МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

МАТЕМАТИКА:
короткий курс

Навчальний посібник для викладачів та студентів ЗВО
спеціальності 013 "Початкова освіта"

Укладач Г. І. Коберник

Умань
2021

УДК 51(075.8)
М34

Рецензенти:

Тарасенкова Н. А., доктор педагогічних наук, професор Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького;

*Березовський В. Є.***,** кандидат фізико-математичних наук, доцент Уманського державного аграрного університету.

Рекомендовано до друку рішенням Вченої ради факультету початкової освіти Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини як навчальний посібник для студентів спеціальності "Початкова освіта" (протокол № 11 від 31 березня 2021 р.)

М34 **Математика**: короткий курс : навч. посіб. для викладачів та студ. ЗВО спеціальності "Початкова освіта" / МОН України, Уманський держ. пед. ун-т імені Павла Тичини ; уклад. Г. І. Коберник. – Умань : Візаві, 2021. – 246 с.

Навчальний посібник написаний згідно навчальної програми дисципліни "Математика", для ЗВО спеціальності 013 "Початкова освіта". У ньому викладено елементи теорії множин і математичної логіки, різні підходи до побудови множини цілих невід'ємних чисел, розширення поняття числа та застосування теорії множин та математичної логіки до означення понять шкільного курсу математики.

Посібник також буде корисним для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних спеціальностей, учителів початкової школи, та вчителів математики загальноосвітньої школи.

УДК 51(075.8)

Зміст

РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

1.1. Поняття та їх означення

1.1.1. Поняття, його обсяг і зміст.

Думка про властивість об'єктів називається *ознакою*.

Серед ознак об'єкта виділяють *істотні* і *неістотні*.

Істотна ознака – це така, без якої об'єкт існувати не може. Та ознака, яку може мати даний об'єкт, а може і не мати, називається *неістотною*. Істотність ознаки об'єкта залежить від потреб практики людини.

Поняттям називається форма мислення, в якій відображаються загальні істотні властивості предметів і явищ об'єктивної дійсності, загальні взаємозв'язки між ними у вигляді цілісної системи істотних ознак.

Кожне поняття характеризується своїм терміном, обсягом і змістом.

Термін (*назва*) позначається словом або кількома словами, а іноді ще й спеціальним символом (знаком). Наприклад, замість терміну "процент" ("відсоток") вживають символ %.

Обсягом поняття називається сукупність тих об'єктів, які охоплюються цим поняттям.

Змістом поняття називається сукупність істотних ознак, які мають всі об'єкти, що належать обсягу цього поняття.

Існує залежність: чим більший зміст, тим менший обсяг.

За змістом поняття бувають порівнюваними і непорівнюваними. *Порівнюваними* називаються поняття, які мають принаймні одну спільну ознаку. Якщо ж поняття не мають спільних ознак, то вони називаються *непорівнюваними*.

Наприклад, поняття "трикутник" і "квадрат" є порівнюваними (обоє є многокутниками), а – "трикутник" і "людина" – непорівнюваними.

За обсягом поняття бувають сумісними і несумісними.

*Сумісними*_називаються поняття, обсяги яких мають спільні об'єкти і *несумісними*, якщо їх обсяги не мають спільних об'єктів.

Прикладами сумісних понять є такі поняття як "чотирикутник" і "паралелограм", а несумісних – "чотирикутник" і "трикутник". Сумісні поняття можуть перебувати лише в одному і тільки одному з трьох відношень:

1) рівносильності або тотожності,

2) підпорядкування або родово-видовому,

3) часткового збігу або перехресному. Два поняття називаються *рівносильними*, якщо обсяги їх збігаються. Прикладами рівносильних понять є "правильний чотирикутник" і "квадрат".

Два або більше несумісних понять називаються *співпідпорядкованими*, якщо будь-які два з них несумісні, а всі вони є видами деякого спільного роду.

Два співпідпорядковані поняття називаються *протилежними,* якщо обсяг їх спільного родового поняття містить принаймні один об'єкт, який не міститься в обсягах кожного з цих понять.

Два співпідпорядковані поняття називаються *суперечливими*, якщо обсяг їх спільного родового поняття містить лише об'єкти з обсягів кожного з цих понять.

1.1.2. Означення понять. Способи означення. Означувані і неозначувані поняття.

Зміст поняття розкривається за допомогою спеціальної логічної операції, яка називається *означенням поняття*.

У кожному означенні виділяють *означуване* і *визначаюче поняття.*___Поняття, якому дається означення, називається *означуваним*. Поняття ж, через яке дається означення, називається *визначаючим*.

Наприклад, в означенні "*Квадратом* називається ромб, у якого один з кутів прямий" означуваним є поняття "квадрат", а визначаючим – "ромб, у якого один з кутів прямий". Означення є певним завершальним етапом у виробленні поняття і розв'язує дві пізнавальні задачі:

1) розкриває зміст означуваного поняття, дає відповідь на питання про те, чим є даний об'єкт;

2) відмежовує означуване поняття від інших споріднених понять.

Існують різні способи означення понять. Найбільш поширений спосіб – *означення через найближчий рід і видову ознаку* (*відміну*). Суть його полягає у тому, що спочатку визначається найближчий рід, до якого належить означуване поняття як вид, а потім вказується ознака (ознаки), яка відрізняє означуване поняття від інших видів цього роду. Наприклад, в означенні "*Ромбом* називається паралелограм, у якого дві суміжні сторони рівні", означуваним є поняття "ромб", родовим – "паралелограм", а видовою ознакою є "рівність двох суміжних сторін паралелограма".

Поряд із означенням через найближчий рід і видову ознаку користуються *генетичним означенням*, суть якого полягає у тому, що зміст означуваного поняття розкривається за допомогою опису утворення тих об'єктів, що належать його обсягу. Наприклад, означення "*Сферою* називається поверхня, яка утворюється внаслідок обертання півкола навколо його діаметра" є генетичним.

У математиці часто зустрічаються означення, які називаються *умовними погодженнями*. Наприклад, "Якщо x – довільне дійсне число, відмінне від нуля, то за означенням $x^0 := 1$".

Зауваження. Домовимося надалі вираз "дорівнює за означенням" символічно записувати ":=".

Розглядають також означення через перелік, рекурсивні або індуктивні означення, означення через абстракцію, аксіоматичне означення та інші. Означення "*Дійсними числами* називаються раціональні та ірраціональні числа" є прикладом означення через перелік.

1.1.3. Вимоги до означення понять. Помилки в означеннях. Контрприклади.

Основні вимоги до означення понять такі:

1). Означення повинно бути *співрозмірним*, тобто обсяг визначаючого поняття повинен збігатися з обсягом означуваного поняття. У всіх випадках, коли вказується недостатня кількість ознак або надмірна кількість ознак, порушується вимога співрозмірності.

2). Означення не повинно містити у собі так званого *хибного кола*, тобто, коли визначаюче поняття є означуваним поняттям або коли одне поняття означається через друге, а друге – через перше. Наприклад, в означеннях "*Кругом* називається частина площини обмежена колом" і "*Колом* називається межа круга" круг означається через коло, а коло через круг.

3). Означення не повинно бути тільки *заперечуючим*, тобто у ньому не повинні вказуватися лише ті ознаки, які не входять у зміст даного поняття, хоч іноді цього уникнути не можна.

4). Потрібно, щоб існували об'єкти, які містяться в обсязі даного поняття.

5). Означення повинно бути чітким, не мати нічого зайвого, всі терміни у ньому мають бути однозначними, тобто кожен є назвою лише одного поняття.

Два означення називаються *рівносильними*, якщо обсяги понять, які вони визначають, збігаються.

Для того, щоб виявити помилку в означенні, користуються іноді способом *наведення контр приклад.* Суть його полягає у тому, що вказується приклад об'єкта, який має всі властивості, які входять в означення, але не міститься в обсязі означуваного поняття. .

Серед понять виділяють *неозначувані поняття*, які в математиці називають також *первісними*. У курсі математики загальноосвітньої школи первісними поняттями є, наприклад, точка, пряма, площина і т. д.

У курсі математики загальноосвітньої школи первісними поняттями є, наприклад, точка, пряма, площина і т. д.

Поняття поділяються на *загальні, конкретні, одиничні, збірні, абстрактні* за обсягом, тобто за кількістю предметів, які під ними розуміються.

Збірні поняття, на відміну від **загальних,** відображають групу предметів як єдине ціле, як об'єднання або гурт. Наприклад: "бібліотека", "ліс", "клас" тощо.

Значення *загального поняття* стосується кожного окремого предмета, який входить до його обсягу. Наприклад, поняття "людина" стосується кожної людини. Значення **збірного поняття** не стосується кожного окремого предмета, який входить до складу групи, а лише всієї групи.

Поняття, об’єкти обсягів яких, як окремі речі, не існують, називають *абстрактними.* Їх не можна помацати, потримати в руках. Поняття "чесність", "краса" і т. п. – абстрактні поняття. Усі поняття – терміни, які ти вчиш на уроках математики, мови – це теж абстрактні поняття. Наприклад, "нерівність", "більше", "менше", "стільки, скільки", "буква".

Над поняттями можна здійснювати логічні операції.

Обмеження – це логічна операція над поняттями, завдяки якій відбувається перехід від поняття з ширшим обсягом (родового) до поняття з вужчим обсягом (видового). Межею обмеження є одиничне поняття.

Наприклад, обмежимо поняття *машина.* Запишемо обмеження цього поняття у вигляді ланцюжка понять.

Машина –легкова машина – "Мерседес" –"Мерседес"№....

У процесі обмеження необхідно поступово додавати до змісту попереднього поняття додаткові ознаки, що призводить до зменшення обсягу. Обмеження поняття *машина* можна здійснити і по-іншому.

Машина – вантажна машина – "КАМАЗ" – "КАМАЗ"№....

Узагальнення – це логічна операція над поняттями, завдяки якій відбувається перехід від поняття з вужчим обсягом (видового) до поняття з ширшим обсягом (родового). Межею узагальнення є найширші за обсягом категорії, наприклад, *організми, час, простір, життя, рух* тощо.

Наприклад, узагальнимо поняття *тополя.*

Тополя – листяне дерево – дерево – рослина – живий організм.

Поділ поняття (точніше, поділ обсягу поняття) – це логічна операція, за допомогою якої розкривається обсяг родового поняття через перелік його видів

Наприклад, транспорт поділяється на легковий та вантажний.

Поняття, що ділиться, називається *поділюваним.* Результати поділу (відповідні видові поняття) – це *члени поділу***.** Поділюване поняття і члени поділу – сумісні поняття (родове і видові). Члени поділу між собою – несумісні поняття. Інформація, з огляду на яку здійснюється поділ, називається його *основою***.** Вона може бути про призначення предмета чи його використання тощо.

1.2. Множини та відношення між ними

1.2.1. Поняття множини. Скінченні і нескінченні множини.

Під *множиною* у математиці розуміють сукупність певних об'єктів, об'єднаних за деякою ознакою чи правилом. Об'єкти, що складають множину і можуть бути самої різноманітної природи, називають її *елементами*. Множини у більшості випадків позначаються великими, а їх елементи – малими латинськими буквами. Те, що елемент a належить множині A, символічно записується так: $a \in A$. Коли елемент b не належить множині A, то це записується $b \notin A$ ($b \bar{\in} A$ або $\overline{b \in A}$). Знак (символ) $\in$ називається *знаком належності*. Множина може бути елементом іншої множини. Наприклад: вуз можна розглядати як множину, елементами якої є факультети, які у свою чергу є множинами студентів.

