МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

Математичний аналіз

Частина 1

Змістовий модуль 1: Вступ до аналізу.
Змістовий модуль 2: Диференціальне числення функції однієї змінної.

Навчальний посібник

Укладач Т. В. Поліщук

Умань
Візаві
2020

УДК 517(075.8)
М34

Укладач:
Поліщук Т. В., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики та методики навчання математики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини.

Рецензенти:
Селеванов М. Ф., доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України;
Хорошун А. С., доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України.
.

Рекомендовано до друку вченою радою факультету фізики, математики та інформатики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини (протокол № 4 від 29жовтня 2020 року)

М34 **Математичний** аналіз : навч. посіб. Ч. 1. Змістовий модуль 1 : Вступ до аналізу. Змістовий модуль 2 : Диференціальне числення функції однієї змінної / МОН України, Уманський держ. пед. ун-т імені Павла Тичини ; уклад. Т. В. Поліщук. – Умань : Візаві, 2020. – 155 с.

Навчально-методичний посібник містить основні теоретичні відомості з аналізу нескінченно малих, диференціального числення функції однієї змінної, детальні розвязки типових задач та набір завдань для поточного і модульного контролів. Посібник стане у нагоді здобувачам вищої освіти усіх форм навчання вищих педагогічних закладів освіти.

УДК 517(075.8)

Зміст

ВСТУП

Курс «Математичний аналіз» у педагогічному університеті, крім свого загальноосвітнього значення, має на меті формування у майбутнього вчителя широкого погляду на неперервну математику, яка грає велику роль у фундаментальній математичній підготовці – як в плані формування у здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня математичної культури, так і в плані формування в них наукового світогляду і особливо у розумінні сутності прикладної практичної спрямованості навчання математики, оволодіння методами математичного моделювання, вміння здійснювати міжпредметні зв’язки. Крім того даний курс повинен дати наукове обґрунтування відповідних понять, які вивчаються в закладах загальної середньої освіти, ознайомити майбутнього вчителя математики з методами викладання найбільш складних питань шкільного курсу математики та прищепити необхідні практичні навички.

Навчальна дисципліна «Математичний аналіз» освітньо-професійними програмами Середня освіта (Математика), Середня освіта (Математика. Інформатика), Середня освіта (Інформатика), Середня освіта (Фізика) та Середня освіта (Фізика. Інформатика) для спеціальностей 014 «Середня освіта» (за предметними спеціальностями 04 Математика, 08 Фізика та 09 Інформатика) визначена як обовязкова дисципліна, що забезпечує професійну та практичну підготовку студентів.

Програма навчальної дисципліни включає основні розділи курсу математичного аналізу, вивчення яких необхідне для оволодіння сучасним математичним апаратом із метою подальшого його застосування при вивченні математичних і фізичних дисциплін, а також при проведенні самостійних наукових досліджень. По завершенню вивчення курсу студенти повинні:

знати: основні поняття та теоретичні положення математичного аналізу;

вміти: володіти теоретико-множинною і логічною символікою, основними поняттями математичного аналізу, володіти методами і прийомами обчислення границь, вміти досліджувати властивості функцій, володіти методами і прийомами диференціального числення функцій, володіти методами і прийомами інтегрального числення функцій, вміти досліджувати властивості рядів.

Навчальний посібник створено у відповідності до робочих програми дисципліни «Математичний аналіз», спеціальностей та оп зазначених вище з метою організації аудиторної і самостійної роботи здобувачів вищої педагогіної освіти за фізико-математичним напрямом.

Користування посібником повинно допомогти студентам у набутті компетентностей, що зазначені у вдповідних програмах, а також у розширенні та поглибленні їх наукового світогляду, у оволодінні ними умінь працювати самостійно, застосовувати набуті знання у подальшій професійній діяльності.

Посібник складається з двох розділів: «Змістовий модуль 1. Вступ до аналізу», «Змістовий модуль 2. Диференціальне числення функції однієї змінної». Кожен модуль включає короткі теоретичні відомості, які супроводжуються розглядом прикладів та практичні індивідуальні завдання до кожної теми з прикладами розв‘язування вправ, які полегшують розуміння теоретичного матеріалу, й можуть бути зразками на практичних заняттях. У кінці наведено завдання для модульного контролю. Параметр k, що входить в умови завдань дозволяє зробити їх багатоваріантними для кожної студентської групи (для першої групи $k=1$, для другої $k=2$ і т.д.). Така деталізація сприятиме якіснішому засвоєнню студентами навчального матеріалу, особливо при самостійному його опрацюванні.

Посібник розрахований на студентів усіх форм навчання. Він буде корисним також усім, чия практична діяльність пов’язана з математикою.

Посібник рекомендується використовувати разом з іншими підручниками і посібниками, зокрема тими, що наведені у списку рекомендованої літератури.

Змістовий модуль 1. Вступ до аналізу.

Тема 1. Множина. Операції над числовими множинами. Дійсні числа.

1.1. Множини. Логічні символи.

Точного строгого означення множини немає. Інтуїтивно множина – це сукупність об’єктів, об’єднаних за певного ознакою. Об’єкти, з яких складається множина, називаються її елементами.

Множина вважається заданою, якщо відома характеристика її елементів, коли про кожний елемент можна сказати, належить він цій множині чи ні.

Множина, яка містить скінчену кількість елементів називається *скінченою*.

$A=\{a_1;a_2;...;a_n\}$ - множина скінчена і містить n елементів.

$x=\{x_1;x_2;x_3;...;x_n;...\}$ - множина *нескінченна*, містить нескінченну кількість елементів. Множина, яка не містить жодного елемента, називається *порожньою* і позначається символом $\varnothing$.

Наприклад, множина дійсних коренів рівняння $x^2+1=0$ є порожньою $\varnothing$.

Якщо кожен елемент множини *A* є елементом множини *B*, то множину *A* називають *підмножиною* множини *B* і пишуть $A\subseteq B$ ($B\supseteq A$).

Якщо *A і B* містять однакові елементи, то їх називають *рівними* $A=B$, $A\subset B$, $(B\supset A)$.

Якщо множина *C* містить елементи, кожен з яких належить множині *A* або множині *B*, то множину *C* називають *об’єднанням* (сумою) множин *A, B:* $C=A\cup B$.

Отже, $a\in C\Leftrightarrow a\in A\cup B\Leftrightarrow a\in A$ або $a\in B$.

Множину D, що складається з елементів, кожен з яких належить множинам *A і B*, називають *перерізом* (добутком) множин *A і B*:

$D=A\cap B$, $a\in D\Leftrightarrow a\in A\cap B\Leftrightarrow a\in A$ і $a\in B$.

Множину *E*, що складається з елементів, кожен з яких належить множині *A* і не належить множині *B*, називають *різницею* множин *A і B* і позначають $E=A\setminus B$: $\exists$ існує, $\forall$ - для будь-якого.

Нехай $P(x)$ - деяка властивість числа x, тоді запис $\{x \mid P(x)\}$ означає множину всіх тих чисел, для яких виконується властивість $P(x)$.

Наприклад, $\{x \mid x^2 - 1 = 0\} = \{-1;1\}$, $\{x \mid x < 1, x > 5\} = \varnothing$.

1.2. Дійсні числа, числова вісь, інтервал, абсолютна величина.

У курсі математичного аналізу використовують множини, елементами яких є *числа*. Такі множини називають *числовими*. Серед числових множин насамперед виділимо такі:

- множина натуральних чисел $N = \{1,2,3,4,\ldots,n,\ldots\}$
- множина цілих чисел $Z = \{0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm n,\ldots\}$
- множина раціональних чисел $Q = \left\{\frac{p}{q}\right\}$, де p - ціле число ($p \in Z$), q - натуральне ($q \in N$).

Раціональними числами також називають числа, які можна записати у вигляді нескінченого періодичного десяткового дробу. Між цими множинами існує такий зв'язок: $N \subset Z \subset Q$. Історія виникнення числових множин: натуральні $\to$ цілі $\to$ раціональні.

Проте згодом виявилось, що множини раціональних чисел не досить навіть для того, щоб виміряти довжину довільного відрізка прямої; тобто є відрізки, довжини яких неможна виразити жодним раціональним числом. Класичним прикладом такого відрізка є діагональ квадрата із стороною 1.

Справді, нехай сторона квадрата дорівнює 1, тобто є одиницею вимірювання. Припустимо, що довжина діагоналі такого квадрату визначається раціональним числом $\frac{p}{q}$, де p – ціле число q - натуральні числа. Дріб $\frac{p}{q}$ вважається нескоротним (інакше його можна було б скоротити). Тоді за теоремою Піфагора маємо:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2, \text{ або } p^2 = 2q^2 \tag{1.1}$$

Отже, число p^2, а тому і p – парне ($p = 2k$), де k - ціле число. Припустимо, що p - непарне ($p = 2n+1$), тоді $p^2 = 4n^2 + 4n + 1$ - непарне.

Згідно з рівністю (1.1) $4k^2 = 2q^2$, або $q^2 = 2k^2 \Rightarrow q$ - парне число, що суперечить нескоротності дробу $\frac{p}{q}$. Цим самим доведено, що довжину діагоналі квадрата, сторона якого дорівнює 1, не можна виразити раціональним числом. Тому довжина діагоналі квадрата виражається ірраціональним числом $\sqrt{2}$.

Ірраціональними числами також називають числа, які можна записати у вигляді нескінченого неперіодичного десяткового дробу.

Ірраціональні числа і числа раціональні утворюють множину дійсних чисел (R).

Дійсні числа зображують точками на нескінченій числовій прямій.

Можна довести, що будь-якому дійсному числу відповідає єдина точка числової осі і навпаки. Цим самим між множиною дійсних чисел та точками числової прямої встановлено взаємно однозначну відповідність.

Нехай a і b довільні точки числової прямої, $a < b$. Множину всіх точок *X*, які задовольняють нерівності $a \le x \le b$ називають *відрізком* і позначають $[a,b]$. Множину всіх точок *X*, які задовольняють нерівності $a < x < b$ називають *інтервалом* і позначають $(a;b)$. Множину всіх точок x, які задовольняють нерівностям $a \le x < b$ і $a < x \le b$ називають *півінтервалом* і позначають відповідно $[a;b)$, $(a;b]$. Точки a і b називають лівим і правим кінцями точкових множин. Зауважимо, що відрізку $[a;b]$ належать обидва його кінці *a і b*, інтервалу $(a;b)$ жоден з його кінців *a і b* не належить. Півінтервалам $(a;b]$, $[a;b)$ належить один з кінців.

Символічно означення числових множин можна записати ще й так:

$[a;b]=\{x \mid a \le x \le b\}$	$(a;b)=\{x \mid a < x < b\}$
$[a;b)=\{x \mid a \le x \le b\}$	$(a;b]=\{x \mid a < x \le b\}$

Число $b-a$ називають довжиною відрізку $[a;b]$. Множини $[a;b], (a;b), [a;b), (a;b]$ називають ще *проміжками*.

Ми розглядатимемо також і нескінченні проміжки, використовуючи для цього символи $-\infty$, $+\infty$.

Множина всіх дійсних чисел позначається інтервалом $(-\infty;+\infty)$.

$$x < a \Rightarrow x \in (-\infty;a),\ x \le a \Rightarrow x \in (-\infty;a]$$
$$x > a \Rightarrow x \in (a;+\infty),\ x \ge a \Rightarrow x \in [a;+\infty)$$

Символи $-\infty, +\infty$, точки a, b називають кінцями нескінченних проміжків.

Околом точки a називають довільний інтервал (α, β), якій містить точку a, тобто $\alpha < a < \beta$.

Наприклад, околом точки $\frac{1}{2}$ є інтервали $(0;3)$, $\left(\frac{1}{4};1\right)$, $(-3;3)$.

Інтервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ називають ε - околом, де a - довільне дійсне число, яке називають центром, а число $\varepsilon > 0$ - радіусом околу. Цей окіл називають досить малим, якщо число $\varepsilon > 0$ досить мале.

Абсолютна величина дійсного числа a (модуль) позначається так $|a|$ та визначається таким чином:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \geq 0 \\ -a, \text{ якщо } a < 0 \end{cases}$$ (алгебраїчне означення)

За означенням випливає:

1. $|a| = |-a|$, $a \leq |a|, -a \leq |a|$ (число не більше свого модуля).

Нерівність $|a| < M$ рівносильна двом нерівностям $-M < a < M$.

Нерівність $|a| > M$ рівносильна сукупності двох нерівностей $a > M$ та $a < -M$.

2. Абсолютна величина суми двох чисел не більше суми абсолютних величин доданків $|a+b| \leq |a| + |b|$.
3. Абсолютна величина різниці двох чисел не менше різниці абсолютних величин цих чисел $|a-b| \geq |a| - |b|$.

5. $|ab| = |a| \cdot |b|$. 6. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Користуючись поняттям модуля ε- окіл точки a записується у вигляді $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon \Leftrightarrow (a-\varepsilon; a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x-a| < \varepsilon$.

Властивості модуля дійсного числа

$a = b \Rightarrow \|a\| = \|b\|$	$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
$\|x-y\| \geq \|x\| - \|y\|$	$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
$\|x : y\| = \|x\| : \|y\| \quad y \neq 0$	
$\|x\| \geq x; \quad \|x\| = \|-x\|$	
$\|x\| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$	
$\|x\| \leq a \Leftrightarrow x \geq a, \; x \leq -a$	

1.3. Основні властивості множини дійсних чисел.

На множині дійсних чисел завжди виконуються основні арифметичні операції: додавання, віднімання, ділення, крім ділення на 0. Корінь непарного степеня з довільного дійсного числа має завжди одне певне значення. Корінь парного степеня з додатного числа має два значення, які відрізняються тільки знаком. Корінь парного степеня з від'ємного числа не має змісту на множині дійсних чисел.

Будь-яке дійсне число можна зобразити у вигляді десяткового дробу, при цьому раціональні числа зображаються дробами, а ірраціональні числа – нескінченними *неперіодичними* дробами.

Алгебраїчні властивості дійсних чисел

На множині дійсних чисел визначено операцію додавання, що задовольняє таким аксіомам:

1. $\forall a,b \in R, a+b \in R$,
2. $a+b=b+a$,
3. $a+(b+c)=(a+b)+c$,
4. $\exists 0: \forall a \in R, a+0=a$,
5. $\exists(-a): \forall a \in R \; a+(-a)=0$.

На множині дійсних чисел визначено операцію множення, що задовольняє таким аксіомам:

1. $\forall a,b \in R \; a \cdot b \in R$,
2. $a \cdot b = b \cdot a$ (комутативність),
3. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (асоціативність),
4. $\exists 0: \forall a \in R \; a \cdot 0 = 0$,
5. $\exists \left(1/a \right): \forall a \in R \; a \cdot 1/a = 1, \; a \cdot a^{-1} = 1$,
6. $a(c+b)=ac+ab$ (дистрибутивність).

Відношення порядку

На множині дійсних чисел вводится відношення порядку (≤), тобто $(a \le b) \Leftrightarrow (a=b) \cup (a<b)$, що задовольняє таким аксіомам:

1. $\forall a,b$ воконується $(a \le b) \cup (b \ge a)$,
2. $a \le a$,
3. $(a \le b) \cap (b \le a) \Leftrightarrow (a=b)$,
4. $(a \le b) \cap (b \le c) \Rightarrow (a \le c)$,
5. $\forall c \in R \; (a \le b) \Rightarrow a+c \le b+c$,
6. $(a \ge 0) \cap (b \ge 0) \Rightarrow ab \ge 0$.

З цих аксіом слідує, що для будь-якого a и $b \in R$, виконуються три випадки:

1. $a<b$. *2.* $a=b$. *3.* $b<a$.

Абсолютна та відносна похибки

Якщо $a\,(a \neq 0)$ є точне значення величини, що вимірюється, а x - наближене значення цієї величини, то $\Delta = |x - a|$ називається *абсолютною похибкою,* а $\delta = \dfrac{\Delta}{|a|}$ - відносною похибкою величини, що вимірюється.

Кажуть, що число x має n *вірних знаків*, якщо абсолютна похибка цього числа не перевищує половини одиниці розряду, що виражається n-ю значущою цифрою.

1.4. Метод математичної індукції.

Щоб довести, що деяка теорема дійсна для будь-якого натурального числа n, достатньо довести, що:

а) дана теорема справедлива для $n=1$,

б) якщо ця теорема справедлива для довільного натурального числа n, то вона справедлива і для наступного натурального числа $n+1$.

1.5. Обмежені числові множини. Точні межі множини.

Означення 1.1. Точка x є внутрішньою точкою множини X, якщо вона належить їй разом з деяким своїм околом;

(*наприклад*, кожна точка інтервалу $(a;b)$ є його внутрішнього точкою) внутрішніми точками $[a;b]$ є всі точки цього відрізку за виключенням лише точок a і b.

Означення 1.2. Якщо в довільному околі точки x міститься нескінченна множина точок з множини X, то точку x називають *граничною точкою* цієї множини.

Наприклад, кожна точка інтервалу $(a;b)$ є граничною точкою для нього. Граничними точками цієї множини є також точки a і b (кінці інтервалу), які йому не належать). Кожна точка відрізка $[a;b]$ є також його граничного точкою. У тому числі точки a і b також є граничними точками).

Таким чином, гранична точка множини може як належати, так і не належати цій множині.

Нехай задано непорожню множину A дійсних чисел.

Означення 1.3. Множина A називається обмеженою *зверху*, якщо існує таке дійсне число M, що для кожного елементу x множини A, $x \in A$, виконується нерівність $x \le M$.

$$\exists M \in R, \forall x \in A \quad x \le M.$$

Множина A називається обмеженою *знизу*, якщо існує таке дійсне число m, що для кожного елемента $x \in A$ виконується нерівність $x \ge m$.

$$\exists m \in R, \forall x \in A x \ge m.$$

При цьому число M називають *верхньою межею* множини A, а число m - *нижньою межею* цієї множини.

Очевидно, що довільна обмежена зверху множина A має безліч верхніх меж. Аналогічна довільна обмежена знизу множина A має безліч нижніх меж. Справді, якщо M - верхня межа множини A, то й довільне число $M_1 > M$ є також верхньою межею множини A.

Наприклад, множина натуральних чисел $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ обмежена знизу, оскільки нижньою межею цієї множини є довільне число m, яке задовольняє нерівність $m \le 1$.

Означення 1.4. Найменшу верхню межу непорожньої обмеженої зверху множини дійсних чисел A називають точкою верхньою межею цієї множини і позначають $\sup A$ (верхня грань) $\sup A$ - супремум (лат.) – найвище.

Означення 1.5. Найбільше нижню межу непорожньої обмеженої знизу множини дійсних чисел A називають точкою нижньою межею цієї множини і позначають $\inf A$ (нижня грань), $\inf A$ - інфімум (лат.) – найнижче, найменше.

Наприклад, $A_1 = \{0, -1, -4, \ldots, -n^2, \ldots\}$ обмежена зверху і має верхню грань $\sup A_1 = 0$, яка належить цій множині. $A_2 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$ -

обмежена зверху і знизу. Причому $\sup A = 1$, $\inf A = \frac{1}{2}$. Верхня грань не належить множині, а нижня належить.

З означенням верхньої та нижньої меж випливає, що обмежена зверху непорожня множина має скільки завгодно верхніх меж, а обмежена знизу непорожня множина має скільки завгодно нижніх меж.

Теорема 1.1. Якщо непорожня множина дійсних чисел *обмежена зверху (знизу)*, то вона має *точну верхню (точну нижню)* межу.

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Записати елементи таких множин:

а) $A = \{x | x \epsilon \mathrm{N},\ x^2 \le 16\}$, б) $B = \left\{ x \middle| x\epsilon \mathrm{Z},\ (x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-7) = 0 \right\}$.

Розв'язок:

а) $x^2 \le 16$,

$A = \{1,2,3,4\}$,

б) $(x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right)(x-7) = 0$

$x = -1,\ x = \frac{3}{2},\ x = 7$

$B = \{-1; 7\}$.

Приклад 2. Записати множини, що задані переліком елементів за допомогою характеристичної властивості:

а) A={5,10,15,20,25},

б) B={1,4,10,16}

Розв'язок:

а) A={x| x є N, $x \vdots 5,\ x \le 25$*}*

б) B={x| x є N, x^2 *не≥16}*

Приклад 3. Знайти $A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B$, якщо *A={1, 2, 3, 4, 7, 8}* та *B={1, 2, 3, 5, 9}*.

Розв'язок:

$A \cup B$={1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9}, $A \cap B$={1, 2, 3}, $A \setminus B$={4, 7, 8}.

Приклад 4. Знайти $A \bigcup B,\ A \bigcap B,$ *A/B,* якщо $A = \{x | x \in N, 0 < x < 3\}$, *(A={1, 2})* та $B = \{x | x \in N, 1 \le x \le 4\}$, *(B={1, 2, 3, 4})*.

Розв'язок: $A \bigcup B$*={1, 2, 3, 4}, B\A={3, 4},* $A \bigcap B$*={1, 2}, A\B=Ø.*

Приклад 5. Записати у вигляді звичайних дробів раціональні числа.

$2{,}075=2\frac{75}{1000}=2\frac{3}{40}$;

$5{,}(82)=5\frac{82}{99}$;

$10{,}752=10\frac{752}{1000}$.

Приклад 6. Розв'язати нерівність $|x\text{-}3|=9$.

Розв'язок:

$$\begin{cases} |x-3|>0 \\ x-3=9 \end{cases} \qquad \begin{cases} -|x-3|<0 \\ -x+3=9 \end{cases}.$$

Отже, $x=12$, $x=6$.

Приклад 7. Довести, що $1+3+5+\ldots(2n-1)=n^2$.

Розв'язок: Покажемо, що дана рівність виконується для $n=1$:

$$2\text{-}1=1^2,\ 1=1.$$

Покажемо, що дана рівність виконується для $n+1$:
$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2n-1)}_{n^2}+(2(n+1)-1)=(n+1)^2$,

$n^2+2n+2-1=(n+1)^2$,

$n^2+2n+1=(n+1)^2$,

$(n+1)^2=(n+1)^2$.

Приклад 8. Довести, що якщо $n>2$ і $x>0$, то справедлива нерівність $(1+x)^n>1+nx$.

Розв'язок: При $n=2$ нерівність справедлива, оскільки $(1+x)^2=1+2x+x^2>1+2x$. Покажемо, що дана нерівність справджується при будь яких n. Спочатку покажемо, що нерівність справджується при $n+1$: $(1+x)^{n+1}>1+(n+1)x$.

Справді, помноживши обидві частини нерівності на додатнє число $(1+x)$, отримаємо:

$$(1+x)^{n+1}>(1+nx)(1+x).$$

Розглянемо праву частину останньої нерівності, маємо $(1+nx)(1+x)=1+(n+1)x+nx^2>1+(n+1)x$.

Отже, $(1+x)^{n+1}>1+(n+1)x$.

На підставі принципу математичної індукції можна стверджувати, що нерівність Бернуллі справедлива для будь-якого $n>2$.

Приклад 9. Довести, для будь якого натурального *n>6* справедлива нерівність $3^n > n2^{n+1}$.

Розв'язок: Перепишемо нерівність у вигляді $\left(\frac{3}{2}\right)^n > 2n$.

При *n=7* маємо $\left(\frac{3}{2}\right)^7 = 2187/128 > 2\cdot 7 = 14$. Нерівність вірна.

Припустимо, що *n=к*. Тоді $\left(\frac{3}{2}\right)^k > 2k$.

Припустимо, що *n=к+1.*

Тоді $\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^k > 2(k+1) = 2k\cdot\frac{3}{2} = 3k > 2(k+1)$.

Оскільки *к>7,* то справедливість останньої нерівності стає очевидною. В силу математичної індукції нерівність справедлива для будь-якого натурального *n*.

Приклад 10. Довести, що будь-якому натуральному *n* число n^3+11n ділиться на 6.

Розв'язок: Позначимо число $n^3+11n = a_n$. Потрібно довести, що a_n ділиться на 6 при будь-якому натуральному *n :*

$$n=1 \Rightarrow a_1 = 1^3 + 11\cdot 1 = 12 : 6 \text{ (істина)};$$

$$n=k \Rightarrow a_k = (k^3 + 11\cdot k) : 6 \text{ (припущення)};$$

$$n=k+1 \Rightarrow a_{k+1} = (k+1)^3 + 11\cdot(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11 =$$

$$= k^3 + 3k^2 + 14k + 12 = \left(k^3 + 11k\right) + (3k^2 + 3k + 12)$$

$$\left(k^3 + 11k\right) : 6 \text{ згідно з припущенням},$$

$$(3k^2 + 3k + 12) : 3.$$

Якщо ми зможемо довести, що $(3k^2 + 3k + 12) : 2$, тоді ми зможемо стверджувати, що $(3k^2 + 3k + 12) : 6$. Оскільки 2 і 3 взаємо прості числа. Проведемо це доведення методом математичної індукції:

1. $k = 1 \Rightarrow 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 12 = 18 : 2$.
2. $k = s \Rightarrow 3\cdot(s+1)^2 + 3\cdot(s+1) + 12 = 3s^2 + 6s + 3 + 3s + 3 + 12 =$
   $= (3s^2 + 3s + 12) + (6s + 6)$.

$(3s^2+3s+12):2$ за припущенням,

$(6s+6):2$ за властивостями подільності.

Тоді $(3s^2+3s+12)+(6s+6):2$ за властивістю подільності.

Отже, $(3k^2+3k+12):3$ і $(3k^2+3k+12):2$.

Тому $(3k^2+3k+12):6$.

Відповідно методу математичної індукції, ми можемо говорити, що число n^3+11n при будь-якому натуральному n ділиться на 6.

Приклад 11. Довести, що будь-якому натуральному n виконується нерівність $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$.

Розв'язок: Позначимо ліву частину нерівності через S_n.

$S_2=\frac{7}{12}=\frac{14}{24}$, тому при *n=2* нерівність виконується.

Нехай $S_k>\frac{13}{24}$ при дечкому *k*. Доведемо, що і $S_{k+1}>\frac{13}{24}$.

Маємо $S_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}$,

$S_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+..+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$.

Порівнявши S_k и S_{k+1}, маємо

$S_{k+1}-S_k=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}$, тобто $S_{k+1}-S_k=\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}$.

При будь-якому натуральному *k* права частина останньої рівності додатня. Тому $S_{k+1}>S_k$. Але $S_k>\frac{13}{24}$, тоді і $S_{k+1}>\frac{13}{24}$.

Приклад 12. Довести, що будь-якому натуральному *n>1* виконується нерівність $2^{n-1}(a^n+b^n)>(a+b)^n$, где $a+b>0$, $a\neq b$.

Розв'язок: При *n=2* нерівність приймає вигляд $2(a^2+b^2)>(a+b)^2$. Оскільки $a\neq b$, то справедлива нерівність $(a-b)^2>0$. Додаємо до кожної із частин нерівності додатне число $(a+b)^2$, отримаємо нерівність $2(a^2+b^2)>(a+b)^2$.

Так ми довели, що при *n=2* нерівність $2^{n-1}(a^n+b^n)>(a+b)^n$, виконується.

Нехай нерівність $2^{n-1}(a^n+b^n)>(a+b)^n$, справедлива при *n=k*, где *k* – деяке натуральне число, тобто $2^{k-1}(a^k+b^k)>(a+b)^k$. Доведемо, що нерівність $2^{n-1}(a^n+b^n)>(a+b)^n$, справедлива і при *n=k+1,* тобто $2^k(a^{k+1}+b^{k+1})>(a+b)^{k+1}$. Помножимо обидві частини нерівності $2^{k-1}(a^k+b^k)>(a+b)^k$ на $a+b$. Оскільки за умову $a+b>0$, то отримуємо справедливу нерівність $2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b)>(a+b)^{k+1}$.

Для того щоб довести справедливість нерівності $2^k(a^{k+1}+b^{k+1})>(a+b)^{k+1}$достатньо показати, що

$$2^k(a^{k+1}+b^{k+1})>2^{k-1}(a^k+b^k)(a+b),$$

а бо ж ,

$$a^{k+1}+b^{k+1}>a^k b+ab^k.$$

Остання нерівність рівносильна нерівності $(a^k-b^k)(a-b)>0$.

Якщо $a>b$, то $a^k>b^k$, то в лівій частині нерівності $(a^k-b^k)(a-b)>0$ маємо добуток двох додатніх чисел.

Якщо $a>b$, то $a^k>b^k$, то в лівій частині нерівності $(a^k-b^k)(a-b)>0$ маємо добуток двох від'ємних чисел.

В обох випадках нерівність $(a^k-b^k)(a-b)>0$ справедлива.

Отже, ми довели, що із справедливості нерівності $2^{n-1}(a^n+b^n)>(a+b)^n$, при $n=k$ слідує її справедливість при $n=k+1$.

Приклад 13. Записати правило, за яким можна вирахувати число *P(n)* способів, якими опуклий *n*-кутник можна розбити на трикутники діагоналями, які не перетинаються.

Розв'язок: Очевидно, що для трикутника це число дорівнює одиниці: *P(3)*=1. Припустимо, що ми вже визначили числа *P(k)* для всіх *k<n*; Знайдемо значення числа для випадку *P(n).* Розглянемо опуклий *n*-кутник $A_1A_2...A_n$. При будь-якому розбиття його на трикутники сторона A_1A_2 завжди буде стороною одного із трикутників розбиття, третя вершина цього трикутника може співпасти з кожною із точок A_3, A_4, ...,A_n. Число способів розбиття *n*-кутника, при яких ця вершина співпаде із точкою A_3, дорівнює числу способів розбиття на трикутники *(n-1)*-кутника $A_1A_3A_4...A_n$, тобто дорівнює *P(n-1).* Число способів розбиття, при яких ця вершина співпаде із точкою A_4, дорівнює числу способів розбиття на трикутники *(n-2)*-кутника $A_1A_4A_5...A_n$, тобто дорівнює *P(n-2)=P(n-2)P(3)*; число способів розбитів при яких вона співпаде із точкою A_5, дорівнює *P(n-3)P(4),* оскільки кожне розбиття *(n-3)*-кутника $A_1A_5...A_n$, при цьому, можна комбінувати із кожним розбиттям чотирикутника $A_2A_3A_4A_5$, і т. д.

Таким чином приходимо до наступного співвідношення:

$$P(n)=P(n-1)+P(n-2)P(3)+P(n-3)P(4)+...+P(3)P(n-2)+P(n-1).$$

За допомогою цієї формули отримуємо:
P(4)=P(3)+P(3)=2,
P(5)=P(4)+P(3)P(3)+P(4)+5,
P(6)=P(5)+P(4)P(3)+P(3)P(4)+P(5)=14 і т. д.

Приклад 14. Знайти $\inf a_n$, $\sup a_n$ послідовності $a_n = 1 - \frac{1}{n}$.

Розв'язок: Очевидно, що $0 \le a_n \le 1$. Крім того, $a_1 = 0$. Тому $\inf a_n = \min a_n = 0$. Доведемо, що $\sup a_n = 1$. Для будь-якого $\forall \varepsilon > 0$ існує таке натуральне число *n*, що $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Отже, $\frac{1}{n} < \varepsilon$ і $a_n = 1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$.

Індивідуальні завдання для поточного контролю

1–5. Застосовуючи метод математичної індукції, довести, що для довільного натурального числа *n* мають місце такі співвідношення:

1. $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.
4. $1 + x^n \ge 1 + nx, x > -1$.
5. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

6 - 9. Знайти розв'язки рівнянь.

6. $\left|x^2 - 4x + 3\right| = 7$.
7. $\left|-2x^2 + 3x - 9\right| = 2$.
8. $\left|\frac{3x-2}{x+2}\right| = 1$.
9. $\left|\frac{2x-3}{x+1}\right| = 2$.

10 – 15. Множини, що задані характеристичною властивістю записати переліком їх елементів.

10. $A = \{x \in R | 2\sin 3x = 1, 0 < x < \pi\}$.
11. $A = \{x \in N | x^2 - 3x - 4 \le 0\}$
12. $A = \left\{x \in Z \middle| \frac{1}{9} < 3^x \le 27\right\}$.
13. $A = \{x \in N | 2 \le \log_2 x \le 3\}$.
14. $A = \{x \in R | tg 2x = 1, 0 < x < 2\pi\}$.
15. $A = \{x \in Z | 2^{|x-1|} < 5\}$

16 – 19. Розв'язати рівняння .

16. $|x+1| - 2 = 0$.
17. $2|x+3| + 1 = 0$.
18. $|2x-3| = 3x + 2$.
19. $|3x-1| = 5 - 2x$.

20 – 25. Розв'язати нерівності :

20. $|x| > |x+1|$.

21. $|2x-1| < |x-1|$.

22. $|x+2| + |x-2| \le 12$.

23. $|x+2| - |x| > 1$.

24. $||x+1| - |x-1|| < 1$.

25. $|x(1-x)| < 0{,}05$.

Тема 2. Властивості елементарних функції. Перетворення графіків функцій.

2.1. Сталі і змінні величини.

При розгляді кількісних співвідношень реального світу доводиться стикатися з чисельними значеннями різноманітних фізичних та геометричних величин, як, наприклад, часу, температури, об'єму, довжини, тиску, густини та інш.

У залежності від розглядуваних умов одні величини мають сталі чисельні значення, в інших ці значення змінюються. Такі величини називаються відповідно *сталими і змінними* в даних умовах.

Величини, які набувають сталі чисельні значення тільки у певних умовах називають *параметрами*.

Наприклад, у рівнянні прямої $y = kx + b$ числа k і b - є параметрами.

Величини, які зберігають сталі чисельні значення незалежно від умов задачі називають *абсолютно сталими*.

Наприклад, атомна маса елемента, величина прямого кута і т. д. З такими величинами, які в умовах певного питання можуть набувати різних числових значень, ми часто зустрічаємось у математичному аналізі.

Про величину x говоритимемо, що вона є *змінна,* якщо множина її числових значень X складається більш як з одного елемента. Сама множина X називається *областю зміни* змінної величини.

Сталу величину (просто сталу) зручно розглядати як такий частинний випадок змінної, коли множина значень, які вона може набувати, складається з одного елемента.

2.2. Залежність між змінними.

При дослідженні різних явищ природи і розв'язанні різних технічних задач нам доводиться розглядати змінні величини не окремо, а в їх зв'язку між собою: якщо одній із змінних (незалежній) надали конкретне значення, то тим самим визначається і значення другої змінної (залежної або функції).

Наприклад, площа круга Q залежить від її радіуса та $Q = \pi R^2$. Отже, Q є функція від радіуса R. У випадку вільного падіння при відсутності опору час t і шлях S, який пройдено за цей час, зв'язані рівнянням $S = \frac{gt^2}{2}$.

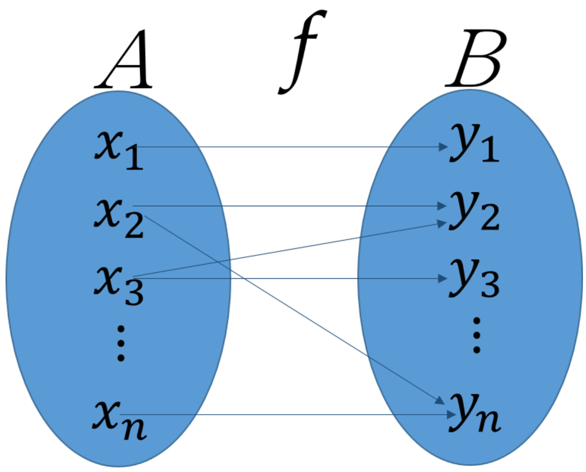
Отже, шлях S є функцією від часу t.

Хоча в кожному з наведених прикладів розглядаються різні процеси, спільним є те, що кожен з них описується певною залежністю двох змінних. При цьому одна з величин R, t змінюється незалежно, а друга Q, S набуває значень залежно від значень першої. Про такі змінні кажуть, що вони функціонально залежні. Тут і незалежні і залежні змінні є дійсні числа. Зазначимо, що у наведених прикладах кожному значенню незалежної змінної відповідає одне і тільки одне значення залежної змінної.

2.3. Означення функції.

Означення 2.1. Нехай A і B - деякі множини. Якщо є закон f, за яким кожному елементу $x \in A$ можна поставити у відповідність один і тільки один елемент $y = B$, то кажуть, що задано функцію (відображення), визначену на множині A із значеннями у множині B.

Термін *«функція»* вперше ввів німецький філософ і математик Готфрід Лейбніц (1646-1716р.р.).



Той факт, що закон f елементу $x \in A$ ставить у відповідність елемент $y \in B$, записують так $y = f(x)$ дивися рисунок (позначення вперше ввів Леонард Ейлер(1707-1783р.р.)). Змінна x називається незалежною змінною, або аргументом. Змінна y – залежною змінною, або функцією.

Таким чином, термін «функція» має два тлумачення «функція» – залежність і «функція» – залежна змінна.

Множину A при цьому називають *областю визначення функції* (множина значень, які може набувати аргумент x). Позначається $D(f)$

Множина значень, які набуває змінна y (залежна змінна) називається *областю значень функції.* Позначається $E(f)$. В курсі математичного аналізу будемо розглядати множини, які складаються лише з дійсних чисел як для аргументу x так і для функції y.

Іноді при формуванні означення функції кажуть, що функцією називають залежність при якій кожному значенню незалежної змінної x (з множини A) за певним правилом чи законом ставиться у відповідність одне чи декілька значень змінної y (з множини B). При цьому якщо кожному значенню x з області визначення функції відповідає одне значення y, то функція називається *однозначною*. В противному разі – *багатозначною.*

У подальшому курсі математичного аналізу будемо вивчати лише однозначні функції.

З означення функції не випливає, що різним значенням аргументу відповідають різні значення функції. Функція може в усій області визначення набувати кількох або одного значення. Зокрема, якщо множина значень функції складається лише з одного числа c, то таку функцію називають *сталою* і пишуть $y=c$.

Таким чином, функція визначається:

1) множиною значень аргументу;

2) законом відповідності.

2.4. Способи задання функції.

Розрізняють такі способи задання функції:

- ✓ аналітичний;
- ✓ графічний;
- ✓ табличний;
- ✓ словесний.

Аналітичний спосіб – за допомогою формули (аналітичного виразу).

Якщо при цьому область визначення не вказана, то під останньою розуміють *область існування відповідного аналітичного виразу* – множину всіх дійсних значень аргументу, для яких аналітичний вираз має зміст (на множині дійсних чисел), тобто не містить дій, що заперечуються. Не слід ототожнювати функцію і формулу, за допомогою якої ця функція задана.

Наприклад, одна й та ж сама функція на різних ділянках її області визначення може задаватись різними формулами. І, навпаки, однією і тією формулою можна задати різні функції.

Так функції $y = x^3, x \in [0;1]$ і $y = x^3, x \in (2;5)$ різні, бо вони мають різні області визначення.

Функція $y = \begin{cases} 2x-1, x \le 0 \\ \lg x, x > 0 \end{cases}$ визначена на проміжку $(-\infty;+\infty)$, але для недодатних і додатних значень аргументу.

Розглянемо приклади на знаходження області визначення функцій заданих аналітично

а) $y = \dfrac{x+2}{\sqrt{-x^2+3x+4}} \to \begin{matrix} -x^2+3x+4>0 \\ x_1=-1, x_2=4 \end{matrix}$,

$$D(f) = \{x \mid -x^2+3x+4>0\} = \{x \mid -1<x<4\} = (-1;4).$$

б) $y = \lg\sin(x-2) \Rightarrow D(f) = \{x \mid \sin(x-2)>0\} = \{x \mid 2(\pi n+1) < x < \pi(2n+1)+2\}$;

в) $y = \sqrt{4-x} + \sqrt[3]{\dfrac{1}{x-1}} + \lg(x-2)$,

$$D(f) = \{x \mid 4-x \ge 0\} \cap \{x \mid x \ne 1\} \cap \{x \mid x-2>0\} = (2;4].$$

Областю існування функції можуть бути різноманітні множини точок на дійсній осі: інтервал, півінтервал, кількість відрізків, дискретна множина точок.

Графічний спосіб задання функції.

Графіком функції однієї змінної називається множина точок $(x;y)$ на площині XOY, прямокутні координати яких задовольняють рівність $y = f(x)$, тобто зв'язані між собою функціональною залежністю. При цьому $x \in D(f)$.

Зележно від того, яку задано функцію, графік її може складатись з однієї суцільної лінії, кількох ліній, дискретної множини точок площини.

