведено опис дисципліни за програмою, що впроваджена в Уманському державному педагогічному університеті імені Павла Тичини за освітніми програмами Середня освіта (Інформатика) і Середня освіта (Фізика).

Посібник містить значну кількість задач на самостійне опрацювання студентами, розв'язування яких дозволить закріпити їх знання основних положень теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, забезпечити набуття ними навичок розв'язування задач. На початку кожної теми викладено теоретичні основи і алгоритми розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь. Методичні вказівки і приклади розв'язування окремих задач. Кожна тема містить велику кількість однотипних задач для самостійного розв'язування, що дозволяє викладачу задавати кожному студенту індивідуальні домашні завдання. Для розв'язування задач, пропонованих в посібнику, потрібні ґрунтовні знання з курсів математичного аналізу, лінійної алгебри, комплексного аналізу і загальної фізики.

ОПИС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Найменування показників	Характеристика дисципліни за формами навчання
	денна
Вид дисципліни (обов'язкова чи вибіркова)	обов'язкова
Мова викладання, навчання та оцінювання	українська
Загальний обсяг у кредитах ЄКТС / годинах	3 / 90
Курс	3
Семестр	5
Кількість змістових модулів із розподілом:	2
Обсяг кредитів	3
Обсяг годин, у тому числі:	90
Аудиторні:	44
Лекційні:	24
Практичні:	20
Самостійна робота	46
Форма семестрового контролю:	екзамен

Мета і завдання дисципліни

Мета – ознайомлення та оволодіння сучасними методами розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь, їх застосування в математичному моделюванні.

Завдання – підготовка студентів до використання методів розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь в подальших навчальних курсах, сприяння розвитку логічного та аналітичного мислення студентів.

Результати навчання за дисципліною

По завершенню вивчення дисципліни "Диференціальні та інтегральні рівняння" студенти повинні:

знати: основні поняття теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, їх класифікацію, алгоритми розв'язування;

вміти: володіти методами, прийомами і способами розв'язування диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь і інтегральних рівнянь.

Програма навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку

Тема 1. Основні поняття теорії звичайних диференціальних рівнянь. Задачі, які приводять до диференціальних рівнянь. Основні означення й поняття. Складання диференціальних рівнянь виключенням довільних сталих.

Тема 2. Диференціальні рівняння 1-го порядку (загальна теорія). Основні означення й поняття. Задача Коші. Умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Класифікація розв'язків диференціального рівняння першого порядку. Геометричне тлумачення диференціального рівняння першого порядку та його розв'язків. Метод ізоклін. Механічне тлумачення диференціального рівняння першого порядку та його розв'язків.

Тема 3. Деякі класи диференціальних рівнянь першого порядку, інтегрованих у квадратурах. Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них. Однорідні рівняння. Рівняння, звідні до однорідних. Лінійні рівняння. Рівняння Бернуллі. Рівняння у повних диференціалах. Інтегрувальний множник.

Змістовий модуль 2. Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків

Тема 4. Диференціальні рівняння вищих порядків. Основні означення й поняття. Неповні рівняння. Однорідні рівняння. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n -го порядку. Властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння. Лінійно залежні та лінійно незалежні функції. Теорема про загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння. Формула Остроградського – Ліувілля.

Тема 5. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами. Основні означення й поняття. Метод Ейлера. Випадок простих характеристичних чисел. Метод Ейлера. Випадок кратних характеристичних чисел. Диференціальні рівняння, звідні до рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Застосування лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку.

Тема 6. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n -го порядку. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння. Метод варіації довільних сталих. Метод невизначених коефіцієнтів. Застосування лінійних неоднорідних рівнянь другого порядку до коливальних рухів.

Змістовий модуль 3. Системи звичайних диференціальних рівнянь

Тема 7. Системи звичайних диференціальних рівнянь (загальна теорія). Основні означення й поняття. Механічне тлумачення нормальної системи та її розв'язків. Зведення диференціального рівняння n -го порядку до нормальної системи й обернена задача. Лінійні однорідні системи.

Тема 8. Лінійні однорідні системи звичайних диференціальних рівнянь. Лінійно залежні та лінійно незалежні сукупності функцій. Формула Остроградського – Якобі. Теорема про побудову загального розв'язку лінійної однорідної системи. Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера.

Тема 9. Лінійні неоднорідні системи звичайних диференціальних рівнянь. Структура загального розв'язку лінійної неоднорідної системи. Метод варіації довільних сталих. Метод невизначених коефіцієнтів розв'язування лінійних систем зі сталими коефіцієнтами. Метод Д'Аламбера.

Змістовий модуль 4. Інтегральні рівняння

Тема 10. Інтегральні рівняння: класифікація та приклади застосування. Основні означення й поняття. Фізичні задачі, які приводять до інтегральних рівнянь. Зв'язок між інтегральними рівняннями та задачею Коші для звичайних диференціальних рівнянь.