Множина, елементами якої є числа, називається *числовою множиною*._Для деяких множин, зокрема числових, прийнято свої назви і позначення. Найчастіше вживаними з них є:

- множина всіх натуральних чисел N;
- множина всіх цілих невід'ємних чисел N_0;
- множина всіх цілих чисел Z;
- множина всіх раціональних чисел Q;
- множина всіх дійсних чисел R;
- множина всіх комплексних чисел C.

Множина називається *скінченною*, якщо її елементи можна перелічити, і – *нескінченною*, якщо цього зробити не можна.

Число елементів у скінченній множині A позначається $|A|$ або $n(A)$ Порожня множина є скінченною і число її елементів дорівнює нулю.

1.2.2. Способи задання множин. Порожня і одинична множини.

Множина цілком визначається своїми елементами, тобто вона є заданою, якщо про довільний елемент можна сказати: належить він даній множині чи не належить. Найчастіше множини задають:

1) переліком елементів множини. У цьому випадку записують всі елементи множини і з обох сторін ставлять фігурні дужки. Наприклад, запис $\{1, 2, 3\}$ означає, що задано множину, елементами якої є лише числа 1, 2 і 3;

2) заданням характеристичної властивості елементів множини, тобто властивості, яку мають ті і тільки ті елементи, що належать даній множині. Символічно задання множини характеристичною властивістю записується $\{\, x \mid P(x) \,\}$, де x – довільний елемент множини, P – характеристична властивість, що задає множину, а $P(x)$ означає, що елемент x має властивість P. Наприклад, множину додатних дійсних чисел можна задати так: $\{\, x \mid x \in R$ і $x > 0\}$, а можна і так $\{\, x \in R \mid x > 0 \,\}$.

Одну і ту ж множину можна задати по-різному, у тому числі і за допомогою різних характеристичних властивостей. Наприклад, множина, елементами якої є тільки числа 1 і 2, може бути задана так:

$$\{1, 2\}, \{2, 1\}, \{\, x \in N \mid x \le 2 \,\}, \{\, x \in N \mid x < 3 \,\},$$
$$\{\, x \in Z \mid 1 \le x \le 2 \,\}, \{\, x \in Z \mid 0 < x < 3 \,\},$$
$$\{\, x \in Q \mid (x-1)(x-2) = 0\}, \{\, x \in R \mid (x-1)(x-2) = 0 \,\}.$$

Множина, яка не містить елементів, називається *порожньою множиною* і позначається символом $\varnothing$. Порожня множина єдина.

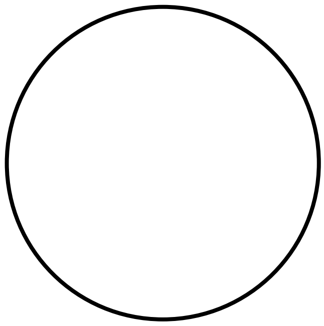
1.2.3. Точкові множини. Геометрична фігура як множина точок. Плоскі і просторові геометричні фігури. Круги Ейлера.

У математиці, крім числових множин, користуються ще й *точковими множинами*, тобто множинами, елементами яких є точки. Непорожня точкова множина називається *геометричною фігурою* або просто *фігурою*. Фігура називається *плоскою*, якщо всі її точки належать одній площині. Фігура називається *просторовою*, якщо не всі її точки належать одній площині.

Для наочності множини часто зображають плоскими геометричними фігурами, здебільшого кругами, а їх елементи позначаються точками цих фігур. Таке зображення множин називається *кругами Ейлера*.

1.2.4. Рівність множин. Підмножина множини. Універсальна множина.

Дві множини називаються *рівними*, якщо вони складаються з одних і тих же елементів, тобто кожний елемент першої множини є елементом другої множини і кожний елемент другої множини є елементом першої множини. Рівність множин X і Y записується $X = Y$. Геометрично рівні множини зображаються однією і тією ж фігурою на площині (мал. 1).



$\boldsymbol{X = Y}$

Мал. 1.

З означення рівності множин випливає:

1) порядок входження елементів у множину неістотний;

2) елементи у множині не повторюються.

1.2.5. Відношення між двома непорожніми множинами.

Користуючись означенням відношення рівності множин, легко встановити:

1) кожна множина рівна сама собі, тобто $X = X$ – рефлексивність відношення рівності множин;

2) для довільних множин X і Y, якщо $X = Y$, то $Y = X$ –

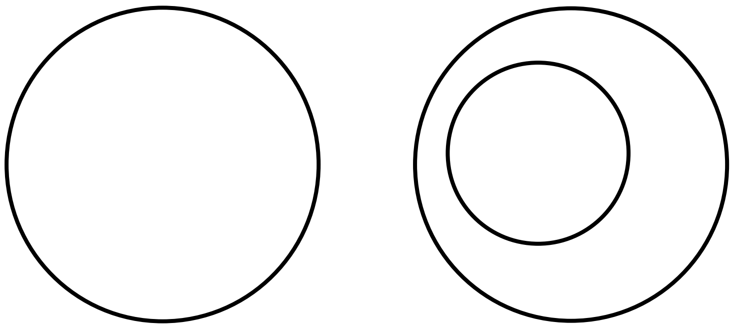
симетричність відношення рівності множин;

3) для довільних множин X, Y і Z, якщо $X = Y$ і $Y = Z$, то $X = Z$ – транзитивність відношення рівності множин.

Отже, має місце теорема.

Теорема 1. Відношення рівності множин рефлексивне, симетричне і транзитивне.

Якщо кожний елемент множини X є елементом множини Y, то множина X називається *підмножиною множини* Y і записується $X \subset Y$ або $Y \supset X$. Знак $\supset$ називається *знаком включення*, а про самі множини говорять, що вони перебувають у *відношенні включення*. Відношення включення для двох множин, які не порожні, зображено на мал. 2.



а) б)

$X \subset Y$

Мал. 2.

Прийнято, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини.

На основі означення відношення включення між двома множинами одержуються такі його властивості:

1) кожна множина є своєю підмножиною, тобто $X \subset X$ – рефлексивність відношення включення;

2) для довільних множин X і Y, якщо $X \subset Y$ і $Y \subset X$, то $X = Y$ – антисиметричність відношення включення;

3) для довільних множин X, Y і Z, якщо $X \subset Y$ і $Y \subset Z$, то $X \subset Z$ – транзитивність відношення включення.

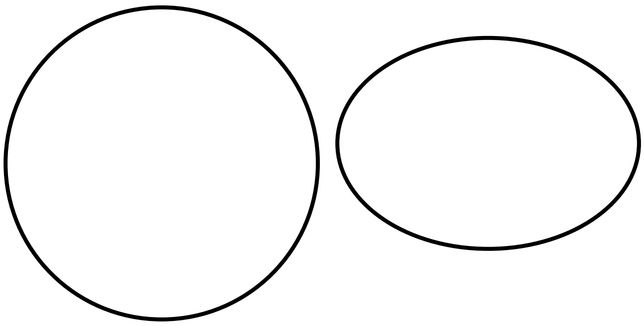
Отже, має місце теорема.

Теорема 2. Відношення включення множин рефлексивне, антисиметричне і транзитивне.

Кожна множина має своїми підмножинами порожню множину і саму себе, які називаються її *невласними підмножинами*. Всі інші підмножини множини, якщо вони існують, називаються її *власними підмножинами*. Мал. 2 (а) є зображенням невласної підмножини X множини Y, а мал. 2 (б) – власної підмножини X множини Y.

Дві непорожні множини X і Y або мають спільні елементи, або ж їх не мають. У першому випадку говорять, що множини *перетинаються* (записують $X \cap Y \neq \varnothing$). У другому випадку – *не перетинаються* (записують $X \cap Y = \varnothing$).

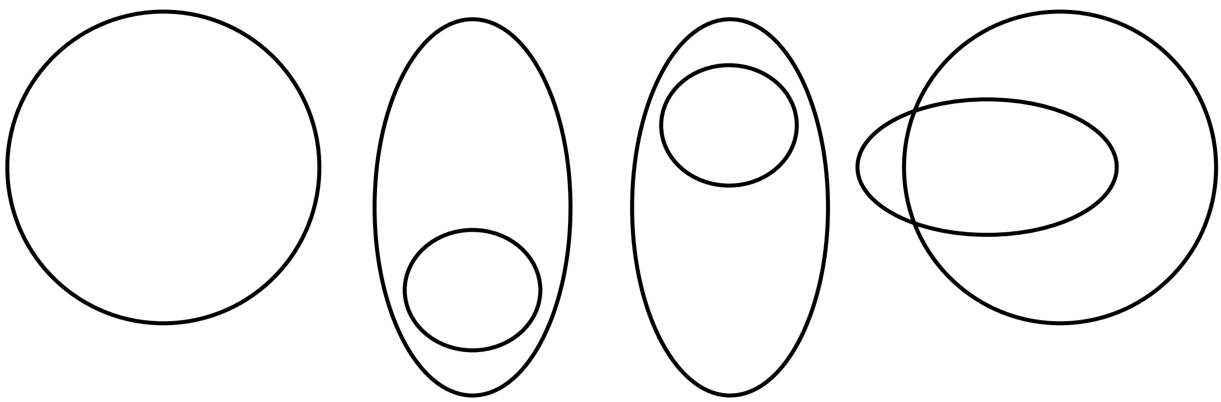
Для двох непорожніх множин, які не перетинаються, зображення їх за допомогою кругів Ейлера дано на мал. 3.



$X \cap Y = \varnothing$

Мал. 3.

Для двох непорожніх множин, які перетинаються, на основі взаємного розміщення двох плоских фігур має місце один і тільки один із випадків зображений кругами Ейлера на мал. 4.



а) б) в) г)

$X \cap Y \neq \varnothing$

Мал. 4.

На основі мал. 4 маємо:

1) у випадку а) множини рівні;

2) у випадках б) і в) одна із множин є власною підмножиною іншої;

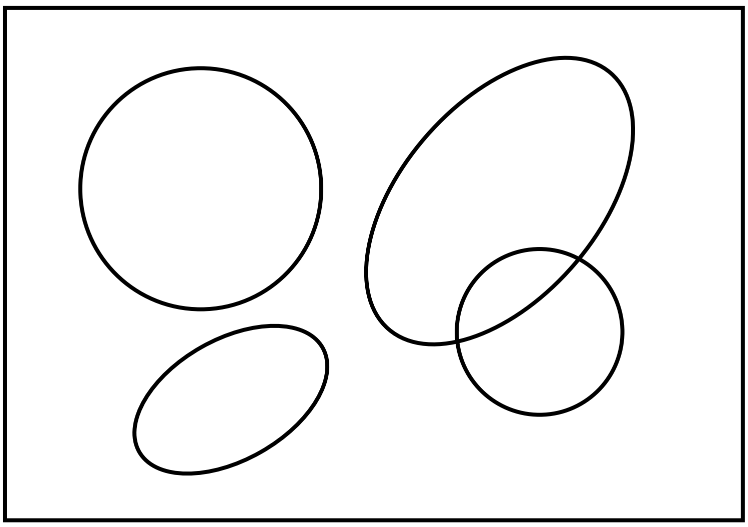
3) у випадку г) жодна із множин не є підмножиною другої, у цьому випадку говорять, що множини знаходяться у відношенні часткового збігу.

Отже, має місце теорема.

Теорема 3. Для довільних двох непорожніх множин має місце одне і тільки одне із відношень: або вони перетинаються, або вони не перетинаються. Якщо дві множини перетинаються, то між ними має місце одне і тільки одне із відношень: або вони рівні, або одна з них є власною підмножиною другої, або вони знаходяться у відношенні часткового збігу.

Теорема 4. Дві множини рівні тоді і тільки тоді, коли перша множина є підмножиною другої, а друга – підмножиною першої.