Під областю визначення функції, яка задана графічно розуміють множину абсцис точок графіка функції. Інакше кажучи, область визначення функції, яка задана графічно, це проекція графіка функції на вісь OX.

$$D(f) = \{x \mid x \le a\} \cup \{x \mid b \le x \le c\} \cup \{x \mid x \ge d\}.$$

Наприклад, графіком функції $y = 2n - 3, n \in N$ є нескінченна множина ізольованих точок, які лежать на прямій $y = 2n - 3$.

Зауважимо, що в прямокутній системі координат Oxy функцію задає лише та крива, яку кожна пряма, що проходить через точку $x \in D(f)$ паралельно осі Oy, перетинає лише в одній точці.

Табличний спосіб задання функції $y = f(x)$ полягає в тому, що відповідність між змінними x та y задається у вигляді таблиці (що є областю визначення в цьому випадку?).

Табличний спосіб досить часто використовують при проведенні експериментів, коли задають певну сукупність $x_1, x_2, ..., x_n$ значень аргументу і дослідним шляхом знаходять відповідні значення функції: $y_1, y_2, ..., y_n$.

Наприклад, табулювання функції і інтерполяція, таблиця логарифмів.

Словесний спосіб задання функції – словесний опис залежності між змінними.

Наприклад, фукція Діріхлє: кожному раціональному ставиться у відповідність число 1, а ірраціональному – число 0. Ця функція визначена на множині *R*. Вона позначається $D(x)$.

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x - \text{раціональне число} \\ 0, \text{ якщо } x - \text{ірраціональне число} \end{cases}$$

Графік функції $D(x)$ практично зобразити не можна бо він складається з точок прямої $y = 1$, що мають абсцисами раціональні числа, і з точок прямої $y = 0$, в яких абсциси ірраціональні числа.

2.5. Загальний огляд елементарних функцій.

До основних елементарних функцій належать такі функції:

- Степенева функція: $y = x^{\alpha}$, де α - дійсне число
- Показникова функція: $y = a^x, a \neq 1, a > 0$.
- Логарифмічна функція: $y = \log_a x, a \neq 1, a > 0$.
- Тригонометричні функції: $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$.
- Обернені тригонометричні функції:
  $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x$.

Означення 2.2. Функція $y = f(x)$ називається *елементарною*, якщо вона задана єдиним аналітичним виразом, складних з основних елементарних функцій і сталих величин за допомогою скінченого числа дій додавання, віднімання, множення, ділення і суперпозиції (операції утворення складеної функції).

Наприклад:

1) функція $y=\cos x$ - елементарна, бо утворена з функцій $y=\sin u$ і $u=x+\frac{\pi}{2}$, з допомогою однієї суперпозиції.

2) функція $y=|x|$ - є елементарною, оскільки $y=\sqrt{x^2}=|x|$.

3) функція $y=\begin{cases} x^2-1, \textit{при } x\ge 0; \\ \frac{1}{3x+2}, \textit{при } x<0 \end{cases}$ не є елементарною.

Елементарні аналітичні функції розподіляються на алгебраїчні і трансцендентні.

Алгебраїчні функції: функції, аналітичний вирази для яких ні з аргументу і дійсних чисел, за допомогою алгебраїчних операцій (додавання, віднімання, множення, ділення, віднесення до степеня з раціональним показником (добування кореня)), а також будь-яку неявну функцію, яка зв'язана з аргументом алгебраїчним рівнянням якого-небудь степеня.

До алгебраїчних функцій відносяться:

1) *Цілі раціональні функції, або поліноми*

$$y=a_0+a_1x+a_2x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,$$

де a_i - будь-які дійсні числа, що називаються коефіцієнтами, а показники степенів – цілі додатні числа або нуль.

Наприклад, $y=5x^3-2x^2+3x-1$.

2) *Дробові раціональні функції, тобто функції виду*

$$y=\frac{P_n(x)}{\theta_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_2x^2+b_1x+b},$$

де $P_n(x), \theta_m(x)$ - раціональні функції.

3) *Функції, які задовольняють якесь алгебраїчне рівняння*

$$P_0(x)y^n+P_1(x)y^{n-1}+P_2(x)y^{n-2}+\ldots+P_{n-1}(x)y+P_n(x)=0,$$

де n - ціле додатне число, $P_0(x)$ - цілі раціональні функції від x, при чому $P_0(x)\neq 0$.

4) *Явні ірраціональні алгебраїчні функції*, тобто функції, в яких y виражається через x за допомогою коренів різних степенів цілих і дробових раціональних функцій.

Наприклад, 1) $y=\sqrt{x}$, 2) $y=\sqrt[3]{\dfrac{2x-3}{x+4}}$, 3) $y=\sqrt{x}+\sqrt{x+5}$.

Таким чином, кожна раціональна, відносно x функція (в аналітичний вираз x входить з раціональним показником) є алгебраїчною. Зокрема, елементарна степенева функція з будь-яким раціональним показником є алгебраїчною.

Трансцендентні функції.

Трансцендентними функціями називаються всі функції, що не є алгебраїчними. Зокрема, до них відносяться всі елементарні функції крім степеневої з раціональним показником (степенева функція з ірраціональним показником степеня також є трансцендентною, наприклад, $x^{\sqrt{2}}$): показникові, логарифмічні, тригонометричні, обернені тригонометричні функції – трансцендентні.

2.6. Деякі окремі класи функцій.

Поняття про *складену* функцію. Нехай задано дві функції $U=\varphi(x)$ і $y=f(u)$, причому множина значень першої функції є областю визначення другої. Тоді кожному значенню x з області визначення функції $U=\varphi(x)$ відповідає певне значення змінної u, а цьому значенню u функція $y=f(u)$ ставить у відповідність певне значення y, тобто змінна y є функцією від змінної x:

$$y=f(\varphi(x))$$

Одержана функція від функції називається складеною функцією. Функція $y=f(u)$ називається функцією по зовнішньому аргументу; $U=\varphi(x)$ - функція по внутрішньому.

Операція утворення складеної функції називається *суперпозицією.*

Наприклад, $y=\ln\sin x, y=e^{\sin 3x}$ і т.д.

Поняття про *неявну* функцію. Нехай задано рівняння $F(x,y)=0$. Можливо, існують різні пари $(x;y)$, що задовольняють дане рівняння. Тоді на рівняння можна дивитись як на спосіб задання функції $y=f(x)$, а саме: за допомогою рівняння кожному значенню x з деякої множини ставиться у відповідність одне або декілька значень змінної y (таких, що для них $F(x,y)\equiv 0$)

Функція від x, що визначається рівнянням $F(x,y)=0$, називається неявно заданою цим рівнянням.

Наприклад, $2x-y+1=0 \Rightarrow y=2x+1$, $x^2+y^2-1=0$ неявно задає *двозначну* функцію $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ і т.д.

Означення 2.3. Нехай функцію $y=f(x)$ визначено в інтервалі $(a;b)$ і (x_1,x_2) - дві точки цього інтервалу. Тоді число $\Delta f(x)=f(x_2)-f(x_1)$ називається приростом функції при переході від точки x_1 до очки x_2. Величина $\Delta x=x_2-x_1$ називають приростом аргументу.

$x_2=x_1+\Delta x$, тоді $\Delta f(x)=f(x_1+\Delta x)-f(x_1)$.

Наприклад, $y=x^2-x+5$,

$$x_1=3, x_2=5 \Rightarrow \Delta x=5-3=2>0$$
$$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)=5^2-5+5-(3^2-3+5)=25-11=14>0,$$
$$x_1=-3, x_2=0$$
$$\Delta x=0-(-3)=3>0$$
$$\Delta f=f(0)-f(-3)=5-(9+3+5)=-12<0.$$

Монотонні функції.

Означення 2.4. Функція $f(x)$ називається монотонно зростаючою на певному проміжку, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, тобто при $x_2>x_1$ маємо $f(x_2)<f(x_1)$.

Приріст монотонно зростаючої функції $\Delta f(x)$ завжди додатний при додатному прирості аргументу Δx.

Приріст монотонно спадної функції $\Delta f(x)$ завжди від'ємний при додатному прирості аргументу Δx.

Графік зростаючої функції є лінія, що іде вгору, а графік спадної – донизу (див. попередній приклад).

Обмеженість функції.

Означення 2.5. Функція $f(x)$ називається обмеженою на даному проміжку (a,b), якщо існують деякі числа m і M такі, що $m\le f(x)\le M$ при $x\in(a,b)$.

Число $m_0=\inf\limits_{x\in(a,b)}\{f(x)\}=\max m$ називається *нижньою межею* функції $f(x)$.

Число $M_0=\sup\limits_{x\in(a,b)}\{f(x)\}=\min M$ називається *верхньою межею* функції $f(x)$ на даному проміжку (a,b).

Різниця $M_0 - m_0$ називається *коливанням функції* на проміжку (a,b).

Парні і непарні функції.

Означення 2.6. Область визначення функції $y = f(x)$ називається симетричною відносно точки $x = 0$ множиною, якщо для будь-кого x області визначення - x також належить області визначення.

Наприклад,

$y = \dfrac{x+3}{x^2 - 1}$

$D(x) = \{x \mid x^2 - 1 \neq 0\} = (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$ - симетрична множина;

$y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

$D(f) = \{x \mid \neq 0\} = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ - симетрична множина;

$y = \sqrt{x+1}$

$D(f) = \{x \mid x+1 \geq 0\} = \{x \mid x \geq -1\} = [-1;+\infty)$ - не симетрична множина.

Означення 2.7. Функція, що визначена на проміжку, симетричному відносно $x = 0$, називається парною, якщо для будь-якого x цього проміжку справджується рівність $f(-x) = f(x)$.

Означення 2.8. Функція, що визначена на проміжку симетричному відносно $x = 0$, називається непарною, якщо для будь-якого X цього проміжку справджується рівність $f(-x) = -f(x)$.

Зауваження. Очевидно, що, якщо область визначення не є симетричною відносно точки $x = 0$ множиною, то функція не може бути ні парною ні непарною.

а) $f(x) = x^2 + 2$

$D(f) = (-\infty;+\infty)$ - симетричне

$f(-x) = (-x)^2 + 2 = x^2 + 2 = f(x)$ - парна.

б) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{\sqrt{2x-1}}$

$D(f) = \{x \mid 2x - 1 > 0\} = \left\{x \mid x > \dfrac{1}{2}\right\} = \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ - функція не є парною не є непарною відносно $x = 0$.

Зауваження. Будь-яку функцію, що визначена в симетричному відносно $x=0$ проміжку можна записати у вигляді суми парної і непарної функції:

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(x)}{2}.$$

Дійсно

$$f(x)=\frac{f(x)}{2}+\frac{f(x)}{2}=\frac{f(x)}{2}+\frac{f(-x)}{2}+\frac{f(x)}{2}-\frac{f(-x)}{2}=$$

$$=\underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{F(x)}+\underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{x}}_{E(x)}$$

$$F(-x)=\frac{f(-x)+f(-(-x))}{2}=F(x), -$$ функція парна

$$E(-x)=\frac{f(-x)-f(-(-x))}{2}=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-E(x),$$

\- функція непарна.

Періодом періодичної функції, як правило, називають найменший додатний її період, якщо такий найменший додатний період існує.

Для функцій $y=\sin x, y=\cos x$ найменший додатній період $T=2\pi$.

Для функцій $y=\operatorname{tg} x, y=\operatorname{ctg} x$ $T=\pi$.

Існують періодичні функції, в яких серед додатних періодів немає найменшого.

Наприклад, періодом функції Діріхлє

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{якщо } x-\text{раціональне число}\\0, \text{якщо } x-\text{ірраціональне число}\end{cases}$$

є будь-яке раціональне число $r\neq 0$. Ця функція не має найменшого додатного періоду.

При побудові графіків функцій застосовують наступні прийоми: побудова «по точкам», дія з графіками (додавання, віднімання, множення графіків), перетворення графіків (зсув та розтяг).

Виходячи з графіка функції $y=f(x)$, можна побудувати графіки функцій:

a) $y=f(x+a)$ - початковий графік зсунутий вздовж осі Ox на величину a.

b) $y=f(x)+b$ - той самий графік зсунуто вздовж осі Oy на величину b.

c) $y = Af(x)$ - вихідний графік розтягнуто в А разів вздовж осі Oy.

d) $y = f(kx)$ - початковий графік розтягнуто в $\frac{1}{k}$ разів вздовж осі Ox .

Таким чином, можна по графіку функції $y = f(x)$ побудувати графік функції виду $y = Af[k(x-a)]+b$.

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Знайти область визначення функцій:

1. $y = \dfrac{x-2}{2x-1}$. 2. $y = \dfrac{Ln(x+1)}{x-1}$. 3. $y = \sqrt{1-2x} + 3\arcsin\dfrac{3x-1}{2}$.

Розв'язок:

1. Дана функція визначена, якщо $2x-1 \neq 0$, тобто якщо $x \neq \frac{1}{2}$. Таким чином, область визначення функції є об'єднання двох інтервалів: $D(y) = (-\infty, 1/2) \cup (1/2, +\infty)$.
2. Функція визначена, якщо $x-1 \neq 0$ та $1+x > 0$, тобто якщо $x \neq 1$ і $x > -1$. Область визначення функції є об'єднання двох інтервалів: $D(y) = (-1,1) \cup (1,+\infty)$.
3. Перший доданок приймає дійсні значення при $1-2x \geq 0$, а другий – при $-1 \leq \frac{3x-1}{2} \leq 1$. Таким чином для знаходження області визначення даної функції необхідно розв'язати систему нерівностей: $1-2x \geq 0$, $-1 \leq \frac{3x-1}{2} \leq 1$. В результаті отримуємо $x \leq 1/2$, $x \leq 1$, $x \geq -1/3$. Отже, область визначення функції є відрізок $[-1/3, 1/2]$.

Приклад 2. Знайти множину значень функції $y = 2 + 3\sin x$.

Розв'язок: Оскільки синус приймає значення, що не перебільшують одиницю по модулю, то отримуємо нерівність $|\sin x| \leq 1$, або $-1 \leq \sin x \leq 1$. Помножимо усі частини нерівності на 3 та додамо 2, отримаємо $-3 \leq 3\sin x \leq 3$; $-1 \leq 3 + 3\sin x \leq 5$. Отже, $E(y) = [-1,5]$.

Приклад 3. Знайти період функції $y=\sin 6x+tgx.$

Розв'язок: Для першого доданку період дорівнює $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$, а для другого він дорівнює $\frac{\pi}{4}$. Очевидно, що періодом для даної функції буде найменше спільне кратне чисел $\frac{\pi}{3}$ і $\frac{\pi}{4}$ тобто π.

Приклад 4. Дослідити на парність чи непарність функції:

1. $y=x^2\sqrt[3]{x}+2\sin x$.
2. $y=2^x+2^{-x}$.
3. $y=x^2+5x$.
4. $y=|x|-5e^{x^2}$.
5. $y=Lg\frac{x+3}{x-3}$.

Розв'язок: В даних прикладах область визначення кожної з функцій симетрична відносно нуля: в перших чотирьох прикладах $D(y)=(-\infty,+\infty)$, в останньому $D(y)=(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$.

1. Замінивши x на $-x$, отримаємо $y(-x)=(-x)^2\sqrt[3]{(-x)}+2\sin(-x)=-x^2\sqrt[3]{x}-2\sin x$, тобто $y(-x)=-y(x)$. Отже дана функція не парна.

2. Маємо $y(-x)=2^{-x}+2^{-(-x)}=2^{-x}+2^x$, тобто $y(-x)=y(x)$. Отже дана функція парна.

3. Замінивши x на $-x$, отримаємо $y(-x)=(x)^2+5(-x)=x^2-5x.$ Отже, $y(-x)\neq y(x)$ і $y(-x)\neq -y(x)$ - дана функція ні парна ні непарна.

4. Тут $y(-x)=|x|-5e^{(-x)^2}$, тобто $y(-x)=y(x)$. Отже функція парна.

5. Знаходимо $y(-x)=\lg\frac{-x+3}{-x-3}=\lg\frac{3-x}{x+3}=\lg\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^{-1}=-\lg\frac{x+3}{x-3}$, тобто $y(-x)=-y(x)$.

Приклад 5. Побудувати по точкам графік функції $y=\sqrt{x}$ на відрізку [0;9] і потім, виходячи з цього графіка, шляхом послідовних деформацій його і зсувів, побудувати графік функції $y=2\sqrt{-3(x+1,5)}-1,2.$

Розв'язок. Складемо таблицю відповідних значень змінних x і y для функції $y=\sqrt{x}$ і побудуємо її графік.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1.0	1.4	1.7	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0

Позначимо функцію $\sqrt{u}$ символом $f(u)$. Тоді дана функція прийме вигляд: $y=2f[-3(x+1,5)]-1,2.$ Порівнюючи її з виразом

$y = Af[k(x-a)+b]$, знаходимо наступні значення параметрів: *A=2; k=-3; a=-1,5; b=-1,2.* Далі, згідно загальних вказівок, будуємо шуканий графік наступним шляхом: збільшуємо у 2 рази ординати точок графіка функції $y=\sqrt{x}$ і зберігаючи незмінними їх абсциси, будуємо графік функції $y=2\sqrt{x}$;зменшуємо в три рази абсциси точок графіка функції $y=2\sqrt{x}$ і зберігаючи незмінними їх ординати, будуємо графік функції $y=2\sqrt{3x}$;змінюючи знаки абсцис точок графіка функції $y=2\sqrt{3x}$ і зберігаючи незмінними їх ординати, будуємо графік функції $y=2\sqrt{-3x}$ (графіки функцій $y=2\sqrt{3x}$ і $y=2\sqrt{-3x}$ симетричні відносно осі ординат); переміщаючи точки графіка функції $y=2\sqrt{-3x}$ в напрямку осі абсцис на 1,5 одиниці масштабу цієї осі вліво, будуємо графік функції $y=2\sqrt{-3(x+1{,}5)}$; переміщаючи точки графіка функції $y=2\sqrt{-3(x+1{,}5)}$ в напрямку осі ординат на 1,2 одиниці масштабу цієї осі вниз, будуємо графік функції $y=2\sqrt{-3(x+1{,}5)}-1{,}2$. На рисунку 1 зображено перетворення графіка функції виконані у Geogebra (інтерактивну модель можна переглянути за посиланням https://www.geogebra.org/classic/sf66zqps).

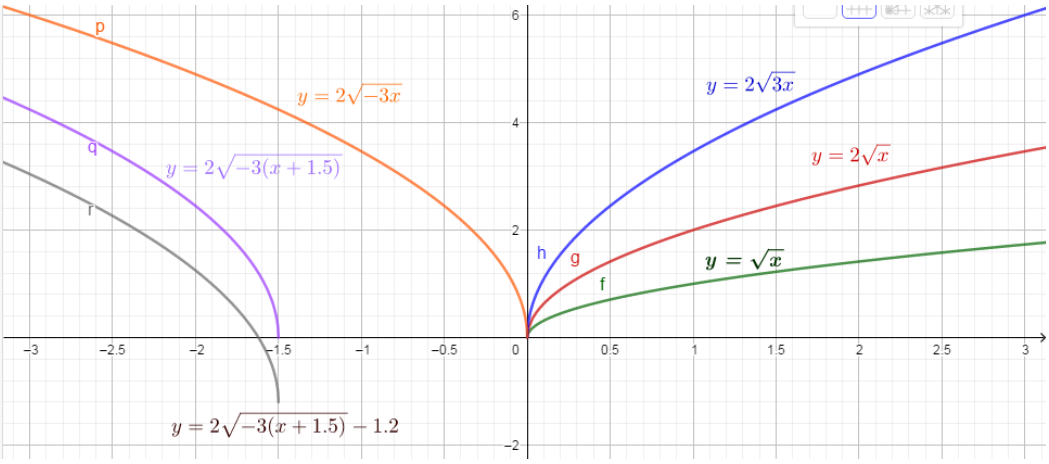


Рис. 1. Перетворення графіка функції $y=2\sqrt{-3(x+1{,}5)}-1{,}2$.

Приклад 6. Виходячи із графіка функції $y=\sin x$, шляхом його деформації і зсувів побудувати графік функції $y=-3\sin(2x+8)$.

Розв'язок. Замінюючи у виразі $y=Af[k(x-a)]+b$ символ похідної функції f символом тригонометричної функції sin, отримаємо $y=A\sin k(x-a)+b$. (*) Перетворимо нашу функцію до вигляду: $y=-3\sin(2x+8)=-3\sin 2(x+4)$ і порівнюючи її з виразом (*), визначимо наступні значення параметрів: *A=-3; k=2; a=-4; b=0.* Побудову шуканого графіка виконуємо керуючись загальними вказівками: збільшуємо в 3 рази ординати точок графіка функції $y = \sin x$ по абсолютній величині, змінюючи їх знаки і зберігаючи незмінними абсциси, будуємо графік функції $y = -3\sin x$; зменшуємо в два рази абсциси точок графіка функції $y = -3\sin x$ і зберігаючи незмінними їх ординати, будуємо графік функції $y = -3\sin 2x$; переносячи точки графіка функції $y = -3\sin 2x$ в напрямку осі абсцис на 4 одиниці масштабу цієї осі вліво, будуємо шуканий графік функції $y = -3\sin 2(x+4)$. Користуючись періодичністю даної функції, отриманий графік можна продовжити в обидві сторони. Виходячи із графіка функції $y = \sin x$, шляхом його деформації і зсувів побудувати графік функції $y = -3\sin(2x+8)$. На рисунку 2 зображено перетворення графіка функції виконані у Geogebra (інтерактивну модель можна переглянути за посиланням https://www.geogebra.org/classic/p2yp9vn2).

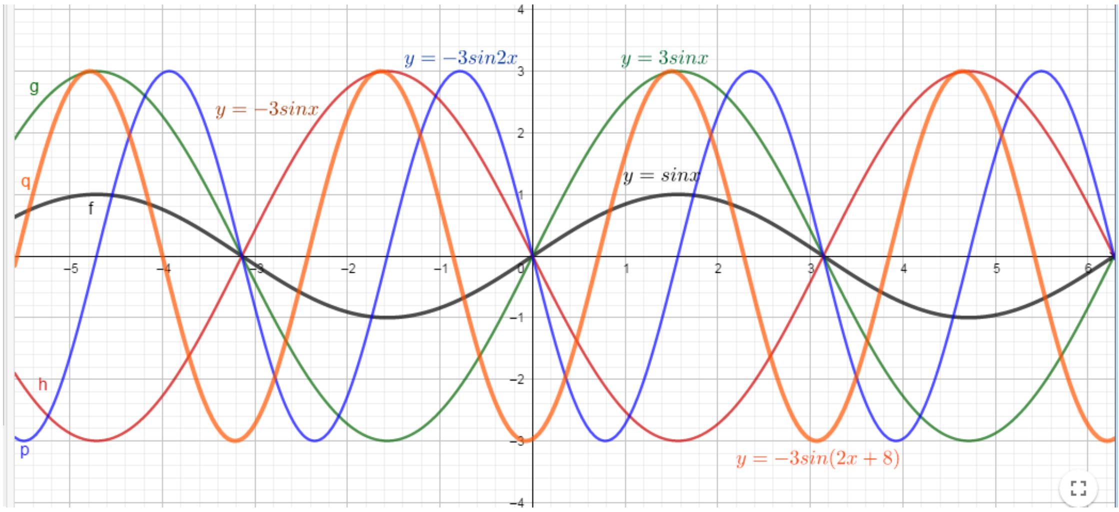


Рис. 2. Перетворення графіка функції $y = -3\sin(2x+8)$.

Індивідуальні завдання для поточного контролю

Завдання 1. 1-25. Знайти область визначення наступних функцій:

1. $y = \dfrac{x^2}{1+x}$.
2. $y = \sqrt{3x - x^3}$.
3. $y = (x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.
4. $y = \log(x^2 - 4)$.
5. $y = \log(x+2) + \log(x-2)$.
6. $y = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}$.
7. $y = \sqrt{\cos x^2}$.
8. $y = \lg\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

9. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$.

10. $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x}$.

11. $y = \arccos(2\sin x)$.

12. $y = \lg\left[\cos(\lg x)\right]$.

13. $y = (x + |x|)\sqrt{x \sin^2 \pi x}$.

14. $y = ctg\pi x + \arccos(2^x)$.

15. $y = \arcsin(1-x) + \lg(\lg x)$.

16. $y = (2x)!$.

17. $y = \log_2 \log_3 \log_4 x$.

18. $y = \sqrt[4]{\lg tgx}$.

19. $y = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\sin 3x}$ $(0 \le x \le 2\pi)$.

20. $y = \sqrt{2 + x - x^2}$.

21. $y = \lg(1 - 2\cos x)$.

22. $y = \arccos \dfrac{2x}{1+x^2}$.

23. $y = \arcsin\left(\lg \dfrac{x}{10}\right)$.

24. $y = (-1)^x$.

25. $y = (x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

Завдання 2. 1-25. Знайти область визначення наступних функцій:

1. $y = \lg\left(\sin \dfrac{\pi}{x}\right)$.

2. $y = \arccos(2\sin x)$.

3 $y = \dfrac{x^2}{1+x}$.

4. $y = (-1)^x$.

5. $y = (2x)!$.

6. $y = \sqrt{3x - x^3}$.

7. $y = \arcsin(1-x) + \lg(\lg x)$.

8. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$.

9. $y = \log(x+2) + \log(x-2)$.

10. $y = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\sin 3x}$ $(0 \le x \le 2\pi)$.

11. $y = \arcsin\left(\lg \dfrac{x}{10}\right)$.

12. $y = \sqrt{\cos x^2}$.

13. $y = \sqrt[4]{\lg tgx}$.

14. $y = \log_2 \log_3 \log_4 x$.

15. $y = \log(x^2 - 4)$.

16. $y = \arccos \dfrac{2x}{1+x^2}$.

17. $y = (x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

18. $y = \lg[\cos(\lg x)]$.

19. $y = \lg(1 - 2\cos x)$.

20. $y = \sqrt{2 + x - x^2}$.

21. $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x}$

22. $y = (x + |x|)\sqrt{x \sin^2 \pi x}$.

23. $y = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}$.

24. $y = ctg\pi x + \arccos(2^x)$.

25. $y = \lg\left(\sin \dfrac{\pi}{x}\right)$.

Завдання 3.

1-5. На яку множину *E*E_y відображається множина E_x функцією *y=f(x)*.

1. $y = x^2$. $E_x = \{-1 \le x \le 2\}$.

2. $y = \lg x$, $E_x = \{10 < x < 1000\}$.

3. $y=\frac{1}{\pi}arcctgx, \quad E_x=\{-\infty<x<+\infty\}.$

4. $y=ctg\frac{\pi x}{4}, \quad E_x=\{0<|x|\le 1\}.$

5. $y=|x|, \quad E_x=\{1\le|x|\le 2\}.$

6-9. Довести, що функції монотонно зростають на відповідних проміжках.

6. $y=x^2 \quad (0\le x<+\infty).$

7. $y=\sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right).$

8. $y=tgx \quad \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right).$

9. $y=2x+\sin x \quad (-\infty<x<+\infty).$

10-15. Знайти обернену функцію до даної та область її існування.

10. $y=2x+3 \quad (-\infty<x<+\infty).$

11. $y=x^2$
 a) $-\infty<x\le 0;$
 b) $0\le x<+\infty.$

12. $y=\frac{1-x}{1+x} \quad (x\ne -1).$

13. $y=\sqrt{1-x^2}$
 a) $-1\le x\le 0;$
 b) $0\le x\le 1.$

14. $y=shx,$
де $shx=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right) \quad (-\infty<x<+\infty).$

15. $y=thx,$
де
$thx=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \quad (-\infty<x<+\infty).$

16-20. Дослідити на парність, непарність функції.

16. $y=3x-x^3.$

17. $y=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}.$

18. $y=a^x+a^{-x} \quad (a>0).$

19. $y=\ln\frac{1-x}{1+x}.$

20. $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$

21-25. Знайти період функції.

21. $y=\sin x+1/2\sin 2x+1/3\sin 3x.$

22. $y=\sin^2 x.$

23. $y=\sin x+\sin(x\sqrt{2}).$

24. $y=tg\sqrt{x}.$

25. $y=\sin x^2.$

Завдання 4.

1-25. Знайти область визначення функцій:

1. $y=\arcsin(|x+k+2|-k).$

2. $y=\arccos\frac{2x^2+x+2k}{2(k+1)x+k}.$

3. $y=\arcsin\sqrt{x^3+(k+1)^3}.$

4. $f(x) = \ln(1 - 4\sin^2(k+1)x)$.

5. $y = \log_{k+2}(k - |x-1|)$.

6. $y = \ln((x+k)/(x-k) + k + 1$.

7. $y = \sqrt{x^2 + (k-1)x - k}$.

8. $y = \log_{k+1}(x^2 - (k-1)x - k)$.

9. $y = \ln \dfrac{x+k}{x^2(k+2)x + k + 1}$.

10. $y = \arccos \dfrac{(2k-3)x + k}{x^2 + (k-1)x - k}$.

11. $y = \sqrt{k-x} + \ln(x^2 + (k+2)x + k + 1)$.

12. $y = (k+3)^{1/(x^2-k^2)}$.

13. $y = (k+2)^{1/\sqrt{|x|-k-1}}$.

14. $y = \sqrt{|x-k|-1}$.

15. $y = (2x^2 - 9)/\sqrt{k^2 - x^2}$.

16. $y = \sqrt{\log^2_{k+1} x - 3\log_{k+1} x + 2}$.

17. $y = (x+k)/\ln(x^2 - (k+2)x + k + 1)$.

18. $f(x) = \log_{k+2}(3|(k+1)x| - ((k+1)x)^2 - 2)$.

19. $f(x) = \sqrt{1 - 4\cos^2 \dfrac{x}{k+3}}$.

20. $f(x) = \lg[(k+5)^{2|x|} - (k+5+(k+5)^3)(k+5)^{|x|} + (k+5)^4]$21.
$f(x) = \sqrt{3\sin(k+4)x + 4\cos(k+4)x - 5/2}$.

22. $f(x) = \lg(2 + \log_{k+5} x - \log^2_{k+5} x)$.

23. $f(x) = \arcsin(|x-k-4| - 2k)$.

24. $f(x) = \sqrt{(\sqrt{3}+1)tg\dfrac{x}{x+7} - tg^2\dfrac{x}{x+7} - \sqrt{3}}$.

25. $f(x) = \lg((k+9)^{2|x|-2k} - (k+10)(k+9)^{|x|-k} + k + 9)$.

Тема 3. Границя числової послідовності

3.1. Поняття про числову послідовність.

Означення 3.1. Якщо кожному натуральному числу n згідно певному закону ставиться у відповідність деяке дійсне число a_n, то таку множину занумерованих чисел називають числовою послідовністю і позначають $\{a_n, n \in N\}$, або $\{a_n, n \geq 1\}$, або $\{a_n\}$, де a_n - загальний член послідовності (n-й член послідовності) і він задається формулою.

Наприклад, $\underbrace{\left\{\frac{1}{2n}\right\}}_{a_n}, n \geq 1 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots\right\}$

Числову послідовність можна розглядати як функцію натурального аргументу.

Кажуть, що функція $x = f(x)$, $n \in N$ визначає числову послідовність (або коротко послідовність), якщо кожному номеру n за певним правилом або законом ставиться у відповідність єдине дійсне число.

Наприклад, функція $x = (-1)^n$ задає послідовність

$\{x_n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots\}$

Функція $x = \begin{cases} \frac{1}{n}, \text{ якщо } n - \text{непарне} \\ \frac{n}{n+1}, \text{ якщо } n - \text{парне} \end{cases}$ задає послідовність $x_n = \left\{1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \ldots\right\}$.

Розглянемо дві числові послідовності $\{a_n, n \geq 1\}, \{b_n, n \geq 1\}$.

Алгебраїчною сумою цих послідовностей буде послідовність

$$\{a_n \neq b_n\} = \{a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \ldots, a_n \pm b_n, \ldots\}.$$

Добутком двох послідовностей буде послідовність

$$\{a_n \cdot b_n\} = \{a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n, \ldots\}.$$

Часткою двох послідовностей називається послідовність

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}, \ldots\right\} \qquad b_n \neq 0 (n \in Z).$$

3.2. Границя числової послідовності.

Означення 3.2. Число a називається границею числової послідовності a_n при $n \to \infty$ позначається $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N$, що починаючи з номера $n > n_0$ буде виконуватись нерівність

$$|a_n - a| < \varepsilon \tag{3.1}$$

Наприклад, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ (границя $\left\{\frac{n+1}{n}, n \in N\right\}$ є число $a = 1$).

Представимо загальний член послідовності у вигляді $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$.

$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left[\frac{1}{n}>0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}\right] \Rightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon \Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$$

$$n_0=\frac{1}{\varepsilon}$$

Отже, $n=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$.

$\varepsilon=0{,}1 \Rightarrow n_0=11$

$\varepsilon=0{,}001 \Rightarrow n_0=1001$.

3.3. Геометричний зміст границі послідовності.

Як відомо, нерівність $|a_n-a|<\varepsilon$ визначає ε-окіл точки a $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Таким чином, той факт, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ або $a_n\to a$ при $n\to\infty$, допускає таке геометричне тлумачення:

який би не був ε-окіл точки a, всі точки a_n, починаючи з деякого номера n потрапляють у цей окіл, тобто існує таке натуральне число $n_0=n_0(\varepsilon)$, що всі точки $a_{n_0+1}, a_{n_0+2,\ldots}$ потрапляють у вказаний окіл.

Що ж до точок $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$, то вони можуть належати або не належати ε- околу точки a. Таким чином, якщо поза ε- околом точки a є точки a_n, то їх скінченна кількість.

3.4. Поняття про збіжні послідовності.

Означення 3.3. Якщо існує скінченна границя числової послідовності, то вона називається збіжною, в протилежному випадку розбіжною.

Властивості збіжних послідовних функцій

Теорема 3.1.(*про єдиність границі числової послідовності*).

Кожна збіжна послідовність має єдину границю.

Означення 3.2. Послідовність $\{a_n\}$ називається обмеженою зверху (знизу), якщо існує таке $c\in R$, що для будь-якого $n\in N$ виконується нерівність $a_n\le c$ $(a_n\ge c)$.

Послідовність, яка обмежена як зверху так і знизу, називається обмеженою.

Отже, послідовність $\{a_n\}$, обмежена, якщо існують такі $a\in R, b\in R$, що для всіх $n\in N$ виконується умова $a\le a_n\le b$. Ця умова рівносильна тому, що існує таке $c \in R_+$, що для всіх $n \in N$ виконується нерівність $|a_n| \le C$.

Послідовність, що не є *обмеженою* зверху (знизу), називається необмеженою зверху (знизу), а послідовність, що не є обмеженою, - *необмеженою.*

Теорема 3.2. (*про обмеженість збіжної послідовності*)

Якщо послідовність *збіжна,* то вона *обмежена*.

Теорема 3.2 дає *необхідну ознаку збіжності послідовності.* Її можна перефразувати, сформулювавши як *достатню умову розбіжності послідовності*: Якщо послідовність необмежена, то вона розбігається.

Теорема 3.3. (*про арифметичні властивості границі*).

Якщо послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ - збіжні, то збіжні також їх сума, різниця і добуток, причому

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n,$$

якщо $\forall n \in N\ b \ne 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \ne 0$, то й частка послідовностей $\{a_n\}$, також збіжна, причому

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Наслідок. Якщо послідовність $\{a_n\}$ збіжна і k - число, то послідовність $\{ka_n\}$ також є збіжною, причому $\lim\limits_{n\to\infty}(ka_n) = k \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Теорема 3.4. *(про граничний перехід у нерівності).*

Якщо члени a_n та b_n збіжних послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$, починаючи з деякого номера n, задовольняють нерівність $a_n < b_n$, то їхні границі задовольняють таку ж саму нерівність $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Теорема 3.5. *(про границю проміжної послідовності).*

Нехай члени послідовностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, починаючи з деякого номера n, задовольняють нерівність $a_n \le b_n \le c_n$ і нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$. Тоді послідовність $\{b_n\}$ теж збіжна і $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

3.5. Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності, їх властивості.

Означення 3.3. Послідовність $\{\alpha_n, n\in N\}$ називається нескінченно-малою послідовністю, якщо її границя дорівнює нулю при $n\to\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists n_0\in N, \forall n\ge n_0 \quad |\alpha_n|<\varepsilon \qquad \left(\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0\right).$$

Наприклад, $\frac{1}{n}$ - нескінченно мала (н.м.), оскільки

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\right)\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon \Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow n_0=\frac{1}{\varepsilon}.$$

$\frac{1}{n^3}$ - (н.м.), оскільки $\frac{1}{n^3}\to 0$ при $n\to\infty$.

$\frac{2^{10}}{n}$ - (н.м.), оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{10}}{n}=0$.

Властивості нескінченно малих послідовностей

1) Сума двох н.м. послідовностей є нескінченно малою послідовністю (н.м.).

Розглянемо 2 нескінченно малі послідовності:
$\{\alpha_n, n\in N\}$ - н.м. $\{\beta_n, n\in N\}$ - н.м., тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$.

Доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n+\beta_n)=0$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0\Rightarrow\forall\frac{\varepsilon}{2}>0 \qquad \exists n_0^{'}\in N;\ |\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n>n_0^{'}$$

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=0\Rightarrow\forall\frac{\varepsilon}{2}>0 \qquad \exists n_0^{''}\in N;\ |\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n>n_0^{''}$$

Нехай $n_0=\max\left\{n_0^{'}, n_0^{''}\right\}$

Розглянемо $|\alpha_n+\beta_n|\le|\alpha_n|+|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \quad \forall n>n_0$

Отже, $|\alpha_n+\beta_n|<\varepsilon \qquad \forall n>n_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n+\beta_n)=0$

Наприклад, $\underbrace{\alpha_n}_{н.м.}=\frac{1}{n} \quad \underbrace{\beta_n}_{н.м.}=\frac{2}{n} \qquad \alpha_n+\beta_n=\frac{3}{n}\overset{n\to\infty}{\to}0$.

2) Добуток н.м. послідовностей на обмежену послідовність є н.м. послідовність.

Означення 3.4. Послідовність $\{\alpha_n, n\in N\}$ називається нескінченно великою (н.в.), якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\pm\infty$.

Означення 3.5. $\{\alpha_n, n\in N\}$ - н.в. і $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\pm\infty \Leftrightarrow \forall \mathrm{E}>0\ \ \exists n_0\in N:\forall n\ge n_0$ $|\alpha_n|>\mathrm{E}$.

1) Сума двох н.в. послідовностей однакового знаку є нескінченно великою послідовністю $\begin{pmatrix}\alpha_n=n^2\to\infty & n^2+2n^2=3n^2\to\infty\\ \beta_n=2n^2\to\infty & n\to\infty\end{pmatrix}$.

2) Добуток н.в. послідовностей на обмежену є н.в. послідовністю.

$$\{\alpha_n\}=\left\{\frac{n}{n+1},n\in N\right\};\{\beta_n\}=\{n+1,n\in N\}$$
$$\{\alpha_n\cdot\beta_n\}=\left\{\frac{n}{n+1}\cdot(n+1)=n,n\in N\right\}.$$

3) Якщо послідовність $\{\alpha_n, n\in N\}$ н.м. тоді обернена до неї послідовність $\left\{\frac{1}{\alpha_n},n\in N\right\}$ є н.в.

4) Якщо послідовність $\{\alpha_n, n\in N\}$ н.в., тоді обернена до неї послідовність $\left\{\frac{1}{\alpha_n},n\in N\right\}$ є н.м.

3.6. Невизначені вирази $\infty-\infty;0\cdot\infty,\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$.

Ми розглянули вирази $a_n\pm b_n, a_n\cdot b_n,\frac{a_n}{b_n}$ у припущенні, що послідовності a_n і b_n збігаються до скінчених границь (з яких у випадку частки границя b_n не повинна дорівнювати нулю). Розглянемо випадки, коли границі послідовностей нескінченні, або, якщо мова іде про частку – коли границя знаменника нуль.

Зупинимось на чотирьох випадках:

1. Невизначеніть типу $(\infty-\infty)$
   а) $a_n=2n^2\to\infty, b_n=n^2\to\infty\Rightarrow a_n-b_n=n^2\to\infty\ (n\to\infty)$
   б) $a_n=C+n^2\to\infty, b_n=n^2\to\infty\Rightarrow a_n-b_n\to C\quad (n\to\infty)$
   в) $a_n=n^2\to\infty, b_n=n^2\to\infty\Rightarrow a_n-b_n\to 0\quad (n\to\infty)$
   г) $a_n=(-1)^n+n^2\to\infty, b_n=n^2\to\infty\Rightarrow a_n-b_n=(-1)^n=\{-1;1;-1;1;\ldots\}$
   границя не існує.