Тема 11. Лінійні інтегральні рівняння. Метод послідовних наближень для рівняння Фредгольма. Метод послідовних наближень для рівняння Вольтерра. Метод ітерованих ядер для рівняння Фредгольма. Метод ітерованих ядер для рівняння Вольтерра.

Тема 12. Інтегральні рівняння з виродженими ядрами та інтегральні рівняння першого роду. Інтегральні рівняння Фредгольма другого роду з виродженими ядрами. Основні означення й поняття. Теорема Фредгольма. Інтегральні рівняння Фредгольма першого роду й інтегральні рівняння Вольтерри першого роду.

Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин					
	денна форма					
	усьо- го	у тому числі				
лек.		пр.	лаб.	інд.	сам.	
Змістовий модуль 1. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку						
Тема 1. Основні поняття теорії звичайних диференціальних рівнянь	8	2	2			4
Тема 2. Диференціальні рівняння 1-го порядку (загальна теорія)	8	2	2			4
Тема 3. Деякі класи диференціальних рівнянь першого порядку, інтегрованих у квадратурах	8	2	2			4
Всього:	24	6	6			12
Змістовий модуль 2. Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків						
Тема 4. Диференціальні рівняння вищих порядків	5	2				3
Тема 5. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами	8	2	2			4
Тема 6. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n -го порядку	8	2	2			4
Всього:	21	6	4			11
Змістовий модуль 3. Системи звичайних диференціальних рівнянь						
Тема 7. Системи звичайних диференціальних рівнянь (загальна теорія)	5	2				3
Тема 8. Лінійні однорідні системи звичайних диференціальних рівнянь	8	2	2			4
Тема 9. Лінійні неоднорідні системи звичайних диференціальних рівнянь	8	2	2			4
Всього:	21	6	4			11
Змістовий модуль 4. Інтегральні рівняння						
Тема 10. Інтегральні рівняння: класифікація та приклади застосування	8	2	2			4
Тема 11. Лінійні інтегральні рівняння	8	2	2			4
Тема 12. Інтегральні рівняння з виродженими ядрами та інтегральні рівняння 1-го роду	8	2	2			4
Всього:	24	6	6			12
Усього годин	90	24	20			46

Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	К-сть годин
1.	Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь	2
2.	Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними	2
3.	Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку	2
4.	Лінійні однорідні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами	2
5.	Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n -го порядку	2
6.	Системи звичайних диференціальних рівнянь	2
7.	Методи інтегрування систем диференціальних рівнянь	2
8.	Інтегральні рівняння: класифікація та приклади застосування	2
9.	Лінійні інтегральні рівняння	2
10.	Інтегральні рівняння з виродженими ядрами і теореми Фредгольма	2
Усього годин		20

Самостійна робота

Самостійна робота студента передбачає виконання студентом запланованих завдань під методичним керівництвом викладача, але без його безпосередньої участі. Метою самостійної роботи є засвоєння навчальної програми в повному обсязі та послідовне формування у студентів самостійності як риси характеру, що відіграє суттєву роль у формуванні сучасного фахівця вищої кваліфікації.

Основними формами самостійної роботи студента під час вивчення дисципліни «Диференціальні та інтегральні рівняння» є такі:

- опрацювання теоретичних основ прослуханого лекційного матеріалу;
- вивчення окремих тем або питань, що передбачені для самостійного опрацювання;
- підготовка до практичних занять та виконання домашніх робіт;
- систематика вивченого матеріалу курсу перед написанням тематичних контрольних робіт та підготовка до підсумкового контролю.

Питання, що передбачені для самостійного опрацювання при підготовці до лабораторних занять та модульного контролю

№ з/п	Назва теми	К-сть годин
1.	Основні поняття теорії звичайних диференціальних рівнянь	4
2.	Диференціальні рівняння 1-го порядку (загальна теорія)	4
3.	Деякі класи диференціальних рівнянь першого порядку, інтегрованих у квадратурах	4
4.	Диференціальні рівняння вищих порядків	3
5.	Лінійні однорідні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами	4
6.	Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n -го порядку	4
7.	Системи звичайних диференціальних рівнянь (загальна теорія)	3
8.	Лінійні однорідні системи звичайних диференціальних рівнянь	4
9.	Лінійні неоднорідні системи звичайних диференціальних рівнянь	4
10.	Інтегральні рівняння: класифікація та приклади застосування	4
11.	Лінійні інтегральні рівняння	4
12.	Інтегральні рівняння з виродженими ядрами та інтегральні рівняння 1-го роду	4
Усього годин		46