Множина, підмножини якої розглядаються у даній задачі чи теорії, називається *універсальною множиною*. Її позначають у більшості випадків U. Вибір універсальної множини довільний, він визначається задачами практики. На кругах Ейлера універсальна множина найчастіше зображається квадратом або прямокутником, а її підмножини – фігурами, що розміщуються усередині них (мал. 5).



Мал. 5.

Якщо M – довільна множина, то множина всіх її підмножин називається *буліаном множини М* (*множиною-степенем множини М*), і позначається $B(M)$ або 2^n.

Має місце теорема.

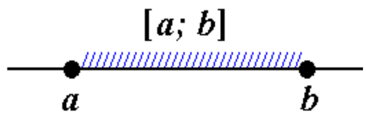
Теорема 1. Число всіх підмножин скінченної n-елементної множини дорівнює 2^n.

1.2.6. Числові множини. Координатна пряма і зображення числових множин на ній.

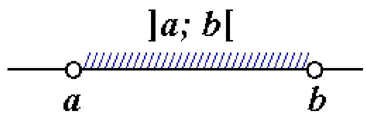
Зупинимося детальніше на числових множинах. Графічно їх зображають на координатній прямій. Для окремих підмножин множини дійсних чисел вживають свої назви і позначення.

Множина:

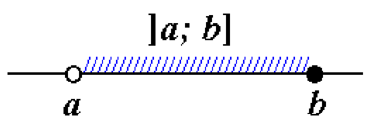
1) $\{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$ – усі дійсні числа, що знаходяться між числами a і b, включаючи ці числа (замкнений числовий проміжок (відрізок)).



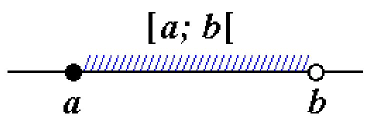
2) $\{x \in R \mid a < x < b\}$ – усі дійсні числа, що знаходяться між числами a і b, не включаючи їх (відкритий числовий проміжок (відрізок)).



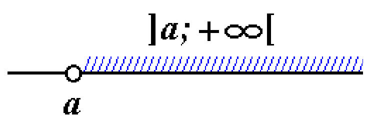
3) $\{x \in R \mid a < x \leq b\}$ – усі дійсні числа, що знаходяться між числами a і b, не включаючи a і включаючи b (числовий проміжок, який відкритий знизу і замкнений зверху).



4) $\{x \in R \mid a \leq x < b\}$ – усі дійсні числа, що знаходяться між числами a і b, включаючи число a і не включаючи число b (числовий проміжок, який замкнений знизу і відкритий зверху).

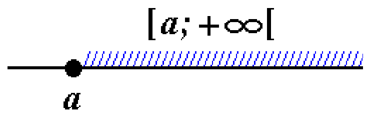


5) $\{x \in R \mid x > a\}$ – усі дійсні числа, що більші від числа a (числовий

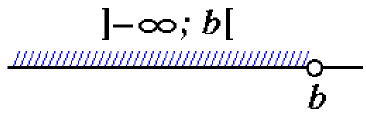


проміжок, який відкритий знизу і необмежений зверху).

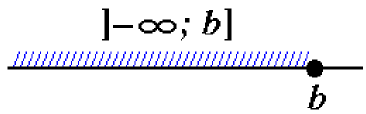
6) $\{x \in R \mid x \geq a\}$ – усі дійсні числа, що не менші від числа a (числовий проміжок, який замкнений знизу і необмежений зверху).



7) $\{x \in R \mid x < b\}$ – усі дійсні числа, що менші від числа b (числовий проміжок, який необмежений знизу і відкритий зверху).



8) $\{x \in R \mid x \leq b\}$ – усі дійсні числа, що не перевищують числа b (числовий проміжок, який необмежений знизу і замкнений зверху).



Множини 1) – 4) називаються *обмеженими числовими проміжками*. 5) – 8) – *необмеженими числовими проміжками*, а всі вони – *числовими проміжками*.

Множину дійсних чисел *R* позначають іноді символічно так:] $-\infty$; $+\infty$ [.

1.3. Операції над множинами

1.3.1. Поняття про операції.

Під *n–арною* (*n–місною*) *операцією* розуміють правило, за яким *n* об'єктам, взятим у певному порядку, ставиться у відповідність не більше як один об'єкт, що називається *результатом операції*. Самі ж об'єкти, яким ставиться *у* відповідність результат, називаються *компонентами операції*. У випадку, коли компонента одна, операція називається *унарною* (*одномісною*), якщо їх дві – *бінарною* (*двомісною*), три – *терарною* (*тримісною*) і т. д. За домовленістю бінарні операції часто називають операціями.

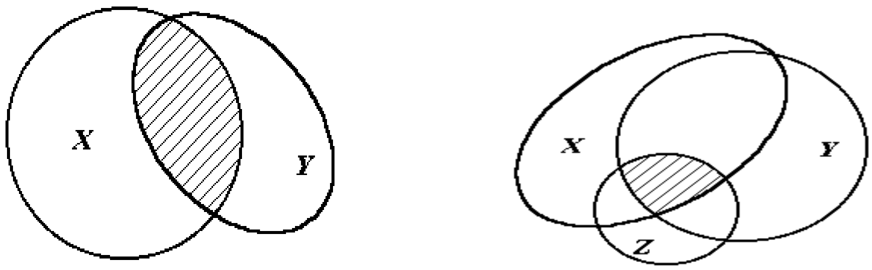
1.3.2. Операції над множинами та зображення їх результаті за допомогою кругів Ейлера.

Перерізом (*перетином*) двох довільних множин називається множина, елементами якої є ті і тільки ті елементи, що належать обом цим множинам.

$X \cap Y := \{x \mid x \in X \text{ і } x \in Y\}$.

Правило, за яким двом довільним множинам X і Y ставиться у відповідність їх переріз $X \cap Y$, називається *операцією перерізу множин*.

Перерізом довільних множин X_1, X_2, ..., X_n, ... називається множина, елементами якої є ті і тільки ті елементи, що належать кожній з цих множин і позначається $X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_n \cap ...$ або $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} X_i$. Графічно зображення перерізів двох і трьох множин за допомогою кругів Ейлера дано на мал. 1, де результати цих операцій заштриховано.



$X \cap Y$ $\qquad$ $X \cap Y \cap Z$

Мал. 1.

Об'єднанням довільних двох множин називається множина, елементами якої є ті і тільки ті елементи, що належать принаймні одній з них. Об'єднання множин X і Y позначається $X \cup Y$ і читається: "X об'єднання з Y".

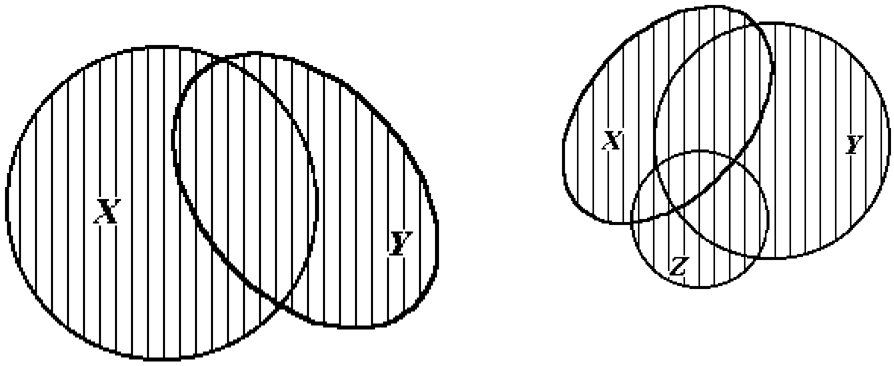
$$X \cup Y := \{x \mid x \in X \text{ або } x \in Y\}.$$

Правило, за яким довільним двом множинам X і Y ставиться у відповідність їх об'єднання $X \cup Y$, називається *операцією об'єднання множин*.

Об'єднанням довільних множин X_1, X_2, ..., X_n, називається множина, елементами якої є ті і тільки ті елементи, що належать принаймні одній із цих множин. Об'єднання множин X_1, X_2, ... , X_n, позначається

$$X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n \cup ... \text{ або } \bigcup_{i=1}^{+\infty} X_i.$$

Графічне зображення об'єднання двох і трьох множин за допомогою кругів Ейлера дано на мал. 2, де результати цих операцій заштриховано.



$X \cup Y$ $\qquad$ $X \cup Y \cup Z$

Мал. 2.

Різницею довільних множин *X* і *Y* називається множина, елементами якої є ті і тільки ті елементи множини *X*, що не належать множині *Y*.

Різниця множин *X* і *Y* позначається $X \setminus Y$ і читається: "*X* мінус *Y*", або "*X* без *Y*", або "від *X* відняти *Y*". Символічно означення різниці множин *X* і *Y* запишеться:

$$X \setminus Y := \{x \mid x \in X \text{ і } x \notin Y\}.$$

Правило, за яким кожній парі множин *X* і *Y* ставиться у відповідність їх різниця $X \setminus Y$, називається *операцією віднімання множин*, або *відніманням множин*.

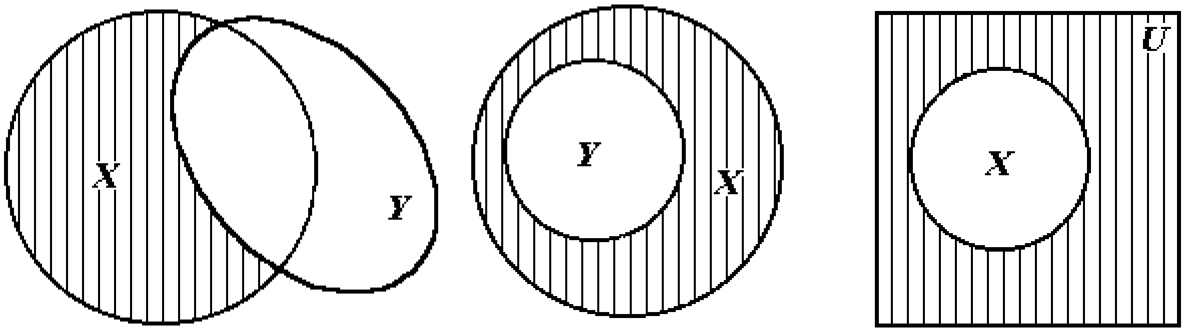
Якщо множина *Y* є підмножиною множини *X*, то різниця множин $X \setminus Y$ називається *доповненням підмножини Y до множини X* і позначається $\overline{Y}_X$.

Різниця між універсальною множиною *U* і довільною її підмножиною *X* називається *доповненням множини X* і позначається $\overline{X}$.

$$\overline{X} \; := \{x \mid x \in U \text{ і } x \notin X\}.$$

Правило, за яким кожній підмножині *X* універсальної множини *U* ставиться у відповідність її доповнення $\overline{X}$, називається *операцією доповнення множини*.

Графічне зображення результатів операцій віднімання множин, доповнення підмножини до множини і доповнення множини за допомогою кругів Ейлера дано на мал. 3, де результати цих операцій заштриховано.

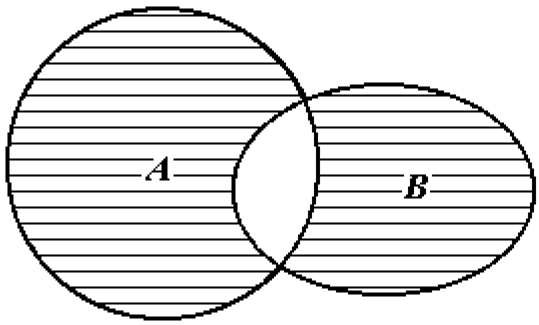


$X \setminus Y$ $\overline{Y}_x$ $\overline{X}$

Мал. 3.