Отже, границя $a_n - b_n$ при $n \to \infty$ в залежності від закону зміни a_n і b_n може мати різні значення або зовсім не існувати. Кажуть, що вираз $a_n - b_n$, коли $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$, являє невизначеність $\infty - \infty$.

2. Невизначеність типу $(0 \cdot \infty)$

а) $a_n = \frac{1}{n^2} \to 0; b_n$(н.в.) $n \to \infty \Rightarrow a_n \cdot b_n = \frac{1}{n^2} \cdot n = \frac{1}{n} \to 0 \qquad (n \to \infty)$

б) $a_n = \frac{1}{n^2}$(н.м.)$b_n = n^3 \to \infty \Rightarrow a_n \cdot b_n = \frac{1}{n^2} \cdot n^3 = n \to \infty \qquad (n \to \infty)$

в) $a_n = \frac{a}{n^2} \to 0, b_n = n^2 \to \infty \Rightarrow a_n \cdot b_n = \frac{a}{n^2} \cdot n^2 = a \to a \qquad (n \to \infty)$

г) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \to 0, b_n = n^2 \to \infty \Rightarrow a_n \cdot b_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot n^2 = (-1)^n$ не має границі $(n \to \infty)$.

Отже, вираз $a_n \cdot b_n$, коли $a_n \to 0, b_n \to \infty$, являє невизначеність типу $0 \cdot \infty$.

3. Невизначеність типу $(\frac{0}{0})$

а) $a_n = \frac{1}{n^2} \to 0, b_n = \frac{1}{n^2} \to 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n^2} : \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \to 0 \qquad (n \to \infty)$

б) $a_n = \frac{1}{n^2} \to 0; b_n = \frac{1}{n^3} \to 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n^2} : \frac{1}{n^3} = n \to \infty \qquad (n \to \infty)$

в) $a_n = \frac{a}{n^2} \to 0, b_n = \frac{1}{n^2} \to 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{n^2} : \frac{1}{n^2} = a - a \qquad (n \to \infty)$

г) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \to 0; b_n = \frac{1}{n^2} \to 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{(-1)^n}{n^2} : \frac{1}{n^2} = (-1)^n$ - не має границі $(n \to \infty)$

Отже, вираз $\frac{a_n}{b_n}$, коли $a_n \to \infty$ являє невизначеність типу $\frac{0}{0}$.

4. Невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$

а) $a_n = n \to \infty; b_n = n^2 \to \infty \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0 \qquad (n \to \infty)$

б) $a_n = n^2 \to \infty; b_n = n \to \infty \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{n} = n \to \infty \qquad (n \to \infty)$

в) $a_n = Cn^2 \to \infty; b_n = n^2 \to \infty \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{Cn^2}{n} = C \to C \qquad (n \to \infty)$

г) $a_n=(-1)^n n^2; b_n=n^2\to\infty\Rightarrow \frac{a_n}{b_n}=\frac{(-1)^n n^2}{n^2}=(-1)^n$ - не має границі при $(n\to\infty)$.

Отже, вираз $\frac{a_n}{b_n}$, коли $a_n\to\infty$, $b_n\to\infty$, являє невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$

В цих випадках для того, щоб позбутися невизначеності потрібно перетворити відповідні вирази.

Теорема (Штольца) (*про розкриття невизначеності типу* $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$).

Нехай задано послідовності $\{a_n, n\in N\},\{b_n, n\in N\}$ з властивостями:

1) $a_n\to\infty, b_n\to\infty\ (n\to\infty)$.

2) $a_{n-1}<a_n \qquad \forall n, n\in N$

3) $$\left.\begin{array}{l}\exists\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=a\\ \exists\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=a\end{array}\right\}\text{тобто } \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$$

Наприклад, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{2^n-2^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}(2-1)}=0$.

3.7. Границя монотонної послідовності.

Означення 3.6. Послідовність a_n називається монотонно зростаючою, якщо $\forall n\in N\ a_n<a_{n+1}(\uparrow)$ (строго зростає) або $a_n\le a_{n+1}(\Uparrow)$ (не спадає). Послідовність a_n називається монотонно спадною, якщо $\forall n\in N\ a_n>a_{n+1}(\downarrow)$(строго спадає) або $a_n\ge a_{n+1}(\Downarrow)$(не зростає).

Теорема 3.6. *(ознака збіжності монотонної послідовності).*

Якщо монотонозростаюча (монотонноспадна) послідовність обмежена зверху (знизу) тоді існує границя.

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a=\sup\{a_n, n\ge1\}$ або (якщо необмежена зверху) $a_n\to+\infty$ при $n\to\infty$.

$\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a'=\inf\{a_n, n\ge1\}\right)$ або (якщо необмежена знизу) $a_n\to-\infty$ при $n\to\infty$.

Теорема 3.7. Послідовність $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ є збіжною при $n \to \infty$.

Границю послідовності $\{x_n\}$ з n-м членом $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^3$ позначають літерою ***e*** (за прикладом німецького математика Леонарда Ейлера).

Це число є основою натуральних (гіперболічних) логарифмів.

Теорема 3.8. Кантора *(про вкладені відрізки).*

Якщо дано нескінченну послідовність вкладених відрізків $[a_1;b_1];[a_2;b_2];...;[a_n;b_n];...$ із властивостями:

1) кожен відрізок $[a_{n+1};b_{n+1}] \subset [a_n;b_n] \qquad \forall n \in N$

2) довжини відрізки $(b_n - a_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Тоді існує єдина точка a спільна для всіх відрізків $\bigcap_{n+1}^{\infty}[a_n,b_n] = \{\alpha\}$, причому $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$.

3.8. Фундаментальні послідовності.

Означення 3.7. Нехай задана послідовність $\{a_n\}$ і зростаюча послідовність цілих додатних чисел $k_1, k_2, ..., k_n, ...$. Вибравши із послідовності $\{a_n\}$ члени з номерами, одержимо нову послідовність $\{a_{n_k}\}$, яка є підпослідовністю послідовності $\{a_n\}$.

Розглянемо послідовність $\left\{\frac{1}{n}, n \in N\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$.

Можна виділити наступні підпослідовності:

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, ..., \frac{1}{2k}, ...\right\}, \left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, ..., \frac{1}{2k-1}, ...\right\}, \left\{\frac{1}{10}; \frac{1}{10^2}; \frac{1}{10^3}; ...; \frac{1}{10^k}\right\}.$$

Теорема 3.9. Больцано-Вєєрштраса. *(про існування збіжної послідовності).*

З кожної обмеженої послідовності можна виділити підпослідовність збіжну.

Означення 3.8. Послідовність a_n називається фундаментальною, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться n_0, що для всіх $n, m > n_0$ буде виконуватись нерівність $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Теорема 3.10. *(про обмеженість фундаментальної послідовності).*

Кожна фундаментальна послідовність є обмеженою.

Теорема 3.11. *(критерій Коші збіжності послідовності).*

Для того, щоб послідовність була збіжною необхідно і достатньо, щоб вона була фундаментальною.

$\{a_n, n \in N\}$ - збіжна $\{a_n, n \in N\}$ - фундаментальна.

Коші Огюстен Луї – французький математик (1789-1857р.р.).

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$. Починаючи з якого *n* маємо $\left(\frac{n+1}{2n}-\frac{1}{2}\right)<0{,}001$?

Розв'язок: Виберемо довільне число $\varepsilon>0$ і покажемо, що існує такий номер *N*, що для всіх членів послідовності з номерами *n*>*N* виконується нерівність $\left|\frac{n+1}{2n}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$ (1).

Для визначення *N* достатньо розв'язати нерівність (1) відносно *n*:

$$\left|\frac{n+1}{2n}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{n+1-n}{2n}\right|=\left|\frac{n+1-n}{2n}\right|=\frac{1}{2n}<\varepsilon,\ 2n>\frac{1}{\varepsilon}, n>\frac{1}{2\varepsilon}.$$

Отже, якщо $n>\frac{1}{2\varepsilon}$, то нерівність (1) виконується для будь-якого наперед заданого числа $\varepsilon>0$. Якщо $\frac{1}{2\varepsilon}\geq 1$, то за *N* беремо цілу частину виразу $\frac{1}{2\varepsilon}$, тобто $N=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$. А якщо $0<\frac{1}{2\varepsilon}<1$, то за *N* можна взяти 1 або будь-яке інше натуральне число.

Зокрема, при $\varepsilon=0{,}001$, $N=\left[\frac{1}{0{,}002}\right]=500$. Отже, при $n>500$ дістанемо $\left[\frac{n+1}{2n}-\frac{1}{2}\right]<0{,}001$.

Приклад 2. З'ясувати, чи має границю послідовність (x_n), якщо:

а) $x_n=\frac{n}{n+1}$; б) $x_n=\begin{cases}1+\frac{1}{n}\ \textit{для парного}\ \mathrm{n}\\ 2-\frac{1}{n}\ \textit{для непарного}\ \mathrm{n}\end{cases}$ в) $x_n=\frac{2}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$.

Розв'язок:

а) Оскільки $0<\frac{n}{n+1}<1$, то послідовність (x_n) обмежена. Неважко бачити, що $x_n<x_{n+1}<1$, для всіх $n\in\mathrm{N}$, тобто (x_n) монотонно зростає. Отже, вона має границю.

б) Члени послідовності з парними номерами прямують до 1 при $n \to \infty$, оскільки $\frac{1}{n} \to 0$. А члени послідовності з непарними номерами прямують до 2 при $n \to \infty$. Отже, згідно з означенням, послідовність немає границі, тобто є розбіжною.

в) Дана послідовність є добутком нескінченно малої послідовності $\left(\frac{2}{n}\right)$, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$, і обмеженої послідовності $\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)$, тому що $\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right| \le 1$. Тоді за теоремою задана послідовність має границю, що дорівнює 0.

Приклад 3. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{3\cos\frac{1}{n}}{n}\right)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3n^3+3n^2+4}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+3}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{n^2}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{3+n} - \sqrt{2+n}\right)$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n-1}$;

є) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right)$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n^2+1} + i\left(\frac{n^2+1}{n^2+2}\right)^{\frac{n^2}{3}}\right)$.

Розв'язок:

а) скористаємось теоремою про границю суми двох послідовностей. Неважко побачити, що границя першого доданка дорівнює 0, а другий доданок є добутком нескінченно малої послідовності $\left(\frac{3}{n}\right)$ на обмежену послідовність $\left(\cos\frac{1}{n}\right)$, тому його границя також дорівнює нулю. Отже, за властивістю нескінченно малих послідовностей задана послідовність є нескінченно малою.

б) У даному випадку чисельник і знаменник мають нескінченні границі, тому користуватись теоремою про границю частки тут не можна. Перетворимо дріб, поділивши чисельник і знаменник на n^3 (найвищий степінь n). Дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3n^3+3n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}{3+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^3}}.$$

Оскільки $n\to\infty$ маємо $\frac{1}{n}\to 0$, $\frac{2}{n}\to 0$, $\frac{3}{n}\to 0$, $\frac{4}{n}\to 0$, то, застосувавши теорему про границю суми і добутку, помічаємо, що границя чисельника дорівнює 1, а знаменника 3. за теоремою про границю частки маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3n^3+3n^2+4}=\frac{1}{3}.$$

в) Поділимо чисельник на знаменник дробу на n^2, а потім скористаємось теоремою про границю суми і частки. Дістанемо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n^2}}=0.$$

г) Аналогічно попередньому маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n}}$.

Оскільки $1+\frac{1}{n^3}\to 1$ при $n\to\infty$, а знаменник є нескінченно малою послідовністю, то задана послідовність є нескінченно великою, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{n^2}=\infty$.

У прикладах б) - г) порівняйте старші степені чисельників і знаменників заданих дробів і зробіть висновок відносно одержаних відповідей.

д) У даному випадку маємо різницю двох нескінченно великих послідовностей. Позбавимося ірраціональності в чисельнику, помноживши та поділивши на спряжений вираз, і застосуємо теорему про зв'язок нескінченно малої і нескінченно великої послідовностей. Матимемо: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3+n}-\sqrt{2+n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3+n}+\sqrt{2+n}}=0.$

е) Поділивши чисельник і знаменник виразу, що стоїть в дужках, на *n* і скориставшись властивістю степеня, дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{3}}{\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^{6}}\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{-1}.$$

Користуючись теоремою про границю добутку, частки і формулою (1), маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n-1}=\frac{e^3}{e^6}\cdot 1=e^{-3}.$

є) Оскільки $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, то

$$x_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$

ж) Маємо границю послідовності комплексних чисел. Обчислимо границі дійсної та уявної частин цієї послідовності. Оскільки

$$x_n=\frac{2n^2}{n^2-1}\to 2, n\to\infty, \text{ а } y_n=\left(\frac{n^2+1}{n^2+2}\right)^{\frac{n^2}{3}}\to e^{-\frac{1}{3}},\ \lim_{n\to\infty}z_n=2+\frac{i}{\sqrt[3]{e}}.$$

Приклад 4. Довести, що границею послідовності $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\ldots,\frac{n}{n+1},\ldots$є число 1. Починаючи з якого номера для членів послідовності виконується нерівність $|y_n-1|>0<0{,}1$?

Розв'язок: Для заданої послідовності $y_n=\frac{n}{n+1}$, $a=1$. Задамо довільне ε>0 і покажемо, що для нього можна знайти таке натуральне число N, що для всіх номерів $n>N$ виконуватиметься нерівність

$$|y_n-1|<\varepsilon \text{ або } \left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon.$$

Звідси $\left|\frac{-1}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon.$

Розв'язавши нерівність відносно n, матимемо $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$ За шукане число $N(\varepsilon)$можна взяти найбільше ціле число, яке не перевищує числа $\frac{1}{\varepsilon}-1$ Таким чином $|y_n-1|<\varepsilon$ для всіх $n>N(\varepsilon)$. Покладемо $\varepsilon=0{,}1.$

Тоді $\frac{1}{\varepsilon}-1=9$ і $N=9$, тобто нерівність $|y_n-1|<0{,}1$ виконуватиметься для всіх членів послідовності, починаючи з 10-го номера *(n=10)*.

Приклад 5. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$

Розв'язок: Доведемо, що границею послідовності $y_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n},\ n\in N$ є число $a=0$.

Задамо довільне число $\varepsilon>0$ і розглянемо

$$|y_n-0|=\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right|=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

Нерівність $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\varepsilon$ рівносильна нерівності

$$\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\varepsilon.$$

Звідси $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\varepsilon$, або $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}>\frac{1}{\varepsilon}$.

Остання нерівність виконуватиметься при $\sqrt{n}>\frac{1}{2\varepsilon}$, бо тоді й $\sqrt{n+1}>\frac{1}{2\varepsilon}$. Таким чином, нерівність $|y_n-0|<\varepsilon$ виконуватиметься для $n>\frac{1}{4\varepsilon^2}$. Рівність доведено.

Приклад 6. Нехай задано послідовність $y_1=0{,}9;\ y_2=0{,}99;\ldots\ldots;y_n=0{,}\underbrace{9999\ldots9}_{n};\ldots$ Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=1$

Розв'язок: Справді $|y_n-1|=\left|1-0{,}\underbrace{9999\ldots9}_{n}\right|=0{,}\underbrace{00\ldots01}_{n}=10^{-n}$

Умова $|y_n-1|<\varepsilon$ або $10^{-n}<\varepsilon$, рівносильна умові $10^n>\frac{1}{\varepsilon}$ чи після логарифмування $n>\lg\frac{1}{\varepsilon}=-\lg\varepsilon$. Отже, якщо за $N(\varepsilon)$ взяти найбільше ціле число, яке не перевищує числа -lgε (при $\varepsilon<1$ це число додатне), то нерівність $|y_n-1|<\varepsilon$ виконуватиметься при $n>N(\varepsilon)$, а це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=1$. Нехай, наприклад, $\varepsilon=0{,}01$, тоді $\lg\varepsilon=-2$, а $N(\varepsilon)=2$. Отже, $|y_n-1|<0{,}01$ або $1-y_n<0{,}01$, $y_n>0{,}99$ при $n>2$. Так, при $n>2$ величина y_n матиме значення 0,999;0,9999; … Зауважимо, що члени даної послідовності є наближені значення числа 1 з точністю до 10^{-n} з недостачею.

Приклад 7. Знайти границю послідовності
$y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$,
$n \in N$.

Розв'язок: Оскільки $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le y_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}, n \in N,$ та $\sqrt{n^2+n} < n+1, \sqrt{n^2+1} > n,$ то $\frac{n}{n+1} < y_n < n \cdot \frac{1}{n} = 1.$

Проте $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Отже за теоремою про границю проміжної функції $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1.$

Приклад 8. Знайти границю послідовності $y_n = \frac{n}{n+1}, n \in N$.

Розв'язок: Маємо $0 < \frac{n}{n+1} < 1, n \in N.$ Отже, задана послідовність обмежена знизу числом 0 і зверху числом 1, а тому є обмеженою. У цьому разі *M=max*$\{0,1\} = 1$ так що $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1.$

Приклад 9. Послідовність *1,2,3,...,n...* обмежена знизу, бо $y_n \ge 1, n \in N$ і необмежена зверху, бо для будь-якого числа *A>0* знайдеться такий член послідовності y_n для якого справджується нерівність $y_n \ge A$.

Приклад 10. Послідовність *-1, -2, ..., -n,...* обмежена зверху, бо $y_n \le -1, n \in N$ і необмежена знизу, бо для будь-якого числа *P<0* знайдеться такий член послідовності y_n, для якого виконується нерівність $y_n \le P$.

Приклад 11. Послідовність $\{a_n\}$ задана
$a_0 > 0,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right),\ n = 0,1,2,\ldots$ Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Розв'язок: З умови слідує $a_n > 0$. Доведемо, що при довільному виборі a_0 виконується нерівність $a_n \ge 1,\ n = 1,2,\ldots$

Дійсно,

$$(a_n - 1)^2 \ge 0,$$
$$\left(a_n^2 - 2a_n + 1\right) \ge 0,$$

оскільки $a_n > 0$, то

$$a_n - 2 + \frac{1}{a_n} \ge 0, a_n + \frac{1}{a_n} \ge 2,\ \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \ge 1.$$

Отже послідовність $\{a_n\}$ обмежена знизу.

Порівняємо a_n і a_{n+1} при $n=1,2,...$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) V a_n ,$$

$$a_n + \frac{1}{a_n} V\, 2a_n .$$

$$\frac{1}{a_n} V a_n .$$

Оскільки $a_n \geq 1$, то $\frac{1}{a_n} \leq a_n$. Отже, $a_{n+1} \leq a_n$. Тобто послідовність не є зростаючою. За теоремою Вейєрштрасса існує $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, для знаходження якої достатньо перейти під знак границі у рівності $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$. Тобто $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(A + \frac{1}{A}\right)$.

$A = \frac{1}{2}\left(A + \frac{1}{A}\right)$ ($A \geq 1$ за теоремою про перехід до границі у нерівностях).

Розвязуємо рівняння відносно A і вибираємо корінь більше нуля. Маємо $A=1$.

Приклад 12. Знайти границі послідовностей :

1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-1}{2n^2+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \overbrace{\frac{1}{n^2}}^{0}}{2 + \underbrace{\frac{2}{n^2}}_{=0}} = \frac{3}{2}.$$

2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3-1}{2n^2+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n^3}{n^3} - \frac{1}{n^3}}{\frac{2n^2}{n^3} + \frac{2}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 - \overbrace{\frac{1}{n^3}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{2}{n^3}}_{\to 0}} = \infty .$$

3) $$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+2n-1}{5n^3+3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n^2}{n^3} + \frac{2n}{n^3} - \frac{1}{n^3}}{\frac{5n^3}{n^3} + \frac{3}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{5 + \frac{3}{n^3}} = 0 .$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-1}\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-1}\right)}{\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-1}\right)}=$$

4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-n^2+1}{\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-1}}{n}}.$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{n^2+2n}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}}}=1$$

Індивідуальні завдання для поточного контролю

Завдання 1. 1-25. Довести, що послідовність має таку границю. Знайти $N(\varepsilon)$ для $\varepsilon=0{,}01$; $\varepsilon=0{,}001$.

1. $\mathrm{X}_n=\dfrac{(k+3)n^2+k+2}{(k+4)n^2+k+1}$ $\qquad \dfrac{k+3}{k+4}$.
2. $\mathrm{X}_n=\dfrac{(2k+3)n+k}{(k+1)n+k+2}$ $\qquad \dfrac{2k+3}{k+1}$.
3. $\mathrm{X}_n=\dfrac{(k+5)n^2+k-7}{(k+3)n^2+k+2}$ $\qquad \dfrac{k+5}{k+3}$.
4. $\mathrm{X}_n=\dfrac{-(k+3)n+2k}{(k+1)n+1}$ $\qquad -\dfrac{+k+3}{k+1}$.
5. $\mathrm{X}_n=\dfrac{(k+4)n^2+3}{(k+5)n^2+1}$ $\qquad \dfrac{k+4}{k+5}$.
6. $\mathrm{X}_n=\dfrac{(2k+1)n+1}{(k+2)n+k+2}$ $\qquad \dfrac{2k+1}{k+2}$.
7. $\mathrm{X}_n=\dfrac{(k+2)n^2+3}{(k+5)n^2+2}$ $\qquad \dfrac{k+2}{k+1}$.
8. $\mathrm{X}_n=\dfrac{(k+6)n+k+7}{(k+3)n+k+1}$ $\qquad \dfrac{k+6}{k+3}$.
9. $\mathrm{X}_n=\dfrac{n^2+k-4}{n^2+k+1}$ $\qquad 1.$
10. $\mathrm{X}_n=\dfrac{(k+4)n+k+1}{(k+3)n+8}$ $\qquad \dfrac{k+4}{k+3}$.
11. $\mathrm{X}_n=\dfrac{n^2+k+1}{n^2+k+3}$ $\qquad 1.$
12. $\mathrm{X}_n=\dfrac{-(k+5)n+1}{(k+2)n+k}$ $\qquad -\dfrac{+k+5}{k+2}$.
13. $\mathrm{X}_n=\dfrac{(k+3)n+k+2}{(k+9)n+k+1}$ $\qquad \dfrac{k+3}{k+9}$.
14. $\mathrm{X}_n=\dfrac{(k+1)n+k}{(k+5)n+k+2}$ $\qquad \dfrac{k+1}{k+5}$.
15. $\mathrm{X}_n=\dfrac{-(k+1)n+3}{(k+2)n+k}$ $\qquad -\dfrac{+k+1}{k+2}$.
16. $\mathrm{X}_n=\dfrac{(k+2)n+5}{(k+6)n+k}$ $\qquad \dfrac{k+2}{k+6}$.
17. $\mathrm{X}_n=\dfrac{(k+7)n+k+3}{(k+1)n+k+1}$ $\qquad \dfrac{k+7}{k+1}$.
18. $\mathrm{X}_n=\dfrac{(k+8)n+k+1}{(k+7)n+k+3}$ $\qquad \dfrac{k+8}{k+7}$.
19. $\mathrm{X}_n=\dfrac{(k+5)n+k+4}{(k+2)n+3}$ $\qquad \dfrac{k+5}{k+2}$.
20. $\mathrm{X}_n=\dfrac{-(k+3)n+5}{(k+5)n+k+2}$ $\qquad -\dfrac{+k+3}{k+5}$.
21. $\mathrm{X}_n=\dfrac{-(k+4)n+5}{(k+1)n+k+5}$ $\qquad -\dfrac{+k+4}{k+1}$.
22. $\mathrm{X}_n=\dfrac{(k+3)n+k}{(2k+5)n+2}$ $\qquad \dfrac{k+3}{2k+5}$.
23. $\mathrm{X}_n=\dfrac{(k+6)n+k+1}{(k+2)n+7}$ $\qquad \dfrac{k+6}{k+2}$.
24. $\mathrm{X}_n=\dfrac{(k+10)n+4}{(k+3)n+k}$ $\qquad \dfrac{k+10}{k+3}$.
25. $\mathrm{X}_n=\dfrac{-(k+9)n+4k}{(k+8)n+5}$ $\qquad -\dfrac{+k+9}{k+8}$.

Завдання 2. 1-13. Для послідовностей знайти $\inf x_n$, $\sup x_n$ **та верхню і нижню границі (**$n \to \infty$**):**

1. $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.
2. $x_n = (-1)^{n-1}(2 + \dfrac{3}{n})$.
3. $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.
4. $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.
5. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$.
6. $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$.
7. $x_n = n^{(-1)^n}$.
8. $x_n = (-1)^n n$.
9. $x_n = -n(2 + (-1)^n)$.
10. $x_n = \dfrac{1}{n - 10{,}2}$.
11. $x_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$.
12. $x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}$.
13. $x_n = \cos^n \dfrac{2n\pi}{3}$.

14-17. Користуючись теоремою про існування границі монотонної та обмеженої послідовності довести збіжність послідовностей:

14. $x_n = \dfrac{10}{1}\cdot\dfrac{11}{3}\cdots\dfrac{n+9}{2n-1}$.
15. $x_n = \left(1-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$.
16. $x_n = \left(1+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$.
17. $x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}},\ldots}_{n\ \text{коренів}}$.

18- 20. Знайти найбільший член послідовності:

18. $x_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.
19. $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+100}$.
20. $x_n = \dfrac{1000^n}{n!}$.

21-23. Користуючись критерієм Коші довести збіжність наступних послідовностей:

21. $x_n = \dfrac{\sin 1}{2} + \dfrac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \dfrac{\sin n}{2^n}$.
22. $x_n = \dfrac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \dfrac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{\cos n!}{n(n+1)}$.
23. $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$.

Завдання 3. 1-25. Знайти границі послідовностей:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(k+2-n)^2+(k+2+n)^2}{(k+2-n)^2-(k+2+n)^2}$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(k+2-n)^4-(k+1-n)^4}{(k-n)^4-(k+n)^4}$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(k+2-n)^4-(k+1-n)^4}{(k-n)^3-(k+1+n)^3}$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(k-n)^4-(k+n)^4}{(k+n)^3-(k-n)^3}$.
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(k+5-n)^2-(k+5+n)^2}{(k+5+n)^2-(k-n)^2}$.
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+k)^3-(n-k)^3}{(n-k)^3-(n+k)^3}$.
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+(k+1)n)^3-(k+1)^3 n^3}{(1+(k+1)n)^2+(k+1)^2 n^2}$.
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-(k+3)n)^2}{(n-k-2)^3-(n+k+2)^3}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(k+2-n)^3}{(n+k)^2-(n+k)^3}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+k)^2+(n-k)^2-(n+k+1)^3}{(k+3-n)^3}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(k+1)-(n+k)^3+(n+k+1)^3}{3n^2+(k+1)n-k-2}$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+k)^3+(n+k+1)^3}{(n+k+3)^3+(n+k+4)^3}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+k+2)^3+(n+k+3)^3}{(n+k+2)^4-(n+k+3)^4}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+k)^4-(n-k)^4}{(n+k)^3+(n-k)^3}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(k+1)^3n^3-(k+1)n}{(n+k)^4-(n-k)^4}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+k+5)^3-(n+k)^3}{((k+1)n+k+2)^2+(n+k+3)^2}$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{((k+1)n-k-2)^3-(n+k+4)^3}{((k+2)n-k)^3+((k+1)n+k+2)^3}$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+k+9)^2+((k+2)n+k)^2}{(n+k+5)^3-(n+k)^3}$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{((k+1)n+1)^3+((k+2)n+k+1)^3}{((k+1)n+k+2)^3-(n-k-6)^3}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+k+6)^3-(n+k+1)^3}{((k+2)n+k+1)^2+((k+3)n+k)^2}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{((k+1)n+k)^3-((k+1)n+k+2)^3}{((k+1)n+k)^2+((k+1)n+k+2)^2}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+(n-k)^3}{(n+k)^4-n^4}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+k+1)^4-(n-k-1)^4}{(n+k+4)^2+(n-k-4)^2}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+k)^4-(n-k)^4}{(n+k)^3+(n-k)^3}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+k)^3-(n-k)^3}{(n+k)^2-(n-k)^2}$.

Завдання 4. 1-25. Знайти границі послідовностей:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{(k+1)n+1}\left(\sqrt{n+k+1}-\sqrt{n+k}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k+(2k+2)+(3k+4)+\ldots+((k+2)n-2)}{\dfrac{(n+k)^2}{4}+\dfrac{(n+k+1)^2}{4}}$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2+n^3}-\sqrt{n^2+(k+3)n+1}\right)$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-n+\sqrt[3]{n^3+(k+1)n^2+1}\right)$;

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n-1)}\right)$;

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{k+2+n^3}-n\right)$;

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)n}{n^2-(k+1)n+1}-n\right)$;

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+k+1)^3-(n+k)^3}{(n+k+2)^2+(n+k+1)^2}$;

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2(1+2+3+\ldots+n)}{((k+1)n+1)\sqrt{n^2+k+2}}\right)$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+k+1)^4-(n+k)^4}{(n+k+2)^3+(n+k+1)^3}$;

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+5+\ldots+(2n-1)}{n-k-1}-n\right)$;

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+(k-1)n+k}-n\right)$;

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+...+n}{\sqrt{(k+1)^2n^4+1}}\right)$;

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(k+1)\sqrt{n+1}+k}{(k+2)\sqrt{n+1}-k}$;

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+k+3)!-(n+k)!}{(n+k+1)!(kn+k+1)^2}$;

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(k+2)n^4+1}{(k+1)n^3+k}$;

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+k+4)!-(n+k+2)!}{(n+k+3)!\sqrt{(k+1)^2n^2+k}}$;

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(k+4)n+1}{(k+3)n^2+k}$;

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+k+3)!-(n+k+1)!}{(n+k+3)!+(n+k+1)!}$;

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n+k}+k+1}{\sqrt[3]{n+k}+k+3}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+k)!+(n+k+1)!}{(n+k)!-(n+k+1)!}$;

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(k+1)^n+(k+2)^n}{(k+1)^n-(k+2)^{n-2}}$;

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(k+3)^n-(k+2)^n}{(k+3)^{n-1}+(k+2)^n}$;

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(k+2)^n-(k+3)^n}{(k+2)^{n-1}+(k+3)^n}$.

Тема 4. Границя функції. Обчислення границь

4.1. Однобічні границі.

Означення 4.1. Число A_1 називають лівобічною границею функції $y = f(x)$ в точці x_0, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$, знайдеться таке число $\delta > 0$, що нерівність $|f(x) - A_1| < \varepsilon$ виконується для всіх x, що задовольняють умові: $x_0 - \delta < x < x_0$ (тобто $0 < x_0 - x < \delta$) і позначають $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ (рис. 4.1).

Зауважимо, що для існування границі в точці x_0 несуттєво означена функція в цій точці чи неозначена.

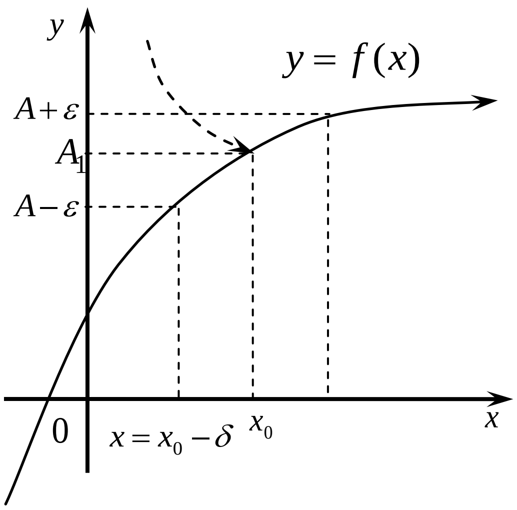


Рис. 4.1.

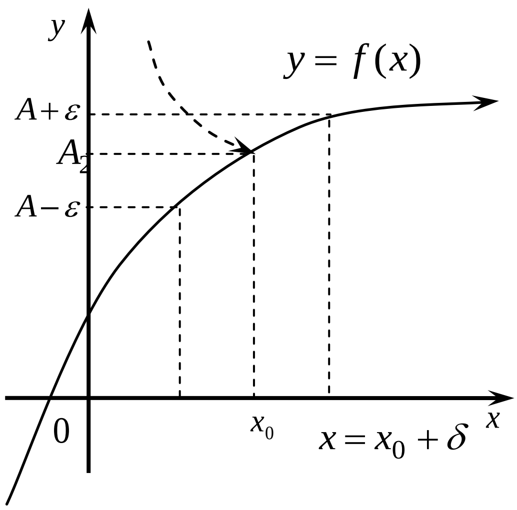


Рис. 4.2.

Нехай тепер аргумент x змінюється наближаючись до x_0 справа: $x \to x_{0+0}$. Аналогічно лівобічній границі можна провести міркування і дістати:

Означення 4.2. Число A_2 називають правобічною границею функції $y = f(x)$ в точці x_0, якщо для будь-якого, як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ можна знайти таке $\delta > 0$, що нерівність $|f(x) - A_2| < \varepsilon$ виконується для всіх x, що задовольняють умові $x_0 < x < x_0 + \delta$, тобто $(0 < x - x_0 < \delta)$ і позначають $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$ (рис. 4.2).

Лівобічна і правобічна границі називають однобічними границями в точці.

Отже,

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A_1,\ якщо\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0, \left|f(x)-A_1\right|<\varepsilon,\ x_0-\delta<x<x_0.$$

4.2. Границя функції в точці.

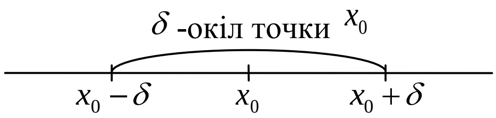
Якщо функція $y=f(x)$ в деякій точці x_0 має обидві однобічних границі і вони дорівнюють одна одній: $A_1=A_2$, то їх спільне значення $A=A_1=A_2$ називають границею функції в точці і позначають $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

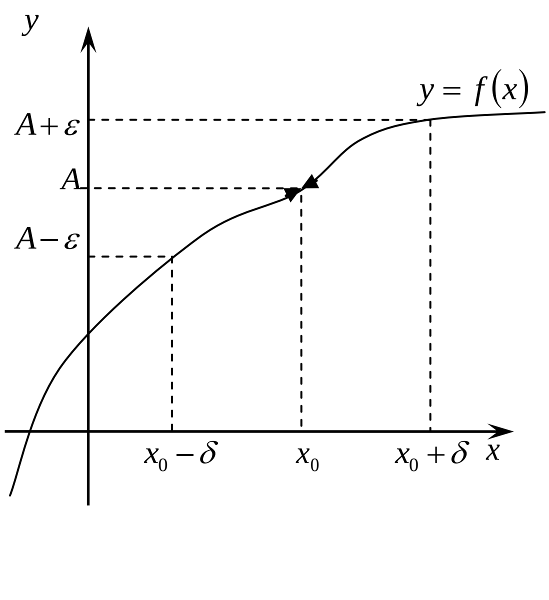
Дамо означення цієї границі, не користуючись поняттями однобічних границь. Для цього аналогічно попереднім міркуванням введемо числа ε, δ і сформулюємо

Означеня 4.3. Число A називають границею функції $y=f(x)$ в точці x_0, якщо для будь-якого, як завгодно малого числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$ таке, що нерівність $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$ виконується для всіх x, що задовольняють умові: $\left|x-x_0\right|<\delta$, тобто $x_0-\delta<x<x_0+\delta$,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\ \left|f(x)-A\right|<\varepsilon, \left|x-x_0\right|<\delta$$

Зауважимо, що $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ називають δ-окілом точки x_0.





З'ясуємо геометричний зміст означення 4.3.

$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon\ \Leftrightarrow\ A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$

Остання нерівність повинна

виконуватись для всіх x з δ-окіла точки x_0, тобто $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$. Це означає, що в останньому інтервалі графік функції $y = f(x)$ лежить між прямими $y = A + \varepsilon$, $y = A - \varepsilon$.

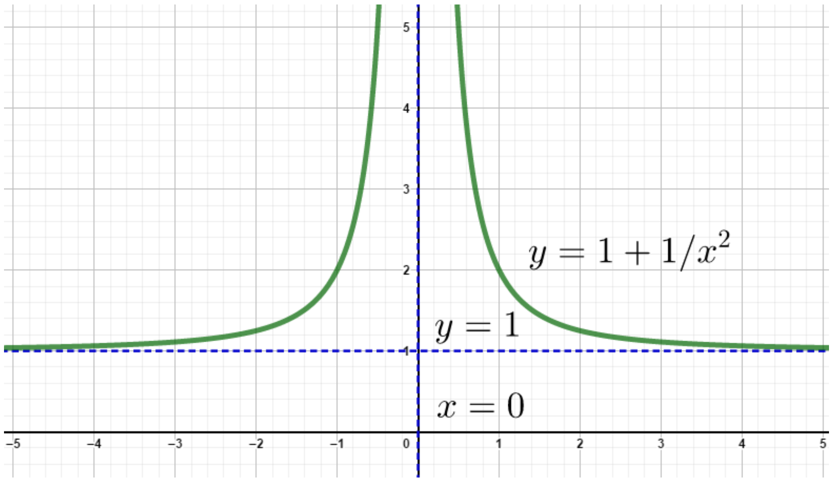
Число А – називається границею функції $y = f(x)$ де $x \to x_0$, якщо для будь-якої послідовності точок $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що збігаються до точки x_k відповідна послідовність значень функції збігається до A.

4.3. Границя функції при $x \to \pm\infty$.

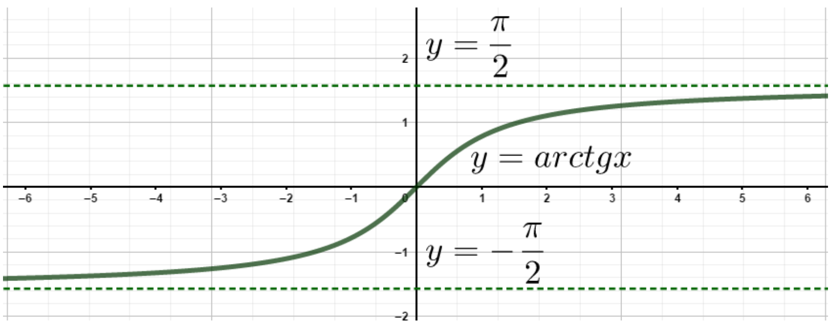
Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a; +\infty)$. Будемо вивчати її поведінку коли $x \to +\infty$.

Розглянемо спочатку конкретні функції:

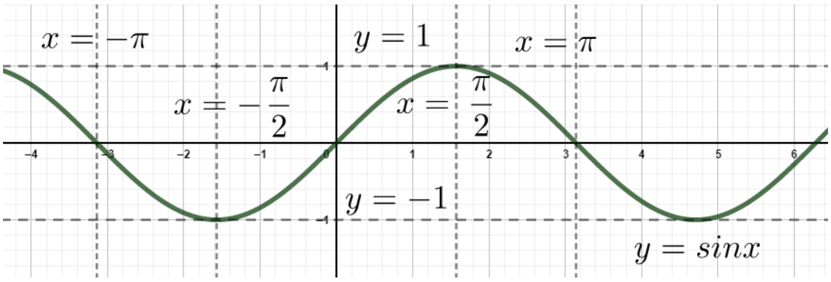
1) $y = 1 + \dfrac{1}{x^2}$. Функція при $x \to +\infty$ спадає, наближаючись до значення 1 (інтерактивну модель можна переглянути за посиланням https://www.geogebra.org/classic/ksq59bfs).



2) $y = arctgx$. Функція при $x \to +\infty$ зростає, наближаючись до числа $\dfrac{\pi}{2}$ (інтерактивну модель можна переглянути за посиланням https://www.geogebra.org/classic/zgz3bep6).



3) $y = \sin x$. Функція зі зростанням аргументу x не наближається ні до якого числа, коливаючись і весь час знаходячись в інтервалі $[-1, 1]$.



Кажуть, що перші дві функції мають скінченні границі у процесі $x \to +\infty$, які відповідно дорівнюють 1 і $\frac{\pi}{2}$. Про функцію $y = \sin x$ кажуть, що вона не має границі при $x \to +\infty$ (інтерактивну модель можна переглянути за посиланням https://www.geogebra.org/classic/nf2whf3y).

Сформулюємо таке означення границі функції при $x \to +\infty$.

Означення 4.4. Число B_1 називають границею функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$, можна вказати число $N > 0$ таке, що нерівність $|f(x) - B_1| < \varepsilon$ виконується як тільки $x > N$.