Методи контролю

Оцінювання навчальних досягнень студентів за всіма видами навчальних робіт проводиться за поточним, модульним та підсумковим контролюми. Поточний контроль знань студентів з навчальної дисципліни проводиться за результатами виконання домашніх завдань з розв'язування задач. Модульний контроль проводиться у тестовій формі на базі Інформаційно-освітнього середовища для студентів очної та заочної (дистанційної) форм навчання УДПУ (ІОСдСОтЗФН) в он-лайн режимі по завершенню вивчення відповідного модуля. Усі контрольні заходи включено до 100-бальної шкали оцінювання. Основними критеріями, що характеризують рівень компетентності студента при оцінюванні результатів поточного, модульного та підсумкового контролів з

навчальної дисципліни є:

- виконання всіх видів навчальної роботи, що передбачені робочою програмою навчальної дисципліни;
- глибина і характер знань навчального матеріалу за змістом навчальної дисципліни;
- характер відповідей на поставлені питання (чіткість, лаконічність, логічність, послідовність тощо);
- обґрунтування вибору методу для розв'язання тих чи інших задач;
- рівень вміння аналізувати та захищати одержані результати.

Критерії оцінювання результатів навчання

Поточний контроль полягає у оцінюванні виконання домашніх завдань з розв'язання задач за варіантами. Кожне домашнє завдання оцінюється за 5-бальною системою:

4 б. – вірний розв'язок з поясненням, точними ілюстраціями, без похибок;

3 б. – вірний розв'язок, у якому допущені несуттєві похибки;

2 б. – вірний в цілому розв'язок, який містить грубі похибки;

1 б. – розв'язок невірний, але містить вірні вихідні рівняння до розв'язання.

0 б. – розв'язки задач невірні або відсутні.

Модульний контроль здійснюється у вигляді незалежного комп'ютерного тестування засобами ІОСдСОтЗФН. Тест з кожного модулю складається з теоретичних питань, відповіді на які передбачають множинний вибір. Максимальна оцінка з кожного тесту складає 10 балів.

Підсумковий контроль проводиться у формі комп'ютерного тестування засобами ІОСдСОтЗФН УДПУ.

Розподіл балів, які отримують здобувачі вищої освіти

Поточне тестування та самостійна робота								Підсумковий контроль	Сума балів
ЗМ 1		ЗМ 2		ЗМ 3		ЗМ 4			
Т1–Т3	МК1	Т4–Т5	МК2	Т7–Т8	МК3	Т9–Т10	МК4		
12	10	8	10	8	10	12	10	20	100

Тп - тема п-го практичного заняття; МКп – модульний контроль з п-го змістового модуля

У екзаменаційній відомості результати навчання проставляються за двома шкалами – 100-бальною та національною.

Позитивні оцінки виставляються тільки тим студентам, які виконали всі види навчальної роботи, передбачені робочою програмою навчальної дисципліни, і набрали за результатами поточного та підсумкового контролів не менше 60 балів. Конвертація 100-бальної шкали у 4-х бальну здійснюється за наступною таблицею:

Шкала оцінювання: національна та ЄКТС

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою	
		для екзамену, курсового проекту (роботи), практики	для заліку
90-100	A	відмінно	зараховано
82-89	B	добре	
75-81	C		
69-74	D	задовільно	
60-68	E		
35-59	FX	незадовільно з можливістю повторного складання	не зараховано з можливістю повторного складання
1-34	F	незадовільно з обов'язковим повторним вивченням дисципліни	не зараховано з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

Рекомендована література

Основна

1. Кривошея С.А., Перестюк М.О., Бурим В.М. Диференціальні та інтегральні рівняння: Підручник. К.: Либідь, 2004. 408 с.

2. Перестюк М.О., Свіщук М.Я. Збірник задач з диференціальних рівнянь: Навч. Посібник К.: ТВіМС, 2004. 221 с.

3. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння в задачах: Навч. посібник. К.: Либідь, 2003. 504 с.

4. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння: Навч. посібник. К.: Либідь, 1994. 360 с.

5. Шкіль М.І., Лейфура В.М., Самусенко П.Ф. Диференціальні рівняння: Навч. посіб. для студ. мат. спец. вищ. навч. закл. К.: Техніка, 2003. 366 с.

6. Головач Г. П. , Калайда О. Ф. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь. К. : Техніка, 1997. 288 с.

Додаткова

1. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высш.шк., 1967. 564 с.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970. 332 с.
3. Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. М.: Лабор. базовых знаний, 2000. 344 с.
4. Шкіль М.І., Сотніченко М.А. Звичайні диференціальні рівняння. К.: Вища шк., 1992. 303с.

Інформаційні ресурси

1. Гой Т. П., Махней О. В. Диференціальні рівняння. Івано-Франківськ : Сімик, 2012. 356 с.
http://www.mif.pu.if.ua/attachments/article/14/deinf_el.pdf
2. Гой Т. П., Махней О. В. Диференціальні та інтегральні рівняння. Івано-Франківськ : Сімик, 2012. 356 с.
http://www.mif.pu.if.ua/attachments/article/14/physlec_el.pdf