Симетричною різницею довільних множин A і B (позначається $A \div B$) називається множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать одній і тільки одній з множин A чи B. Операція над множинами, при якій кожній парі множин A і B ставиться у відповідність їх симетрична різниця $A \div B$, називається *симетричним відніманням множин*.

На кругах Ейлера результат симетричного віднімання множин зобразиться так, як на мал. 1, де його заштриховано.

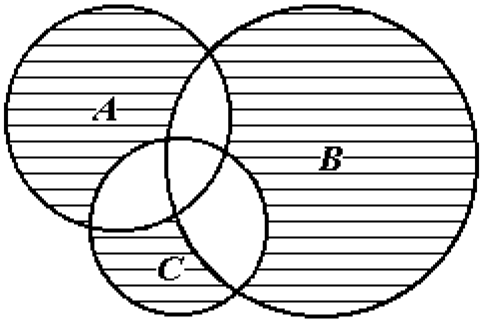


$A \div B$

Мал. 1.

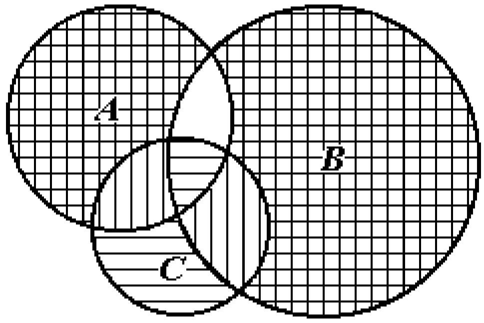
По аналогії дамо означення симетричної різниці більше як двох множин. *Симетричною різницею* множин A_1, A_2, A_3, ..., A_n $(n \geq 3)$ називається множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать одній і тільки одній з множин A_1, A_2, A_3, ..., A_n, і позначається $\div(A_1, A_2, A_3, ..., A_n)$.

На кругах Ейлера симетрична різниця трьох множин A, B і C зобразиться так, як показано на мал. 2, де вона заштрихована. А тепер розглянемо $(A \div B) \div C$ і зобразимо результат виконання операції за допомогою кругів Ейлера (мал. 3).



$\div(A, B, C)$ –

Мал. 2.



$A \div B$ – $(A \div B) \div C$ –

Мал. 3.

Порівнюючи мал. 2 і мал. 3, дійдемо висновку, що

$$\div(A, B, C) \neq (A \div B) \div C,$$

тобто результат терарної операції не збігається з результатом бінарної операції, яка виконується над трьома компонентами.

Порядок виконання операцій над множинами регулюється круглими дужками: спочатку виконуються операції у найглибших дужках, потім у наступних і т. д. Зовнішні дужки опускаються. Якщо ж дужки відсутні, то порядок виконання такий: доповнення до множини, що не є результатом операцій, переріз, об'єднання, віднімання.

1.3.3. Закони операції над множинами

Для операцій перерізу, об'єднання та доповнення над множинами мають місце певні властивості, які часто називають законами. Основні з них наведено у наступній теоремі.

Теорема 1. Для довільних множин A, B і C мають місце:

1. Властивості порожньої множини для перерізу і об'єднання:

$$A \cap \varnothing = \varnothing, \; A \cup \varnothing = A.$$

2. Властивості універсальної множини для перерізу і об'єднання:

$$A \cap U = A, \; A \cup U = U.$$

3. Комутативні закони операцій перерізу і об'єднання:

$$A \cap B = B \cap A,\ A \cup B = B \cup A.$$

4. Асоціативні закони операцій перерізу і об'єднання:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

5. Закони ідемпотентності операцій перерізу і об'єднання:

$$A \cap A = A,\ A \cup A = A.$$

6. Дистрибутивні закони, які пов'язують операції перерізу і об'єднання:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – дистрибутивність перерізу відносно об'єднання;

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – дистрибутивність об'єднання відносно перерізу.

7. Закон подвійного доповнення: $\overline{\overline{A}} = A$.

8. Закони де Моргана, які пов'язують операції перерізу, об'єднання і доповнення:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},\quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

1.3.4. Число елементів у об'єднанні кількох скінченних множин.

Теорема 2. Для довільних скінченних множин X і Y має місце рівність:

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|.$$

Коли множини X і Y не перетинаються, тобто $X \cap Y = \varnothing$, то з теореми 2 одержується наслідок.

Наслідок 1. Якщо множини X і Y – скінченні і не перетинаються, то має місце рівність:

$$|X \cup Y| = |X| + |Y|.$$

Теорема 4. Для довільних скінченних множин X, Y і Z має місце рівність:

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|.$$

Для того, щоб узагальнити наслідок 1 для кількох довільних скінченних множин, введемо деякі відношення між множинами. Говорять, що множини $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$

1) *перетинаються*, якщо вони мають спільні елементи, тобто існує принаймні один елемент, який належить усім цим множинам, отже,

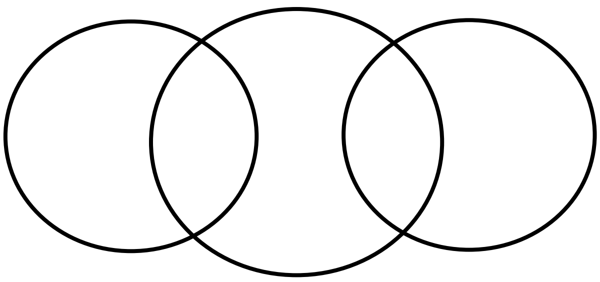
$$X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_n \cap ... \neq \varnothing;$$

2) *не перетинаються*, якщо вони не мають спільних елементів, тобто не існує елемента, який належав би всім цим множинам, отже,

$$X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_n \cap ... = \varnothing;$$

3) *попарно не перетинаються*, якщо будь-які з двох цих множин не мають спільних елементів, тобто, $X_i \cap X_j = \varnothing$ для всіх i та j таких, що $i \neq j$, i, j=1, 2, 3, ...

Очевидно, якщо множини попарно не перетинаються, то вони не перетинаються, але коли множини не перетинаються, то не обов'язково вони попарно не перетинаються. Це видно для випадку



трьох множин X, Y і Z, які зображено за допомогою кругів Ейлера на мал. 14.

Мал. 14.

<u>Теорема 5</u> (<u>правило суми</u>). Якщо множини X_1, X_2, ..., X_n – скінченні і попарно не перетинаються, то число елементів у їх об'єднанні дорівнює сумі числа елементів у цих множинах, тобто:

$$|X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n| = |X_1| + |X_2| + ... + |X_n|.$$

1.3.5. Поняття про розбиття множини на підмножини, які попарно не перетинаються (розбиття множини на класи). Розбиття множини на класи за допомогою однієї, двох і трьох властивостей її елементів.

Система непорожніх підмножин множини M називається *розбиттям множини M на підмножини, які попарно не* *перетинаються*, якщо кожний елемент множини M належить одній і тільки одній із підмножин системи, при цьому кожна підмножина системи називається *класом розбиття*.

У більшості випадків замість терміну "розбиття множини на підмножини, які попарно не перетинаються" користуються терміном "*розбиття множини на класи*".

Якщо система підмножин M_1, M_2, ... , M_n, ... множини M є розбиттям її на класи, то виконуються умови:

1) всі підмножини системи є не порожніми множинами;

2) підмножини системи попарно не перетинаються;

3) об'єднання всіх підмножин системи дорівнює множині M.

Розбиття множини на класи може проводитися за допомогою однієї, двох, трьох і більше властивостей. Розглянемо, як це здійснюється за допомогою однієї чи трьох властивостей, при цьому множину, розбиття якої проводиться, приймемо за універсальну множину.

Теорема 10. Довільну не порожню множину можна розбити не більше як на 2^n класів за допомогою n властивостей.

1.3.6. Кортеж та його основні характеристики. Впорядкована пара.

Під *кортежем* у математиці розуміють скінченну сукупність деяких об'єктів, які розміщені в цілком визначеному порядку, причому об'єкти в кортежі можуть повторюватися.

Об'єкти, з яких складається кортеж, називаються його *компонентами*, а число компонент кортежу – його *довжиною*.

Кортеж довжиною n, перша компонента якого a_1, друга – a_2, ..., n–та компонента – a_n, записується $(a_1, a_2, ..., a_n)$ або $<a_1, a_2, ..., a_n>$. Іноді розглядається кортеж довжиною 0, який називається *порожнім* і позначається ( ) або < > .

Два кортежі називаються *рівними*, якщо вони мають рівні довжини і відповідні їх компоненти збігаються. Кортежі довжиною два називаються *впорядкованими парами* або *парами*.

1.3.7. Декартів добуток множин. Закони декартового множення множин.

Декартовим добутком довільних множин X і Y називається множина всіх упорядкованих пар, перша компонента яких належить множині X, а друга – Y, позначається $X \times Y$.

Символічно означення декартового добутку множин X і Y запишеться

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \text{ і } y \in Y\}.$$

Множину пар декартового добутку двох множин називають його *графіком*. Взагалі, у математиці прийнято називати довільну множину пар *графіком*.

Правило, за яким кожній парі множин X і Y ставиться у відповідність їх декартів добуток $X \times Y$**,** називається *операцією декартового множення*.

На основі означення декартового добутку множин для довільної множини X має місце рівність

$$X \times \varnothing = \varnothing \times X = \varnothing.$$

Операція декартового множення множин некомутативна, тобто, що для довільних множин X і Y

$$X \times Y \neq Y \times X.$$

Очевидно, що операція декартового множення множин неасоціативна, тобто для довільних множин X, Y і Z

$$(X \times Y) \times Z \neq X \times (Y \times Z).$$

Операція декартового множення множин пов'язана з операціями перерізу, об'єднання і віднімання множин дистрибутивними законами, причому, зважаючи на її некомутативність, потрібно розглядати два їх види.

Теорема 6. Для довільних множин A, B і C мають місце рівності

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \quad \text{і}$$

$$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A);$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \quad \text{і}$$

$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A);$$

$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ і $(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$.

Поняття декартового добутку двох множин можна узагальнити на довільну скінченну сукупність множин. *Декартовим добутком довільних множин* X_1, X_2, ..., X_n, де $n \geq 2$, називається множина всіх кортежів довжиною n, перша компонента яких належить множині X_1, друга – X_2 і т. д., n–та компонента – множині X_n, позначається

$$X_1 \times X_2 \times ... \times X_n.$$

Якщо множини такі, що $X_1 = X_2 = ... = X_n = X$, то їх декартів добуток називається *декартовим n–тим степенем множини X* і позначається X^n.

При $n = 2$ множина X^2 називається *декартовим квадратом множини X*, а при $n = 3$ множина X^3 – декартовим кубом множини X. За означенням покладають $X^1 := X$ і $X^0 := \{(\ )\}$.

1.3.8. Число елементів у декартовому добутку кількох скінченних множин

У деяких задачах доводиться підраховувати число елементів у декартовому добутку кількох скінченних множин.

Розглянемо випадок двох множин. Коли множина A – скінченна і B – порожня, то за властивістю декартового добутку множин одержуємо

$$|A \times \varnothing| = |\varnothing| = 0 = |A|\cdot|\varnothing| = |A|\cdot|B|.$$

Коли ж множина A – скінченна, а B – одинична, то очевидно, що

$$|A \times B| = |A| = |A|\cdot 1 = |A|\cdot|B|.$$

Теорема 7. Число елементів у декартовому добутку двох скінченних множин A і B дорівнює добутку числа елементів у кожній з них, тобто

$$|A \times B| = |A|\cdot|B|.$$

Теорему 7 можна узагальнити на випадок кількох скінченних множин, її називають правилом добутку.