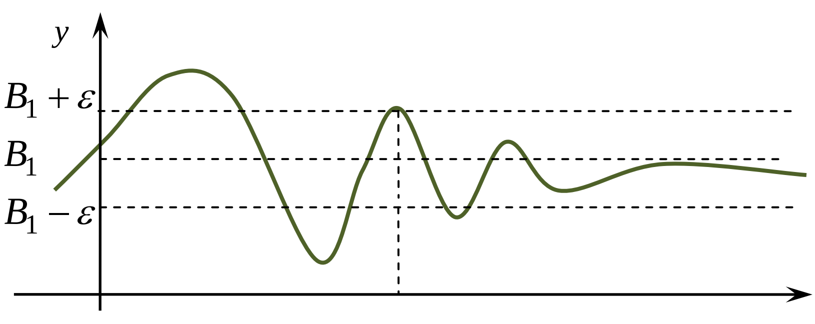
З'ясуємо геометричний зміст цього означення. Перепишемо нерівність $|f(x) - B_1| < \varepsilon$ у вигляді:

$$-\varepsilon < f(x) - B_1 < \varepsilon$$

$$B_1 - \varepsilon < f(x) < B_1 + \varepsilon$$

Так як остання нерівність повинна виконуватись для всіх $x > N$, то для таких x графік функції $y = f(x)$ повинен лежати між прямими $y = B_1 - \varepsilon$, $y = B_1 + \varepsilon$.

Чим більше x, тим ближче розташовується графік функції $y = f(x)$ до прямої $y = B_1$ (із зменшенням ε збільшується N) – в цьому і полягає геометричний зміст означення границі при $x \to +\infty$.



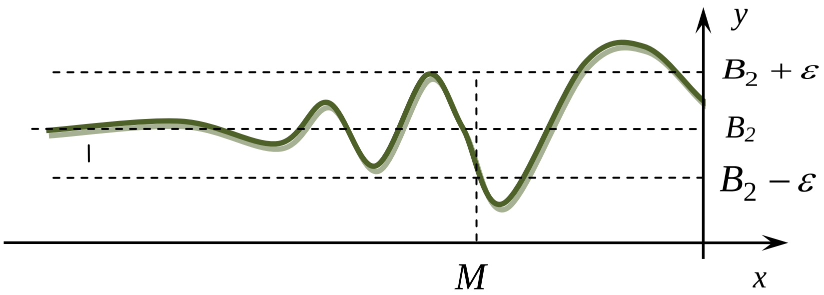
6

Нехай тепер функція $f(x)$ визначена в інтервалі $(-\infty; a]$. Сформулюємо означення границі цієї функції при $x \to -\infty$.

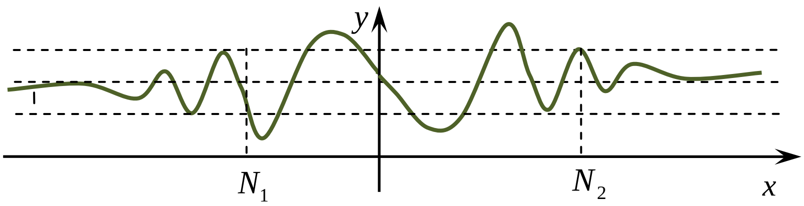
Означення 4.5. Число B_2 називається границею функції $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати число $M < 0$ таке, що нерівність $|f(x) - B_2| < \varepsilon$ виконується як тільки $x < M$. Позначається $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = B_2$.

Геометричний зміст цього означення розкривається аналогічно попередньому випадку:

Для всіх $x < M$ $(M < 0)$ графік функції $y = f(x)$ лежить між прямими $y = B_2 - \varepsilon$ і $y = B_2 + \varepsilon$.



Може статися, що функція $y = f(x)$ має границі при $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$ і ці границі дорівнюють одна одній $B_1 = B_2 = B$. В цьому випадку кажуть, що функція $y = f(x)$ має границю – число B при $x \to \infty$.



Означення 4.6. Число B називають границею функції $y = f(x)$ при $x \to \infty$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке число $N > 0$, що нерівність $|f(x) - B| < \varepsilon$ виконується, як тільки $|x| > N$.

$$N = \max\{|N_1|, |N_2|\}.$$

4.4. Основні теореми про границі.

Теорема 4.1. Больцано-Коші *(критерії існування скінченної границі).* Для того, щоб функція $f(x)$ при $x \to x_0$ мала скінченну границю необхідно і достатньо, щоб $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ виконується як тільки $|x - x_0| < \delta, \ |x' - x_0| < \delta$.

Теорема 4.2. Для того, щоб функція $f(x)$ мала границю в точці a (при $x \to \infty$), яка дорівнює числу A, необхідно і достатньо, щоб існували правобічна і лівобічна границі функції в точці a (границі функції при $x \to +\infty$ і при $x \to -\infty$), кожна з яких дорівнює a.

Теорема 4.3. Границя сталої величини дорівнює самій цій сталій при будь-якому процесі $\lim C = C$ ($c = const$).

Дійсно, за означенням границі можна записати, що $|C - C| < \varepsilon$ для $\varepsilon > 0$, а це очевидно.

Теорема 4.4. Якщо змінна U має скінченну границю в деякому процесі, то вона єдина.

Теорема 4.5. *(про збереження знаку границі).* Якщо $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b > 0$, то $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ f(x) > 0$.

Теорема 4.6. *(про граничничний перехід у нерівностях).* Якщо $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $f(x) \le g(x)$, $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

Теорема 4.7. *(про границю проміжної функції).* $h(x) \le g(x) \le f(x)$ $\lim h(x) = b, \ \lim f(x) = b$ то $\lim g(x) = b$.

Теорема 4.8. Нехай змінні U_1, U_2 в одному процесі мають скінченні границі: $\lim U_1 = A_1$, $\lim U_2 = A_2$, тоді :

- границя суми цих змінних дорівнює сумі границь цих змінних $\lim(U_1 + U_2) = \lim U_1 + \lim U_2$.
- границя добутку цих змінних дорівнює добутку границь $\lim(U_1 \cdot U_2) = \lim U_1 \cdot \lim U_2$.
- границя частки цих змінних дорівнює частці границь, тобто: $\lim \dfrac{U_1}{U_2} = \dfrac{\lim U_1}{\lim U_2}$, за винятком випадку, коли $\lim U_2 = 0$.

Наслідки з теореми:

1. Сталу величину можна виносити за знак границі: $\lim(CU)=\lim C\cdot\lim U=C\lim U$.
2. $\lim U^n=(\lim U)^n$.
3. $\lim\sqrt[m]{U^n}=\sqrt[m]{(\lim U)^n}$.
4. $\lim\log_a f(x)=\log_a \lim f(x)$.

Наприклад, $\lim U^2=\lim(U\cdot U)=\lim U\cdot\lim U=(\lim U)^2$. Аналогічно цю властивість можна показати для будь-якого n.

5. Границя раціональної функції $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{x-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ при $x\to x_0$ дорівнює значенню цієї функції в точці x_0, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$.

Доведені властивості і наслідки з них дозволяють легко знаходити границі.

4.5. Границя дробово-раціональної функції.

Дробово-раціональною називають функцію, що являє собою відношення раціональних функцій (многочленів):

$$y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}$$

1. Нехай x_0 – скінченна точка, тоді:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}\dfrac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}, & P_n(x_0)\neq 0,\ Q_m(x_0)\neq 0\\ 0,\ \text{якщо}\ P_n(x_0)=0,\ Q_m(x_0)\neq 0\\ \pm\infty,\ \text{якщо}\ P_n(x_0)\neq 0,\ Q_m(x_0)=0\end{cases}$$

Це очевидно на основі властивостей і положень про нескінченно малі величини. Якщо одночасно чисельник і знаменник перетворюються в нуль, то необхідно виділити множник $(x-x_0)$ в знаменнику і чисельнику і на нього скоротити.

2. Нехай тепер $x\to\infty$, тоді

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m},\ \text{якщо}\ \ n=m\\ \infty,\ \text{якщо}\ \ n>m\\ 0,\ \ \text{якщо}\ \ n<m\end{cases}\quad\begin{pmatrix}n-\text{старший степінь чисельника}\\ m-\text{старший степінь знаменника}\end{pmatrix}$$

Дійсно,

а) $n = m$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} =$$

$$= [\textit{ділимо чисельник і знаменник на } x^m = x^n] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}} = \frac{a_n}{b_m}$$

б) $n > m$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_1 x^1 + b_0} =$$

$$= [\textit{ділимо чисельник і знаменник на } x^m] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^{n-m} + a_n x^{n-m-1} + \ldots + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{x^m}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}} = \infty$$

в) $n < m$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} =$$

$$= [\textit{ділимо чисельник і знаменник на } x^m] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{a_n}{x^{m-n}} + \frac{a_{n-1}}{x^{m-n+1}} + \ldots + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{x^m}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}} = \frac{0}{b_m} = 0$$

4.6. Перша і друга особливі границі.

Перша особлива границя – так називають границю функції:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ при } x \to 0.$$

У точці $x = 0$ функція $\frac{\sin x}{x}$ не визначена. Одержуємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$ $(\sin x = 0)$. Тому застосовувати теорему про границю частки тут не можна. Ця границя знаходиться з інших міркувань і у курсі математичного аналізу доводиться, що $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Теорема 4.9. Границя відношення $\sin x$ до x при умові що $x \to 0$ дорівнює 1:

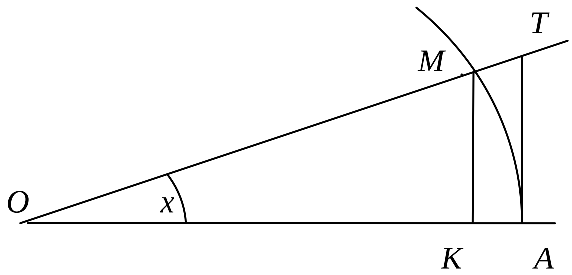
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ - парна.}$$

$$D(f) = (-\infty;0)\cup(0;+\infty).$$

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x).$$

Якщо $x \to 0$, то досить розглянути значення x, що задовольняє нерівностям $0 < x < \frac{\pi}{2}$.



$OA = R,\ \sin x = \dfrac{MK}{R},\ tgx = \dfrac{AT}{R}.$

$S_{\Delta MOA} < S_{сектMOA} < S_{\Delta OAT}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} S_{сектора} = \dfrac{xR^2}{2} \\ x - в\ радіанах \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}OA\cdot MK < \frac{1}{2}x\cdot R^2 < \frac{1}{2}OA\cdot AT\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}R^2\sin x < \frac{1}{2}xR^2 < \frac{1}{2}R^2 tgx\ \Rightarrow\ \sin x < x < tgx\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} розділимо\ нерівність\ на\ \sin x > 0 \\ оскільки\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right] \Rightarrow\ 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}\ \Rightarrow\ \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0+0}\cos x = 1$ і $\lim\limits_{x\to 0+0} 1 = 1$

то

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Оскільки функція парна, матимемо при $-\frac{\pi}{2} < x < 0$

$$\lim_{x\to 0-0}\sin x = 1.$$

Це дає можливість знаходити границі багатьох тригонометричних функцій. Для цього в них за допомогою тригонометричних тотожностей виділяють частину у вигляді $\frac{\sin x}{x}$, що на наступному етапі дозволяє знайти границю тригонометричної функції.

Друга особлива границя – так називають:

1) границю функції $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ при $x\to\infty$,

чи що те ж саме

2) границю функції $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ при $x\to 0$.

У першому випадку $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ отримуємо невизначеність типу 1^{∞}. Тому застосувати теореми про границі тут не можна. Ця границя знаходиться з інших міркувань і у курсі математичного аналізу доводиться $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e.$

У другому випадку $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ отримуємо невизначеність 1^{∞} теж.

Нехай $x=\dfrac{1}{h}$, тоді будемо розглядати границю $\lim\left(1+\dfrac{1}{h}\right)^{h}$ при $\dfrac{1}{h}\to 0$, тобто $h\to\infty$.

Отже, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{h\to 0}\left(1+\dfrac{1}{h}\right)^{h}=\infty$. Таким чином $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Це дає можливість знаходити границі багатьох степеневих функцій.

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1: Довести $\lim\limits_{x\to 1-0}(2x+1)=3$.

Розв'язок: Необхідно довести, що для довільно взятого числа $\varepsilon>0$ знайдеться таке число $\delta>0$, що з нерівності $0<1-x<\delta$ випливає нерівність $|(2x+1)-3|<\varepsilon$. Тобто необхідно знайти функцію $\delta=\delta(\varepsilon)$. Розглянемо різницю $|(2x+1-3)|=|2x-2|=|2(x-1)|=2|x-1|$. Оскільки $x\to 1_{-0}$, тобто $x<1$, то $2|x-1|=2(x-1)$.

Отже $2(x-1)<\varepsilon$. Ця нерівність виконується, якщо $0<1-x<\frac{\varepsilon}{2}$. Порівнюючи з нерівністю $0<1-x<\delta$, дістаємо, що за шукане число 1 можна взяти число $\frac{\varepsilon}{2}$ чи менше за нього. Тоді справедливо, що з нерівності $0<1-x<\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ випливає нерівність $2(x-1)<\varepsilon$. А це і означає за означенням, що $\lim\limits_{x\to 1-0}(2x+1)=3$.

Приклад 2. Довести $\lim\limits_{x\to 3}(2x+1)=7$.

Розв'язок: Потрібно довести, що $|(2x+1)-7|<\varepsilon$ випливає з нерівності $|x-3|<\delta$, де δ потрібно визначити як $\delta=\delta(\varepsilon)$.

$$|(2x+1)-7|=|2x-6|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<2x-6<\varepsilon \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2}<x-3<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, $\varepsilon\le\frac{\varepsilon}{2}$, тоді нерівність $|(2x+1)-7|<\varepsilon$ випливає з нерівності $|x-3|<\delta$, де $\delta\le\frac{\delta}{2}$.

Приклад 3. Довести $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x+1}=2$.

Розв'язок: Потрібно задати довільно ε, щоб знайти $N>0$ таке, що з $x>N \Rightarrow \left|\frac{2x-1}{x+1}-2\right|<\varepsilon$.

$\left|\frac{2x-1}{x+1}-2\right|=\left|\frac{2x-1-2x-2}{x+1}\right|=\left|\frac{-3}{x+1}\right|=\frac{3}{x+1}$ (рівність можлива, оскільки $x\to+\infty$).

Нехай $\frac{3}{x+1}<\varepsilon \Rightarrow \frac{x+1}{3}>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow x>\frac{3}{\varepsilon}-1$.Таким чином, нерівність $\left|\frac{2x-1}{x+1}-2\right|<\varepsilon$ виконується як тільки $x>\frac{3}{\varepsilon}-1$ ($x>N$). Отже, за N можна взяти $N=\frac{3}{\varepsilon}-1$.

Нехай $\varepsilon=0{,}01$, то $N=\frac{3}{0{,}01}-1=299$ $\varepsilon=0{,}001$, то $N=\frac{3}{0{,}001}-1=2999$. Тобто зі зменшенням ε збільшується N.

Приклад 4. Обчислити $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2-5x+2\right)$.

Розв'язок: Підставляємо граничне значення змінної x, маємо $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-5x+2)=\lim\limits_{x\to 2}(3x^2)-\lim\limits_{x\to 2}(5x)+\lim\limits_{x\to 2}2=3\lim\limits_{x\to 2}x^2-5\lim\limits_{x\to 2}x+2=3\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^2-5\cdot 2+2=4$.

Приклад 5. Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{matrix}x^2-3x+2=(x-1)(x-2)\\ x^2-4x+3=(x-1)(x-3)\end{matrix}\right|=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-2}{x-3}=\frac{1}{2}$.

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+3x-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+4)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+4}=\frac{1+1+1}{1+4}=\frac{3}{5}$.

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+x+5}{x^2-2}=\frac{2^3+2+5}{2^2-2}=\frac{15}{2}=7{,}5$.

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x+3}{x^2-4}=\infty$.

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x+3}=0$.

Приклад 6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+n-1}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}=5$.

Приклад 7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+1}{x^2-1}=\left[\text{\textit{Ділимо на }} x^2\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-2+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=\infty$.

Приклад 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2+x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=0$.

Приклад 9. Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x\cos x}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos x=2\cdot 1\cdot 1=2$.

Чи те ж саме, тільки іншим способом.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x}{2x}=2\lim\limits_{2x\to 0}\dfrac{2\sin 2x}{2x}=2$.

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=\lim\limits_{kx\to 0}\dfrac{k\sin kx}{kx}=k\lim\limits_{kx\to 0}\dfrac{\sin kx}{kx}=k$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 7x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin 3x}{x}}{\dfrac{\sin 7x}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}}=\dfrac{3}{7}$.

Отже: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{\sin mx}=\dfrac{k}{m}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=1$.

Приклад 10. Знайти наступні границі.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+7}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{7}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{7}=e\cdot 1=e$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{4x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right)^{4}=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right)^{4}=e^4$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{1}{3}}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{1}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^{3}=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{1}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^{3}=e^3$

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(\left(1+(-2x)\right)^{\frac{1}{-2x}}\right)^{-2} = \begin{bmatrix} y=-2x \\ x\to 0 \Rightarrow y\to 0 \end{bmatrix} = \lim_{x\to 0}\left((1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^{-2} = e^{-2}.$$

Індивідуальні завдання для поточного контролю

Завдання 1. 1-25. Довести (знайти $\delta(\varepsilon)$), що:

1. $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{3x^2-5kx^2}{x-k}=k$
2. $\lim\limits_{x\to -k}\dfrac{kx^2+\left(2k^2+1\right)x+k^3}{x+k}=1$
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(k+1)x^2-kx-1}{x-1}=k+2$
4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(k+2)x^2+2(k+1)x+k}{x+1}=-2$
5. $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{3x^2-2(k+1)x-k^2-4}{x+k}=-2$
6. $\lim\limits_{x\to k+1}\dfrac{x^2-(k+2)x+2k+1}{x-k}=k$
7. $\lim\limits_{x\to k+2}\dfrac{x^2-(k+3)x+2k+3}{x-k-1}=k+1$
8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-(k+3)x+k+2}{x^2-(k+2)x+k+1}=\dfrac{k+1}{k}$
9. $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{x^2+(3-k)x-3k}{x^2-(k-2)x-2k}=\dfrac{k+3}{k+2}$
10. $\lim\limits_{x\to k+1}\dfrac{x^2-(k-1)x-2k-2}{2x^2-(2k+1)x-k-1}=\dfrac{k+3}{2k+3}$
11. $\lim\limits_{x\to -k-2}\dfrac{2x^2+(2k+3)x-k-2}{x+k+2}=-2k-5$
12. $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{5x^2-(5k-1)x-k}{x-k}=5k+1$
13. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(k+2)x^2+(k+4)x-2k}{x+2}=-3k-4$
14. $\lim\limits_{x\to k+2}\dfrac{4x^2-(4k+10)x+2(k+2)}{x-k-2}=4k+6$
15. $\lim\limits_{x\to -7/2}\dfrac{2x^2+(2k+5)x+7(k-1)}{2x+7}=k-\dfrac{9}{2}$
16. $\lim\limits_{x\to \frac{k+4}{k+1}}\dfrac{(k+1)x^2-3(k+2)x+2(k+4)}{(k+1)x-k-4}=\dfrac{2-k}{k+1}$
17. $\lim\limits_{x\to k+4}\dfrac{5x^2-(5k+19)x-k-4}{x-k-4}=5k+21$
18. $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{(k+1)x^2+(8k+7)x+7k}{x+7}=-6k-7$
19. $\lim\limits_{x\to -k-3}\dfrac{2x^2+2(k+2)x-2(k+3)}{x+k+3}=-2k-8$
20. $\lim\limits_{x\to \frac{-k}{k+2}}\dfrac{2(k+2)x^2+(k-2)x-k}{(k+2)x+k}=\dfrac{3k+2}{k+2}$
21. $\lim\limits_{x\to k+9}\dfrac{5x^2-(5k+46)x+k+9}{x-k-9}=5k+44$
22. $\lim\limits_{x\to \frac{k+1}{k+2}}\dfrac{(k+2)x^2-(4k+7)+3(k+1)}{(k+2)x-(k+1)}=-\dfrac{2k+5}{k+2}$
23. $\lim\limits_{x\to -k-1}\dfrac{4x^2+(4k+3)x-k-1}{x+k+1}=-4k-5$
24. $\lim\limits_{x\to -\frac{k+2}{k+1}}\dfrac{(k+1)x^2+x-k-2}{(k+1)x+k+2}=-\dfrac{2k+3}{k+1}$
25. $\lim\limits_{x\to -k}\dfrac{2x^2+(2k-5)x-5k}{x+k}=-2k-5$

Завдання 2. 1-25. (а-в).Знайти границю функції(а):

1. $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{x^2+3x-k^2}{x+k}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x+k}$

3. $\lim\limits_{x\to -k}\dfrac{3x^2+2x+k}{\sqrt{x^2-3kx}-2k}$

4. $\lim\limits_{x\to k+1}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+k}{\sqrt{x-k}-1}$

5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x+k^3+1}-k}{x^2+1}$

6. $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{x^2-k^2}{x^2-(k-1)x-k}$

7. $\lim\limits_{x\to -k}\dfrac{x^2+kx}{x^2-k^2}$

8. $\lim\limits_{x\to k+1}\dfrac{x^2-k^2-2k-1}{x^2-(k+1)x}$

9. $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{x^3-k^3}{x^2-k^2}$

10. $\lim\limits_{x\to -k-1}\dfrac{x^3+(k+1)x^2}{x^3+(k+1)^3}$

11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+kx-k-1}{x^2-(k-1)x+k-2}$

12. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+(2k-1)x-k}{2x^2-(2k+1)x+k}$

13. $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{x^2-(k-2)x-2k}{x^2+(3-k)x-3k}$

14. $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{x^3-kx^2+x-k}{x^3-(k+3)x^2+(3k+2)x-2k}$ 15.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-(k+3)x^2+(3k+2)x-2k}{x^3+kx^2-x-k}$ 16.

$\lim\limits_{x\to k+1}\dfrac{x^3-(k+1)x^2-4x+4k+4}{x^3-(k+1)x^2+x-k-1}$ 17.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+(k-1)x^2-(2k+1)x+k+1}{x^3+kx^2-x-k}$ 18.

$\lim\limits_{x\to k}\dfrac{x^3-(2k+1)x^2+k(k+2)x-k^2}{x^3-(2k-1)x^2+k(k-2)x+k^2}$

19. $\lim\limits_{x\to -k}\dfrac{x^3+2(k-1)x^2+k(k-4)x-2k^2}{x^3+(2k-1)x^2+k(k-2)x-k^2}$ 20.

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-(k+5)x^2+4(k+2)x-4k-4}{x^3-(k+x)x^2+4(k+3)x-4k-8}$ 21.

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-kx^2-(2k+3)x-k-2}{x^3-(k-1)x^2-(2k+1)x-k-1}$ 22.

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3+(k-5)x^2(6k-3)x+9k+9}{x^3+(k-6)x^2-(6k-9)x+9k}$ 23.

$\lim\limits_{x\to k}\dfrac{x^3+(1-2k)x^2+k(k-2)x+k^2}{x^3+2(1-k)x^2+k(k-4)x+2k^2}$ 24.

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-(k-2)x^2-4(k+1)x-4(k+2)}{x^2-(k-1)x^2-4(k+2)x-4(k+3)}$ 25.

$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3-(k-5)x^2-(6k-3)x-9k-9}{x^3-(k-3)x^2-3(2k+3)x-9k-27}$.

1-25. Знайти границю функції: (б):

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+k^2-1}-k}{x^2-k}$

2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sqrt{x+k^2+1}-k}$

3. $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{\sqrt{x-k+4}-2}{\sqrt{x-k+9}-3}$

4. $\lim\limits_{x\to -k-1}\dfrac{\sqrt{k^2-k-1-x}-k}{\sqrt{23-2x-2k}-5}$

5. $\lim\limits_{x\to -k}\frac{\sqrt{16-5k-5x}-4}{\sqrt{49+5k+5x}-7}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^{k+3}}+x^k-1}{x^{k+3}}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^{k+1}}+x^{k+2}-1}{x^{k+1}}$

8. $\lim\limits_{x\to k}\frac{x^2-k^2}{\sqrt[3]{x-k+8}-2}$

9. $\lim\limits_{x\to -k}\frac{\sqrt[3]{27-k-x}-3}{x^2+(k+1)x+k}$

10. $\lim\limits_{x\to k}\frac{\sqrt{x-k+1}-\sqrt{2k-2x+1}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{k}}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{k+x}-\sqrt{k-x}}{\sqrt[k+x]{x}}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+(k+2)x+x^2}-(1-x)}{k+1}$

13. $\lim\limits_{x\to k+1}\frac{\sqrt{x-k+8}-3}{\sqrt{x-k+3}-2}$

14. $\lim\limits_{x\to k+2}\frac{\sqrt{x-k+14}-4}{x^2-(k+3)x+k+2}$

15. $\lim\limits_{x\to k+3}\frac{\sqrt{x-k-2}-1}{\sqrt{x-k+13}-4}$

16. $\lim\limits_{x\to -(k+1)}\frac{x^2+(k+3)x+2k+2}{\sqrt{x+k+5}-2}$

17. $\lim\limits_{x\to k+2}\frac{\sqrt[3]{x-k+25}-3}{x^2-(k+1)x-k-2}$

18. $\lim\limits_{x\to k+4}\frac{\sqrt{x-k+21}-5}{\sqrt{x-k+45}-7}$

19. $\lim\limits_{x\to -(k+5)}\frac{x^2+(k+4)x-k-5}{\sqrt[3]{x+k+12}-2}$

20. $\lim\limits_{x\to k+5}\frac{\sqrt{x-k+31}-6}{x^3-(k+5)^3}$

21. $\lim\limits_{x\to -(k+3)}\frac{x^3+(k+3)^3}{\sqrt{x+k+45}-7}$

22. $\lim\limits_{x\to k+6}\frac{\sqrt[3]{x-k-5}-1}{\sqrt{x-k+10}-4}$

23. $\lim\limits_{x\to k+7}\frac{\sqrt{x-k+9}-4}{\sqrt{x-k+29}-6}$

24. $\lim\limits_{x\to k+8}\frac{\sqrt{x-k+56}-8}{\sqrt{x-k+73}-9}$

25. $\lim\limits_{x\to -(k+6)}\frac{x^2+(k+7)x+k+6}{\sqrt{x+k+15}-3}$.

1-25. Знайти границю функції (в):

1. $\lim\limits_{x\to k}\left(\frac{2x+k+6}{x^2+(2-k)x-2k}-\frac{x+2k+9}{x^2+(3-k)x-3k}\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to k}\left(\frac{4x+3-k}{x^2+(1-k)x-k}-\frac{2x+k+9}{x^2+(3-k)x-3k}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to -k}\left(\frac{2x+3k+1}{x^2+(k-1)x-k}-\frac{x+2k+2}{x^2+(k-2)x-2k}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to k}\left(\frac{1}{x-k}-\frac{kx+2k^2}{x^3-k^3}\right)$.

5. $\lim\limits_{x\to k+1}\left(\frac{1}{x-k-1}-\frac{3(k+1)^2}{x^3-(k+1)^3}\right)$.

6. $\lim\limits_{x\to -k}\left(\frac{1}{x+k}-\frac{2k^2-kx}{x^3-k^3}\right)$.

7. $\lim\limits_{x\to k+2}\left(\frac{2x-(x-8)/3}{x^2-kx-2k-4}-\frac{x+(2k-1)/3}{x^2-(k+3)x+k+2}\right)$.

8. $\lim\limits_{x\to k+4}\left(\frac{2x^2+3x-2k-11}{x^2-(k+5)x+k+4}-\frac{x+k+7}{x-k-4}\right)$.

9. $\lim\limits_{x\to k+3}\left(\frac{2x+(k+10)/3}{x^2-(k+2)x-k-3}-\frac{x+(4k-2)/3}{x^2-(k+5)x+2k+6}\right)$.

10. $\lim\limits_{x\to k+5}\left(\frac{2x^2-5x+k-11}{x^2-(k+3)x-2k-10}-\frac{x+k-3}{x-k-5}\right)$.

11. $\lim\limits_{x\to -(k+2)}\left(\frac{2x+k+3}{x+k+2}-\frac{x^2-2x-2k-5}{x^2+(k+1)x-k-2}\right)$.

12. $\lim\limits_{x\to -(k+3)}\left(\frac{2x+k+4}{x+k+3}-\frac{x^2+4x+2k+7}{x^2+(k+4)x+k+3}\right)$.

13. $\lim\limits_{x\to -k-4}\left(\frac{1}{x+k+4}-\frac{(k+4)(k+5)-(2k+7)x}{x^3+(k+4)^3}\right)$.

14. $\lim\limits_{x\to k}\left(\frac{2x^3+(1-2k)x^2-4k-k^2+4k}{x^3+2(1-k)x^2+k(k-4)x+2k^2}-\frac{x+k-2}{x-k}\right)$.

15. $\lim\limits_{x\to k+1}\left(\frac{x+k+5}{x^2-(k-1)x-2k-2}-\frac{x+k-2}{x-k}\right)$.

16. $\lim\limits_{x\to k+2}\left(\frac{2x-4k-14}{x^2-(k-1)x-3k-6}-\frac{x-3k-10}{x^2-kx-2k-4}\right)$.

17. $\lim\limits_{x\to k+3}\left(\frac{2}{x-k-3}-\frac{x^2+(3k+8)x+(k+3)(2k+7)}{x^3-(k+3)^3}\right)$.

18. $\lim\limits_{x\to k+4}\left(\frac{2}{x-k-4}-\frac{x^2+(3k+13)x+(k+4)(2k+7)}{x^3-(k+4)^3}\right)$.

19. $\lim\limits_{x\to k+5}\left(\frac{2x^2+x+(k+4)(k+5)}{x^3-(k+5)^3}-\frac{1}{x-k-5}\right)$.

20. $\lim\limits_{x\to k}\left(\frac{2x^2+2x+k^2-2k}{x^3-k^3}-\frac{1}{x-k}\right)$.

21. $\lim\limits_{x\to -k}\left(\frac{2x+k+3}{x+k}-\frac{x^3+(k+3)x^2-(4k-3)x+k^2-3k}{x^3+(2k-1)x^2+k(k-2)x-k^2}\right)$.

22. $\lim\limits_{x\to k+1}\left(\frac{2x-k-6}{x-k-1}-\frac{x^3-(k+3)x^2+(k-9)x+(k+1)(k+11)}{x^3-2kx^2+(k+1)(k-3)x+2(k+1)^2}\right)$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(k+3)x+k+5}{(k+1)x+k+4}$.

24. $\lim\limits_{x\to -k-2}\left(\dfrac{2x}{x+k+2}-\dfrac{x^3-5x^2-(k^2+10k+16)x-(k+2)^2}{x^3+2(k+1)x^2+(k^2-4)x-2(k+2)^2}\right)$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+k}+(k+1)x}{(k+3)x+k+4}$.

Завдання 3. 1-25. Знайти наступні границі (а):

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(k+1)x}{arctg(k+2)x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(k+2)x}{\sin(k+1)x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(k+3))x}{tg(k+1)x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(k+2)x-\sin(k+1)x}{(k+3)x-arctg(k+2)x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(k+4)x+\arcsin(k+1)x}{(k+2)x+tg(k+3)x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2k+1)x-arctg(k+1)x}{(k+5)x-\sin(k+4)x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\left(\sqrt{k+2}x\right)}{tg^2\left(\sqrt{k+1}x\right)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^2\left(\sqrt{k+3}x\right)}{\arcsin^2\left(\sqrt{k+1}x\right)}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(k+2)x}{x^2}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(k+)x*\arcsin(kx)}{1-\cos(k+1)x}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(k+4)x}{\cos(k+5)x-\cos(k+3)x}$

12. $\lim\limits_{x\to k+1}\dfrac{\cos 3\pi x/(2(k+1))}{\sin(\pi x/(k+1))}$

13. $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{\cos(\pi x/2k)}{\sin(x-k)}$

14. $\lim\limits_{x\to k+2}\dfrac{ctg(\pi x/2(k+2))}{x-k-2}$

15. $\lim\limits_{x\to 2k+1}\dfrac{1+\cos\pi x}{(x-2k-1)^2}$

16. $\lim\limits_{x\to k+1}(k+3-x)tg\,\dfrac{3\pi x}{2k+6}$

17. $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{\cos(\pi x/2k)}{\sqrt{k}-\sqrt{x}}$

18. $\lim\limits_{x\to 2k}\dfrac{\sqrt{x+k^2-2k}-k}{\sin\pi x}$

19. $\lim\limits_{x\to k+1}\dfrac{\sqrt{x-2k}-1}{tg\,\pi x}$

20. $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{\sqrt{x^2-kx+1}-1}{\sin 2\pi x}$

21. $\lim\limits_{x\to 2k}\dfrac{tg\,\pi x}{\sqrt{x^2-2kx+1}-1}$

22. $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{1-2\cos(\pi x/3k)}{x-k}$

23. $\lim\limits_{x\to\sqrt{x+5}}\dfrac{8\left(1-\sin\left(\pi x/\left(2\sqrt{k+5}\right)\right)\right)}{\pi\left(x-\sqrt{k+5}\right)^2}$

24. $\lim\limits_{x\to\sqrt{k+2}}\pi\left(x-\sqrt{k+2}\right)^2/8\left(1-\sin\left(\pi x/\left(2\sqrt{k+2}\right)\right)\right)$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos(k+1)x-\cos(k+3)x\right)^{-2}$

1-25. Знайти наступні границі (б):

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{(k+1)x+k}{(k+1)x+k+3}\right)^{kx+1}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{(k+2)x+k+5}{(k+3)x-k-1}\right)^{(k+1)x+k}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{(k+3)x-k-2}{(k+3)x-k-5}\right)^{kx+1}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{(x+4)k-x-3}{(k+4)x+k+1}\right)^{x+k}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+k+3}{x^2+k+5}\right)^{(k+2)x^2+1}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+k+7}{x^2+k+6}\right)^{-(k+1)x^2+1}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+(k+3)x+k+5}{x^2+(k+4)x+k+7}\right)^{(k+3)x+1}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+(k+3)x+k+6}{x^2+(k+2)x+k+1}\right)^{(k+2)x-1}$

9. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-(k+1)x+k+7}{x^2+(k+2)x-k+1}\right)^{(k+4)x+k}$

10. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+k+5}{x^3-(k+2)x+1}\right)^{x^2+1}$

11. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+k}{x^2-k}\right)^{(k+2)x^2+1}$

12. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+(k+3)x+k+7}{x^3+(k+4)x+k-1}\right)^{x^2+3kx+1}$

13. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+(k+2)x+k}{x^3-(k+1)x^2+k}\right)^{(k+4)x+1}$

14. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+(k+3)x^2+(k+1)x+k+5}{x^3+(k+2)x^2+(k+3)x+k+1}\right)^{x+k+1}$

15. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+(k+1)x+2}{x^2-(k+3)x-1}\right)^{(k+4)x-1}$

16. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+(k+3)x+2}{x^2+(k+4)x-1}\right)^{(k+1)x+1}$

17. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+(k+2)x-1}{x^2-(k+1)x+2}\right)^{(k+2)x+2}$

18. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-(k+2)x-1}{x^2-(k+3)x+2}\right)^{(k+3)x-1}$

19. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-(k+4)x-4}{x^2+(k+1)x-5}\right)^{(k+5)x+3}$

20. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+(k+7)x-3}{x^2-(k+2)x-4}\right)^{(k+7)x-5}$

21. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+(k+3)x+7}{x^2-(k+1)x-3}\right)^{(k+1)x+2}$

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-(k+3)x-4}{x^2-(k+2)x+3}\right)^{(k+7)x-5}$

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-(k+5)x-k}{x^2-(k+3)x+1}\right)^{(k+3)x+1}$

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+(k+6)x+3}{x^2+(k+5)x+2}\right)^{(k+1)x+3}$

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+(k+4)x+3}{x^2-(k+2)x+2}\right)^{(k+5)x+2}$

1-25. Знайти наступні границі (в**):**

1. $\lim\limits_{x\to k+4}\left(\sin\dfrac{\pi x}{2k+8}\right)^{8/\left[x(x-k-4)arctg\frac{x-k-4}{k+4}\right]}$

2. $\lim\limits_{x\to k+2}\left(\dfrac{k+2}{x}\right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(k+3-x)}}$

3. $\lim\limits_{x\to k+3}(k+4-x)^{\frac{\sin(\pi x/(2(k+3)))}{\ln(k+4-x)}}$

4. $\lim\limits_{x\to k+2}\left(\dfrac{x}{k+2}\right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(k+3-x)}}$

5. $\lim\limits_{x\to k+1}\left(\dfrac{k+1}{x}\right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(k+2-x)}}$

6. $\lim\limits_{x\to k+3}\left(\dfrac{\ln\dfrac{ex}{k+3}}{x-k-3}\right)^{\cos\frac{\pi x}{2k+6}}$

7. $\lim\limits_{x\to k+2}\left(\dfrac{\ln\dfrac{ex}{k+2}}{x-k-2}\right)^{tg\frac{\pi x}{2k+4}}$

8. $\lim\limits_{x\to k+1}\left(\dfrac{\ln\dfrac{ex}{k+1}}{x-k-1}\right)^{\sin\frac{\pi x}{2k+2}}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(k+2)^{2x}-(k+4)^{3x}}{arctgx+x^3}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(k+2)x-tg(k+1)x}{(k+1)^{3x}-(k+3)^{4x}}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{(k+5)x}-e^{(k+3)x}}{\sin(k+3)x-arctg(k+2)x}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(k+3)x-arctg(k+2)x}{e^{(k+4)x}-e^{(k+3)x}}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{(k+1)x}-e^{(k+3)x}}{tg((k+5)x)-\sin((k+4)x)}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{(k+3)x}-1}{\sin(k+2)x}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{(k+4)x}-1}{x}$

16. $\lim\limits_{x\to k+2}\left(\dfrac{4k+9-3x}{k+3}\right)^{\frac{\pi}{2}tg\frac{\pi x}{3k+4}}$

17. $\lim\limits_{x\to k+3}\left(\dfrac{2x-3k-4}{k+2}\right)^{\frac{\pi}{4ctg\frac{\pi x}{4k+6}}}$

18. $\lim\limits_{x\to 3k+2}\left(\dfrac{x-2k+1}{k+3}\right)^{\pi tg\left[\pi x/(6k+4)\right]/2}$

19. $\lim\limits_{x\to k+1}\left(\dfrac{2k+5-x}{k+4}\right)^{x/(2\cos(\pi x/2(k+1)))}$

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-(k+3)x+4}{x^2+(k+1)x+5}\right)^{(k+3)x+k}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left((k+1)x^2+k\right)\cdot\left(\ln\left(x^2+k+6\right)-\ln\left(x^2+k+3\right)\right)\right]$

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(kx+1)\cdot\left(\ln((k+3)x+k+5)-\ln((k+3)x+k+8)\right)\right]$

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[((k+1)x+1)\cdot\left(\ln((k+2)x+k+4)-\ln((k+2)x+k+3)\right)\right]$

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+(k+9)x+7}{x^2+(k+3)x+5}\right)^{(k+2)x-k}$

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+(k+5)x+3}{x^2+(k+3)x-2}\right)^{(k+7)x+2}$

Тема 5. Нескінченно малі та нескінченно великі. Порівняння нескінченно малих

5.1. Нескінченно малі і нескінченно великі функції.

Нескінченно малі величини. Зв'язок границь з нескінченно малими.

Означення 5.1. Змінну U називають нескінченно малою в деякому процесі, якщо в цьому процесі вона прямує до нуля

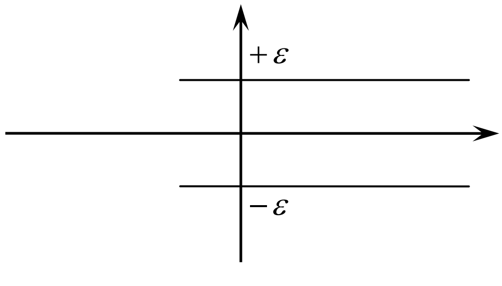
$$\lim\limits_{\substack{\text{деякий}\\ \text{процес}}} U = 0.$$

Наприклад, змінна $\sin x$ є нескінченно малою в процесі $x\to 0$, так як $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$ $(\sin 0 = 0)$.

В той же час змінна $\sin x$ не є нескінченно малою в процесі $x\to\dfrac{\pi}{2}$, так як $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x = 1$ $(\sin\dfrac{\pi}{2} = 1)$.

Означення нескінченно-малих можна сформулювати, використовуючи поняття границі:

Змінну U називають нескінченно малою в деякому процесі, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ в процесі змінювання змінної настане такий момент, коли $|U| < \varepsilon$.



Слова „нескінченно мала" характеризує не величину змінної, а характер її змінювання в деякому процесі. Наприклад, нескінченно мала $\frac{1}{x^2}$ при $x \to \infty$ на початку свого змінювання при x близьких до нуля може набувати досить великих значень.

З даної точки зору ніяка стала величина, навіть як завгодно мала, не є нескінченно малою, так як нескінченно мала це процес, а не величина.

Розглянемо зв'язок між границями і нескінченно малими. Він виражається двома теоремами:

Теорема 5.1. Якщо в деякому процесі змінна U має границею число B $(\lim U = B)$, то цю змінну можна представити сумою цієї сталої величини B і деякої нескінченно малої величини у вказаному процесі.

Теорема 5.2. Якщо змінну U можна представити сумою сталої і нескінченно малої в деякому процесі ($U = B + \alpha$, де $B = const$, α – нескінченно мала), то ця стала величина буде границею змінної в вказаному процесі.

5.2. Властивості нескінченно малих величин.

1. Сума 2-х нескінченно малих в одному і тому ж процесі є величина нескінченно мала в тому ж процесі. Це випливає з того, що якщо кожний доданок прямує до нуля, то і сума прямує до нуля. Відмітимо, що ця властивість справедлива для будь-якої скінченної суми (скінченне число доданків) нескінченно малих.
2. Добуток нескінченно малої на обмежену (сталу) величину, є нескінченно малою величиною.
3. Добуток двох нескінченно малих в одному і тому ж процесі є нескінченно малою величиною в цьому процесі.
4. Різниця двох нескінченно малих величин є величиною нескінченно малою.
5. Частка двох нескінченно малих величин не обов'язково є нескінченно малою величиною. !!!!

5.3. Порівняння нескінченно малих величин.

Нехай α і β – дві нескінченно малі величини в одному і тому ж процесі. Ці величини можна порівнювати, досліджуючи границю їх відношення.

1.Якщо в деякому процесі $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$, то змінна β швидше прямує до нуля ніж α. Кажуть також, що змінна β має більш високий порядок малості ніж α. Це записують так $\beta=o(\alpha)$.

2.Якщо у вказаному процесі $\frac{\beta}{\alpha}\to\infty$, то в даному процесі β повільніше прямує до нуля ніж α. В цьому випадку кажуть, що β має більш низький порядок малості ніж α.

3.Якщо границя $\frac{\beta}{\alpha}$ дорівнює скінченному числу,~ що не дорівнює нулю, то β і α мають однаковий порядок малості.

4.Якщо в деякому процесі границя $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$, то величини β і α називають еквівалентними (позначають $\beta\sim\alpha$).

Нескінченно великі величини.

Означення 5.2. Змінну U називають нескінченно великою в деякому процесі, якщо в цьому процесі її значення за модулем необмежено зростає

$$|U|\to+\infty$$

$$\lim U=\pm\infty.$$

Нескінченно велика величина може набувати додатних, від’ємних значень і бути знакозмінною.

Наприклад, $U_n=(-2)^n$ – послідовність $\{U_n\}=\{2{,}4{,}-8{,}16\ldots\}$.

Слова „необмежено зростає” слід розуміти так: починаючи з деякого моменту в деякому процесі виконується нерівність $|U|>1$, з більш пізнішого моменту $|U|>10$, і т.д. $|U|>100$, $|U|>1000\ldots$

І для будь-якого як завгодно великого числа $M>0$ настане такий момент в процесі змінюванні змінної, починаючи з якого $|U|>M$.

Між нескінченно великими величинами і нескінченно малими існує певний зв’язок, який виражається наступною теоремою.

Теорема 5.3. Якщо змінна U є нескінченно великою в деякому процесі, то обернена величина $\frac{1}{U}$ є нескінченно малою величиною в тому ж процесі.

Обернена теорема до 5.3. Якщо змінна U є нескінченно малою в деякому процесі і не набуває нульових значень, то величина $\frac{1}{U}$ є нескінченно великою.

Нескінченно мала β- є величиною κ-го порядку (відносно основної нескінченно малої α), якщо β і α^k будуть величинами одного порядку малості, тобто $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C\ (const \neq 0)$.

Якщо обрана основна нескінченно мала α, то найпростішими нескінченно малими природно вважати величини виду $C\alpha^k,\ C, k = const$.

Нехай β – нескінченно мала k-го порядку відносно α, тобто $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C$, тоді $\lim \frac{\beta}{C\alpha^k} = 1 \Rightarrow \beta \sim C\alpha^k$. Ця найпростіша нескінченно мала $C\alpha^k$, що еквівалентна даній нескінченно малі β називається її *головною частиною*, або *головним членом.*

Корисно мати на увазі еквівалентність таких нескінченно малих при $x \to 0$: $\sin x \sim x,\ \mathrm{tg}\, x \sim x,\ \arcsin x \sim x,\ \mathrm{arctg}\, x \sim x,\ \ln(1+x) \sim x.$

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Порівняти нескінченно малі при $t \to 0$:

1. $\alpha = 5t^2 + 2t^5$ та $\beta = 3t^2 + 2t^3$.
2. $\alpha = t\sin^2 t$ та $\beta = 2t\sin t$.
3. $\alpha = t\ln(1+t)$ та $\beta = t\sin t$.

Розв'язок:

1. Маємо $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{5t^2 + 2t^5}{3t^2 + 2t^3} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{5 + 2t^3}{3 + 2t} = \frac{5}{3}$. Оскільки границя відношення α і β є число відмінне від нуля, то α і β - нескінченно малі одного й того ж самого прядку.

2. Знайдемо $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t\sin^2 t}{2t\sin t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{2}\sin t = 0$. Отже, $\alpha = o(\beta)$.

3. Тут $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{tLn(1+t)}{t\sin t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\dfrac{Ln(1+t)}{t}}{\dfrac{\sin t}{t}}=1$, тобто $\alpha\sim\beta$.

Приклад 2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x\sin x)}{tgx^2}$.

Розв'язок:

Знаменник та чисельник дробу еквівалентні нескінченно малим: $\ln(1+3x\sin x)\sim 3x\sin x,\ tgx^2\sim x^2$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x\sin x)}{tgx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\sin x}{x^2}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=3.$$

Приклад 3. Визначити головну частину н.м. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^3 x}{x^\kappa}=C$.

Розв'язок:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^3 x}{x^\kappa}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^3 x}{x^{\kappa-3}\cdot x^3}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{\kappa-3}}=2\cdot 1\cdot\lim\frac{1}{x^{\kappa-3}}=\begin{bmatrix}\kappa-3=0\\ \kappa=3\end{bmatrix}=2$$

$2\sin^3 x$ - є величиною 3-го порядку малості відносно x.

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^3 x}{2x^3}=1\Rightarrow 2x^3$ - головна частина нескінченно малої $2\sin^3 x$.

Приклад 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-3x^3+x^5}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(2-3x^2+x^4)}{x}=2$,

$2-3x^2+x^4$ - нескінченно мала 1-го порядку малості відносно x.

Приклад 5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-3x^3+x^5}{x^\kappa}=\lim_{x\to 0}\frac{x(2-3x^2+x^4)}{x\cdot x^{\kappa-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{2-3x^2+x^4}{1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{\kappa-1}}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{\kappa-1}}=\begin{bmatrix}\kappa-1=0\\ \kappa=1\end{bmatrix}=2.$$

Отже, $\kappa=1\ \Rightarrow 2x-3x^3+x^5$- нескінченно мала 1-го порядку малості відносно x.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-3x^3+x^5}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(2-3x^2+x^4)}{2x}=1.$$

Отже, $2x$ - головна частина нескінченно малої $2x-3x^3+x^5$.

Приклад 6. Нехай $x\to 0$, виділити головну частину виду $C(x-1)^n$ і визначити порядок малості відносно нескінченно малої $(x-1)$ функції x^3-3x+2.

Розв'язок: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{(x-1)^n}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+3-1}{(x-1)^n}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^3-1)-3(x-1)}{(x-1)^n}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+2)-3(x-1)}{(x-1)^n}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1-3)}{(x-1)^n}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)^n}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x-1)^{n-2}}=\lim\limits_{x\to1}(x+2)\cdot\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{(x-1)^{n-2}}=\begin{bmatrix} n-2=0 \\ n=2 \end{bmatrix}=3.$

Отже, x^3-3x+2 - нескінченно мала $2^{-го}$ порядку малості відносно x при $x\to0$.

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{3(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2(x+2)}{3(x-1)^2}=1.$

Отже, $3(x-1)^2$ - головна частина нескінченно малої x^3-3x+2 при $x\to0$.

Індивідуальні завдання для поточного контролю

Завдання 1. 1-25. Визначити порядок нескінченно малих величин відносно нескінченно малої x (тобто *x→0)*:

1. $\sqrt{2\sin^2 x+3x^3}$.
2. *5tgx-2sinx.*
3. *4sinx-4x.*
4. *3tgx-3sinx.*
5. $\sqrt{1+3x^2}-1$.
6. $\sqrt{1+5x}-1$.
7. $\sqrt{1+4x^3}-1$.
8. *3-3cosx.*
9. *7-7cos²x.*
10. $\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x^2}$.
11. $\sqrt{4-2x^3}-\sqrt{4+3x^2}$.
12. $\sqrt{3\sin^2 x+4x^3}$.
13. *6tgx-3sinx.*
14. *5sinx-5x.*
15. *7tgx-7sinx.*
16. $\sqrt{1+2x^2}-1$.
17. $\sqrt{1+6x}-1$.
18. $\sqrt{1+5x^3}-1$.
19. *5-5cosx.*
20. *8-cos²x.*
21. $\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x^2}$.
22. $\sqrt{2-3x^3}-\sqrt{2+4x^2}$.
23. $\sqrt{2\sin^2 x+7x^3}$.
24. *4tgx-2sinx.*
25. *3sinx-3x.*

Завдання 2. 1-25. Знайти границі функцій користуючись еквівалентними нескінченно малими.

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)}$.

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x-3x^2+2x^3)}{\ln(1+3x-4x^2+x^3)}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(e^{x-1}-1)}{\ln x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{(1+x)\sqrt[3]{(1+x)^2}-1}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x}-2}{\sqrt[4]{16+5x}-2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x+x^2}$.

8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin^2(x-1)}{x^2-1}$.

9. $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\sqrt{2x}-x}{tg\sqrt{x}}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\,2x\arcsin 3x}{\sin 3x\,arctg\,2x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{arctg\,6x}$.

12. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin \pi}{x-\pi}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 15x}{tg 10x}$.

14. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{\arcsin^2 3x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin\sqrt[3]{x^4}}{x\sqrt{x}}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+ax)}{bx}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{arctg\,7/4x}{e^{-2x}-1}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}$.

20. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\ln x^3-\ln a^3}{x-a}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x^2}-\cos 2x}{x^2}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{\sin 3x}-1}{x}$.

23. $\lim\limits_{x\to \pi/3} \dfrac{\sin(-\pi/3+x)}{1-2\cos x}$.

24. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{a^{x+1}-1}{\sqrt{1-\cos(x+1)}}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{1+x^2}-1}{x^2}$.

Тема 6. Неперервність функції. Класифікація точок розриву

6.1. Основні означення.

Означення 6.1. Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо виконуються умови:

1) функція означена в деякому околі точки x_0, в тому числі і в самій точці x_0, тобто існує число $f(x_0)$;
2) існує скінченна границя функції в цій точці, тобто $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;
3) ця границя дорівнює значенню функції в цій точці $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Означення 6.2. Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо виконуються умови:

1) функція означена в деякому околі точки x_0, в тому числі і в самій точці x_0, тобто існує число $f(x_0)$;
2) нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0$.

Використовуючи означення границі, означення неперервності функції в точці можна сформулювати ще й так:

Означення 6.3. Функцію $y = f(x)$ називають неперервною в точці x_0, якщо

1) функція означена в цій точці;
2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ таке, що нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ виконується $\forall\, x \in D(f)$, що задовольняють $|x - x_0| < \delta$.

6.2. Операції над неперервними функціями.

Теорема 1.1. Якщо функції $f(x)$, $\varphi(x)$ означені в одному проміжку і обидві неперервні в точці x_0, то в цій точці неперервні й функції: $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x) \cdot \varphi(x)$, $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ (остання при умові, що $\varphi(x) \neq 0$).

Теорема 1.2. Нехай дані дві функції: $y = f(U)$ і $U = \varphi(x)$. Якщо $\varphi(x)$ неперервна в точці x_0, а $f(U)$ неперервна в точці

$U_0 = \varphi(x_0)$, то складна функція $y = f(\varphi(x))$ буде неперервною в точці x_0.

Необхідно довести, що:

1) $y = f(\varphi(x))$ – означена в точці x_0.

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(\varphi(x_0))$.

З цих властивостей випливає неперервність великого класу функцій. Це елементарні функції. З неперервності суми, добутку, частки функцій випливає, що будь-яка елементарна функція неперервна в кожній точці її області визначення. Це спрощує задачу знаходження границі елементарної функції, а саме, при обрахуванні границь елементарних функцій в точці, яка входить в її область визначення, потрібно просто знайти значення цієї функції в цій точці. Це вивипливає з означення неперервності, яке включає в себе рівність $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

6.3. Неперервність функції на відрізку. Властивості функцій, що неперервні на відрізку.

Означення 6.4. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в кожній точці інтервалу $(a;b)$, то кажуть, що вона *неперервна на інтервалі* $(a;b)$.

Означення 6.5. Нехай функція $y = f(x)$ означена у кінцевих точках відрізка $[a;b]$ і якщо $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$, то кажуть, що функція неперервна в точці a справа. Якщо $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)$, то кажуть що функція $f(x)$ неперервна зліва.

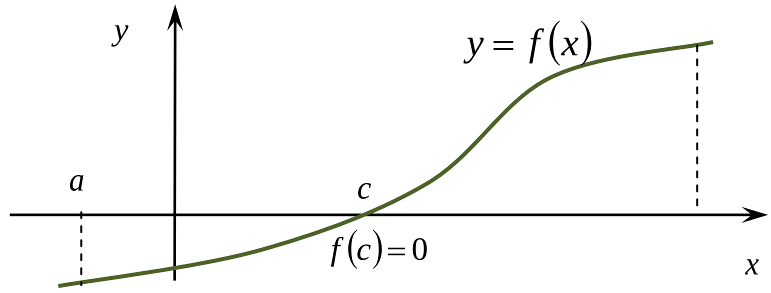
Означення 6.6. Якщо функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $(a;b)$, а також неперервна в точці a справа і в точці b зліва, то кажуть, що функція неперервна на відрізку $[a;b]$.

Розглянемо деякі важливі властивості функцій, що неперервні на відрізку. Їх вивченням і строгим обґрунтуванням займалися видатні математики Бернард Больцано (1781-1848р.р.) (чешський математик) і Огюстен Луї Коші (1789-1857р.р.) (французький математик). Їм і належить теореми, які далі наводяться.

Перша теорема Больцано-Коші. Нехай функція $f(x)$ означена і неперервна на відрізку $[a;b]$ і у кінцях цього відрізку набуває значення різних знаків. Тоді між a і b

обов'язково знайдеться точка c, в якій функція дорівнює нулю: $f(c)=0$.

Теорема має простий геометричний зміст: якщо неперервна крива переходить з одного боку осі x на інший, то вона перетинає цю вісь.

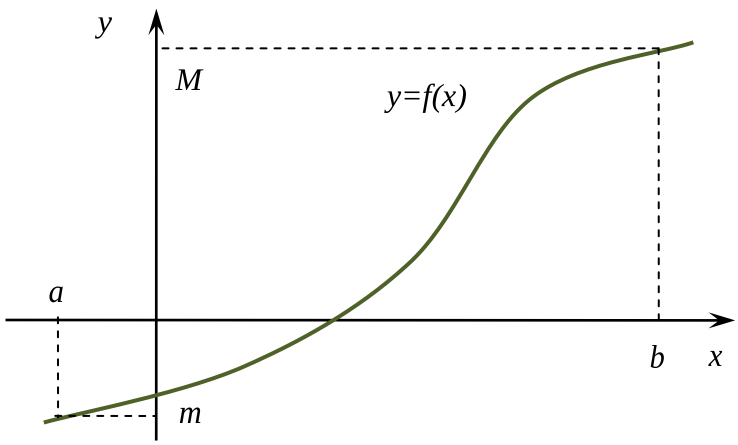


Друга теорема Больцано-Коші. Нехай функція $f(x)$ означена і неперервна на відрізку $[a;b]$ і на кінцях цього відрізку набуває значень, що не дорівнюють одне одному. $f(a)=A$, $f(b)=B$ $(A \neq B)$. Тоді, яке б не було число C, що лежить між A і B, знайдеться така точка c між a і b, що $f(c)=C$.

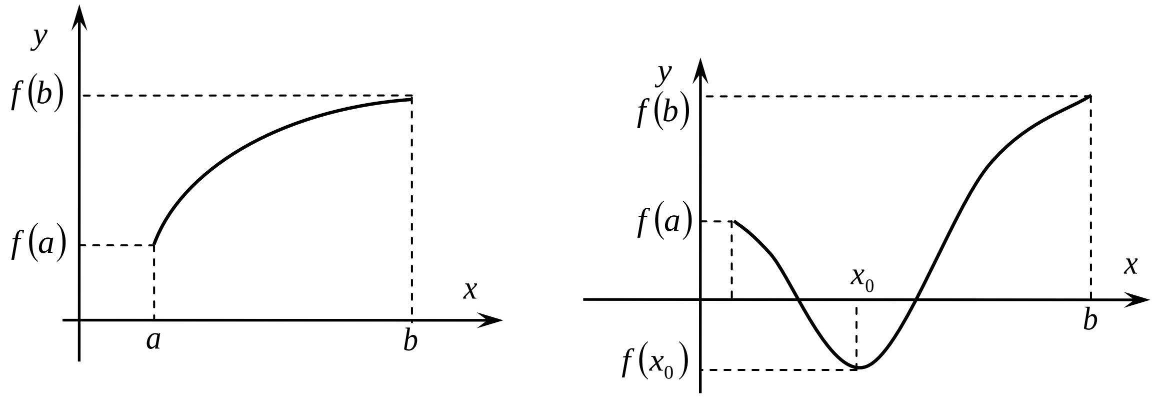
Зміст цієї теореми полягає в тому, що переходячи від одного свого значення до іншого, функція хоча б раз проходить через кожне проміжне значення.

Дослідження неперервності функцій належить також видатному німецькому математику Карлу Веєрштрассу.

Перша теорема Веєрштрасса. Якщо функція $f(x)$ означена і неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона обмежена і знизу і зверху, тобто існують такі сталі і скінченні числа m і M, що $x \in [a;b]$ при $a \leq x \leq b$.



Друга теорема Веєрштрасса. Якщо функція $f(x)$ означена і неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона досягає на цьому відрізку своїх найбільшого та найменшого значень.



Іншими словами знайдуться точки $x_1 \in [a;b]$, $x_2 \in [a;b]$ такі, що $f(x_1) = \min\limits_{[a;b]} f(x)$, $f(x_2) = \max\limits_{[a;b]} f(x)$.

$$f(a) = \min_{[a;b]} f(x);\ f(b) = \max_{[a;b]} f(x)\quad f(x_0) = \min_{[a;b]} f(x);\ f(b) = \max_{[a;b]} f(x)$$

6.4. Класифікація точок розриву функції.

Якщо в деякій точці порушується хоча б одне з умов означення неперервності, то цю точку називають точкою розриву.

В точці розриву функція може бути означеною, чи неозначеною, але для такої точки відіграє важливу роль не її значення, а однобічні границі $\lim\limits_{x \to x_{0+0}} f(x)$ і $\lim\limits_{x \to x_{0-0}} f(x)$.

Означення 6.7. Точка x_0 називається *точкою розриву І роду*, якщо в цій точці існують обидві однобічні границі і можливі випадки:

а) точка x_0 – не належить області визначення.

б) $\lim\limits_{x \to x_{0-0}} f(x) = f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_{0+0}} f(x)$ – не виконується.

Означення 6.7. Якщо хоча б одна з однобічних границь в точці розриву не існує чи дорівнює нескінченності, то така точка називається *точкою розриву ІІ роду*.

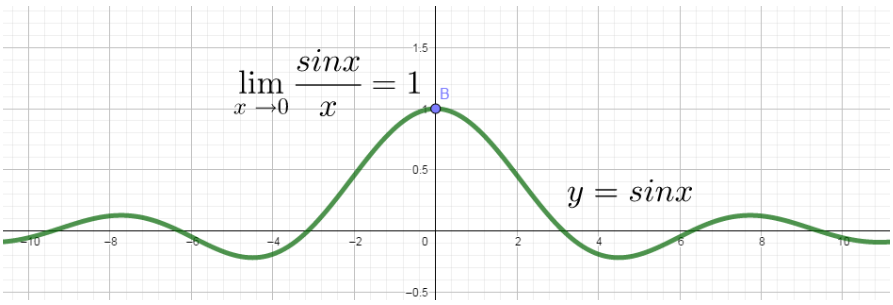
Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Дослідити функцію на неперервність $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

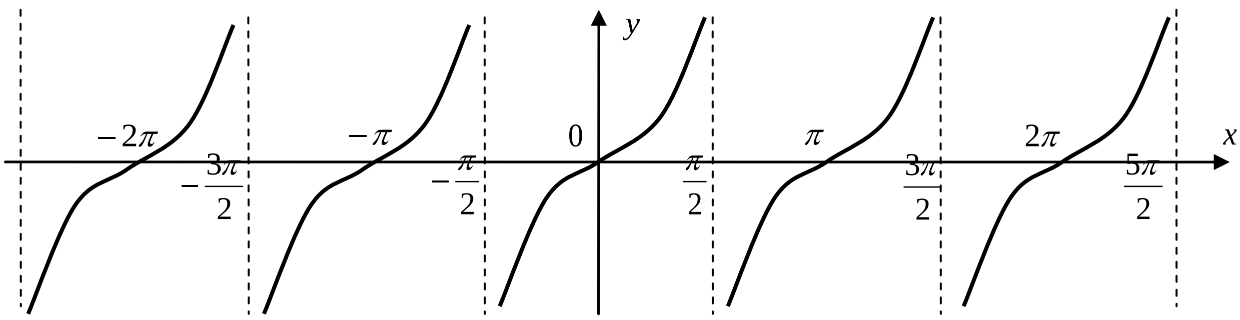
Розв'язок: В точці $x=0$ – функція неозначена, а це означає, що точка $x=0$ – точка розриву.

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Отже точка $x=0$ – точка розриву I роду.



Приклад 2. Дослідити функцію на неперервність $y=tgx$.



Розв'язок: В точці $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n>0,\pm1,\pm2...$ ця функція неозначена.

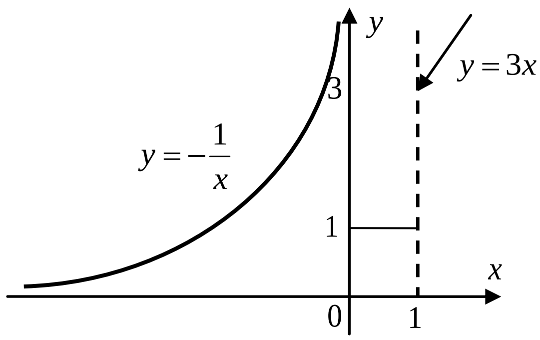
$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)+0} tgx=-\infty$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)-0} tgx=+\infty$$

$x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ – точки розриву II роду.

Приклад 3. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3},\ x<0\\ 1,\ \ 0\le x\le 1.\\ 3x,\ \ x>1\end{cases}$$



Розв'язок: Тут потрібно досліджувати на неперервність точки, в яких змінюються аналітичні вирази. В інших точках функція неперервна.

1) $x=0$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)=+\infty\\&\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim 1=1\end{aligned}\right\} x=0 \text{ - точка розриву II роду.}$$

2) $x=1$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim 1=1\\&\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1} 3x=3\end{aligned}\right\} \lim_{x\to 1-0} f(x)\neq \lim_{x\to 1+0} f(x);\ x=1 \text{ - точка розриву I}$$

роду.

Відмітимо, що різницю $\lim\limits_{x\to x_{0+0}} f(x)-\lim\limits_{x\to x_{0-0}} f(x_0)$ називають стрибком функції. В точці $x=1$ стрибок функції дорівнює 3-1=2. Буває, що в точці розриву однобічні границі скінченні і дорівнюють одна одній ($\lim\limits_{x\to x_{0-0}} f(x)=\lim\limits_{x\to x_{0-0}} f(x)$), але в самій точці x_0 функція чи неозначена, чи її значення не дорівнює однобічним границям. Такий розрив називають *усувним*. Це пов'язано з тим, що якщо доозначити функцію таким чином: $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_{0-0}} f(x)=\lim\limits_{x\to x_{0-0}} f(x)$, то ми отримаємо неперервну функцію.

Приклад 4. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\le 0\\1+2x,\ 0<x<2.\\x-2,\ x\ge 21\end{cases}$$

Розв'язок: Побудувати графік функції у ПДМ Geogebra можна декількома способами. Через команду *«Если»* можна виконати побудови фактично трьох елементарних функцій заданих на певних інтервалах, які є частинами однієї функції. Або ж ввести функцію *f(x)* і використати команду *«Если»* як для однієї функції. Ми вибрали другий спосіб. Надписи створили через інструмент *«Текст»* у вбудованому редакторі *Latex* (інтерактивну модель можна переглянути за посиланням https://www.geogebra.org/classic/pbqkraz8)

За умовою задачі функція визначена у точках *x=0* та *x=2*. Знаходимо значення функцій у цих точках. Далі, традиційний способом, знаходимо односторонні границі. Отримали скінченні числа, але вони всі різні. Робимо висновок, що в точці *x=1* функція неперервна, а в точці *x=2* терпить розрив першого роду зі стрибком функції -2 (рис. 10).

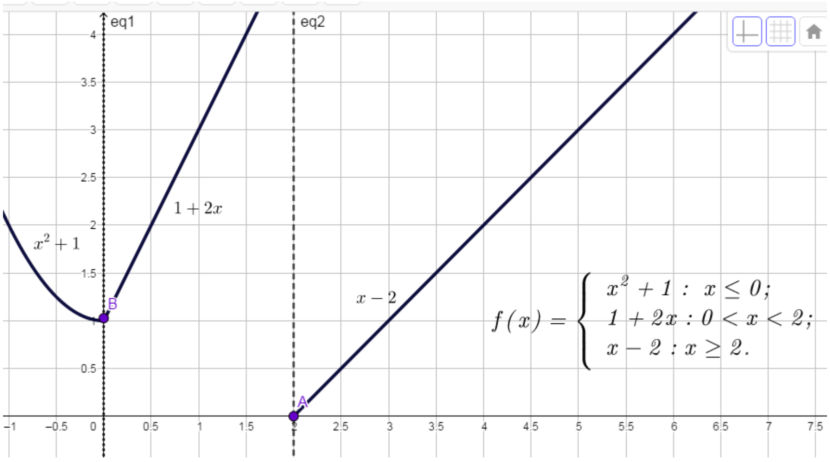


Рис. 10.

Індивідуальні завдання для поточного контролю

Завдання 1. 1-25. Якщо функції мають розрив, визначити тип точок розриву.

1. $y = \begin{cases} x^{k+1}, x < 1 \\ \sqrt{x}, x > 1 \end{cases}$

2. $y = \begin{cases} (x-k)^2, x > 0 \\ k^2(k+1)^x, x < 0 \end{cases}$

3. $y = \begin{cases} \sqrt{x-k}, x > k \\ -x+k, x < k \end{cases}$

4. $y = \begin{cases} \sqrt{x-k}, x > k \\ -x+k, x < k \end{cases}$

5. $y = \begin{cases} \left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+k, x < \dfrac{\pi}{2} \\ k\sin x, x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

6. $y = \begin{cases} (x-\pi)^2 - k - 1, x > \pi \\ (k+1)\cos x, x < \pi \end{cases}$

7. $y = \begin{cases} \log_{k+2}(x-k+1), x > k \\ (x-k)^2, x \le k \end{cases}$

8. $y = \begin{cases} \log_{(k+3)^{-1}}(x-k+2), x \le k-1 \\ \sqrt{x-k+2}, x > k-1 \end{cases}$

9. $y = \begin{cases} (k+1)^x, x < 0 \\ \sin(k+2)x, x \ge 0 \end{cases}$

10. $y = \begin{cases} (k+2)^{k-x} \\ (k-x)^3, x > k \end{cases}$

11. $y = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, x \ge 1 \\ x^2 + kx, x < 1 \end{cases}$

12. $y = \begin{cases} \sqrt{-x-\pi/2}, x \le -\pi/2 \\ tgx, x > -\pi/2 \end{cases}$

13. $y = \begin{cases} (x+1)/(x-k), x < k \\ x^2 - 2kx + k^2 + 1, x \ge k \end{cases}$

14. $y = \begin{cases} x^2 - 2\pi x + k + \pi^2, x \ge \pi \\ ctgx, x < \pi \end{cases}$

15. $y=\begin{cases}(k+2)^{1/(x-k)}, x>0\\ \log_{(k+3)}(2x+1), x\le 0\end{cases}$

16. $y=\begin{cases}\sqrt[3]{x-k-1}, x>k+1\\ (k+2)^{x-k-1}, x<k+1\end{cases}$

17. $y=\begin{cases}tg\dfrac{\pi x(k+3)}{4(k+2)}, x<\dfrac{k+2}{k+3}\\ \log_{k+1}\dfrac{(k+3)x}{k+2}, x>\dfrac{k+2}{k+3}\end{cases}$

18. $y=\begin{cases}\cos\left(x-\dfrac{k+1}{k+2}\right), x>\dfrac{k+1}{k+2}\\ -\left(x-\dfrac{k+1}{k+2}\right), x<\dfrac{k+1}{k+2}\end{cases}$

19. $y=\begin{cases}(x+k+1)^3, x>-k\\ (k+2)^{x+k+1}, x<-k\end{cases}$

20. $y=\begin{cases}\sqrt{-x+k+1}, x<0\\ \arcsin\dfrac{x}{k+1}, x>0\end{cases}$

21. $y=\begin{cases}\sqrt{k+2-x}, x>0\\ \log_{k+1}(x+k+1), x<0\end{cases}$

22. $y=\begin{cases}x^2-2x+1-k^2, x>k+1\\ k+1-x, x<k+1\end{cases}$

23. $y=\begin{cases}\sqrt{x-k-3}+1, x>k+3\\ x, x<k+3\end{cases}$

24. $y=\begin{cases}(k+1)^x, x>0\\ (k+1)\cos\dfrac{x}{k}, x<0\end{cases}$

25. $y=\begin{cases}-e^{-(k-1)x}, x>0\\ (k+2)\sin\dfrac{x}{k}, x<0\end{cases}$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ № 1

Варіант № 1.

1. Знайти границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(k+2-n)^2+(k+2+n)^2}{(k+2-n)^2-(k+2+n)^2}$.
2. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(k+1)x}{arctg(k+2)x}$.
3. Знайти границю функції використавши заміну нескінченно малих: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 kx+e^{2kx}-\cos kx-Ln(1+\arcsin x)+x^3}{arctgkx+\sqrt{1+x}-1}$.
4. Знайти ОВФ: $y=\arccos(tgx)$.

Варіант № 2.

1. Знайти границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(k+2-n)^4-(k+1-n)^4}{(k-n)^4-(k+n)^4}$.
2. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(k+2)x}{\sin(k+1)x}$.
3. Знайти границю функції використавши заміну нескінченно малих: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Ln(1+tg^2((k+1)x)^{k+2}-(1+\sin^2((k+1)x)^{k+3}+\cos(k+1)x}{e^{(k+2)x^2}-2k\arcsin(\sqrt{x^2+k^2}-k)-x^3-1}$.
4. Знайти ОВФ: $y=(x-8)\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$.

Варіант № 3.

1. Знайти границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(k+2-n)^4-(k+1-n)^4}{(k-n)^3-(k+1+n)^3}$.
2. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(k+4)x+\arcsin(k+1)x}{(k+2)x+tg(k+3)x}$.
3. Знайти границю функції використавши заміну нескінченно малих: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+arctgx\sqrt{k+2})^{k+3}-(k+1)(e^{(k+4)x^2}-1)+3kx^2-1}{Ln(1+\sin^2((k+1)x))+\cos((k+2)x/\sqrt{2})+x^2-1}$.
4. Знайти ОВФ: $y=\sqrt{\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$.

Варіант № 4.

1. Знайти границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(k-n)^4-(k+n)^4}{(k+n)^3-(k-n)^3}$.

2. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(\sqrt{k+2}x)}{tg^2(\sqrt{k+1})x}$.

3. Знайти границю функції використавши заміну нескінченно малих:
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^3((k+1)x)+e^{(k+3)x}-(1+\sin^2 3x)^{k+4}-\cos 3x+1}{tg^2\sqrt{(k+1)x}-Ln(1+\arcsin x)^{k+3}+(k+5)x}$.

4. Знайти ОВФ: $y=\sqrt{|2x+5|-4}$.

Варіант № 5.

1. Знайти границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(k+5-n)^2-(k+5+n)^2}{(k+5+n)^2-(k-n)^2}$.

2. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos\pi x}{(x-2k-1)^2}$.

3. Знайти границю функції використавши заміну нескінченно малих:
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{(k+2)x}-\cos((k+3)x+Ln(1+tg^3((k+1)x)^{k+5}-\sin x}{(1+Ln\sin(k+4)x))^2-1+arctg^2((k+3)x-\sin(k+4)x)}$.

4. Знайти ОВФ: $y=\sqrt{(9-x^2)(x^2-4)}+\sqrt[3]{5x+7}$.

Варіант № 6.

1. Знайти границю послідовності: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(n+k)^3-(n-k)^3}{(n-k)^3-(n+k)^{3.}}$.

2. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to 0}(k+3-x)tg\dfrac{3nx}{2k+6}$.

3. Знайти границю функції використавши заміну нескінченно малих:
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(k\sqrt{x-k}\right)+tg^2(x-k)+e^{k(x-k)}-1}{\ln\left(1+\sin\sqrt{x-k}\right)+(2+\cos(k+3)(x-k))^2+(x-k)^{3/2}-1.}$

4. Знайти ОВФ: $y=2^{\sqrt{|x-3|-|8-x|}}$.

Варіант № 7.

1. Знайти границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+(k+1)n)^3-(k+1)^3n^3}{(1+(k+1)n)^2+(k-1)^2n^2.}$

2. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(k+3)x-\cos(k+5)x}{xtg(k+4)x}$.

3. Знайти границю функції використавши заміну нескінченно малих:

$$\lim_{x\to -k}\frac{e^{\sqrt[3]{x+k}}+\arcsin\sqrt{x+k}+\ln\left(1+\sqrt[4]{x+k}\right)^{k+1}+(k+1)(x+k)-1}{(1+arctg\,(x+k))^{k+1}arctg\left(\sqrt[4]{x+k}\right)+(k+2)(x+k)-1.}.$$

4. Знайти ОВФ: $y=\sqrt{5-x-\dfrac{6}{x}}.$

Варіант № 8.

1. Знайти границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-(k+3)n)^2}{(n-k-2)^3-(n+k+2)^3}.$

2. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\cos(k+2)x}-\sqrt{1+\cos(k+4)x}}{x\cdot\sin(k+3)x}.$

3. Знайти границю функції використавши заміну нескінченно малих:

$$\lim_{x\to k+1}\frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x-k-1}\right)^{k+1}+tg\left(\sqrt[3]{x-k-1}\right)^{k+1}+e^{(k+2)(x-k-1)}-1}{\arcsin^2(x-k-1)+\left(1+tg\left(\sqrt[5]{x-k-1}\right)\right)^3+e^{\left(x-k-1^2\right)}-2}.$$

4. Знайти ОВФ: $y=\lg\left(3^x-3^{-x}\right).$

Варіант № 9.

1. Знайти границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(k+2-n)^3}{(n+k)^2-(n+k)^3}.$

2. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{(k+1)x-k}{(k+1)x+k+3}\right]^{2kx+1}.$

3. Знайти границю функції використавши заміну нескінченно малих:

$$\lim_{x\to -k-2}\frac{(1+\ln(x+k+3))^{k+2}+e^{\left(x+k+2^2\right)}+\sin(x+k+2)-2}{tg^2\left(\sqrt{x+k+2}\right)+\ln(1+\sin(x+k+2))^{k+2}+arctg^3(x+k+2)}.$$

4. Знайти ОВФ: $y=\sqrt{-\dfrac{\log_3(x-1)}{\sqrt{-x^2+2x+8}}}.$

Варіант № 10.

1. Знайти границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-k)^2+(n-k)^2-(n+k+1)^3}{(k+3-n)^2}.$

2. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2+(k+3)x+2}{x^2+(k+4x)+1}\right]^{(k+1)x+3}.$

3. Знайти границю функції використавши заміну нескінченно малих:

$$\lim_{x\to k+3}\frac{(1+\arcsin(x-k-3))^{k+1}+e^{\sqrt{(x-k-3)^3}}+tg^2\left(\sqrt[3]{x-k-3}\right)-2}{\ln\left(1+\sqrt{(x-k-3)^5}\right)^{k+2}+(k+2)\sin\sqrt[3]{(x-k-3)^2}};$$

4. Знайти ОВФ: $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x-1}.$

Варіант № 11 .

1. Знайти границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(k+1)-(n+k)^3+(n+k+1)^3}{3n^2+(k+1)n-k-2}$.

2. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2-(k+4)x-4}{x^2-(k+1)x-5}\right]^{(k+1)x+2}$.

3. Знайти границю функції використавши заміну нескінченно малих:
$\lim\limits_{x\to -k}\dfrac{tg^{k+1}\left(\sqrt[3]{((x+k)/(k+2))^3+1}\right)-1}{\ln(x+k+1)}$.

4. Знайти ОВФ: $y=\sqrt[4]{2-\lg|x-2|}$.

Варіант № 12.

1. Знайти границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+k)^3+(n+k+1)^3}{(n+k+3)^3+(n+k+4)^3}$.

2. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2+(k+5)x+3}{x^2+(k+3)x-2}\right]^{(k+7)x+2}$.

3. Знайти границю функції використавши заміну нескінченно малих:
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos(k+1)x)^{2-x^5}}{x}$.

4. Знайти ОВФ: $y=\log_2(\sin x-\cos x)$.

Варіант № 13 .

1. Знайти границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+k+2)^3+(n+k+3)^3}{(n+k+2)^4-(n+k+3)^4}$.

2. Знайти границю функції:
$\lim\limits_{x\to\infty}[((k+7)k+3)(\ln((k+1)x+k+5)-\ln((k+1)x+k+4))]$.

3. Знайти границю функції використавши заміну нескінченно малих:
$\lim\limits_{x\to k}\dfrac{arctg^3\left(\sqrt{(x-k)^2+4}-2\right)}{x-k}$.

4. Знайти ОВФ: $y=\sqrt{\cos(\sin x)}+\arcsin\dfrac{1+x^2}{2x}$.

Варіант № 14.

1. Знайти границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+k)^4-(n-k)^4}{(n+k)^3+(n-k)^3}$.

2. Знайти границю функції:
$\lim\limits_{x\to\infty}\left[((k+5)x-3)(\ln((k+6)x-k)-\ln((x+6)x-k-1))\right]$.

3. Знайти границю функції використавши заміну нескінченно малих:
$\lim\limits_{x\to -k-1}\dfrac{\ln\left(x^2+2(k+1)x+k^2+2k+2\right)}{x+k+1}$.

4. Знайти ОВФ: $y=\sqrt[4]{\lg tgx}$.

Варіант № 15.

1. Знайти границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(k+1)^3n^3-(k+1)n}{(n+k)^4-(n-k)^4}$.

2. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to 3k+2}\left[\dfrac{x-2k+1}{k+3}\right]^{\pi tg\left(\frac{\pi x}{6k+4}\right)\cdot\frac{1}{2}}$.

3. Знайти границю функції використавши заміну нескінченно малих:
$\lim\limits_{x\to k+5}\dfrac{\ln\left(\cos\dfrac{x-k-5}{k+3}\right)}{x-k-5}$.

4. Знайти ОВФ: $y=\lg(x+2)+\lg(x-2)$.

Варіант №16.

1. Знайти границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+k+5)^3-(n+k)^3}{((k+1)n+k+2)^2+(n+k+3)^2}$.

2. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to k+2}\left[\dfrac{k+2}{x}\right]\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(k+3-x)}$.

3. Знайти границю функції використавши заміну нескінченно малих:
$\lim\limits_{x\to -k-1}\dfrac{\left(1+\sqrt{tg[(k+1)(x+k+1)]^3}\right)^{k+3}-1}{x+k+1}$.