Теорема 8 (правило добутку). Число елементів у декартовому добутку скінченних множин A_1, A_2, ..., A_n дорівнює добутку числа елементів у кожній з них, тобто

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = |A_1|\cdot|A_2|\cdot...\cdot|A_n|.$$

Наслідок 2. Для довільних скінченної множини A і натурального числа n має місце рівність:

$$|A^n| = |A|^n.$$

1.4. Відношення між елементами двох множин

1.4.1. Відношення між елементами двох множин та його основні характеристики: області відправлення і прибуття; графи відношення, області визначення і значення, повні образи і прообрази елементів.

Усі арифметичні операції, операції над множинами є, по суті, відношеннями між елементами однієї чи кількох множин.

Довільна підмножина декартового добутку множин A і B називається *відношенням між елементами множин A і B*. При цьому множина A називається *областю* (*множиною*) *відправлення відношення*, множина B – *областю* (*множиною*) *прибуття відношення*. Множина впорядкованих пар, що складають відношення, називається його *графіком*.

Відношення між елементами двох множин у більшості випадків позначають малими грецькими або ж латинськими буквами ρ, φ, ψ, ..., f, g, h,... . Самі ці букви несуть подвійне навантаження: вони позначають відношення між елементами двох множин, а також і його графік. Те, що ρ є відношенням між елементами множин A і B, записується

$$\rho \subset A \times B.$$

Іноді замість терміну "відношення між елементами множин A і B" користуються терміном "відповідність між елементами множин A і B". Якщо пара (x, y) належить відношенню ρ між елементами множин A і B, тобто $(x, y) \in \rho$, то у теорії відношень говорять, що елемент x перебуває у відношенні ρ з елементом y або, що елементу x при відношенні ρ ставиться у відповідність елемент y і, крім запису $(x, y) \in \rho$, користуються ще й таким записом $x \rho y$. Якщо задано відношення $\rho \subset A \times B$, то:

1) *Повним образом будь-якого елемента з області відправлення* відношення називається множина елементів області прибуття відношення, з якими він перебуває у заданому відношенні. Повний

образ елемента $x \in A$ позначається $\rho(x)$:

$$\rho(x):= \{y \in B \mid x\,\rho\,y, \rho \subset A \times B\}.$$

Кожний елемент з множини $\rho(x)$ називається *образом елемента* x.

2) *Повним прообразом будь-якого елемента з області прибуття відношення* називається множина елементів області відправлення, які перебувають з ним у відношенні.

Повний прообраз елемента $y \in B$ позначається $\rho^{-1}(y)$.

$$\rho^{-1}(y):= \{x \in A \mid x\,\rho\,y, \rho \subset A \times B\}$$

Кожний елемент з множини $\rho^{-1}(y)$ називається *прообразом елемента* y.

3) Множина всіх перших компонент графіка відношення p називається його *областю визначення* і позначається $D(\rho)$. Означення можна сформулювати і так: множина тих елементів x із області відправлення відношення ρ, для яких їх повні образи є непорожніми множинами, називається *областю визначення відношення* ρ.

4) Множина всіх других компонент графіка відношення ρ називається його *областю значення* і позначається $E(\rho)$. Означення можна сформулювати і так: множина тих y із області прибуття відношення ρ, для яких їх повні прообрази є непорожніми множинами, називається *областю значення відношення* ρ. Очевидно, що

$$D(\rho) \subset A \quad \text{і} \quad E(\rho) \subset B.$$

5) Відношення називається *всюди визначеним*, якщо його область визначення збігається з областю відправлення.

6) Відношення називається *сюр'єктивним*, якщо його область значення збігається з областю прибуття.

Відношення ρ і φ між елементами множини A і B називаються *рівними*, якщо їх графіки збігаються, що записується $\rho = \varphi$.

1.4.2. Операції над відношеннями. Відношення протилежне і обернене даному.

Над відношеннями, визначеними між елементами множин A і B, як над множинами, можна виконувати всі теоретико-множинні операції та одержувати нові відношення між елементами цих множин. Зокрема, різниця між декартовим добутком множин A і B та відношенням $\rho \subset A \times B$ називається *протилежним відношенням до відношення* ρ і позначається $\overline{\rho}$. Отже,

$$\overline{\rho} := \{(x, y) \in A \times B \mid (x, y) \notin \rho \subset A \times B\}.$$

Оберненим відношенням до відношення $\rho \subset A \times B$ називається відношення, визначене між елементами множин B і A, графік якого складається з усіх пар (y, x) таких, що $(x, y) \in \rho$. Обернене відношення до відношення ρ позначається ρ^{-1}. Очевидно, що

$$D(\rho^{-1}) = E(\rho), \quad E(\rho^{-1}) = D(\rho), \quad (\rho^{-1})^{-1} = \rho.$$

Граф оберненого відношення одержується із графа даного відношення зміною напряму на всіх його дугах на протилежний. Точкові графіки даного і оберненого йому відношень між елементами двох числових множин симетричні відносно бісектриси першого і третього координатних кутів.

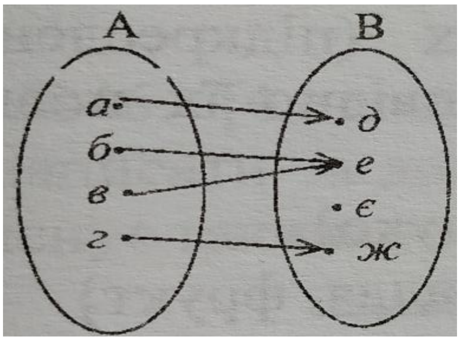
Композицією відношень $\rho \subset A \times B$ *і* $\varphi \subset B \times C$ називається відношення між елементами множин A і C, яке складається з тих і тільки тих пар $(x, z) \in A \times C$, для яких існує елемент y множини B такий, що $(x, y) \in \rho$ і $(y, z) \in \varphi$. Композиція відношень ρ і φ позначається $\rho * \varphi$.

1.4.3. Поняття про граф. Граф відношення.

Для наочного зображення відношення часто користуються графами, а у випадку числових множин ще й точковими графіками. *Графом* називається множина точок і відрізків, які попарно з'єднують деякі з цих точок. Точки називаються *вершинами графа*, а відрізки – його *ребрами*.

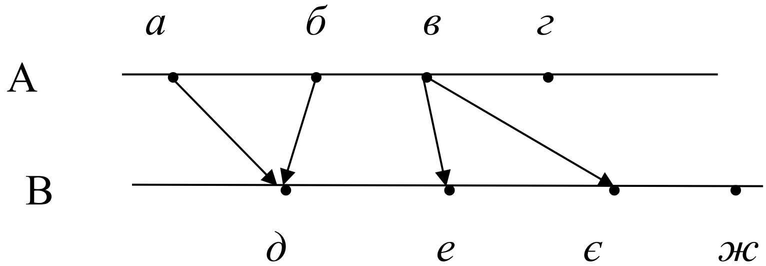
Граф, на ребрах якого вказано напрям, називається *орієнтованим*, а ребра – *дугами*. Ми розглядатимемо лише орієнтовані графи і називатимемо їх просто графами.

Відношення $\rho \subset A \times B$, графік якого є скінченною множиною, наприклад, відношення $\rho = \{$*(а; д), (б; д), (в; е), (в; ж)*$\}$ між елементами множин А = {*а, б, в, г*} та В = {*д, е, є, ж*} можна зобразити за допомогою графа. Візьмемо два круги Ейлера. В одному крузі зобразимо точками елементи множини А, а в іншому – елементи множини В, якщо пара $(x, y) \in \rho$, то проводимо дугу, яка починається у вершині x і закінчується у вершині y (мал. 1). Коли виконати таку побудову для всіх пар графіка відношення, то одержиться фігура, яка називається *графом відношення*. За графом відношення легко встановити основні характеристики відношення.



Мал. 1

Множини можна зображати й іншими плоскими геометричними фігурами. Якщо їх зобразити прямими, то вершини графа розміщуються на прямих. Тоді граф відношення ρ матиме вигляд, як показано на малюнку 2.

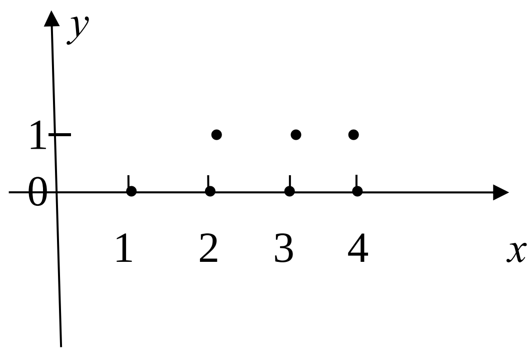


Мал. 2

1.4.4. Точковий графік відношення між елементами двох числових множин.

Якщо задано відношення $\rho \subset A \times B$ і множини A та B є числовими, то як і у випадку декартового добутку, розглядають координатну площину і по осі Ox відмічають елементи множини A, а по осі Oy – елементи множини B, через кожну з одержаних точок проводять прямі, перпендикулярні до координатних осей, і серед точок, які одержуються у результаті перетину цих прямих, вибирають ті, координати яких рівні парам відношення. Вибрані точки і складають *точковий графік відношення*.

Якщо $\rho = \{(1;\ 0),\ (2;\ 0),\ (2;\ 1),\ (3;\ 1),\ (4;\ 0),\ (4;1)\}$ є графіком відношення між елементами множин $X = \{1, 2, 3, 4\}$ і $Y = \{0, 1\}$, то точковий графік цього відношення матиме вигляд, як на малюнку 3.



Мал. 3

1.4.5. Способи задання відношень.

Існують різні способи задання відношень:

1) графіком, тобто множиною пар,
2) різними видами таблиць,
3) графом,
4) характеристичною властивістю пар, що належать графіку відношення,
5) точковим графіком, якщо множини числові.

Взагалі кажучи, способами 1), 2) і 3) зручно користуватися тоді, коли графік відношення є скінченною множиною.

1.5. Відношення на множині

1.5.1 Відношення на множині та його основні характеристики. Особливості графа відношення на множині. Способи задання відношень на множині.

Якщо відношення ρ визначене між елементами двох рівних множин A і B, тобто коли $A = B$, або, що те саме, області відправлення і прибуття відношення ρ збігаються, то говорять про *відношення між елементами множини A*, яке також називають *відношенням на множині A.* Для нього зберігаються ті ж характеристики, що й для відношення між елементами двох множин.

Означення відношення між елементами множини можна дати незалежно від поняття про відношення між елементами двох множин. Довільна підмножина декартового квадрату множини називається *відношенням між елементами цієї множини* або *відношенням на цій множині*. Якщо ρ відношення на множині A, то це записується $\rho \subset A^2$.

Граф відношення на множині має особливості:

1) оскільки області прибуття і відправлення збігаються, то вершинами графа відношення є елементи однієї і тієї ж множини;

2) дуги графа можуть починатися і закінчуватися в одній і тій же вершині, такі дуги називаються *петлями* і на них напрям можна не вказувати;

3) якщо дві різні вершини графа з'єднуються двома дугами, напрями яких протилежні, то для спрощення дві дуги замінюють однією і називають її *подвійною*;

4) граф, у якому проведено всі можливі дуги, називається *повним*.

1.5.2. Основні властивості відношень на множині: рефлективність і антирефлексивність, симетричність і антисиметричність, транзитивність і зв'язність.