4. Знайти ОВФ: $y=\lg(x-1)\arcsin\dfrac{x}{2}$.

Варіант № 17.

1. Знайти границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{((k+1)n-k-2)^3-(n+k+4)^3}{((k+2)n-k)^3+((k+1)n+k+2)^3}$.

2. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{(k+3)x}-1}{\sin(k+1)x}$

3. Знайти границю функції використавши заміну нескінченно малих: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\ln\left(1+\sqrt[k+1]{x^{k+2}}\right)^{k+3}-1}{x}$.

4. Знайти ОВФ: $y=\dfrac{x^{2-1}}{2x-4}$.

Варіант № 18.

1. Знайти границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+k+9)^2+((k+2)n+k)^2}{(n+k+5)^3-(n+k)^3}$.

2. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\cos(k+2)x+1}{x^2}$

3. Знайти границю функції використавши заміну нескінченно малих: $\lim\limits_{x\to k+6}\dfrac{e^{1-\cos[(x-k-6)(k+1)]}-1}{x-k-6}$.

4. Знайти ОВФ: $y=\log_2\sin x$.

Варіант № 19.

1. Знайти границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{((k+1)n+1)^3+((k+2)n+k+1)^3}{((k+1)n+k+2)^3-(n-k-6)^3}$.

2. Знайти границю функції: $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2\dfrac{x}{\sqrt{k}}\right)^{((k+1)x^2)^{-1}}$.

3. Знайти границю функції використавши заміну нескінченно малих: $\lim\limits_{x\to +k+2}\dfrac{\sin\left(e^{(x-k-2)^{k+1}}-1\right)}{(x-k-2)}$.

4. Знайти ОВФ: $y=\dfrac{5-\sqrt{x-2}}{\sqrt{5-x}}$.

Варіант № 20.

1. Знайти границю послідовності: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+k+6)^3-(n+k+1)^3}{((k+2)n+k+1)^2+((k+3)n+k)^2}$.

2. Знайти границю функції: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{x^2+(k+8)x+4}{x^2+(x+5)x+3}\right]^{(k+1)x+2}$.

3. Знайти границю функції використавши заміну нескінченно малих: $\lim\limits_{x\to k+3}\dfrac{\arcsin\sqrt[2]{(x-k-3)^{k+1}}}{e^{x-k-3}-1}$.

4. Знайти ОВФ: $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-9}$.

Змістовий модуль 2.
Диференційне числення функції однієї змінної

Тема 1. Похідна функції

1.1. Похідна функції.

Якщо x і $x_1 = x + \Delta x$ - значення аргументу (Δx - приріст аргументу), то різниця $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ називається *приростом* функції $y = f(x)$ на відрізку $[x, x_1]$.

Означення 1.1. Вираз $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, якщо він має зміст називається *похідною функції* $f(x)$ в точці x, а сама функція $f(x)$ в такому випадку називається *диференційовною.*

Геометрично число $f'(x)$ є кутовим коефіцієнтом дотичної, що проведено до графіка функції $y = f(x)$ в точці його $x\left(tg\alpha = f'(x)\right)$ (рис. 11)

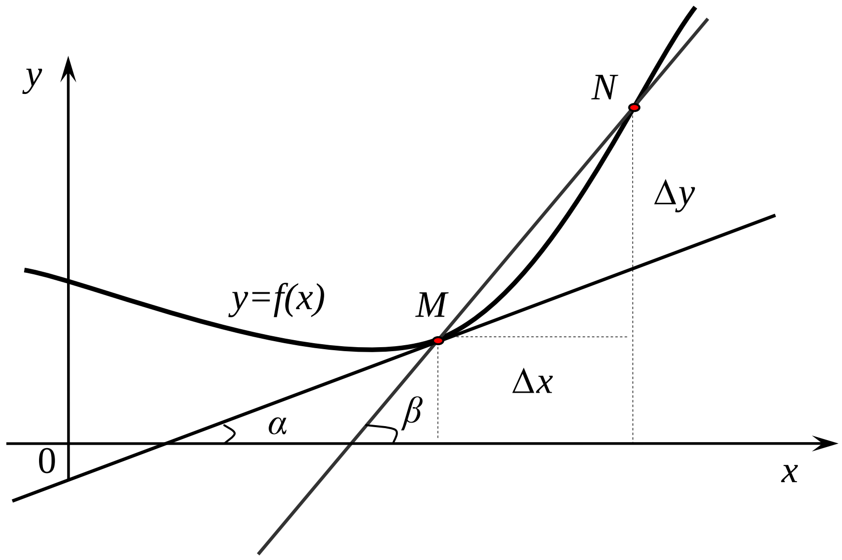


Рис. 11.

1.2. Основні правила знаходження похідної. *Таблиця похідних.*

Якщо c – стала величина і функції $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ мають похідні, то

1. $c' = 0$;
2. $(cu)' = cu'$;
3. $(u + v - w)' = u' + v' - w'$;

4. $(u \cdot v)' = u'v + v'u$;

5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ $(v \neq 0)$;

6. якщо функції $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ мають похідні, то $y'_x = y'_u u'_x$.

Таблиця похідних.

Якщо x - незалежна змінна, то

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$ (n - стала).
2. $(\sin x)' = \cos x$.
3. $(\cos x)' = -\sin x$.
4. $(\text{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
5. $(\text{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
6. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
7. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
8. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.
9. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$.
10. $(a^x)' = a^x Lna$ $(a > 0)$.
11. $(e^x)' = e^x$.
12. $(\text{Log}_a x)' = \dfrac{1}{x \,\text{Ln}\, a}$ $(a > 0)$.
13. $\mathbf{(Ln\, x)' = \dfrac{1}{x}}$.
14. $(\text{sh} x)' = \text{ch} x$.
15. $(\text{ch} x)' = \text{sh} x$.
16. $(\text{th}\, x)' = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x}$.
17. $(\text{cth} x)' = -\dfrac{1}{\text{sh}^2 x}$.

1.3.Однобічні похідні.

Вирази

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0-o} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

та

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0+o} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

називаються відповідно *лівою* або *правою похідною* функції $f(x)$ в точці x. Для існування похідної $f'(x)$ необхідно і достатньо щоб $f'_-(x) = f'_+(x)$.

1.4. Нескінченна похідна. Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty$, то кажуть, що в точці x функція

$f(x)$ має *нескінченну похідну*. В цьому випадку дотична до графіка функції $y = f(x)$ в точці x перпендикулярна до осі O_x.

1.5. Похідна оберненої функції. Дифференційовна функція $y = f(x)$ $(a < x < b)$ з похідною $f'(x) \neq 0$ має однозначну неперервну обернену функцію $x = f^{-1}(y)$, причому обернена функція також диференційовна і має місце наступна формула $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

1.6. Похідна від параметрично заданої функції. Система рівнянь $\left.\begin{matrix} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{matrix}\right\}$ $(\alpha < t < \beta)$, *де* $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ - диференційовні функції і $\varphi'(t) \neq 0$, визначає y в деякій області як однозначну диференційовну функцію від x: $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$, причому похідна цієї функції може бути знайдена за формулою $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

1.7. Похідна від неявно заданої функції. Якщо диференційовна функція $y = f(x)$ задовольняє рівняння $F(x, y) = 0$, то похідна $y' = y'(x)$ цієї неявної функції може бути знайдена з рівняння $\dfrac{d}{dx}\left[F(x, y)\right] = 0,$ *де* $F(x, y)$ розглядається як складена функція від змінної x.

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Обчислити похідну за означенням $y = 3x^2 - 4x$.

Розв'язок:

а) надаємо аргументу приросту Δx та функції Δy

$$y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - 4(x + \Delta x) = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 4x - 4\Delta x.$$

б) визначаємо приріст функції:

$$\Delta y = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 4x - 4\Delta x - 3x^2 + 4x = 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 4\Delta x.$$

в) знаходимо відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 4\Delta x}{\Delta x}.$$

г) знаходимо границю відношення приросту функції до приросту аргумента:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{6x\Delta x+3\Delta x^2-4\Delta x}{\Delta x}=6x-4.$$

Приклад 2. Обчислити похідну функцій за формулами диференціювання:

а) $y=x^2-5x+4$, $y'=2x-5$ б) $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x$, $y'=x^2+x-2$

Приклад 3. Обчислити похідну функцій за формулами диференціювання:

$$y=(x+1)(x+2)^2(x+3)^3$$

$$y'=1(x+2)^2(x+3)^3+(x+1)2(x+2)(x+3)^3+(x+1)(x+2)^2 3(x+3)^2$$

Приклад 4. Обчислити похідну функцій за формулами диференціювання:

$$y=\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2},\quad y'=\frac{(-2x+1)(1-x+x^2)-(1+x-x^2)(2x-1)}{(1-x+x^2)^2}=\frac{-4x+2}{(1-x+x^2)^2}$$

Приклад 5. Обчислити похідну функцій за формулами диференціювання:

$$y=3/8x^4\sqrt[3]{x^2}=3/8x^{4\frac{2}{3}},\quad y'=\frac{3}{8}\frac{14}{3}x^{\frac{11}{3}}=\frac{7}{4}x^{\frac{11}{3}}.$$

Приклад 6. Обчислити похідну складеної функції:
Обчислити похідну функцій за формулами диференціювання:

а) $y=\frac{2x+1}{\sqrt{3-2x}}$

$$y'=\frac{2\sqrt{3-2x}-(2x+1)\frac{1}{2\sqrt{3-2x}}(-2x)}{3-2x}=\frac{2(3-2x)+x(2x+1)}{(3-2x)^{3/2}}=\frac{-2x+7}{(3-2x)^{3/2}}.$$

б) $y=\frac{1}{3}x^3\sin 3x$.

$$y'=\frac{1}{3}3x^2\sin 3x+\frac{1}{3}x^3 3\cos 3x=x^2\sin 3x+x^3\cos 3x=x^2(\sin x+x\cos 3x).$$

в) $y=(\sin\frac{x}{4}-\cos\frac{x}{4})^2$.

$$y'=2(\sin\frac{x}{4}-\cos\frac{x}{4})(\frac{1}{4}\cos\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\sin\frac{x}{4})=(\sin\frac{x}{4}-\cos\frac{x}{4})(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\sin\frac{x}{4})=$$

$$=\frac{1}{2}(\sin^2\frac{x}{4}-\cos^2\frac{x}{4}).$$

г) $y=1+\cos^2\frac{x}{2}.$

$$y'=2\cos\frac{x}{2}(-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2})=-\frac{1}{2}\sin x.$$

д) $y=\arccos\frac{x^2-16}{x^2+16}.$

$$y'=\frac{-1}{\sqrt{1-(\frac{x^2-16}{x^2+16})^2}}\frac{2x(x^2+16)-2x(x^2-16)}{(x^2+16)^2}=\frac{-(x^2+16)}{\sqrt{(x^2+16)^2-(x^2-16)^2}}\frac{64x}{(x^2+16)^2}=$$

$$=\frac{-64x}{\sqrt{64x^2}(x^2+16)}=\frac{-8}{(x^2+16)}.$$

е) $y=Lg(Ln^5 4x).$

$$y'=\frac{1}{Ln^5 4xLn10}5Ln^4 4x\frac{1}{4x}4=\frac{5Ln^4 4x}{xLn^5 4xLn10}=\frac{5}{xLnxLn10}.$$

Приклад 7. Знайти похідні від неявно заданих функцій:

а) $x^3+y^3=3xy$,

б) $3^x+3^y=3^{x+y}$.

Розв'язок:

а)
$$x^3+y^3=3xy$$
$$3x^2+3y^2y'-3y-3y'=0$$
$$y'(3y^2-3)=3y-3x^2$$
$$y'=\frac{3y-3x^2}{3y^2-3}$$

б)
$$3^x+3^y=3^{x+y}$$
$$3^x Ln3+3^y Ln3y'-3^{x+y}Ln3(1+y')=0$$
$$y'(3^y Ln3-3^{x+y}Ln3)=3^{x+y}Ln3-3^x Ln3$$
$$y'=\frac{3^{x+y}Ln3-3^x Ln3}{3^y Ln3-3^{x+y}Ln3}$$

Приклад 8. Знайти похідну від параметрично заданої функції

$$x = 3\sin 3t - \sin 3t$$

$$y = 3\cos 2t + \cos 3t$$

$$x'_t = 9\cos 3t - 3\cos 3t \quad .$$

$$y'_t = -6\sin 2t - 3\sin 3t$$

$$y'_x = \frac{-6\sin 2t - 3\sin 3t}{9\cos 3t - 3\cos 3t} = \frac{-2\sin 2t - \sin 3t}{3\cos 3t - \cos 3t}$$

Приклад 9. Обчислити похідну:

$$y = x^x$$

$$Lny = xLnx$$

$$\frac{y'}{y} = Lnx + x\frac{1}{x} = Lnx + 1$$

$$y' = x^x(Lnx + 1)$$

$$y = x^x$$

$$y' = x^x Lnx + xx^{x-1} = x^x(Lnx + 1).$$

Приклад 10.

$$y = (\cos x)^{\sin x}$$

$$Lny = \sin xLn(\cos x)$$

$$\frac{y'}{y} = \cos xLn(\cos x) + \sin x\frac{1}{\cos x}(-\sin x)$$

$$y' = (\cos x)^{\sin x}(\cos xLn\cos x - \sin xtgx)$$

$$y = (\cos x)^{\sin x}$$

$$y' = (\cos x)^{\sin x} Ln\cos x(\cos x) + \sin x(\cos x)^{\sin x - 1}(-\sin x) =$$

$$= (\cos x)^{\sin x}(Ln\cos x(\cos x) - tgx\sin x)).$$

Індивідуальні завдання для поточного контролю

Завдання1. 1-25. Зайти похідну функції.

1. $y = Lg(x - \cos x)$.
2. $y = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\, \frac{x\sqrt{3}}{1 - x^2}$.
3. $y = \sin^2 \frac{x}{3} ctg\, \frac{x}{2}$.
4. $y = \arcsin\sqrt{\sin x}$.
5. $y = \frac{2\sin^2 x}{\cos 2x}$.
6. $y = \frac{\sqrt[9]{4x^5 + 2}}{3x^4}$.
7. $y = \cos\frac{\arcsin x}{2}$.

8. $y=\sin^2\left(\frac{1-Lnx}{x}\right).$

9. $y = x\arcsin(\ln x)$.

10. $y=e^{\frac{1}{Lnx}}.$

11. $y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$

12. $y=\frac{\sin 3x}{2\sin^2 x\cos x}.$

13. $y=Ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$

14. $y=xe^{1-\cos x}.$

15. $y=10^{xtgx}.$

16. $y=tg\frac{1-e^x}{1+e^x}.$

17. $y=\frac{1}{arctg\ e^{-2x}}.$

18. $y=\frac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}.$

19. $y=\frac{1}{\sqrt{1+e^{-\sqrt{x}}}}.$

20. $y=e^x\sin x\cos^3 x.$

21. $y=Ln(tg\frac{x}{2})-ctgxLn(1+\sin x)-x$.

22. $y=x\sqrt{1+x^2}\sin x.$

23. $y=\frac{x\ell^{\chi}arctgx}{Lnx}.$

24. $y=(tg2x)^{ctgx}.$

25. $y=\sqrt[3]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x+4}}}$

Завдання 2. 1-25. Зайти похідну від неявно та параметрично заданої функції:

1. $\sin(xy)+\cos(xy)=tg(x+y)$
2. $2yLny=x$
3. $x^y=y^x$
4. $y^2\cos x=\alpha^2\sin 3x$
5. $2^x+2^y=2^{x+y}$
6. $x\sin y-\cos y+\cos 2y=0$
7. $y\sin x-\cos(x-y)=0$
8. $tg\frac{y}{2}=tg\frac{x}{2}$
9. $e^{3xy}+yLnx=0$
10. $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\alpha tg\frac{y}{x}}$
11. $\sqrt{xy}+2x\sin y=3x$
12. $y^2=\cos(y+x)$
13. $\cos^3 y-x=e^{\sqrt{y}}$
14. $\frac{2\sin^2 x}{\cos y}=tg(xy)$
15. $2e^{-x}-e^{-2y}=\sqrt{y}$
16. $x=e^{2t}\cos^2 t$, $y=e^{2t}\sin^2 t$
17. $x=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$,

    $y=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$
18. $x=\frac{t-1}{t}, y=\frac{t-1}{t}$
19. $x=Ln(1+t^2), y=t-arctgt$
20. $x=\frac{3at}{1+t^3}, y=\frac{3at}{1+t^3}$

21. $x = t\sin t + \frac{t^2}{2}\cos t,$
$y = -t\cos t - \frac{t^2}{2}\sin t$

22. $x = \cos t\sqrt{2\cos 2t},$
$y = \sin t\sqrt{2\cos 2t}$

23. $x = 2Lnctgt + 1,$
$y = tgt + ctgt$

24. $x = t(t\cos t - 2\sin t),$
$y = t(t\sin t + 2\cos t)$

25. $x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, y = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

Тема 2. Диференціал функції

2.1. Основні означення.

Якщо приріст функції $y = f(x)$ від незалежної змінної x може бути представлений у вигляді $\Delta y = \underbrace{f'(x)dx}_{dy} + o(\Delta x)$, де $dx = \Delta x$, то головну лінійну частину цього приросту називають *диференціалом функції* $y = f(x)$: $dy = f'(x)dx.$ Для існування диференціала функції $y = f(x)$ необхідно і достатньо щоб існувала скінчена похідна $y' = f'(x)$, причому: $dy = f'(x)dx.$ Остання формула зберігає свою силу і в тому випадку, коли змінна x є функцією від нової незалежної змінної (*властивість інваріантності першого диференціала*).

2.2. Оцінка малих приростів функції.

Для підрахунку малих приростів диференційовної функції $f(x)$ користуються формулою $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$, або $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$ відносна похибка якої як завгодно мала при достатньо малому $|\Delta x|$, якщо $f'(x) \neq 0$. Зокрема якщо незалежна змінна x визначається з граничною абсолютною похибкою, що дорівнює $|\Delta_x|$, то Δ_y та δ_y - граничні абсолютна і відносна похибки функції $y = f(x)$ - наближено виражаються наступними формулами: $\Delta_y = y'\Delta_x$, $\delta_y = \left|[\mathrm{Ln}|y|]'\right|$, $\Delta_x = \left|\frac{y'}{y}\right|\Delta x$.

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Знайти диференціал функції $z = Ln(1+e^{10x}) + \mathrm{arcctg} e^{5x}$ та обчислити $dz|_{x=0, dx=0,1}$.

Розв'язок: Знаходимо похідну даної функції та множимо її на диференціал незалежної змінної. Отримаємо шуканий диференціал даної функції:

$$dz = \left[\frac{(1+e^{10x})'}{1+e^{10x}} - \frac{(e^{5x})'}{1+e^{10x}}\right]dx = \left(\frac{10e^{10x}}{1+e^{10x}} - \frac{5e^{5x}}{1+e^{10x}}\right)dx = \frac{5e^{5x}(2e^{5x}-1)}{1+e^{10x}}\,dx.$$

Нехай $x=0$ та $dx = 0{,}1$, отримаємо $dz = 0{,}25$.

Приклад 2. Вирахувати наближено $\sin 29^0$.

Розв'язок: Нехай $\sin 29^0$ є частинне значення функції $y = \sin x$ при $x = 29 \cdot \frac{\pi}{180} = x_1$ і $x_0 = 30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$.

Отримаємо: $y(x_0) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $y'(x_0) = \cos x|_{x=\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$dx = x_1 - x_0 = \frac{29\pi}{180} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{180};$$

$$\sin 29^0 \approx y(x_0) + y'(x_0)dx = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\pi}{180}\right) \approx 0{,}4848.$$

Приклад 3. Резервуар, що має форму напівкулі з внутрішнім радіусом $R(м)$ наповнюється водою зі швидкістю $Q(л)$ за секунду. Визначити швидкість підвищення рівня води у резервуарі в момент, коли він буде дорівнювати $0{,}5R$.

Розв'язок: Позначимо через h рівень води в $м$ і через v її об'єм в $м^3$. Знайдемо залежність між змінними h та v користуючись формулою для об'єму кульового сегменту $v = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$.

Диференціюючи дану рівність по часу t, знайдемо залежність між швидкостями зміни змінних h та v:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh}\cdot\frac{dh}{dt} = \pi\left[2h\left(R - \frac{h}{3}\right) - \frac{1}{3}h^2\right]\frac{dh}{dt} = \pi\left(2Rt - h^2\right)\frac{dh}{dt}.$$

Припускаючи, що $\frac{dv}{dt} = 0{,}001Q\left(\frac{м^3}{сек}\right)$, отримаємо

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0{,}001Q}{\pi h(2R-h)}\left(\frac{м}{сек}\right).$$

При $h=\frac{R}{2}$ отримаємо $\frac{dh}{dt}=\frac{0,004Q}{3\pi R^2}\left(\frac{м}{сек}\right)$.

Приклад 4. Знайти приріст та диференціал функції $y=3x^2+x$ в $x_0=1,\ \Delta x=0,1$. Обчислити абсолютну та відносну похибки, що допускаються при заміні приросту функції Δy на диференціал функції dy.

Розв'язок: Знаходимо приріст функції

$$\Delta y=3(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)-(3x^2+x)=$$

$$\underbrace{(6x+1)\Delta x}_{dy}+\underbrace{3(\Delta x)^2}_{\text{нескінч. мала}}.$$

Отже, $dy=(6x+1)\Delta x$.

$$dy\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0,1}}=7\cdot 0.1=0.7,\qquad \Delta y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0,1}}=7\cdot 0.1+3\cdot 0.1=0.73.$$

Абсолютна похибка: $\Delta_y=y'\Delta_x=|0,73-0,7|=0,03.$

Відносна похибка: $\delta=\frac{|\Delta y-dy|}{|\Delta y|}=\frac{0,03}{0,73}\approx 0,04.$

Індивідуальні завдання для поточного контролю

Завдання 1.

1. Обчислити приріст та диференціал функції: $y=x^3-7x^2+8$ точці $x=1,\Delta x=0,2$.
2. Обчислити приріст та диференціал функції, абсолютну та відносну похибки: $y=x^3-x$ в точці $x=2$ при $\Delta x=0,01$.
3. Обчислити приріст та диференціал функції, абсолютну та відносну похибки: $y=x^3-x$ в точці $x=2$ при $\Delta x=0,1$.
4. Знайти приріст функції $y=x^2$, що відповідає приросту Δx незалежної змінної x. Обчислити Δy, якщо $x=0,2$; $\Delta x=0,02$.
5. Знайти приріст ΔV об'єму V кулі при зміні радіуса $R=5$ на ΔR. Обчислити ΔV, якщо $\Delta R=0,2$. Яка буде помилка значення ΔV, якщо обмежитися членом, до якого входить ΔR у першому степені?
6. Знайти приріст ΔV об'єму V кулі при зміні радіуса $R=5$ на ΔR. Обчислити ΔV, якщо $\Delta R=0,1$. Яка буде помилка значення ΔV, якщо обмежитися членом, до якого входить ΔR у першому степені?

7. Знайти приріст ΔV об'єму V кулі при зміні радіуса $R=5$ на ΔR. Обчислити ΔV, якщо $\Delta R=0{,}02$. Яка буде помилка значення ΔV, якщо обмежитися членом, до якого входить ΔR у першому степені?

8. Задана функція $y=x^5+4x$. Знайти значення приросту і його лінійної частини, що відповідають зміні x від $x_1=1$ до $x_2=1{,}2$.

9. Який приріст матиме функція $y=2x^2-3x$ при переході незалежної змінної від $x=2$ до $x=2{,}01$? Яке значення відповідної лінійної головної частини? Знайти відношення другої величини до першої.

10.Дана функція $f(x)=x^3$. Відомо, що в деякій точці приросту незалежної змінної $\Delta x=0{,}1$ відповідає головна частина приросту функції $df(x)=0{,}5$. Знайти початкове значення незалежної змінної x.

11. Знайти приріст і диференціал функції $y=2x^2-3x$ при $x=10$ і $\Delta x=0{,}2$. Обчислити абсолютну і відносну похибки, які виявляються при заміні приросту функції диференціалом. Зробити рисунок.

12. Знайти приріст і диференціал функції $y=\sqrt[3]{x}$ при $x=8$ і $\Delta x=0{,}8$. Обчислити абсолютну і відносну похибки. Виконати малюнок.

13. Дано $y=x^5-4x$. При $x=1$ обчислити Δy і dy, даючи значення $\Delta x=2$. Знайти відповідні значення відносної похибки $\delta=\dfrac{|\Delta x-dy|}{|\Delta y|}$.

14. Дано $y=x^5-4x$. При $x=1$ обчислити Δy і dy, даючи значення $\Delta x=0{,}2$. Знайти відповідні значення відносної похибки $\delta=\dfrac{|\Delta x-dy|}{|\Delta y|}$.

15. Дано $y=x^5-4x$. При $x=1$ обчислити Δy і dy, даючи значення $\Delta x=0{,}01$. Знайти відповідні значення відносної похибки $\delta=\dfrac{|\Delta x-dy|}{|\Delta y|}$.

16. Знайти графічно приріст і диференціал функції $y=2^x$ і обчислити абсолютну і відносну похибки при заміні приросту функції її диференціалом при $x=1$ і $\Delta x=0{,}5$.

17. Сторона квадрата дорівнює 10см. На скільки збільшиться його площа, якщо кожну його сторону збільшити на: 1см; 0,4см; 0,05см. Знайти головну лінійну частину приросту площі цього

квадрата і оцінити відносну похибку (у %) при заміні приросту його головною частиною.

18. Відомо, що при збільшенні сторін квадрата на 0,2см лінійна головна частина приросту площі становить 1,8 см^2. Знайти лінійну головну частину приросту, що відповідає приросту кожної сторони на: 0,5см; 0,8см, 1,4см.

19. Показати, базуючись на формулі закону Ома $I=E/R$, що мала зміна струму, зумовлена малою зміною опору, може бути знайдена наближено за формулою $\Delta I \approx -I/R \Delta R$.

20. Мідний кубик, ребро якого дорівнює 5см, рівномірно прошліфований з усіх боків. Знаючи, що вага його зменшилася на 0,96г, і вважаючи, що питома вага міді дорівнює 8г/см^8, визначити, як зменшилися розміри куба, тобто на скільки скоротилося його ребро.

21. Циліндрична трубка заповнена водою. Зваживши воду, знайшли площу поперечного перерізу трубки. Яка похибка знайденої величини радіуса, якщо r=0,5см, а похибка площі перерізу — 0,1 см^2?

22. Об'єм V кулі радіуса r дорівнює $4/3\pi r^3$. Знайти приріст і диференціал об'єму і дати їх геометричну інтерпретацію.

23. Вільне падіння матеріальної точки визначається за законом $S=qt^2/2$. Знайти приріст і диференціал шляху в момент t *і* з'ясувати їх механічний зміст.

24. Сторона куба $x = 5 \pm 0{,}01 м$. Вирахувати абсолютну та відносну похибки при обчислення об'єму куба.

25. Обчислити наближено: Lg*89*, знаючи, що Lg*3*=0.47712.

Завдання 2. 1-25.Знайти диференціал функції:

1. $y = x(Lnx - 1)$
2. $y = \sin^3 \dfrac{6x}{x+1}$.
3. $y = \dfrac{tgx}{1+x^2}$.
4. $y = \arcsin \dfrac{\cos x}{1+tgx}$.
5. $y = \sqrt{\arccos x} + ctg^2 x$.
6. $y = 5^{x^2} + 2x^5$.
7. $y = Lg \sin tg \sqrt[5]{x^4}$.
8. $y = arctg \dfrac{x}{a}$
9. $y = \sqrt{\arcsin x} + arctg^2 x$.
10. $y = Ln(1+e^{10x}) + arctge^{5x}$.
11. $y = Lntg(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{4})$.
12. $y = 5^{\sin x \cos 2x}$.
13. $y = arctg^4 x^3$.

14. $y = 3^{Lntgx}$.

15. $y = 3\arcsin x - 4arctgx + \frac{1}{2}\arccos x$

.

16. $y = e^{\frac{-x}{y}}$.

17. $Ln\sqrt{x^2 + y^2} = arctg(\frac{y}{x})$.

18. $tg^2 \sqrt[3]{xy} = Lg(x + y)$.

19. $5^{x-y} + \cos\frac{y}{x} = 25$.

20. $y^2 - xy = e^y + x$.

21. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$.

22. $xy = \sin(x + y)$.

23. $2xy = Ln(x^2 - 2y)$.

24. $5^{x-y} + \cos\frac{y}{x} = 25$.

25. $Ln\sqrt{x^2 + y^2} = arctg(\frac{y}{x})$.

Тема 3. Похідні і диференціали вищих порядків

3.1. Основні означення та формули.

Похідні вищих порядків від функції $y = f(x)$ визначаються співвідношеннями (припускаємо, що відповідні операції мають зміст!):

$$f^{(n)}(x) = \left\{f^{(n-1)}(x)\right\}' \quad (n = 2,3,4,...). \tag{3.1}$$

Якщо функція $y = f(x)$ має неперервну похідну $f^{(n)}(x)$ на інтервалі $(a;b)$, то коротко пишуть так: $f(x) \in C^{(n)}(a;b)$. Зокрема, якщо $y = f(x)$ має неперервні похідні всіх порядків на $(a;b)$, то використовують запис $f(x) \in C^{(\infty)}(a;b)$.

Диференціали вищих порядків від функції $y = f(x)$ послідовно визначаються формулою:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) \ (n = 2,3,...), \tag{3.2}$$

де прийнято $d^1 y = dy = y'dx$.

Якщо x - незалежна змінна, то: $d^2 x = d^3 x = ... = 0$. В цьому випадку справедливі формули:

$$d^n y = y^{(n)} dx^n \ \text{ та } \ y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}. \tag{3.3}$$

Основні формули.

1. $\left(a^x\right)^{(n)} = a^x Ln^n a \ (a > 0)$; $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x$.
2. $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi n}{2})$.

3. $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{\pi n}{2})$.

4. $\left(x^m\right)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$.

5. $(Lnx)^n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

3.2. Формула Лейбніца. Якщо функції $u = \varphi(x)$ *і* $v = \psi(x)$ мають похідні *n-го* порядку, то

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^{\ i} (u)^{(i)} \cdot (v)^{(n-1)}, \qquad (3.4)$$

де $u^{(0)} = u,\ v^{(0)} = v$ і $C_n^{\ i}$ - число *«комбінацій»* з *n* елементів по *i*. Аналогічно для диференціала

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^{n} C_n^{\ i} d^{(n-1)} u \cdot d^{(i)} v, \qquad (3.4.1)$$

де $d^{(0)}u = u,\ \mathrm{d}^{(0)}v = v$.

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Знайти $y', y'', y''', \ldots\ldots$ для функції $y = x^2 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 0{,}5x + 7$..

Розв'язок: $y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 2x - 0{,}5$,

$y'' = 20x^3 + 24x^2 - 18x - 2$,

$y''' = 60x^2 + 48x - 18$,

$y^4 = 120x + 48,\ y^5 = 120,\ y^6 = y^7 = \ldots = 0.$

Приклад 2. Знайти $y^{(n)}$ для функції $y = Lnx$.

Розв'язок:

$y' = \frac{1}{x} = x^{-1}$,

$y'' = -1 \cdot x^{-2}$,

$y''' = 1 \cdot 2x^{-3}$,

$y^4 = -1 \cdot 2 \cdot 3x^{-4}$,

…………………

$y^{(n)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (n-1)(-1)^{n-1} \cdot x^{-n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}$.

Приклад 3. $y = \sin x$. Знайти $y^{(n)}$.

Розв'язок:

$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}),$

$y'' = -\sin x = \sin(x + 2\frac{\pi}{2}),$

$y''' = -\cos x = \sin(x + 3\frac{\pi}{2}),$

……..……..…

$y^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2}).$

Приклад 4. Знайти диференціали першого, другого, третього порядків функції $y = (2x-3)^3$.

Розв'язок:

$dy = 3(2x-3)^2 \cdot 2dx = 6(2x-3)^2\, dx,$

$d^2y = 12(2x-3)\cdot 2dx^2 = 24(2x-3)dx^2,$

$d^3y = 24\cdot 2dx^3 = 48dx^3,$

$d^4y = 0\cdot dx^4 = 0.$

Індивідуальні завдання для поточного контроля

Завдання 1. 1-25. Знайти похідні та диференціали вказаних порядків від заданих функцій:

1. $y = \dfrac{1}{1-x}$; $\quad y^{(n)}$.
2. $y = Ln\sin x$; $\quad y''$.
3. $y = \sin 2x$, $\quad y^{(n)}$
4. $y = \cos\alpha x$, $\quad y^{(n)}$
5. $y = Ln(1+\alpha x)$, $\quad y^{(n)}$.
6. $y = arctgx$, $\quad y''$.
7. $y = \arcsin x$, $\quad y''$.
8. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$, $\quad y^4$.
9. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$, $\quad y^{3.}$.
10. $y = x^2e^x$, $\quad y^{(n.)}$.
11. $y = x^2Lnx$, $\quad y^{3.}$.
12. $y = x^3\ln x$, $\quad y^{(n)}$.
13. $x = a\cos t, y = b\sin t$, $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}$
14. $x = (t-\sin t), y = a(1-\cos t)$, $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}$.
15. $x = a\cos^3 t, y = a\sin^{3t} t$, $\quad \dfrac{d^2y}{dx^{2.}}$.
16. $x = arctgt, y = Ln(1+t^2)$, $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}$.
17. $x = e^{-t}, y = t^3$, $\quad \dfrac{d^3y}{dx^3}$.
18. $x = \cos t + t\sin t,$ $y - \sin t - t\cos t$, $\quad \dfrac{d^3y}{dx^3}$.

19. $x=\sec t, y=tgt,\qquad \dfrac{d^3y}{dx^{3.}}.$

20. $x=\ln t, y=t^3,\qquad \dfrac{d^3y}{dx^3}.$

21. $x=e^{-\alpha t,y=}, y=e^{\alpha t},\qquad \dfrac{d^3y}{dx^3}.$

22. $y=e^x\cos x,\qquad y^4.$

23. $y=\dfrac{Lnx}{x},\qquad y^5.$

24. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}},\qquad d^3y.$

25. $y=x\cos 2x,\qquad d^{10}x.$

Тема 4. Основні теореми диференціального числення. Правило Лопіталя

Теорема Ролля. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційовна на інтервалі $(a;b)$ і на кінцях відрізка і набуває однакових значень $f(a)=f(b)$, то в середині інтервалу знайдеться хоч би одна точка $\exists c \in (a;b)$, $f'(c)=0$ (рис. 12)·

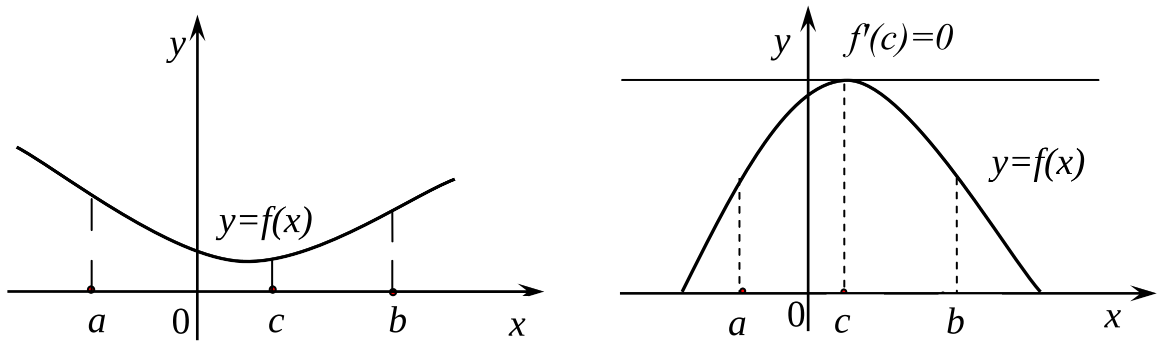


Рис. 12.

Наслідок, між двома нулями диференційовної функції лежить хоч би один корінь похідної.

Теорема Ферма. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційовна в інтервалі $(a;b)$ і у внутрішній точці c цього інтервалу набуває найбільшого (найменшого) значення, то $f'(c)=0$.

Теорема Лагранжа. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційовна в інтервалі $(a;b)$ і на кінцях відрізка і набуває однакових значень $f(a)=f(b)$, то в середині інтервалу знайдеться хоч би одна точка $c\in(a;b)$, в якій справджується рівність $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$;

$a=x_0,\ b=x_0+\Delta x,\ c=x_0+\theta\Delta x,\ 0\le\theta\le 1,$

то

$\Delta f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x.$

Теорему Лагранжа називають теоремою про скінченні прирости.

Теорема Коші. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$, диференційовні на інтервалі $(a;b)$ і $\varphi'(x)\neq 0$ при $x\in(a;b)$, то існує хоча б одна точка $c\in(a;b)$, для якої справджується рівність $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Теорема Тейлора. Функція $f(x)$ диференційовна $n+1$ раз в деякому інтервалі, що містить точку a, може бути представлена в околі точки $x=a$ у вигляді суми многочлена n-го степеня та достатньо малого залишкового члена R_n:

(4.1)

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{(n)!}(x-a)^n+R_n,$$

$R_n=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, де c - деяке середнє значення між a і x.

Частинний випадок формули Тейлора при $a=0$ називають формулою *Маклорена*:

(4.2)

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}(x)+\frac{f''(0)}{2!}(x)^2+\frac{f'''(0)}{3!}(x)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{(n)!}(x)^n+R_n,$$

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}(x)^{n+1},\ \text{де}\ \theta x=c-a(1+\theta),\ 0<\theta<0.$$

Правило Лопіталя-Бернуллі. Дане правило застосовується для розкриття невизначеностей $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні в околі точки a, диференційовні і $\varphi'(x)\neq 0$ в цьому околі, за винятком можливо, самої точки a, також $f(x)\to 0$ і $\varphi(x)\to 0$ при $x\to 0$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, якщо остання границя існує. Аналогічна формула справедлива і для випадку, коли $f(x)\to\infty$ і $\varphi(x)\to\infty$ при $x\to a$.

Розкриття інших невизначеностей $\infty-\infty; 0\cdot\infty; 1^{\infty}; 0^0; \infty^0$ зводиться попередньо до перших двох невизначеностей $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$.

а) Якщо $f(x)\to 0$, а $\varphi(x)\to\infty$ при $x\to a$, то

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot\varphi(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}\left(\frac{0}{0}\right) \tag{4.3}$$

або

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

б) Якщо $f(x)\to\infty$, а $\varphi(x)\to\infty$ при $x\to a$, то

$$\lim_{x\to a} f(x)-\varphi(x)=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{\varphi(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right) \tag{4.4}$$

.

в) У випадку трьох останніх невизначеностей має місце формула

$$\lim_{x\to a} f(x)^{\cdot\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\cdot Ln f(x)}. \tag{4.5}$$

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Чи буде виконуватися теорема Ролля для функції $y=\sqrt[3]{8x-x^2}$ на інтервалі $(0,8)$?

Розв'язок: Дана функція неперервна при всіх значеннях x та має похідну $y'=\frac{8-2x}{3\sqrt[3]{(8x-x^2)^2}}$, *при* $x\neq 0,\ x\neq 8$. крім того, $y(0)=y(8)=0$. Таким чином теорема Ролля буде виконуватися на відрізку $[0,8]$ і $y' = 0$ при $x = 4$.

Приклад 2. Знайти координати точки *M* на дузі кривої *AB* $y = 2x - x^2$, в якій дотична паралельна хорді *AB*, якщо *A(1,1) і B(3,-3).*

Розв'язок: Функція $y = 2x - x^2$ неперервна та диференційовна при всіх значеннях x. За теоремою Лагранжа між двома значеннями $a = 1$ і $b = 3$ існує значення $x = \xi$, що задовольняє рівність: $y(b) - y(a) = (b - a)y'(\xi)$, де $y' = 2 - 2x$. Підставимо дані з умови задачі: $y(3) - y(1) = (3 - 1)y'(\xi)$, тобто $(2 \cdot 3 - 3^2) - (2 \cdot 1 - 1^2) = (3 - 1) \cdot (2 - 2\xi)$ або $-4 = 4(1 - \xi)$, $\xi = 2$, $y(2) = 0$. Таким чином точка М має координати (2,0).

Приклад 3. Показати, що похідна многочлена $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ має дійсний корінь в інтервалі (1,1).

Розв'язок: Знайдемо корені даного многочлена: $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ або $(x - 1)^2(x + 1) = 0$, тобто $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Оскільки $f(-1) = f(1) = 0$, то за теоремою Ролля $f'(x)$ має корінь в інтервалі (1,1). Знайдемо корені похідної $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0$, тобто $x_1 = -1/3$, $x_2 = 1$. Таким чином між коренями функції -1 і 1 міститься один корінь похідної, що дорівнює -1/3.

Приклад 4. На дузі *AB*, що задана параметричними рівняннями $x = t^2$, $y = t^3$, знайти точку *M*, в якій дотична паралельна хорді *AB,* якщо точкам *A і B* відповідають значення $t = 1$ і $t = 2$.

Розв'язок: Кутовий коефіцієнт хорди *AB* дорівнює $\dfrac{y(3) - y(1)}{x(3) - x(1)}$, а кутовий коефіцієнт дотичної в точці *M* (при $t = \xi$) дорівнює $\dfrac{y'_t(\xi)}{x'_t(\xi)}$, де $x'_t = 2t$, $y'_t = 3t^2$. Для визначення ξ за теоремою Коші отримаємо рівняння $\dfrac{y(3) - y(1)}{x(3) - x(1)} = \dfrac{y'_t(\xi)}{x'_t(\xi)}$, або $\dfrac{27 - 1}{9 - 1} = \dfrac{3\xi^2}{2\xi}$, або $\dfrac{13}{4} = \dfrac{3}{2}\xi$, тобто $\xi = 13/6$. Знайдене значення ξ задовольняє нерівність $1 < \xi < 3$. Підставивши значення $t = \xi$ в параметричне рівняння кривої, отримаємо $x = 169/36$, $y = 2197/216$. Так, шукана точка M(169/36; 2197/216).

Приклад 5. Представити функцію $y = \sqrt[3]{x}$ у вигляді многочлена п'ятого степеня відносно двочлена $x - 1$.

Розв'язок: Виразимо значення функції $y = x^{\frac{1}{3}}$ та її похідних до п'ятого порядку включно при $x_0 = 1$: $y(1) = 1,\ y'(x) = (1/3)x^{\frac{-2}{3}},\ y'(1) = 1/3;$
$y''(x) = -(2/9)x^{-5/3},\ y''(1) = -2/9;$
$y'''(x) = (10/27)x^{-8/3},\ y'''(1) = 10/27;$
$y^4(x) = -(80/81)x^{-11/3},\ y^4(1) = -80/81;$
$y^5(x) = (880/243)x^{-14/3},\ y^5(1) = 880/2439.$
За формулою Тейлора отримаємо:

$$\sqrt[3]{x} = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9\cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{10}{27\cdot 3!}(x-1)^3 - \frac{80}{81\cdot 4!}(x-1)^4 + \frac{880}{243\cdot 5!}(x-1)^5 + R_5,$$

де $R_5 = \dfrac{y^4(\xi)}{6!}(x-1)^6 = -\dfrac{12320}{729\cdot 6!}\cdot \xi^{-17/3}(x-1)^6,\ 1 < \xi < x.$

Приклад 6. Вирахувати $\sqrt{e}$ з точністю до 0,0001. Використаємо формулу Маклорена для функції $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + R_n,$ де $R_n = \dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0 < \theta < 1.$

Розв'язок: Оскільки $2 < e < 3,\ 0 < \theta < 1,$ то $R_n < \dfrac{e^{1/2}}{2^{n+1}(n+1)!}.$ Але $e^{1/2} < 2,$ тому $R_n < \dfrac{1}{2^n(n+1)!}.$ Потрібно визначити n так щоб виконувалась нерівність $R_n < 0{,}0001.$

Якщо $n = 3,$ то $R_3 < \dfrac{1}{8\cdot 24};\ R_3 < \dfrac{1}{192},$

якщо $n = 4,$ то $R_4 < \dfrac{1}{16\cdot 120};\ R_4 < \dfrac{1}{1920},$

якщо $n = 5,$ то $R_5 < \dfrac{1}{32\cdot 722};\ R_5 < 0{,}0001.$

Для визначення $\sqrt{e}$ з точністю до 0,0001 отримуємо наближену рівність

$\sqrt{e} \approx 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2\cdot 2!} + \dfrac{1}{2^3\cdot 3!} + \dfrac{1}{2^4\cdot 4!} + \dfrac{1}{2^5\cdot 5!}.$ Провівши підсумування в результаті отримаємо $\sqrt{e} \approx 1{,}6487.$

Приклад 7. Знайти границі користуючись правилом Лопіталля-Бернуллі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$,

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xe^{x/2}}{x+e^x}$,

3. $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 Lnx)$,

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$,

5. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$,

6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{2\cos x}$,

7. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{Lnx}$.

Розв'язок:

1. Це невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Розглянемо границю відношення похідних заданих функцій: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$, оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$(правило Лопіталя застосували двічі).

2. У даному випадку невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$.

Знаходимо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{x/2}}{x+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x/2)e^{x/2}}{1+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/2e^{x/2}(2+x/2)}{e^x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{2+x/2}{e^{x/2}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1/2}{(1/2)e^{x/2}}=0.$$

3.Тут ми маємо невизначеність типу $0\cdot\infty$. представимо добуток функцій у вигляді частки, а потім, отримавши невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$ застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}(x^2 Lnx)=\lim_{x\to 0}\frac{Lnx}{1/x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-2/x^3},=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x^2=0.$$

4. Приходимо до невизначеності типу $\infty-\infty$. Для того щоб знайти границю функції потрібно звести дроби до одного знаменника, а потім отримавши невизначеність типу $\left(\frac{0}{0}\right)$ застосувати правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+x+e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=\frac{1}{2}.$$

5.Приходимо до невизначеності типу $\left(0^0\right)$ Позначимо дану функцію через $y=(\sin x)^x$ та про логарифмуємо її:

$$Lny=xLn\sin x=\frac{Ln\sin x}{1/x}.$$

Обчислимо границю логарифма даної функції застосувавши правило Лопіталя для невизначеності типу $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to 0} Lny = \lim_{x\to 0}\frac{Ln\sin x}{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x/\sin x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\sin x} = -\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}\right) = 0.$$

$$\lim_{x\to 0} Lny = 0 \Rightarrow \mathrm{Ln}\lim_{x\to 0} y = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} y = e^0 = 1.$$

Отже, $\lim_{x\to 0} y = e^0 = 1.$

6.Приходимо до невизначеності типу (∞^0) Нехай $y = (tgx)^{2\cos x}$ та про логарифмуємо: $Lny = 2\cos x\cdot Lntgx = \dfrac{2Lntgx}{1/\cos x}$.

Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} Lny = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{Lntgx}{\sec x} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x/tgx}{\sec xtgx} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x}{tg^2 x} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec xtgx}{2tgx\sec^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} Lny = 0 \Rightarrow \mathrm{Ln}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y = e^0 = 1.$$

Тобто $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y = e^0 = 1.$

7. Приходимо до невизначеності типу 1^∞. Логарифмуючи та застосувавши правило Лопіталя, отримаємо:

$$\lim_{x\to 0} Lny = \lim_{x\to 0}(LnxLn(1+x)) = \lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{1/Lnx} = \lim_{x\to 0}\frac{1/(1+x)}{-1/(xLn^2x)} = -\lim_{x\to 0}\frac{xLn^2x}{x+1} = -\lim_{x\to 0}\frac{Ln^2x}{1+1/x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{(2Lnx)/x}{-1/x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{Lnx}{1/x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0} Lny = 0 \Rightarrow \mathrm{Ln}\lim_{x\to 0} y = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} y = e^0 = 1.$$

Таким чином $\lim_{x\to 0} y = e^0 = 1.$

Індивідуальні завдання для поточного контролю

Завдання 1.

1. Показати, що для функції $y = \sqrt[3]{(x+1)^2}$ на відрізку [*-2;0*] не має застосування теорема Ролля, і пояснити чому.
2. Показати, що рівняння $x^3 - 12x + a = 0$ не може мати двох різних коренів на інтервалі *(-1;2)*.
3. Перевірити справедливість теореми Ролля для функції $y = e^{x^2-2x+2}$ на відрізку [0;2].

4. Довести, що рівняння $16x^4 - 64x + 31 = 0$ не може мати двох різних коренів на інтервалі (0;1).
5. Довести, що рівняння $e^{x-1} + x - 2 = 0$ має корінь $x = 1$ і не має інших дійсних коренів.
6. Довести, що всі три корені рівняння $f'(x) = 0$ дійсні. $f(x) = 2x(x-2)(x-4)(x-6)$.
7. Написати формулу Лагранжа для функції $y = Ln(x^2 + 1)$ на відрізку [$x_1; x_2$].
8. Написати формулу Лагранжа для функції $y = arctg\, x$ на відрізку [$x_0; x_0 + h$].
9. Перевірити справедливість теореми Лагранжа для функції $y = x^3 - 3x + 1$ на відрізку $[0;3]$.
10. Перевірити справедливість теореми Лагранжа для функції $y = Lnx$ на відрізку $[1;e]$.
11. На дузі параболи $y = x^2 - 2x + 3$, обмеженій точками *A(2;3)* і B(4;11), знайти точку, дотична в якій паралельна хорді *AB*.
12. Написати формулу Коші для функцій $f(x) = Ln(1 + x^2)$ і $\varphi(x) = Ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ на відрізку [*a;b*].
13. Написати формулу Коші для функцій $f(x) = e^{2x}$ і $\varphi(x) = e^x + 1$на відрізку [a;b].
14. Перевірити справедливість теореми Коші для функцій $f(x) = \sin x$ і $\varphi(x) = \cos x + 1$на відрізку $[0; \frac{\pi}{2}]$.
15. Написати формулу Коші для функцій $f(x) = \sin x$ і $\varphi(x) = Lnx$ на відрізку [*a;b*].
16. Написати формулу Коші для функцій $f(x) = x^3$ і $\varphi(x) = x^2 + 1$ на інтервалі [1;2].
17. Перевірити справедливість теореми Коші для функцій $f(x) = \sin x$ і $\varphi(x) = \cos x + x$ на відрізку $[0; \frac{\pi}{2}]$.
18. Перевірити справедливість теореми Ролля для функції $y = 4^{\sin x}$ на відрізку $[0; \pi]$.
19. Перевірити справедливість теореми Ролля для функції $y = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$ на відрізку [1;2].
20. Обчислити наближено значення $\sqrt[3]{121}$ з точністю до 10^{-6}.

21. Обчислити наближено значення $\sqrt[4]{83}$ з точністю до 10^{-6}.

22. Знайти на кривій $y = x^3$ точку, дотична в якій паралельна хорді, що з'єднує точки A(-1,-1) і B(2,8).

23. Обчислити наближено значення $\sqrt[7]{129}$ з точністю до 10^{-6}.

24. Обчислити наближено значення $\sin 36^0$ з точністю до 10^{-6}.

25. Обчислити наближено значення $\sqrt[3]{e}$ з точністю до 10^{-6}.

Завдання 2.

1-25. Користуючись правилом Лопіталля обчислити наступні границі:

1. $$\lim_{x \to \sqrt{k+1}} \frac{\ln\left(x^2 - k\right)}{2x^2 + \left(k - 2\sqrt{k+1}\right)x - k\sqrt{k+1}}$$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(3x^2 + (k+1)^x\right)^x$

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\arcsin[(k+2)/x]}{\ln(1 + (k+3)/x)}$

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\pi - 2arctg(x+k)}{\ln(1 + 1/(x+k))}$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{arctg[(k+1)/x]}{\sqrt{1 + (k+1)/x - 1}}$

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln\left(x + \sqrt{x^2 + k^2}\right)}{\sqrt{x^2 + k^2}}$

7. $\lim\limits_{x \to k} \dfrac{\ln(x-k)/(x+k)}{\ln\left(x^2 + k^2\right)}$

8. $\lim\limits_{x \to k} \left(arctg(x+k+1) - \dfrac{\pi}{4}\right)^{x+k}$

9. $\lim\limits_{x \to \infty} (kx + x + 1)^{1/\ln\left(x + \sqrt{x^2 + k^2}\right)}$

10. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + k^2} - x\right)^{1/\ln\left(\sqrt{x^2 + k^2} + x\right)}$

11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(k+3+x)^x - (k+3)^x}{x^2}$

12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos((k+5)x))}{\ln(\cos((k+2)x))}$

13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\sin((k+3)x))}{\ln(\sin((k+1)x))}$

14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\left(e^x + 1\right) - 2\left(e^x - 1\right)}{x^3}$

15. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(k+4)^x - (k+4)^{\sin x}}{x^3}$

16. $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{(k+2)^x - x\ln(k+2)}{(k+1)^x - x\ln(k+1)}\right)^{(x(k+3))^{-2}}$$

17. $\lim\limits_{x \to 0} (\arccos(kx))^{\ln\left(x + \sqrt{x^2 + k^2}\right) - \ln(k)}$

18. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2}{\pi} arctgx\right)^{\ln[(x-k)/(x+k)]}$

19. $\lim\limits_{x \to k} \left(\dfrac{\arcsin(x-k)}{x-k}\right)^{(x-k)}$

20. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(2 - \cos(x(k+3)))}{\ln(2 - \cos(x(k+2)))}$

21. $\lim\limits_{x \to k+1} \left(\dfrac{arctg(x-k-1)}{x-k-1}\right)^{(x-k-2)}$

22. $\lim\limits_{x \to 0} \left[1 + arctg^2(x+1)x\right]^{(1 - \cos(x(k+2)))}$

23. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + (k+3)^2}}{\ln\left(x + \sqrt{x^2 + (k+3)^2}\right)}$

24.

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos\left(x(k+4)\right)\right)^{\ln\left(x+\sqrt{x^2+(k+4)^2}\right)-\ln(k+4)}$$

25.

$$\lim_{x\to\infty}\left((k+2)^x+(k+1)x^2\right)^{\left((k+3)x\right)^{-1}}$$

Тема 5. Дослідження функції на монотонність, екстремум, знаходження найбільшого та найменшого значення, опуклість-угнутість

5.1. Зростання та спадання функції.

Означення 5.1. Функція $f(x)$ називається *зростаючою (спадною)* на відрізку $[a;b]$, якщо $f(x_2) > f(x_1)\ при\ a \le x_1 < x_2 \le b$ ($f(x_2) < f(x_1)\ при\ a \le x_1 < x_2 \le b$).

Достатня умова зростання (спадання) функції. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, і в середині його має додатню (від'ємну) похідну $f'(x)$, то функція $f(x)$ *зростає (спадає) на* $[a;b]$.

5.2. Екстремум функції.

Необхідна умова екстремуму.

Означення 5.2. Кажуть, що функція $f(x)$ має в точці x_0 екстремум (*максимум* чи *мінімум*), якщо функція визначена у двобічному околі точки x_0 і для всіх точок x деякої області: $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується відповідно нерівність $f(x) < f(x_0)$ чи $f(x) > f(x_0)$.

Означення 5.3. Якщо функція $f(x)$ в точці x_0 має екстремум, то похідна в цій точці дорівнює нулю або не існує.

Означення 5.4. Точка області визначення, в якій похідна дорівнює нулю або не існує називається критичною (стаціонарною).

Достатні умови екстремуму.

Означення 5.5.1. Якщо :

1) функція $f(x)$ визначена і неперервна в деякому околі $0 < |x - x_0| < \delta$ точки x_0, такої, що $f'(x_0) = 0$ або не існує (критична точка);
2) $f(x)$ має скінчену похідну $f'(x)$ в області $0 < |x - x_0| < \delta$;
3) похідна $f'(x)$ зберігає визначений знак зліва від x_0 та справа від x_0, то поведінка функції $f(x)$ характеризується наступною таблицею:

	Знак похідної		Висновок
	$x < x_0$	$x > x_0$	
1.	+	+	екстремума немає
2.	+	-	максимум
3.	-	+	мінімум
4.	-	-	екстремума немає

Означення 5.5.2. Якщо функція $f(x)$ має другу похідну $f''(x)$ і в деякій точці x_0 виконуються умови $f'(x_0)=0$ та $f''(x_0)\neq 0$, то в цій точці функція $f(x)$ має *екстремум,* а саме: *максимум,* коли $f''(x_0)<0$, та *мінімум,* коли $f''(x_0)>0$.

Означення 5.5.3. Нехай функція $f(x)$ має в деякому інтервалі $|x-x_0|<\delta$ похідні $f'(x),\ldots,f^{n-1}(x)$ і в точці x_0 похідну $f^{(n)}(x_0)$, причому

$f^{(\kappa)}(x_0)=0$ ($\kappa=1,\ldots,n$-1), $f^{(n)}(x_0)\neq 0$.

В такому випадку: 1) якщо n – парне число, то в точці x_0 функція $f(x)$ має *екстремум,* а саме: *максимум* при $f^{(n)}(x_0)<0$ і *мінімум* при $f^{(n)}(x_0)>0$; 2) якщо n – непарне число, то в точці x_0 функція $f(x)$ *екстремума* не має.

Абсолютний екстремум. Найбільше (найменше) значення на відрізку $[a;b]$ неперервною функцією $f(x)$ досягається або в критичних точках цієї функції (тобто в точках де похідна або рівна нулю або не існує), або ж в граничних точках a і b даного відрізка.

5.3. Інтервали опуклості та вгнутості графіка функції.

Достатні умови опуклості та вгнутості.

Означення 5.6. Графік диференційовної функції $y=f(x)$ називається *опуклим (вгнутим)* на відрізку $[a;b]$, якщо ділянка кривої $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$ розташована над (під) дотичною, проведеною в будь-якій точці цього відрізка.

Достатньою умовою опуклості, вгнутості графіка за припущенням існування другої похідної $f''(x)$, є виконання нерівності $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) для $x \in (a;b)$.

Достатня умова точки перегину.

Означення 5.6. Точки області визначення функції в яких змінюється напрямок вгнутості графіка функції називаються *точками перегину.*

Точка x_0 області визначення функції, для якої $f''(x_0) = 0$ або $f''(x_0)$ не існує, є *точкою перегину* за умови, що $f''(x)$ змінює свій знак при переході через значення x_0.

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Знайти інтервали зростання та спадання функцій:

а) $y = Ln(1 - x^2)$,

б) $y = Ln|x|$.

Розв'язок: а) Знайдемо похідну $y' = -\dfrac{2x}{1 - x^2}$. Оскільки $f'(x) = y' > 0$ при $-1 < x < 0$ і $x > 1$ та $f'(x) = y' < 0$ при $0 < x < 1$ і при $x < -1$, а також врахувавши область визначення функції ($-1 < x < 1$) робимо висновок, що на інтервалі (-1;0) функція зростає, а на інтервалі (0;1) – спадає.

б) Функція визначена на всій числовій осі крім точки $x = 0$; її похідна $y' = \dfrac{|x|'}{|x|} = \pm\dfrac{1}{|x|} = \dfrac{1}{x}$; $y' > 0$ при $x > 0$; $y' < 0$ при $x < 0$. Звідси випливає, що функція спадає на інтервалі $(-\infty;0)$ та зростає на інтервалі $(0;+\infty)$.

Приклад 2. Дослідити на максимум та мінімум функцію $y = 1 + |arctg(x - 1)|$.

Розв'язок: Знайдемо критичні точки: $y' = \pm\dfrac{1}{1 + (x-1)^2}$, де знак плюс відповідає інтервалу $1 < x < +\infty$, а знак мінус – інтервалу $-\infty < x < 1$. Похідна y' в жодній точці не перетворюється в нуль чи не існує крім точки $x = 1$. Ця точка є критичною. Дослідимо критичну точку $x = 1$ по знаку похідної зліва та справа від точки. Дані внесемо до таблиці.

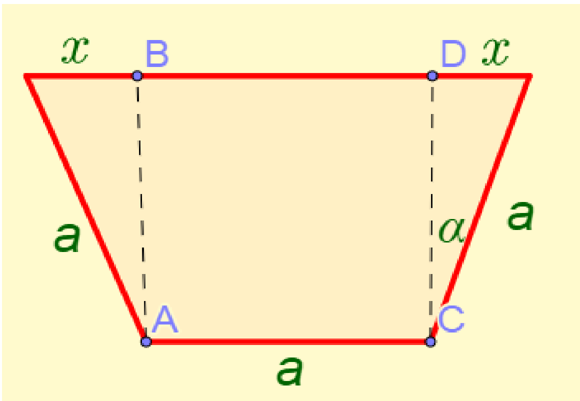
x	0	1	2
y'	-	не існує	+
y	спадає	y_{min}	зростає

З таблиці видно, що точка $x=1$ є точкою мінімуму, а $y_{\min}=y(1)=1$.

Приклад 3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=2\sin x+\sin 2x$ на відрізку $\left[0;\frac{3}{2}\pi\right]$.

Розв'язок: Знайдемо критичні точки: $y'=2\cos x+2\cos 2x=2\cdot 2\cos\frac{3}{2}x\cos\frac{1}{2}x$; $y'=0$ при $\cos\frac{3x}{2}=0$ та $\cos\frac{x}{2}=0$; корені першого рівняння $x_k=\frac{\pi}{3}(2k+1), \kappa\in Z$, корені другого рівняння $x_n=\pi(2n+1)$, де $n\in Z$. З них відрізку $\left[0;\frac{3}{2}\pi\right]$ належать критичні точки $x_1=\frac{\pi}{3}$ і $x_2=\pi$. Похідна y' існує всюди, тому інших критичних точок функція не має. Значення функції в знайдених внутрішніх критичних точках: $y(\frac{\pi}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$; $y(\pi)=0$. Обчислимо значення функції на кінцях відрізка: $y(0)=0$; $y(\frac{3\pi}{2})=-2$. Порівнюємо знайдені значення функції. Отже, найбільше значення функції $\max\limits_{\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]} y=y(\frac{\pi}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, а найменше значення $\min\limits_{\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]} y=y(\frac{3\pi}{2})=-2$.

Приклад 4. Складіть із трьох однаково тонких досок жолоб з найбільшим поперечним перерізом.



Розв'язок: Поперечний переріз жолоба має форму рівнобічної трапеції (див. рис.), площа якої залежить від нахилу бічних сторін. Виберемо за незалежну змінну кут α між бічною стороною та висотою трапеції та виразимо через дану зміну шукану площу S:

$x=a\sin\alpha,\ h=a\cos\alpha,\ S=h(a+x)$

або ж

$S = a^2(1+\sin\alpha)\cos\alpha$, де по змісту задачі α змінюється на відрізку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Далі знайдемо найбільше значення функції $S(\alpha)$ на відрізку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Знайдемо критичні точки функції S, що лежать всередині цього відрізка:

$$S' = a^2\left[\cos^2\alpha - (1+\sin^2\alpha)\sin^2\alpha\right] = a^2(1-\sin\alpha - 2\sin^2\alpha).$$

Прирівнявши похідну до нуля, отримаємо рівняння: $\sin\alpha + 2\sin^2\alpha - 1 = 0$, розв'язавши яке, як квадратне відносно α, знайдемо $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\alpha = -1$. З усіх точок α, що визначаються цими рівняннями, всередині відрізка $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ лежить тільки одна точка $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Ця точка є критичною.

Похідна S' існує всюди тому інших критичних точок немає. Обчислимо значення функції S в знайденій критичній точці та на кінцях відрізка $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$S(\frac{\pi}{6}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 \approx 1{,}28a^2,\ S(0) = a^2,\ S(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

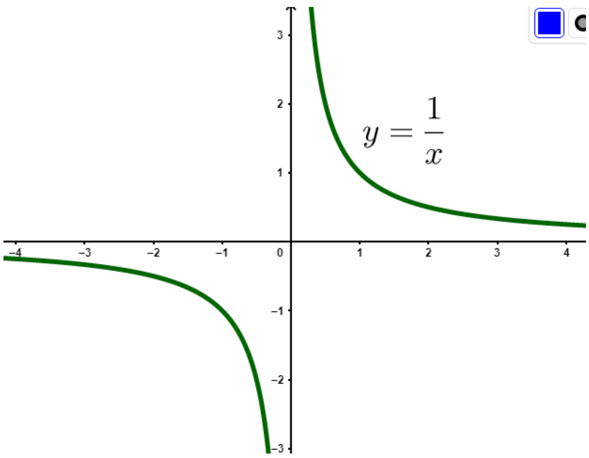
Порівнявши ці значення робимо висновок, що: найбільше значення функції S на відрізку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ досягається в точці $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Таким чином, жолоб з трьох однаково тонких досок буде мати найбільший поперечний переріз тоді, коли цей переріз представлятиме собою рівнобічну трапецію, верхня основа якої вдвічі більша від нижньої.

Приклад 5. Знайти інтервали опуклості та вгнутості графіка функції $y = \frac{1}{(x+1)^3}$.

Розв'язок: Знаходимо похідну першого та другого порядків: $y' = \frac{-3}{(x+1)^4}$, $y'' = \frac{12}{(x+1)^5}$. Тут y'' не може дорівнювати нулю, а при $x = -1$ вона не існує. Але $x = -1$ не може бути абсцисою точки перегину, оскільки в $x = -1$ функція має розрив. При $x < -1$, $y'' < 0$; $x > -1$, $y'' > 0$. Тому в інтервалі $(-\infty, -1)$ крива опукла, а в інтервалі

$(-1,+\infty)$ вона угнута. *Не маючи точок перегину крива змінює напрямок опуклості при переході через точку розриву* $x=-1$.

Приклад 6. Знайти точки перегину та інтервали опуклості і вгнутості графіка функції $y=\dfrac{1}{x}$.



Розв'язок: знайдемо похідні першого та другого порядку

$y'=-\dfrac{1}{x^2}, y''=\dfrac{2}{x^2}$.

$\dfrac{2}{x^3}=0,\ x\neq 0$.

$x\in(-\infty;0)$ - графік опуклий.

$x\in(0;+\infty)$ - графік вгнутий.

$x=0$ не є точкою перегину, оскільки $x=0\ \notin D\ (y)$.

Індивідуальні завдання для поточного контролю

Завдання 1. 1-25. Дослідити функцію на екстремум:

1. $Y=\dfrac{Ln^2 x}{x}$.
2. $Y=x+\sin x$.
3. $Y=\cos x+1/2\cos 2x$
4. $Y=\sin x-x+\dfrac{x^3}{3}$.
5. $Y=\dfrac{1}{1+\sin^2 x}$.
6. $Y=\sin x-\dfrac{2}{\sin x}$.
7. $Y=tgx-\sin x$.
8. $Y=x^2e^{-x^2}$.
9. $Y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$.
10. $Y=\dfrac{5-x^2}{x+3}$.
11. $Y=x+2arcctgx$.
12. $Y=x-arctg2x$.
13. $Y=arctg(x^2-1)$.
14. $Y=arctg(\cos x)$.
15. $Y=x-\arcsin x$.
16. $Y=|x|\sqrt[3]{x-1}$.
17. $Y=4\sin\dfrac{x}{2}+\sin x$.
18. $Y=\cos x+4\sin\dfrac{x}{2}$.
19. $Y=\cos x\sin^2 x$.
20. $Y=\cos 3x-3\cos x$.
21. $Y=\left(x+1^4\right)+e^x$.
22. $Y=x^4-12x^3+48x^2-50$
23. $Y=x+36x^2-2x^3-x^4$
24. $Y=3x^5-5x^4+3x-2$.
25. $Y=Ln(1+x^2)$.

Завдання 2.

1-25. Розв'язати задачі на відшукання найбільшого та найменшого значень:

1. Дано кулю радіусом 10. Знайти радіус основи і довжину твірної вписаного циліндра, який має найбільшу площу бічної поверхні.
2. Який радіус основи R і висота H відкритого циліндричного боку даного об'єму V, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість листового метала.
3. Переріз тунелю має форму прямокутника, закінченого зверху півкругом. Периметр перерізу 18м. При якому радіусі півкруга площа перерізу буде найбільшою.
4. Знайти сторони прямокутника найбільшої площі, яку можна вписати в еліпс $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.
5. В скільки раз об'єм кулі більший об'єму найбільшого циліндра, вписаного в цю кулю?
6. Периметр прямокутної трапеції з гострим кутом 45^0 дорівнює 4м. Визначити висоту трапеції, при якій площа трапеції буде найбільшою.
7. Знайти найбільший об'єм циліндра, повна поверхня якого дорівнює S.
8. Знайти найбільший об'єм конуса, твірна якого дорівнює l
9. Із усіх циліндрів, вписаних в кулю радіусом R, визначити такий, об'єм якого найбільший.
10. В конус радіусом 4дм. і висотою 6дм. вписано циліндр найбільшого об'єму. Знайти цей об'єм.
11. Визначити розмір відкритого басейну з квадратним дном об'ємом 32м^3 так, щоб на облицювання його стін і дна пішла найменша кількість матеріалу.
12. Сума двох позитивних чисел рівна a. Які це числа, якщо сума їх кубів буде найменша?
13. Сума діагоналей паралелограма дорівнює 8. Визначити найменшу суму квадратів всіх сторін паралелограма.
14. В рівнобедреній трапеції нижня основа дорівнює l, кут при основі — α. Діагональ трапеції перпендикулярна бічній стороні. При якому значенні α площа трапеції буде найбільша. Знайти цю площу.
15. Серед усіх рівнобедрених трикутників, описаних навколо заданого кола, знайти той, який має найбільшу площу.

16. Два коридори шириною 2,4м і 1,6м перетинаються під прямим кутом. Визначити найбільшу довжину сходів, яку можна перенести горизонтально з одного коридору в інший.
17. Сума 2-х сторін трикутника дорівнює а, а кут між ними 30^0. Які повинні бути ці сторони, щоб площа трикутника була найбільшою.
18. Знайти кут при вершині рівнобедреного трикутника найбільшої площі, вписаного в коло радіуса R.
19. На параболі $y=x^2$ знайти точку найменш віддалену від прямої $y=2x-4$.
20. Із всіх прямокутників, вписаних в коло радіуса R, знайти той, який має найбільшу площу.
21. В півкруг вписано трапецію, основою якої є діаметр півкруга. Визначити кут трапеції при основі так, щоб площа трапеції була найбільша.
22. В кулю, радіусом R, вписано конус. Визначити радіус основи конуса, площа бічної поверхні якого найбільша.
23. Знайти кути прямокутника, у якого відношення радіуса вписаного кола до радіуса описаного найбільше.
24. Які радіус основи R і висота H відкритого циліндричного боку даного об'єму V, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість листового металу?
25. Переріз тунелю має форму прямокутника, закінченого зверху півкругом. Периметр перерізу 18м. При якому радіусі півкруга площа перерізу буде найбільшою.

Тема 6. Асимптоти графіка функцій. Повне дослідження функції та побудова графіка

Асимптоти графіка функції.

При дослідженні характеру поведінки функції вагоме значення мають дослідження поведінки функції $f(x)$ при необмеженому зростанні (за абсолютною величиною) аргументу x, а також дослідження випадків необмеженого зростання абсолютної величини значень функції $y=f(x)$ у скінченних точках області визначення функції.

Наприклад, для функції $y=\frac{k}{x}$, такими точками є $y=0$, $x=0$ (рис. 13).

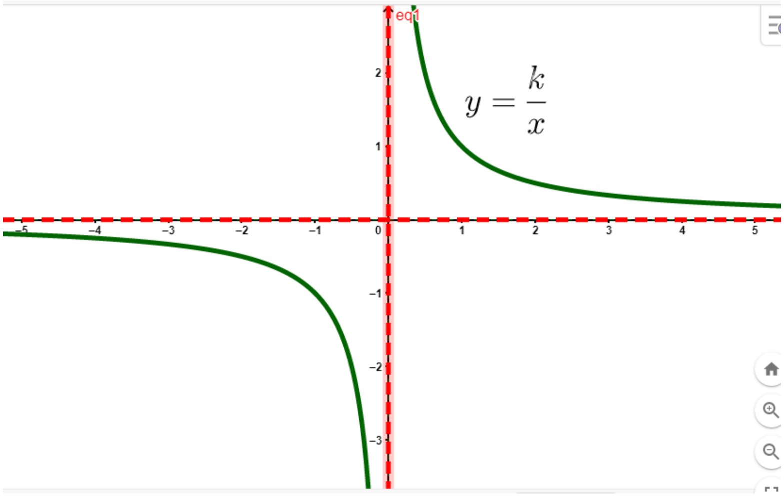


Рис. 13.

функція *y=tgx* такими точкаим є *x=π/2+πn* (рис. 14).

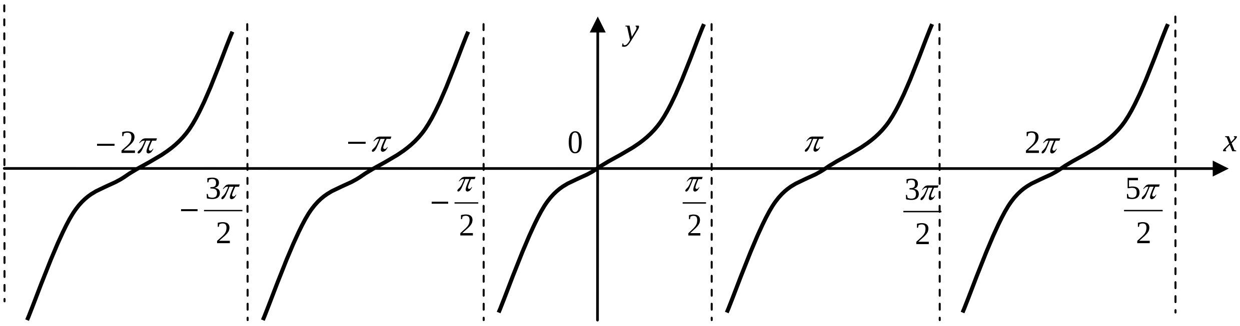


Рис. 14.

Геометрично ці дослідження приводять до поняття **асимптоти** графіка функції.

Означення 6.1. Пряма $y = kx + b$ називається асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо відстань від точки $P(x, f(x))$, яка лежить на кривій, до цієї прямої прямує до нуля при $x \to \pm\infty$ $(x \to x_0)$.

Відрізняють *горизонтальну, вертикальну і похилу* асимптоти.

а) Крива $y = f(x)$ має горизонтальну асимптоту $y = b$, якщо існує скінчена границя функції при $x \to \pm\infty$ і ця границя дорівнює b, тобто $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$, чи $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, чи $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$.

б) Крива $y = f(x)$ має вертикальну асимптоту $x = a$, якщо при $x \to a$, $x \to a(-0)$, $x \to a(+0)$, $f(x) \to \infty$ $(f(x) \to -\infty)$.

Тобто $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, чи $\lim\limits_{x\to a_{+0}} f(x) = \infty$, чи $\lim\limits_{x\to a_{-0}} f(x) = \infty$

Для відшукування вертикальних асимптот необхідно зайти значення аргументу, при наближенні до яких $f(x)$ нескінченно зростає за абсолютною величиною. Якщо такими значеннями аргументу виявляться $a_1, a_2, ..., a_n$, то рівняння вертикальних асимптот будуть мати вигляд $x = a_1, x = a_2, ..., x = a_n$ (як привило вертикальні асимптоти визначають точки розриву другого роду).

в) Крива $y = f(x)$ має похилу асимптоту $y = kx + b$ тоді і тільки тоді, коли існують скінченні границі:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k; \ \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = b.$$

Потрібно окремо розглядати випадки $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$. Похила асимптота <u>права</u>, якщо крива наближається до неї при $x \to +\infty$; <u>ліва</u> – якщо крива наближається до неї при $x \to -\infty$; <u>двобічна</u> – якщо крива наближається до неї як при $x \to +\infty$ так і при $x \to -\infty$.

Замітимо, що асимптота може перетинатись з самою кривою (рис. 15).

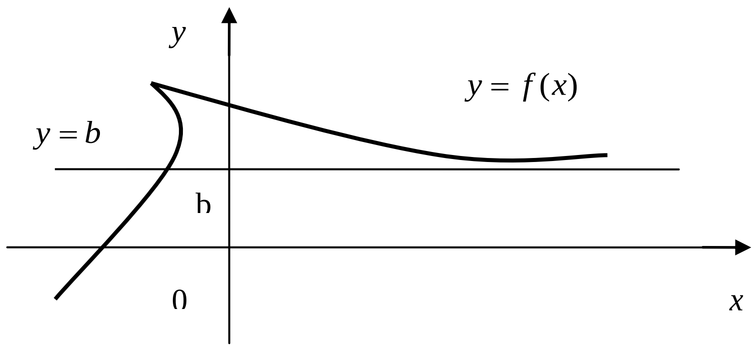


Рис. 15.

Наприклад, розглянемо функцію $y = \dfrac{5}{x}$.

а) дослідження на горизонтальну асимптоту:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x} = 0_{+0}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x} = 0_{-0}$$

Отже, $y = 0$ - горизонтальна асимптота.

б) дослідження на вертикальну асимптоту.

$x = 0$ - точка розриву функції:

$$\lim_{x\to 0_{-0}} f(x) = \lim_{x\to 0_{-0}} \frac{5}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0_{+0}} f(x) = \lim_{x\to 0_{+0}} \frac{5}{x} = +\infty$$

Отже, $x = 0$ - вертикальна асимптота.

в) дослідження на похилу асимптоту: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{x^2} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - k(x)] = \lim_{x\to\infty} [5x - 0\cdot x] = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{x} = 0$$

$y = 0\cdot x + 0 \Rightarrow y = 0$ - маємо горизонтальну асимптоту (рис. 16).

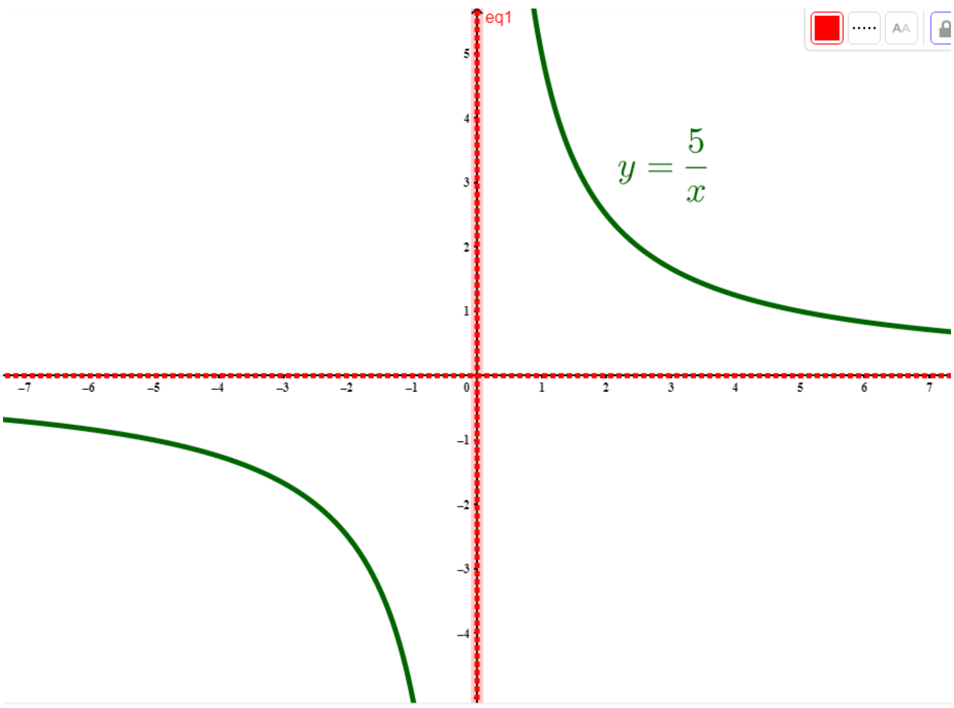


Рис. 16.

*Схема дослідження функції і побудова її графіка***.** Дослідження функції за допомогою похідних і побудова їх графіків проводять за такою схемою:

1) Знаходять область визначення. Встановлюють при цьому точки розриву.

2) Досліджують функцію на парність (непарність) (перевіряють умови: $f(-x) = f(x)$; $f(-x) = -f(x)$).

3) Досліджують функцію на періодичність $f(x)=f(x+T)$ - притаманне в більшості випадків до тригонометричних функцій.

4) Визначають точки перетину кривої з вісями координат, інтервали знакосталості.

5) Знаходять точки екстремуму функції і обчислюють значення функції в цих точках. Встановлюють інтервали монотонності.

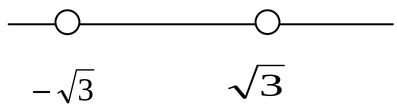
6) Знаходять точки перегину графіка функції і досліджують графік на опуклість (вгнутість).

7) Знаходять асимптоти графіка функції.

8) Будують графік функції.

Наприклад, дослідити функцію: $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$ і побудувати її графік в декартовій системі координат.

1) область визначення $(D(f))$:



$3-x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{3}$

$D(f):\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};+\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$

Очевидно, $x=\pm\sqrt{3}$ - точки розриву.