Говорять, що відношення ρ між елементами множини A має:

1) *рефлексивну властивість*, якщо кожний елемент множини A перебуває у відношенні ρ сам із собою (на графі у кожній вершині є петля);

2) *антирефлексивну властивість* якщо жоден елемент множини A не перебуває у відношенні ρ сам із собою (на графі відсутні петлі);

3) *симетричну властивість*, якщо для будь-яких елементів x і y множини A з того, що x перебуває у відношенні ρ з y випливає, що y перебуває у відношенні ρ з x(на графі всі дуги подвійні);

4) *антисиметричну властивість*, якщо для будь-яких елементів x

і y множини A з того, що x перебуває у відношенні ρ з y і y перебуває у відношенні ρ з x випливає, що $x = y$ (на графі відсутні подвійні дуги);

5) *транзитивну властивість*, якщо для будь-яких елементів x, y і z множини A з того, що x перебуває у відношенні ρ з y і y перебуває у відношенні ρ з z випливає, що x перебуває у відношенні ρ з z(на графі, якщо три вершини з'єднані дугами, то аналогічно додаванню векторів);

6) *властивість зв'язності*, якщо для довільних елементів x і y множини A має місце принаймні одне з трьох відношень: x перебуває у відношенні ρ з y, y перебуває у відношенні ρ з x, або x дорівнює y (на графі між двома різними вершинами проведена принаймні одна дуга).

Антисиметричну властивість відношення можна сформулювати і так: відношення ρ має *антисиметричну властивість*, якщо для будь-яких різних елементів x і y множини A з того, що x перебуває у відношенні ρ з y випливає, що y не перебуває у відношенні ρ з x. Відношення, які мають рефлексивну, антирефлексивну, симетричну, антисиметричну, транзитивну властивості та властивість зв'язності відповідно називають *рефлексивним*, *антирефлексивним*, *симетричним*, *антисиметричним*, *транзитивним* і *зв'язним*.

<u>Задача 2</u>. Побудувати граф і точковий графік відношень ρ, ρ^{-1} і $\overline{\rho}$ між елементами множини $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, якщо $x\,\rho\,y$ тоді і тільки тоді, коли x ділиться на y, тобто $x \vdots y$. Встановити властивості цих відношень.

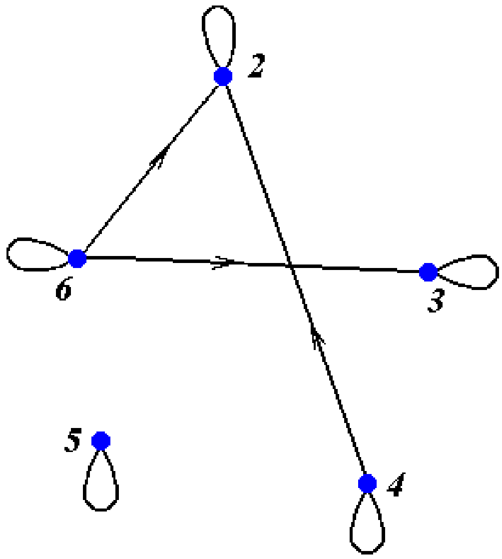
► 1. Для розв'язування задачі знайдемо декартів квадрат множини A, який зручно записати у вигляді таблиці:

$$\begin{array}{l}
\underline{(2, 2)}, (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),\\
(3, 2), \underline{(3, 3)}, (3, 4), (3, 5), (3, 6)\\
\underline{(4, 2)}, (4, 3), \underline{(4, 4)}, (4, 5), (4, 6)\\
(5, 2), (5, 3), (5, 4), \underline{(5, 5)}, (5, 6)\\
\underline{(6, 2)}, \underline{(6, 3)}, (6, 4), (6, 5), \underline{(6, 6)}.
\end{array}$$

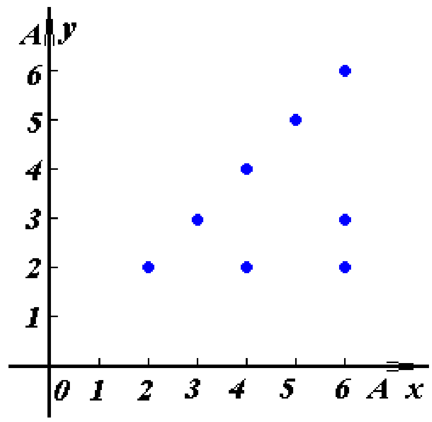
2. Знаходимо графік відношення ρ. Щоб не записувати його, підкреслимо у декартовому квадраті множини A ті пари, які

складають графік відношення.

Будуємо граф (мал. 3) і точковий графік (мал. 4) відношення ρ.



Мал. 3.



Мал. 4.

Відношення ρ:

1) рефлексивне, бо у кожній вершині його графа є петля;

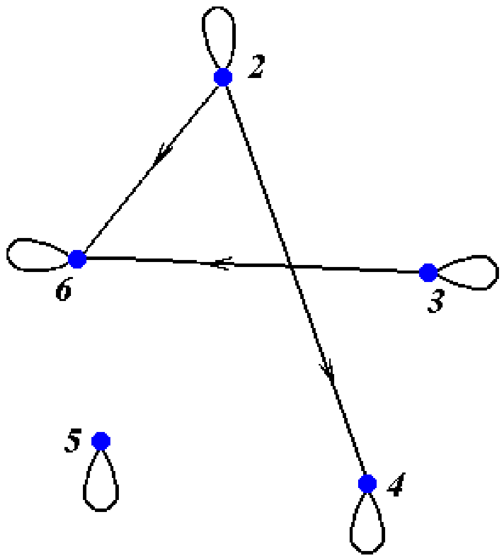
2) антисиметричне, бо подвійних дуг, крім петель, його граф не має;

3) транзитивне, бо для довільних елементів x, y і z множини A, якщо $x \vdots y$ і $y \vdots z$, то й $x \vdots z$.

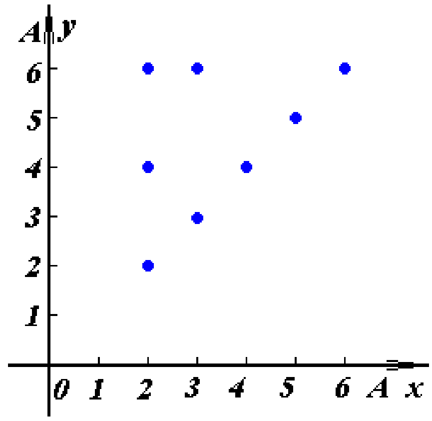
3. Знаходимо тепер графік відношення ρ^{-1}:

$$\rho^{-1} = \{(2, 2), (3, 3), (2, 4), (4, 4), (5, 5), (2, 6), (3, 6), (6, 6)\}.$$

Будуємо граф і точковий графік відношення ρ^{-1}, мал. 5 і 6 відповідно. Точкові графіки відношень ρ і ρ^{-1} симетричні відносно бісектриси першого і третього координатних кутів, а їх графи відрізняються лише напрямком дуг. Отже, відношення ρ^{-1} має ті ж властивості, що й відношення ρ, а саме: воно рефлексивне, антисиметричне і транзитивне.



Мал. 5.



Мал. 6.

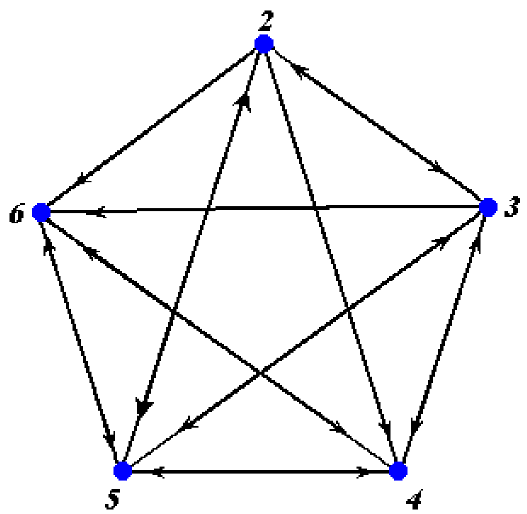
4. На основі означення відношення протилежного даному одержуємо, що непідкреслені пари у декартовому квадраті множини *A* будуть складати граф відношення $\overline{\rho}$.

Будуємо граф (мал. 7) і точковий графік (мал. 8) відношення $\overline{\rho}$.

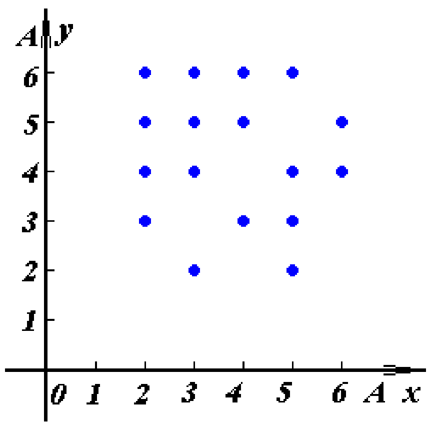
Відношення $\overline{\rho}$:

1) антирефлексивне, бо на його графі відсутні петлі;

2) зв'язне, бо на його графі довільні дві різні вершини з'єднані принаймні однією дугою. ◀



Мал. 7.



Мал. 8.

Із прикладу видно, що задане відношення ρ і обернене йому відношення ρ^{-1} мають одні і ті ж самі властивості. Взагалі, має місце теорема.

Теорема 1. Якщо відношення на множині має деякі із перерахованих властивостей 1) – 6), то й обернене йому відношення має ті ж самі властивості.

Властивість симетричного відношення виражається такою теоремою.

Теорема 2. Відношення між елементами множини тоді і тільки тоді збігається з оберненим йому відношенням, коли воно симетричне.

1.5.3. Відношення еквівалентності з розбиттям множини на класи.

Відношення на множині називається *відношенням еквівалентності*, якщо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне.

Якщо ρ – відношення еквівалентності на множині A і a – довільний елемент множини A, то повний образ елемента a при відношенні ρ називається *класом елементів еквівалентних елементу* a або просто *класом еквівалентності* і позначається K_a:

$$K_a := \{x \in A \,|a \,\rho\, x\}.$$

З означення класу еквівалентності випливає, що кожний клас еквівалентності є непорожньою множиною, бо відношення еквівалентності рефлексивне, тобто $a \,\rho\, a$, а тому $a \in K_a$. Основні властивості відношення еквівалентності описуються двома наступними теоремами.

Теорема 3. Якщо ρ – відношення еквівалентності на множині A, то для довільних двох класів еквівалентності має місце одне і тільки одне із відношень: або ці класи не перетинаються, або вони збігаються. Коли ρ – відношення еквівалентності на множині A і K_a – клас еквівалентності, то будь-який елемент з цього класу називається його *представником*.

Теорема 4. Кожне відношення еквівалентності на множині задає єдине розбиття цієї множини на класи. Навпаки, кожне розбиття множини на класи задає єдине відношення еквівалентності на цій множині.

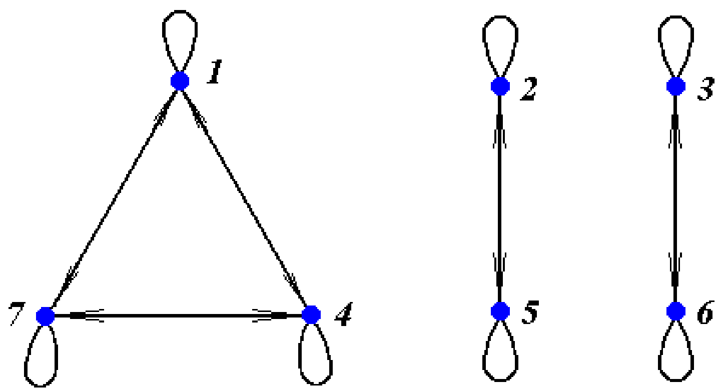
Граф відношення еквівалентності є об'єднанням кількох повних графів. Навпаки, якщо граф деякого відношення на множині розпадається на кілька повних графів, то воно є відношенням еквівалентності.