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to-\sqrt{3}-0} y &= \lim_{x\to-\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2}=+\infty\\ \lim_{x\to-\sqrt{3}+0} y &= \lim_{x\to-\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2}=-\infty\end{aligned}\right] \text{- } x=-\sqrt{3} \text{ - точка розриву II роду.}$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to\sqrt{3}-0} y &= \lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2}=+\infty\\ \lim_{x\to\sqrt{3}+0} y &= \lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2}=-\infty\end{aligned}\right] \text{- } x=+\sqrt{3} \text{ - точка розриву II роду.}$$

2) досліджуємо функцію на парність (непарність)

$f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{3-\left(-x^2\right)}=\dfrac{-x^3}{3-x^2}=-f(x)$ - функція непарна.

$f(-x)=-f(x)$.

Отже, графік симетричний відносно початку координат.

3) Визначаємо точки перетину графіку функції з вісями координат:

а) з вісю OX: $y=0$

$$\frac{x^3}{3-x^2}=0 \Rightarrow x=0, \qquad x\neq \pm\sqrt{3}.$$

Отже, $A(0{,}0)$ - точка перетину з вісю OX.

б) з вісю OY: $x=0$

$$y=\frac{0^3}{3-0^3}=\frac{0}{3}=0.$$

Отже, $A(0{,}0)$ - точка перетину з вісю OY.

4) досліджуємо функцію на знакосталість $\left(\frac{x^3}{3-x^2}>0, x^3\left(3-x^2\right)>0,\right)$.

Точки $x=0$, $x=+\sqrt{3}, x=-\sqrt{3}$ розбивають область визначення на інтервали де функція зберігає знак.

Розв'язуємо нерівність:

$$f(-2)=\frac{-2^3}{3-(-2)^2}=\frac{-8}{-1}=8>0$$

$$f(-1)=\frac{-1^3}{3-(-1)^2}=-\frac{1}{2}<0$$

$$f(1)=\frac{1^3}{3-1^2}=\frac{1}{2}>0$$

$$f(2)=\frac{2^3}{3-2^2}=\frac{8}{-1}=-8<0$$

$$\frac{x^3}{3-x^2}>0$$

$$x^3\left(3x^2\right)>0$$

$$x^3\left(x^2-3\right)<0$$

$$x^3\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)<0$$

5) знаходимо точки екстремуму функції і інтервали монотонності:

Знаходимо $f'(x)$:

$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)^{/}=\frac{3x^2\left(3-x^2\right)-x^3\cdot(-2x)}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{9x^2-3x^4+2x^4}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{9x^2-x^4}{\left(3-x^2\right)^2}$$

Знаходимо критичні точки $f'(x)=0$ і точки з області визначення, де похідна не існує $\frac{9x^2-x^4}{\left(3-x^2\right)^2}=0 \Rightarrow \frac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}=0$, $\underbrace{x=0, x=-3, x=3}_{f'(x)=0}$ - критичні точки

У точках $x=\pm\sqrt{3}$ похідна не існує, але ці точки не є критичними, оскільки в цих точках функція невизначена

Знаходимо похідну другого порядку

$$f''(x)=\left[\frac{9x^2-x^4}{\left(3-x^2\right)^2}\right]^{/}=\frac{\left(9x^2-x^4\right)^{/}\left(3-x^2\right)^2-\left(9x^2-x^4\right)\cdot 2\left(3-x^2\right)\cdot(-2x)}{\left(3-x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{\left(18x-4x^3\right)\left(9-6x^2+x^4\right)+\left(9x^2-x^4\right)\left(12x-4x^3\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{162x-108x^3+18x^5-36x^3+24x^5-4x^7+108x^3-36x^5-12x^5+4x^7}{\left(3-x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{-6x^5+162x-36x^3}{\left(3-x^2\right)^4}$$

$f''(0)=0$

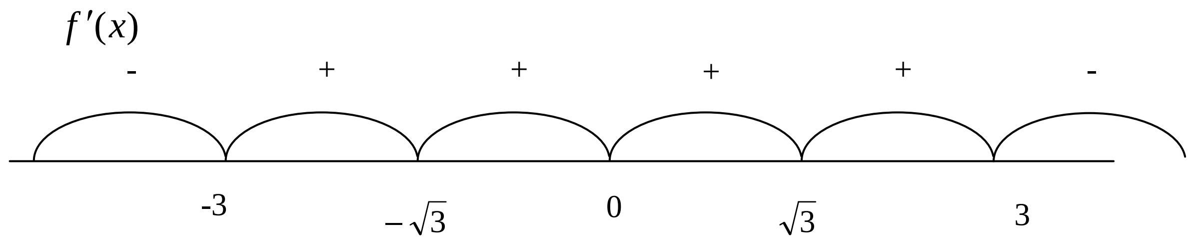
$f''(-3)>0$ $\quad(x=-3)$ - т. min $\quad f(-3)=\dfrac{-3^3}{3-(-3)^2}=\dfrac{-27}{-6}=4.5$

$f''(3)<0$ $\quad(x=3)$ - т. max $\quad f(-3)=-f(3)\Rightarrow f(3)=-f(-3)=-4.5$

$f''\left(\pm\sqrt{3}\right)$- *неіснує*

$M_1(-3;4.5);M_2(3;-4.5)$

Розглянемо, як поводить себе похідна $f'(x)=\dfrac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}$ функції при переході через точки $x=0, x=\pm\sqrt{3}, x=\pm 3$.



У точці $x=0$ функція не має екстремуму. У точках $x=\pm 3$ функція не може мати екстремуму, оскільки ці точки не входять до області визначення функції. Функція **зростає** на інтервалі $\left(-3;-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};3\right)$. Функція **спадає** на інтервалі $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$.

6) знаходимо точки перегину і досліджуємо функцію на опуклість і вгнутість. Прирівнюємо $f''(x)$ до нуля:

$$f''(x)=\frac{-6x^5+162x-36x^3}{\left(3-x^2\right)^4}=0$$

$-6x^5+162x-36x^3=0$ $\qquad\qquad \left(3-x^2\right)^4\neq 0$

$-6x\left(x^4-27+6x^2\right)=0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad x\neq\pm\sqrt{3}$

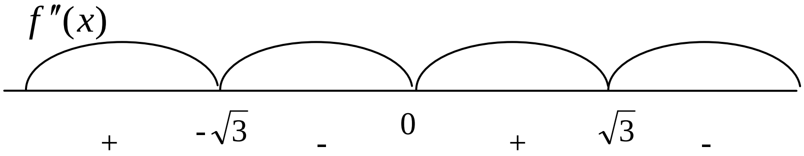
$x=0 \quad$ і $\quad x^4+6x^2-27=0$

$D=36-4\cdot(-27)=144$

$x_1^2=\dfrac{-6+12}{2}=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$ - в цих точках $f''(x)$ - не існує і ці точки не належать області визначення,

$x_2^2=\dfrac{-6-12}{2}=9$ - не має змісту ($x^2\geq 0$).

Знаходимо знак $f''(x)$ при переході через точку x_0, $x=\pm\sqrt{3}$ (точки, де друга похідна дорівнює нулю, або не існує).



Таким чином, маємо одну точку перегину: точки $x=-\sqrt{3}$ і $x=\sqrt{3}$ не можуть бути точками перегину, оскільки в цих точках функція невизначена.

$\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ - крива вгнута; $\left(-\sqrt{3};0\right)$ - крива опукла; $\left(0;\sqrt{3}\right)$ - крива вгнута; $\left(\sqrt{3};\infty\right)$ - крива опукла

$x=\pm\sqrt{3}$ - є точки розриву функції. Поведінку функції в цих точках необхідно дослідити додатково;

7) знаходимо асимптоти графіка функції:

а) вертикальна асимптота

$$\lim_{x\to\sqrt{3}_{\pm 0}} f(x)=\lim_{x\to\sqrt{3}_{\pm 0}}\frac{x^3}{3-x^2}=\infty \qquad \lim_{x\to\sqrt{3}_{+0}} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to\sqrt{3}_{-0}} f(x)=+\infty$$

Отже, $x=\sqrt{3}$ - вертикальна асимптота

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}} f(x)=\lim_{x\to-\sqrt{3}}\frac{x^3}{3-x^2}=\infty \qquad \lim_{x\to-\sqrt{3}_{+0}} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to-\sqrt{3}_{-0}} f(x)=+\infty$$

Отже, $x=-\sqrt{3}$ - вертикальна асимптота

б) горизонтальна асимптота

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{3-x^2}=\infty$ $\qquad$ Отже, горизонтальної асимптоти немає.

в) похила асимптота

$y=kx+b$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{\left(3-x^2\right)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3-x^2}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-x^3}{3-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{3-x^2}=0.$$

Отже, $y=-x$ - похила асимптота.

Результати дослідження зведемо у таблицю

	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3};0)$	0	$(0;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};3)$	3	$(3;+\infty)$
$f(x)$	+	4,5	+	не існ.	-	0	+	не існ.	-	4,5	-
$f'(x)$	-	0	+	не існ.	+	0	+	не існ.	+	0	-
$f''(x)$	+	>0	+	не існ.	-	0	+	не існ.	-	<0	-
екстрем.		min								max	
т. перег.	вгнута				опукла	т. перег.	вгнута		опукла		

За результатами дослідження будуємо графік функції (рис. 17).

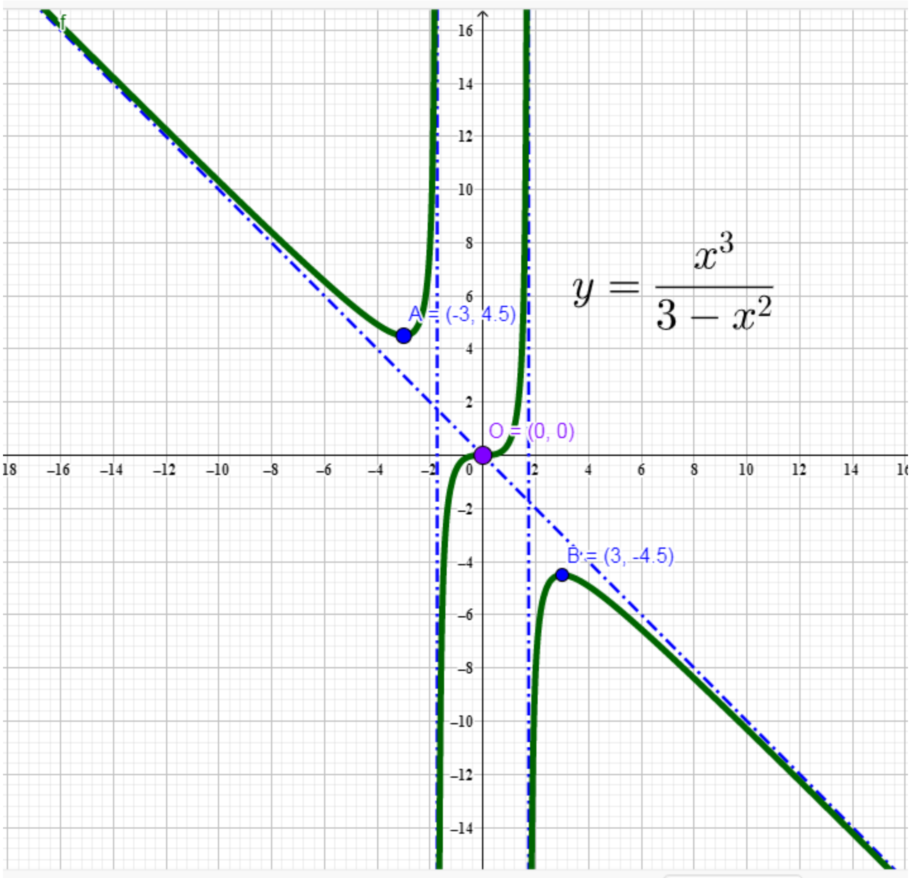


Рис. 17.

Індивідуальні завдання для поточного контролю

Завдання 1. 1-25. Знайти асимптоти функцій.

1. $y = 2 + Ln\dfrac{x+1}{x-2}.$
2. $y = \sqrt{2+x^2}\sin\dfrac{2}{x}.$
3. $y = xe^{\frac{2}{x^2}} + 2.$
4. $y = 2xLn(e - \dfrac{1}{2x}).$
5. $y^3 = 1 + 2x - x^3.$
6. $y = 2x + \dfrac{\sin 2x}{x}.$
7. $y = xarctg\,2x.$
8. $y = x + 1 + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}.$
9. $y = xsh\dfrac{1}{x}.$
10. $y = th3x.$
11. $y = cth3x.$
12. $y = 3\sqrt{x^2+1}.$
13. $y = \dfrac{2x^3}{x^2 - 2x - 3}.$
14. $y = \sqrt[3]{x^6 + 3x^2 - 1}.$
15. $y = \dfrac{x^3+1}{x+2}.$
16. $y = \dfrac{x^2+2}{x+1}.$
17. $y = \dfrac{2x^2+3}{x^2+5}.$
18. $y = \dfrac{2x}{x+2}.$
19. $y = x + \dfrac{1}{x}.$
20. $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}.$
21. $y = e^{-x^2}.$
22. $y = \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{(x+1)^2}.$
23. $y = e^{\frac{1}{x}}.$
24. $y = 2x + arctg\dfrac{x}{2}.$
25. $y = \dfrac{2}{x^2 - 2x + 3}.$

Завдання 2. 1-25. Провести повне дослідження функцій та побудувати графік:

1. $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}.$
2. $y = \left(x^2-1\right)^3.$
3. $y = 32x^2\left(x^2-1\right)^3.$
4. $y = \dfrac{1}{x} + 4x^2.$
5. $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}.$
6. $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}.$
7. $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}.$
8. $y = \dfrac{x^3}{2\left(x+1^3\right)}.$
9. $y(x-1) = x^3.$
10. $y\left(x^3-1\right) = x^4.$
11. $xy = \left(x^2-1\right)(x-2).$
12. $(y-x)x^4 + 8 = 0.$
13. $y = \dfrac{x}{e^x}.$
14. $y = x^2e^{-x}.$
15. $y = \dfrac{e^x}{x}.$
16. $y = x - Ln(x+1).$
17. $y = Ln\left(x^2+1\right).$
18. $y = x^2e^{-x}.$
19. $y = x^3e^{-x}.$
20. $y = xe^{-\frac{-x^2}{2}}.$
21. $y = \dfrac{1}{e^x - 1}.$
22. $y = x + \dfrac{\ln x}{x}.$
23. $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x.$
24. $y = x + \sin x.$
25. $y = x\sin x.$

Завдання 3. 1-25. Дослідити функції і побудувати їх графіки:

1. $y=(x^3+4)/x^2$
2. $y=(x^2-x+1)/(x-1)$
3. $y=2/(x^2+2x)$.
4. $y=4x^2/(3+x^2)$.
5. $y=12x/(9+x^2)$.
6. $y=(x^2-3x+3)/(x-1)$.
7. $y=(4-x^3)/x^2$.
8. $y=(x^2-4x+1)/(x-4)$.
9. $y=(2x^3+1)/x^2$.
10. $y=(x-1)^2/x^2$.
11. $y=x^2/(x-1)^2$.
12. $y=(1+1/x)^2$.
13. $y=(12-3x^2)/(x^2+12)$.
14. $y=(9+6x-3x^2)/(x^2-2x+13)$
15. $y=-8x(x^2+4)$.
16. $y=((x-1)/(x+1))^2$.
17. $y=(3x^4+1)/x^3$.
18. $y=4x/(x+1)^2$.
19. $y=8(x-1)/(x+1)^2$.
20. $y=(1-2x^3)/x^2$.
21. $y=4/(x^2+2x-3)$.
22. $y=4/(3+2x-x^2)$.
23. $y=(x^2+2x-7)/(x^2+2x-3)$ 24.
$y=1/(x^4-1)$.
25. $y=-(x/(x+2))^2$.

Завдання 4. 1-25. Дослідити функцію і побудувати їх графіки:

1. $y=\sqrt[3]{(2-x)(x^2-4x+1)}$.
2. $y=-\sqrt[3]{(x+3)(x^2+6x+6)}$.
3. $y=\sqrt[3]{(x+2)(x^2+4x+1)}$.
4. $y=\sqrt[3]{(x+1)(x^2+2x-2)}$.
5. $y=\sqrt[3]{(x-1)(x^2-2x-2)}$.
6. $y=\sqrt[3]{(x-3)(x^2-6x+6)}$.
7. $y=\sqrt[3]{(x^2-4x+3)^2}$.
8. $y=\sqrt[3]{x^2(x+3)^2}$.
9. $y=\sqrt[3]{x^2(x-2)^2}$.
10. $y=\sqrt[3]{(x^2-2x-3)^2}$.
11. $y=\sqrt[3]{x^2(x+4)^2}$.
12. $y=\sqrt[3]{x^2(x-4)^2}$.
13. $y=\sqrt[3]{(x+3)x^2}$.
14. $y=\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}$.
15. $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{x^2}$.
16. $y=\sqrt[3]{(x+6)x^2}$.
17. $y=\sqrt[3]{(x-4)(x+2)^2}$.
18. $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{(x-2)^2}$.
19. $y=\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$.
20. $y=\sqrt[3]{(x-3)x^2}$.
21. $y=\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{(x-3)^2}$.
22. $y=\sqrt[3]{(x+2)(x-4)^2}$.
23. $y=\sqrt[3]{(x-6)x^2}$.
24. $y=\sqrt[3]{(2-x)(x^2-4x+1)}$.
25. $y=-\sqrt[3]{(x+3)(x^2+6x+6)}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ №2

Варіант № 1.

1. Знайти $y'(x)$: $\arcsin\frac{x}{2y} - x^2 y = 36$.

2. Знайти $y'(x)$ для функці заданої параметрично $\begin{cases} x = 10\sin 3t \\ y = 3\cos 3t \end{cases}$.

3. Знайти похідну *n*-го порядку $y = \sqrt[3]{x}$.

4. Знайти похідну скла денної функції $y=tg^2(sin\frac{9}{2}xcos2x)$.

5. Знайти диференціал функції $F(x)=arcsinx^3$.

6. Обчислити наближено $\ln 0{,}98$.

7. Знайти наближене значення функції $y=x^3(4x^2+5x+3)$ у точці x=0,3.

8. Визначити границю, використовуючи правило Лопіталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^x - 8^x}{tg6x}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 6x}$. 3) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 + x}$.

Варіант № 2.

1. Знайти $y'(x)$: $arctg\,\frac{x}{2+y} = e^{2y}$.

2. Знайти $y'(x)$ для функції заданої параметрично $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\sin t \end{cases}$.

3. Знайти похідну *n-го* порядку $y = \cos^2 x$.

4. Знайти похідну складенної функції $y=3^{2\ln(x+1)}cos(e^{2x})$.

5. Довести, що $y'' - y' + ye^{2x} = 0$, якщо $y=cose^x+sine^x$.

6. Знайти диференціал функції $y = e^{\frac{-x}{y}}$.

7. Знайти найближче значення функції $f(x)=(x-1)^2(x-2)^4(x-3)$ в точці $x=2{,}99$.

8. Визначити границю, використовуючи правило Лопіталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{(1+2\ln\sin x)}$. 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7+5x-4x^3}{5x^3+x^2-1}$. 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{n-2}{n-3}\right)^{7n-3}$.

Варіант № 3.

1. Знайти $y'(x)$*:* $y^2=x+arcctg\frac{x}{2}$.

2. Знайти $y'(x)$ для функції заданої параметрично $\begin{cases} x = \sin t \\ y = a^t \end{cases}$.

3. Знайти похідну *n-го* порядку $y = arctgx$.

4. Знайти похідну складенної функції $y=cos^3(tg^2(\text{Ln}(1+x^2)))$.

5. Довести, що функція $y = e^x \cos x$ задовольняє рівняння $y'' - 2y' + 2y = 0$.

6. Обчислити наближено $\sqrt{e^{0,1}}$.

7. Знайти приріст і диференціал функції $y=y^x$ в точці $x=0$ при $x=1$. Покажіть на графіку залежність величини $|\Delta y\text{-}dy|$ від приросту аргументу Δx.

8. Визначити границю, використовуючи правило Лопіталя

$$1)\ \lim_{x\to 0}\left[\sqrt{1-x}+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)\right]^{\frac{1}{x^2}} \quad 2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{15-11x+2x^2}{3x^2-10x+3} \quad 3)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{7x^2+x^2}.$$

Варіант № 4.

1. Знайти $y'(x)$*:* $e^{x^2-y}\sin y = \sqrt{x}$.

2. Знайти $y'(x)$ для функції заданої параметрично

$$\begin{cases} x=a(\ln tg\ \frac{t}{2}+\cos t-\sin t) \\ y=a(\sin t-\cos t) \end{cases}.$$

3. Знайти похідну *n-го* порядку $y=x^5+4x^3+3x$.

4. Знайти похідну складенної функції $y=\ln(1+x^2)cos(\sqrt{x^5-2x^2})$.

5. Використати формулу Лейбніца знайти похідну *n-го* порядку функції $y = e^x\left(3x^2-4\right)$.

6. Для функції $y = x^3 + x$ знайти Δy *і* dy в точці $x=1$, якщо $\Delta x=1$. Яка абсолютна і відносна похибка від зміни Δy на dy.

7. Обчислити наближено: $1{,}025^{10}$.

8. Визначити границю, використовуючи правило Лопіталя:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{tg\,3x\ \ \sin\ 3x}{3x\ \ \sin\ 3x}. \quad 2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{(1\text{-}7x^2)}{(5x^2\ -\ x\ +\ 1)}. \quad 3)\ \lim_{x\to 7}\frac{(x\text{-}7)}{(\sqrt{x+2}\ -\ 3)}.$$

Варіант № 5.

1. Знайти $y'(x)$: $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}-2xy=0$.

2. Знайти $y'(x)$ для функції заданої параметрично: $\begin{cases} x=e^{-3t} \\ y=t^3-3t^2 \end{cases}$.

3. Знайти похідну *n-го* порядку $y=\sin\dfrac{2x-\pi}{5}$.

4. Знайти похідну складеної функції $y=\ln^5\left(\arcsin\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\right)$.

5. Використати формулу Лейбніца знайти похідну 3-го порядку функції $y=x^3\ln x$.

6. Знайти диференціал функції $y=\sqrt{\arcsin x}+(arctgx)^2$.

7. Обчислити наближено ln (1,003 *e*).

8. Визначити границю, використовуючи правило Лопіталя

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\ln(1+x)}{x}$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x})}{(7x+x^2)}$. 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Варіант № 6.

1. Знайти $y'(x)$: $ln\dfrac{x}{x^2+y^2}+arctg(xy^2)=1$.

2. Знайти $y'(x)$ для функціїзаданої параметрично $\begin{cases} x=\arccos\sqrt{1+t^2} \\ y=\arcsin\sqrt{1+t^2} \end{cases}$.

3. Знайти похідну *n-го* порядку $y=\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}$.

4. Знайти похідну складеної функції $y=\arcsin^2\left(\ln\dfrac{x}{1-x^2}\right)$.

5. Знайти диференціал $y=x\ln x-x$.

6. Для функції $y=x^3-x$, при x=2 обчислити Δy *і* dy, надаючи Δx значення Δx=1; $\Delta x=0,1$; $\Delta x=0,001$. Знайти відповідні значення відносної похибки $\delta=|\Delta y-dy|/|\Delta y|$.

7. Обчислити наближено: $10^{0,99}$ за допомогою диференціалу.

8. Визначити границю, використовуючи правило Лопіталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x$. 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-\cos 3x)}{1-\cos x}$. 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+5x)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$.

Варіант № 7.

1. Знайти $y'(x)$: $x\sqrt[4]{y}-\frac{1}{x^2+y}=4$.

2. Знайти $y'(x)$ для функціїзаданої параметрично $\begin{cases} x=t\sin t \\ y=\frac{1+\ln t}{t} \end{cases}$.

3. Знайти похідну *n-го* порядку $y=(arccos\frac{1}{x})^3+\sqrt{x^2-1}$.

4. Знайти похідну складенної функції $y=sin^3(\frac{\sqrt{1+x^2}}{1-x^2})Ln^2(3x)$.

5. Довести, що функція $y=e^x\cos x$ задовольняє рівняння $y''-2y'+2y=0$.

6. Знайти диференціал функції $y=ln(1+e^{10x})+arctg\, e^{5x}$

7. Обчислити наближено $1{,}025^{10}$.

8. Визначити границю, використовуючи правило Лопіталя:

$$1)\ \lim_{x\to 2}\frac{4x-4x^2+x^3}{x^3-12x+16}.\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^3+2x}.\quad 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}.$$

Варіант № 8.

1. Знайти $y'(x)$: $y^2=x+arctg\frac{2}{y}$.

2. Знайти $y'(x)$ для функції заданої параметрично: $\begin{cases} x=\frac{t+1}{t} \\ y=\frac{t-1}{t} \end{cases}$

3. Знайти похідну *n-го* порядку $y=\sqrt{1+x^2}$.

4. Знайти похідну складенної функції $y=e^{x^2}Ln(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x})$.

5. Використати формулу Лейбніца знайти похідну *n-го* порядку функції $y=e^x(3x^2-4)$.

6. Знайти диференціал $y=arcsin\ x/2$.

7. Обчислити наближено: $cos^2 44^0$.

8. Визначити границю, використовуючи правило Лопіталя:

$$1)\ \lim_{x\to -5}\frac{8x+15+x^2}{x^2+3x-10}.\quad 2)\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}.\quad 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos 5x}-e^{\cos 7x}}{e^{\cos 2x}-e}.$$

Варіант № 9.

1. Знайти $y'(x)$: $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sin x}-1=0$.

2. Знайти $y'(x)$ для функції заданої параметрично $\begin{cases} x=e^{2t}+e^{-2t} \\ y=1+e^{-2t} \end{cases}$

3. Знайти похідну *n-го* порядку $y=4\sqrt{x^2-4}-(\arcsin\frac{2}{x})^2$

4. Знайти похідну складеної функції $y=e^{\sqrt{\frac{Ln^2x-Lnx}{Lnx+Ln^2x}}}$

5. Знайти $y''(x)$, якщо $y=4x^3+2x+3$, вважаючи, що x — незалежна змінна.

6. Знайти диференціал функції $y=arctg\ (x/5)$.

7. Обчислити наближено: $\sqrt{7741}$

8. Визначити границю, використовуючи правило Лопіталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 4x)}{(5x\sin 3x)}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2+x-2)}{x^2-4x+3}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x})}{(x+x^2)}$

Варіант № 10.

1. Знайти $y'(x)$: $\sqrt{x^2+y}\,tgx=25$.

2. Знайти $y'(x)$ для функції заданої параметрично $\begin{cases} x=e^{t} \\ y=e^{t}\cos t \end{cases}$.

3. Знайти похідну *n-го* порядку $y=2^{5x}$

4. Знайти похідну складеної функції $y=(\arcsin x)^2 Ln(\sin(\cos^2 x)))$

5. Визначити $y''(x)$ в точці М(1:1) якщо $x^2+5xy+y-2x+y-6=0$.

6. Знайти наближено значення: $\sqrt{1{,}006}$.

7. Для знаходження щільності тіла відома його маса m_1=484г і маса витісненої ним води m_2=62г. Абсолютні похибки Δm=0,5г і Δm=0,4г. Знайти відносну похибку при визначенні щільності тіла.

8. Визначити границю, використовуючи правило Лопіталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(tg2x)^{\sin 3x}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^9+9)}{(3+x^7+5x^3)}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x})}{x}$

Варіант № 11.

1. Знайти $y'(x)$: $arctg\dfrac{x}{2+y}=e^{2y}$.

2. Знайти $y'(x)$ для функції заданої параметрично $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\sin t,\ t = 0 \end{cases}$

3. Знайти похідну *n-го* порядку $y = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}$.

4. Знайти похідну складенної функції $y = x^3 \sin^2\left(\frac{e^x - e^{-x}}{x}\right)$.

5. Довести, що $y'' - y + ye^{2x} = 0$, якщо $y = \cos e^x + \sin e^x$.

6. Обчислити наближене значення $\sin\ 30^0 12^/$ не користуючись таблицею і мікрокалькулятором. Одержане значення порівняти з табличним.

7. Обчислити наближено: $\cos^2 44^0$.

8. Визначити границю, використовуючи правило Лопіталя:

$$1.)\ \lim_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{x}{(1-x)}} \quad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{(xtg5x)}{(\sin^2 x)} \quad 3)\ \lim_{x\to -1}\frac{(3x^2+8x+5)}{(3x^2+9x+6)}$$

Варіант № 12.

1. Знайти $y'(x)$: $\cos(xy) - 3t = 0$.

2. Знайти $y'(x)$ для функції заданої параметрично $\begin{cases} x = \dfrac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} \\ y = 1 + e^{-2t} \end{cases}$

3. Знайти похідну *n-го* порядку $y = \sin\frac{\pi x + 1}{2}$.

4. Знайти похідну складенної функції $y = e^{\cos x}$.

5. Визначити y'' в точці М(1:1) якщо $x^2 + 5xy + y - 2x + y - 6 = 0$.

6. Обчислити наближено значення функції: $F(x) = e^{\sqrt{x-2}}$ в точці x=3,97.

7. Обчислити наближено: ln (1,003 e).

8. Визначити границю, використовуючи правило Лопіталя:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(3x+4)}{(3x+2)}\right)^{x-2} \quad 2)\ \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(\sqrt{x+7}-\sqrt{9-x})} \quad 3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+x^{2\cos x})}{(6x^2-3x+19)}$$

Варіант № 13.

1. Знайти $y'(x)$: $e^{x^2-y}\sin y = \sqrt{x}$.

2. Знайти $y'(x)$ для функції заданої параметрично

$$\begin{cases} x=a(\ln tg\,\frac{t}{2}+\cos t-\sin t) \\ y=a(\sin t-\cos t) \end{cases}$$

3. Знайти похідну *n*-го порядку $y=4\sqrt{x^2-4}-(arcsin\frac{2}{x})^2$

4. Знайти похідну 3-го порядку $y=\ln(1+x^2)$.

5. Довести, що $y''-y+ye^{2x}=0$ якщо $y=cose^x+sine^x$

6. Знайти приріст і диференціал функції $y=\sqrt{x}$ при $x=4;\ \Delta x=0,41$. Обчислити абсолютну і відносну похибки. Зробити графік.

7. Обчислити наближено: $\sqrt{e^{0,1}}$.

8. Визначити границю, використовуючи правило Лопіталя:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{(\sqrt{12-x}-3)}{3-x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-2x}\cdot\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x}\cdot\sqrt{1-3x})}{x^3}$

3) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{(9-x^2)}{(1-\sqrt{4+x})}$

Варіант №14.

1. Знайти $y'(x)$: $\ln y+\frac{x}{y}=2.$

2. Знайти $y'(x)$ для функції заданої параметрично $\begin{cases} x=\arccos t \\ y=e^{\sqrt{1-t^2}},\ t\in[-1,1) \end{cases}$

3. Знайти похідну *n-го* порядку $y=3^{2x}$.

4. Знайти похідну 2-го порядку $y=cos\frac{2x-7}{3}$.

5. Знайти диференціал функції $y=arctg\sqrt{x}$.

6. Знайти наближене значення функції $F(x)=5x^3-2x+3$ при $x=2,01$.

7. Обчислити наближено: $\sin 179^0$.

8. Визначити границю, використовуючи правило Лопіталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x})}{\sin^2 x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin\ln(1+x)-\ln(1+\sin x))}{x^4}$ 3)

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{(2\sqrt{x})-(3\sqrt[3]{x+1})}{4\sqrt[4]{x}-5\sqrt[5]{x+1}}$

Варіант № 15.

1. Знайти $y'(x)$: *3y=sin(x-y).*

2. Знайти $y'(x)$ для функції заданої параметрично: $\begin{cases} x=\arcsin t^2 \\ y=e^{\sqrt{1+t^2}}, \ t\in[-1,1) \end{cases}$

3. Знайти похідну *n-го* порядку $y=t^3$

4. Знайти похідну 3-го порядку $y=x^3+3x^2+2.$

5. Довести, що функція $y=e^x\cos x$ задовольняє рівняння $y''-2y+2y=0$.

6. Знайти приріст і диференціал функції $y=x^2-x$ при $x=10;\ \Delta x=0,1.$ Обчислити абсолютну і відносну похибки, які утворюються при зміні приросту диференціалом. Зробити графік.

7. Обчислити наближено: $e^{0,07}$.

8. Визначити границю, використовуючи правило Лопіталя:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(\sqrt{6-x}-\sqrt{2+x})}{(x^2-x-2)}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{(5x+1)}{(5x-1)}\right)^{2x}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2\cos x-x^2+6x^3)}{(17+\sin x+2x^3)}$

Варіант № 16.

1. Знайти $y'(x)$: $\ln\frac{x}{x^2+y^2}+arctg(xy^2)=1.$

2. Знайти $y'(x)$ для функції заданої параметрично $\begin{cases} x=t^3-1 \\ y=\frac{1}{3}\left(t^2-1\right) \end{cases}$.

3. Знайти похідну *n-го* порядку $y=5\sin x$.

4. Знайти похідну 4-го порядку $y=x^5+10x^4+2x^3-6x^2+\sqrt{x}$.

5. Використати формулу Лейбніца знайти похідну *n-го* порядку функції $y=e^x\left(3x^2-4\right)$.

6. Знайти диференціал $y=\ln tg((\Pi/2)-(x/2))$.

7. Обчислити наближено: $e^{1,015}$; $e^{-0,045}$

8. Визначити границю, використовуючи правило Лопіталя

1) $\lim\limits_{x\to\infty}x[\ln x-\ln(x+2)]$ 2) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{(3x-15)}{(\sqrt{2x-6}-2)}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln(1+x^2)-x\ln(1+x))}{\ln(1+x^2)}$

Варіант № 17.

1. Знайти $y'(x)$: $arctg(\sqrt{x}+y)+2x^2y=2.$

2. Знайти $y'(x)$ для функції заданої параметрично $\begin{cases} x = 2tgt \\ y = \ln\cos t, \ t \in (0, \pi) \end{cases}$

3. Знайти похідну *n-го* порядку $y = \ln(1+x)$.

4. Знайти похідну 2-го порядку $y=4\sqrt{x^2-4}-(arcsin\frac{2}{x})^2$

5. Використати формулу Лейбніца знайти похідну 3-го порядку функції $y = x^3 \ln x$.

6. Знайти диференціал $y=\sqrt{x^2+y^2}-arctg\ (y/x)$.

7. Обчислити наближено: $2{,}987^4$.

8. Визначити границю, використовуючи правило Лопіталя

1) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x+\sqrt{x}-6)}{(x-5\sqrt{1-x^2})}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos x-\cos 3x)}{1-\sqrt{1-x^2}}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^2+6\sin 2x)}{(-5x^2+3x+9)}$

Варіант № 18.

1. Знайти $y'(x)$: $\sqrt{\frac{x}{\cos(x+y)^2}}-\frac{y}{x+y}=3$.

2. Знайти $y'(x)$ для функції заданої параметрично $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \ln 3t, \ t \in (0, \pi) \end{cases}$

3. Знайти похідну *n-го* порядку $y=\frac{2x+1}{x^2+x-2}$.

4. Знайти похідну 2-го порядку $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$.

5. Довести, що функція $y = e^x \sin x$ задовольняє рівняння $y''' - 2y'' + y' = 0$.

6. Знайти диференціал $y = arctg(1{,}05)$.

7. Обчислити наближено: $10^{3\ \lg 2{,}994}$.

8. Визначити границю, використовуючи правило Лопіталя:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{x}{(2x-4)}}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(10x^2-x+1)}{(3x^2+6x-2)}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{(\ln\sqrt{1+x^2})}{\ln x}\right)^{x^2\ln x}$

Варіант № 19.

1. Знайти $y'(x)$: $y\ln x+\ln^2 x=16$.

2. Знайти $y'(x)$ для функції заданої параметрично $\begin{cases} x = 1-\sin e^t \\ y = \frac{2}{1+e^t} \end{cases}$

3. Знайти похідну *n-го* порядку $y = \dfrac{2}{6x+1}$.

4. Знайти похідну 2-го порядку $y = x^3 \ln x$.

5. Використати формулу Лейбніца знайти похідну 2-го порядку функції $y = x^3 \sin x$.

6. Знайти диференціал $y = e^{0,1x(1-x)}$

7. Обчислити наближено: $\sqrt[5]{32.02}$.

8. Визначити границю, використовуючи правило Лопіталя:

1.) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x^2 - x - 1)}{(\sqrt{1+3x} - \sqrt{2x+32})}$

2.) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{(n-2)}{(n-3)}\right)^{7n-3}$

3.) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\sqrt{2(x^2+1)} - x(x+1))}{(\sqrt[3]{9-x} - x^2 - 1)}$

Варіант № 20.

1. Знайти $y'(x)$*:* $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sin x}$*-1=0.*

2. Знайти $y'(x)$ для функції заданої параметрично $\begin{cases} x = 1 - e^t \\ y = \dfrac{1}{1+e^t} \end{cases}$.

3. Знайти похідну *n-го* порядку $y = 4\sqrt{x^2-4} - (arcsin\dfrac{2}{x})^2$

4. Знайти похідну 4-го порядку $y = \ln\left(2x^2 + x - 3\right)$.

5. Обчислити наближено: $e^{-0,005}$.

6. Знайти приріст і диференціал функції $y = x^2 - 2x$ при $x=10$, $\Delta x=0,1$. Обчислити абсолютну і відносну похибки, які утворюються при заміні приросту диференціалом.

7. Знайти диференціал $y = \cos^2 y - x^2 y$.

8. Визначити границю, використовуючи правило Лопіталя:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x})}{(x-1)}$

2) $\lim\limits_{x\to 1} (3-2x)^{\frac{x}{(1-x)}}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} (\ln(x + 4x - \ln x) - \ln x)$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Давидов О.М. Курс математичного аналізу. ч. ІІ. К.: Вища школа, 1978. 372с.
2. Давидов О.М. Курс математичного аналізу. ч.І. К.: Вища школа, 1976. 368с.
3. Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский В.Н. Сборник задач по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1953. 196с.
4. Демидович В.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: ГИТТЛ, 1954. 552с.
5. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1964. 480с.
6. Ильин В.А., Позднякk Э.Г. Основы математического анализа. ч.1. М.: Наука Главная редакция физико-математической литературы, 1971. 600с.
7. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа. ч.2. М.: Наука Главная редакция физико-математической литературы, 1971. 447с.
8. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. М.: Наука, 1979. 720с.
9. Кудрявцев Л.Д., Математический анализ. ч.1. М.: Высшая школа, 1973. 614с.
10. Кудрявцев Л.Д., Математический анализ. ч.2. М.: Высшая школа, 1970. 424с.
11. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Математический анализ в примерах и задачах. ч.І. К.: Вища школа, 1976. 580 с.
12. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Математический анализ в примерах и задачах. ч.ІІ. К.: Вища школа, 1977. 672 с.
13. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Калайда А.Ф. Математический анализ. ч.І. К.: Вища школа, 1983. 496 с.
14. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Калайда А.Ф. Математический анализ. ч.ІІ. К.: Вища школа, 1984. 447 с.
15. Толстов Г.П. Курс математического анализа, т. І. М.: ГИТТЛ, 1954. 552с.
16. Толстов Г.П. Курс математического анализа, т. ІІ. М.: ГИТТЛ, 1957. 544с.

17. Фихтенгольц Г.М., Основы математического анализа, т. I. М.: Наука, 1955. 440с.
18. Фихтенгольц Г.М., Основы математического анализа, т. II. М.: Наука, Наука , 1956. 464с.
19. Шкіль М.І. Математичний аналіз. ч.І. К.: Вища школа, 1981. 456 с.
20. Шкіль М.І. Математичний аналіз. ч.І. К.: Вища школа, 2005. 447 с.
21. Шкіль М.І. Математичний аналіз. ч.ІІ. К.: Вища школа, 1982. 442 с.
22. Шкіль М.І. Математичний аналіз. ч.ІІ. К.: Вища школа, 2005. 510 с.
23. GeoGebra Upload Manager. Бібілотека комп'ютерних моделей та інших дидактичних матеріалів, створених за допомогою GeoGebra: http://www.geogebra.org/en/upload
24. https://www.geogebra.org/m/qkykyygg
25. База прикладів з різних дисциплін: http://www.geogebratube.org/?lang=ru
26. Офіційний канал на YouTube: http://www.youtube.com/user/GeoGebraChannel
27. Офіційний сайт: http://www.geogebra.org
28. Практикум з опанування пакету динамічної математики GeoGebra https://www.geogebra.org/m/jjqf2vfk.