З точки зору відношення еквівалентності всі елементи одного класу еквівалентності мають однакові властивості, що дає можливість вивчати властивості одного елемента і поширювати їх на всі елементи класу. А тому воно відіграє важливу роль не тільки у математиці, а й у будь-якій іншій науці.

Прикладами відношення еквівалентності є: відношення паралельності прямих на площині чи у просторі; відношення рівності чи подібності геометричних фігур; відношення "бути жителем однієї країни" на множині людей Землі, що проживають на даний час.

Задача 3. Відношення ρ – "число x має ту ж саму остачу при діленні на 3, що й число y", задане на множині. $A = \{x \in N \mid x \leq 7\}$. Побудувати граф відношення ρ. Довести, що ρ – відношення еквівалентності і записати всі класи еквівалентності.

► Побудуємо граф відношення ρ (мал. 9).



Мал. 9.

Відношення ρ є відношенням еквівалентності, бо його граф складається з трьох повних графів.

Кожний з трьох одержаних графів задає клас еквівалентності, а саме: $K_1 = \{1, 4, 7\}$, $K_2 = \{2, 5\}$, $R_0 = \{3, 6\}$. ◄

1.5.4. Відношення порядку та його види.

Відношення на множині називається *відношенням порядку*, якщо воно антисиметричне і транзитивне.

Виділяють певні види відношень порядку. Відношення порядку на множині називається:

1) *відношенням нестрогого порядку*, якщо воно рефлексивне;

2) *відношенням строгого порядку*, якщо воно антирефлексивне;

3) *відношенням часткового порядку*, якщо воно незв'язне;

4) *відношенням лінійного порядку*, якщо воно зв'язне.

Множина, з визначеним на ній відношенням порядку, називається *впорядкованою множиною даним відношенням* або просто *впорядкованою множиною*. У залежності від видів відношення порядку розрізняють і види впорядкованих множин.

Одна і та ж множина може бути по різному впорядкована. Наприклад, множину натуральних чисел N можна впорядкувати за допомогою таких відношень:

1) відношення "x ділиться на y ($x \vdots y$)" є відношенням нестрогого часткового порядку;

2) відношення "x менше y ($x < y$)" є відношенням строгого лінійного порядку;

3) відношення "x менше або дорівнює y ($x \le y$)" є відношенням нестрогого лінійного порядку.

Якщо множина A впорядкована відношенням ρ, тоді

1) говорять, що *елемент z лежить між елементами x і y*, якщо ці три елементи різні і $x\,\rho\,z$ та $z\,\rho\,y$, записують $x\,\rho\,z\,\rho\,y$;

2) елементи x і y називаються сусідніми, якщо вони різні, $x\,\rho\,y$ і не існує елемента, який лежить між ними, при цьому елемент x називається *попереднім до y*, а елемент y – *наступним за x*. Наприклад, на множині натуральних чисел N, впорядкованої відношенням "менше", число 2 лежить між числами 1 і 3, числа 1 і 2 будуть сусідніми, причому 1 є попереднім до 2, а число 2 буде наступним за 1.

1.6. Функції та відображення. алгебраїчні операції та алгоритми

1.6.1. Поняття функції та її основні характеристики.

Відношення φ між елементами множин A і B називається *функціональним відношенням між елементами множин A і B* (або *функцією з множини A у множину B*), якщо кожному елементу множини A ставиться у відповідність не більш як один елемент множини B, тобто повний образ кожного елемента із області відправлення відношення φ містить не більше одного елемента. Оскільки функція є окремим видом відношення між елементами двох множин, то для неї зберігаються ті ж характеристики, що й для відношень. Одна із особливостей термінології, пов'язаної із поняттям функції, полягає у тому, що довільний елемент $x \in D(\varphi)$ називають *аргументом функції* або *незалежною змінною*, а $y \in E(\varphi)$ – *залежною змінною*. Для y прийнято ще й позначення $\varphi(x)$, внаслідок того, що повний образ елемента $x \in D(\varphi)$ складається із одного елемента y, записується $y = \varphi(x)$ або $\varphi(x) = y$.

Якщо φ – функція із множини A у множину B і множини A та B рівні, то говорять про *функцію у множині A*. Функція у множині дійсних чисел називається *числовою функцією*.

Числові функції, області визначення яких є множина натуральних чисел N (або множина цілих невід'ємних чисел N_0), називаються *числовими послідовностями*. Для числових послідовностей замість запису $y = \varphi(x)$ часто користуються записом y_n і числова послідовність записується (y_n), де $n = 1, 2, 3, \ldots$ або (y_n), де $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Функція, як окремий вид відношення, може бути задана тими ж способами, що й будь-яке відношення, а саме:

1) множиною пар, тобто графіком;

2) таблицею;

3) графом;

4) характеристичною властивістю пар її графіка.

Числові функції можна задати ще й так:

1) за допомогою точкового графіка на координатній площині;

2) виразом, в якому вказується, в якій послідовності і які операції треба виконати над аргументом, щоб одержати значення функції. Такий спосіб задання функції називається *аналітичним*.

1.6.2. Відображення та їх види.

Функція називається *всюди визначеною*, якщо її область визначення збігається з областю відправлення. Всюди визначена функція з множини A у множину B називається *відображенням множини A у множину B*, записується φ: $A \to B$ або $A \xrightarrow{\varphi} B$. Означення відображення можна дати і незалежно від поняття функції, а саме: відношення φ між елементами множин A і B називається *відображенням множини A у множину B*, якщо кожному елементу із множини A ставиться у відповідність один елемент із множини B.

Відображення, у якого область відправлення дорівнює області прибуття, називається *відображенням множини у себе*.

Відображення φ множини A у множину B називається:

1) *сюр'єктивним* (*сюр'єкцією*), якщо його область значення дорівнює області прибуття;

2) *ін'єктивним* (*ін'єкцією*), якщо різні елементи області визначення мають різні образи;

3) *бієктивним* (*бієкцією*), якщо воно сюр'єктивне та ін'єктивне.

Сюр'єктивне відображення називають ще й *відображенням множини на множину*, а бієктивне – *взаємно однозначним відображенням множини на множину* або *взаємно однозначною відповідністю між елементами множин*.

Для кожного відображення $\varphi: A \to B$, як для відношення $\varphi \subset A \times B$, існує обернене відношення $\varphi^{-1} \subset B \times A$, яке здебільшого не є відображенням множини B у множину A.

<u>Теорема 1</u>. Обернене відношення $\varphi^{-1} \subset B \times A$ до відображення φ: $A \to B$ є відображенням множини B у множину A тоді і тільки тоді,

коли φ – бієкція.

При застосуванні відображень корисними є їх властивості, пов'язані з операціями над множинами і відношеннями між ними.

1.6.3. Рівнопотужні множини. Потужність множини. Теорема про об'єднання рівнопотужних множин.

Довільні множини A і B називаються *рівнопотужними*, якщо вони або порожні, або існує бієктивне відображення множини A на множину B, позначається $A \sim B$ і читається "множина A рівнопотужна множині B" або "множини A і B рівнопотужні".

Теорема 4. Відношення рівнопотужності множин є відношенням еквівалентності.

Клас рівнопотужних множин, якому належить множина A, називається *потужністю* множини A і позначається $|A|$.

Для скінченної множини потужність ототожнюється з числом елементів у ній. Отже, довільні скінченні множини рівнопотужні тоді і тільки тоді, коли вони мають однакове число елементів. Поняття рівнопотужності множин дає можливість виясняти, чи однаково "багато" елементів мають нескінченні множини. При порівнянні нескінченних множин за їх потужностями, на відміну від скінченних множин, виникають певні труднощі. Доведено, що:

1) кожна нескінченна множина має власну підмножину, яка їй рівнопотужна;

2) існують нескінченні нерівнопотужні множини.

Наприклад, множина натуральних чисел N рівнопотужна множині всіх парних натуральних чисел і нерівнопотужна множині дійсних чисел R.

Теорема 5. Для довільних множин A_1, A_2, B_1, B_2, якщо

$$A_1 \sim A_2,\ \ B_1 \sim B_2,$$

$$A_1 \cap B_1 = \varnothing,\quad A_2 \cap B_2 = \varnothing, \text{ то}$$

$$A_1 \cup B_1 \sim A_2 \cup B_2.$$

1.6.4. Функції прямопропорційної і оберненопропорційної залежності, їх властивості і графіки.

Пряма і обернена пропорційності належать до найпростіших функцій. До розгляду прямої пропорційності приводять задачі про залежність між двома додатними величинами, при якій із збільшенням (зменшенням) однієї із них у кілька разів друга також збільшується (зменшується) у стільки ж разів. А до розгляду оберненої пропорційності приводять задачі про залежність між двома додатними величинами, при якій із збільшенням (зменшенням) однієї з них у кілька разів друга зменшується (збільшується) у стільки ж разів. Залежність між периметром квадрата і довжиною його сторони є прикладом прямої пропорційної залежності, бо із збільшенням (зменшенням) одного з них у кілька разів у стільки ж разів збільшується (зменшується) друге з них. Залежність же між додатним числом і оберненим до нього числом є прикладом обернено пропорційної залежності, бо із збільшенням (зменшенням) одного з них у кілька разів, у стільки ж разів зменшується (збільшується) друге з них. Площа квадрата і довжина його сторони не знаходяться в жодній з вище названих залежностей, бо із збільшенням (зменшенням), наприклад, довжини сторони квадрата в k разів, його площа збільшується (зменшується) не в k разів, а в k^2 разів.

Такі залежності на множині дійсних чисел дають можливість сформулювати поняття прямої і оберненої пропорційності.

Відношення в множині дійсних чисел, при якому кожному дійсному числу x ставиться у відповідність дійсне число y таке, що

$$y = kx,$$

де $k \neq 0$ – задане дійсне число, називається *прямо пропорційною залежністю між змінними x і y* (*функцією прямої пропорційності*).

Відношення у множині дійсних чисел, при якому кожному дійсному числу x ставиться у відповідність дійсне число y, таке що

$$y = \frac{k}{x},$$

де $k \neq 0$ – задане дійсне число, називається *оберненою пропорційною залежністю між змінними x* і *y* (*функцією оберненої пропорційності*).

1.6.5. Бінарні алгебраїчні операції.

Деякі види відношень, що вивчаються у різних математичних науках, називаються алгебраїчними операціями. Такими відношеннями, наприклад, є арифметичні операції, вивчення яких починається уже з перших років навчання у школі. Замість терміну "бінарна алгебраїчна операція" будемо користуватися терміном "операція" там, де це не приводить до непорозумінь.

Операцією на множині A називається відображення декартового квадрата множини A у множину A.

Операцією у множині або *частковою операцією у множині* A називається функція з декартового квадрата множини A у множину A. Позначатимемо операції символами $*$, $\circ$, $\top$, $\perp$, ... Якщо на множині A визначено операцію $*$ і результат її застосування до елементів x і y, взятих у такому порядку, дає елемент z, то це записують $x*y = z$; елементи x і y називають *компонентами операції*, відповідно x – *першою*, y – *другою*, а z – *результатом* операції.

Операції над дійсними числами часто називають *діями*.

Конкретні операції багато у чому відрізняються одна від іншої, але деякі з них мають і ряд спільних властивостей. Операція $*$ на множині A називається:

1) *асоціативною*, якщо для довільних елементів x, y і z множини A має місце рівність

$$(x*y)*z = x*(y*z).$$

2) *комутативною*, якщо для довільних елементів x і y множини A має місце рівність

$$x*y = y*x.$$

Якщо операція $*$ асоціативна на множині A, то при її виконанні можна опускати дужки, тобто замість $(x*y)*z$ або $x*(y*z)$ писати $x*y*z$, і поширити операцію на n компонент, де $n \geq 3$ при умові, що порядок компонент не змінюється.

Якщо операції $*$ і $\circ$ визначені на множині A, то операція $*$ називається:

1) *дистрибутивною зліва відносно операції* $\circ$, якщо для

довільних елементів x, y і z множини A має місце рівність $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$;

2) *дистрибутивною справа відносно операції* $\circ$, якщо для довільних елементів x, y і z множини A має місце рівність $(y \circ z) * x = (y * x) \circ (z * x)$;

3) *дистрибутивною відносно операції* $\circ$, якщо вона дистрибутивна справа і зліва.

Якщо операція $*$ комутативна, то для її дистрибутивності відносно операції $\circ$ достатньо розглядати лише одну з рівностей

$$x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z),$$

$$(y \circ z) * x = (y * x) \circ (z * x).$$

Приклади:

1) Операції множення та додавання дійсних чисел комутативні та асоціативні; операція множення дистрибутивна відносно додавання, але операція додавання не дистрибутивна відносно множення, бо

$$2 + (3 \cdot 4) \neq (2 + 3) \cdot (2 + 4).$$

2) Операція піднесення до степеня на множині натуральних чисел не комутативна і не асоціативна, бо

$$2^3 \neq 3^2, \qquad (2^3)^4 \neq 2^{(3^4)}.$$

3) Операції перерізу і об'єднання множин комутативні, асоціативні та дистрибутивні одна відносно другої.

4) Операція віднімання множин не комутативна.

Якщо на множині A визначена комутативна операція $\top$ і для довільних елементів a і b множини A існує єдиний елемент x такий, що

$$b \top x = a, x \top b = a,$$

то цим самим на множині A задається операція $\perp$ така, що

$$a \perp b = x.$$

У цьому випадку операція $\top$ називається *оборотною на множині* A, а операція $\perp$ називається *оберненою до операції* $\top$ *на* *множині A*. Якщо операція $\perp$ обернена до операції $\top$ на множині A, то за означенням для довільних елементів a і b множини A

$$b \top (a \perp b) = (a \perp b) \top b = a.$$

У випадку, коли для деяких, але не для всіх, елементів a і b, порушується вимога існування або єдиності елемента x такого, що

$$b \perp x = a,$$

то говорять, що операція $\top$ *оборотна у множині A*, а операція $\perp$ називається *оберненою до операції* $\top$ *у множині A*.

Наприклад:

1) Операція додавання є оборотною на множині цілих чисел Z і необоротною у множині натуральних чисел N. Оберненою операцією до додавання є операція віднімання.

2) Операція множення є оборотною на множині додатних раціональних чисел Q_+ і оборотною у множині раціональних чисел Q. Оберненою до множення є операція ділення.

Обернена операція $\perp$, очевидно, не є новою незалежною операцією: вона є похідною від операції $\top$.

Елемент $e \in A$ називається *нейтральним* елементом відносно операції $\top$, визначеної на множині A, якщо

$$\forall\, a \in A: a \top e = a \wedge e \top a = a.$$

Число 0 є нейтральним елементом відносно операції додавання цілих чисел, а число 1 – відносно їх множення.

Порожня множина $\varnothing$ є нейтральним елементом відносно операції об'єднання множин, а універсальна множина U – відносно операції перерізу всіх її підмножин.

Множина може і не містити нейтрального елемента відносно операції, яка визначена на ній. Наприклад, у множині парних цілих чисел визначена операція множення, але число одиниця, як нейтральний елемент відносно множення, у ній не міститься.

1.6.6. Поняття про алгоритми. Основні властивості алгоритмів.

Одним з найбільших досягнень математики XX ст. є створення теорії алгоритмів. Назва науки – теорія алгоритмів – говорить про те, що предметом її вивчення є алгоритм. Термін "алгоритм" походить від латинської форми написання імені узбецького математика IX ст. Мухаммед бен Муса аль-Хорезмі, який сформулював правила виконання арифметичниих операцій над числами у десятковій системі числення. Поняття алгоритму у його загальному виді належить до числа неозначуваних понять математики.

Під *алгоритмом* розуміють точне керівництво (точний опис, правило) про виконання у певному порядку системи операцій, не обов'язково математичних, необхідних для виконання деякої роботи або розв'язування задачі певного класу. Не завжди точне керівництво буде алгоритмом, а лише тоді, коли воно має такі властивості:

1. **Дискретність** – алгоритм повинен розчленовуватися на скінченну кількість кроків, які мають бути результативними.

2. **Елементарність кроків** – правила отримання кожного наступного результату на основі попередніх повинні бути зрозумілими для виконавця, не обов'язково людини.

3. **Детермінованість** – на кожному кроці отримується результат, який однозначно визначається даними або отриманими попередньо результатами.

4. **Направленість** – повинна існувати вказівка, що розуміти під результатом алгоритму, коли на деякому кроці із попередніх даних результат не отримується.

5. **Масовість** – алгоритм повинен застосовуватися до різних задач певного класу.

Алгоритми задаються по-різному, зокрема: формулами, таблицями, словесно, графічно.

У процесі навчання учні знайомляться з багатьма алгоритмами. Одними із перших таких алгоритмів є, наприклад, алгоритми виконання арифметичних операцій у десятковій системі числення.

Побудова алгоритму для розв'язування будь-якої задачі з довільної галузі людської діяльності вимагає від людини глибоких знань у цій галузі. На пошуки алгоритму розв'язування деяких задач учені затрачають багато часу. Але коли алгоритм створений, то розв'язування задач за готовим алгоритмом не вимагає ніяких інших розумових операцій, крім тих, що пов'язані з строгим виконанням кроків алгоритму. Тому його виконавцем може бути і машина. Зважаючи на це, для математики важливе не знання алгоритму, а його побудова і доведення, що за допомогою нього розв'язується будь-яка задача з певного класу. Алгоритми є важливою частиною кожної науки, але ними не вичерпується її зміст.

Не для кожного класу задач можна побудувати алгоритм. Наприклад, не існує алгоритму побудови за допомогою циркуля і лінійки квадрата, площа якого рівна площі заданого круга.

Зауваження . У початковій школі термін "алгоритм" не використовується, замість нього часто вживається термін "правило". Цей термін має різні значення, зокрема, його використовують як синонім понять "означення", "теорема", "аксіома" та "алгоритм". Учитель початкової школи повинен знати, в якому розумінні вжито термін "правило", бо від цього залежить методика його вивчення.

1.6.7. Комбінаторні задачі. Правила суми і добутку.

Комбінаторними задачами називаються задачі про обчислення числа можливих підмножин або кортежів, які складаються з елементів деякої скінченної множини або множин, у відповідності із заданими умовами. Розділ математики, в якому вивчаються комбінаторні задачі, називається *комбінаторикою* або *комбінаторним аналізом*.

У § 3 були сформульовані теорема 5 про підрахунок числа елементів у об'єднанні кількох скінченних множин, які попарно не перетинаються (правило суми), і теорема 8 про число елементів у декартовому добутку кількох скінченних множин (правило добутку). Ними користуються при розв'язуванні багатьох комбінаторних задач. Для потреб комбінаторики їх формулюють по-іншому.

Правило суми. Число можливих виборів одного елемента із кількох скінченних множин, які попарно не перетинаються, дорівнює сумі числа елементів цих множин.

Правило добутку. Число можливих виборів одного кортежу довжиною n, компоненти якого вибираються з однієї або кількох скінченних множин, дорівнює добутку числа можливих виборів кожної компоненти кортежу при умові, що підрахунок числа можливих виборів кожної наступної компоненти здійснюється після того, як зроблено підрахунок виборів всіх попередніх компонент.

РОЗДІЛ 2. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

2.1. Логіка висловлень

2.1.1. Поняття про твердження. Математичні твердження та їх види.

Людина отримує знання про навколишній світ за допомогою спостережень, дослідів і міркувань, тобто мислення. Мислення є надзвичайно складний процес, який вивчається багатьма науками. Однією з них є *формальна логіка*, що розглядає форми і закони мислення. Застосування математичних методів у логіці привело до створення *математичної* або *символічної логіки*.

Результатом процесу мислення є думка. **Думка** фіксує істотне, закономірне в різноманітності об’єктів навколишнього світу.

Думка лежить в основі тверджень. Отже, **твердження (судження)** – думка, в якій виділяється певний об’єкт, встановлюється його властивості або зв’язок з іншими об’єктами.

Одне із завдань математичної логіки – з'ясування правильності міркувань.

2.1.2. Висловлювання, логічне значення висловлення. Логічні сталі. Прості і складені висловлення. Пропозиційні змінні.

Висловленням називається твердження, про яке можна сказати, що воно тільки або істинне, або хибне. *Вигук* і *запитання* не є висловленням.

Прикладами висловлень у математиці є числові рівності і нерівності, аксіоми і теореми, тоді як означення вже не є висловленнями.

Висловлення утворюються з інших висловлень за допомогою виразів, серед яких виділяють такі: "неправильно, що …", "не …", "і", "або", "якщо …, то …", "… тоді і тільки тоді, коли …" та їх синонімів. Ці вирази називаються *пропозиційними зв'язками*. Крім цього із тверджень утворюються висловлення за допомогою виразів виду "для всіх …" і "існують …" та їх синонімів, які називаються *кванторами* (від лат. *quantum* – скільки).

Пропозиційні зв'язки і квантори називаються *логічними сталими*.

Висловлення називається *простим*, якщо воно не містить логічних сталих, і *складеним* – у протилежному випадку.

Будь-які прості висловлення називаються *висловлювальними* (*пропозиційними*) *змінними* і позначаються малими латинськими літерами p, q, r, ….

Просте висловлення може набувати тільки одне із двох значень: або "істина", або "хиба", вони позначаються відповідно "1" чи "0" і називаються *логічними* (*істинносними*) *значеннями висловлення*.

Кожна логічна зв'язка породжує операцію логіки над висловленнями. Розділ математичної логіки, в якому вивчаються висловлення та операції над ними, називається *логікою висловлень*.

Складене висловлення також набуває тільки одне з логічних значень, що однозначно визначається логічними значеннями висловлень, з яких побудоване дане висловлення за допомогою операцій логіки висловлень. Будь-які висловлення позначаються великими писаними латинськими буквами A, B, C, ...

2.1.3. *Операції заперечення, кон'юнкції, диз'юнкції та еквіваленції над висловленнями.*

Операції логіки висловлень можна описати за допомогою *таблиць істинності* (*логічних значень*), де зазначається, яких логічних значень набуває складене висловлення при різних логічних значеннях простих висловлень, що входять до його складу.

Запереченням довільного висловлення називається висловлення, яке набуває логічного значення "1" тоді і тільки тоді, коли дане висловлення набуває логічного значення "0". Заперечення висловлення p позначається $\overline{p}$ і читається "неправильно, що p" або "не p".

Таблиця істинності для заперечення буде такою:

p	$\overline{p}$
0	1
1	0

Операція на множині висловлень, при якій кожному висловленню A ставиться у відповідність заперечення $\bar{A}$, називається *операцією заперечення висловлень*.

Кон'юнкцією (від лат. *conjunctio* – зв'язок, об'єднання) довільних двох висловлень називається висловлення, яке набуває логічного значення "1" тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення мають логічне значення "1". Кон'юнкція висловлень p і q записується $p \wedge q$ і читається "p і q". Операція на множині висловлень, при якій кожній упорядкованій парі висловлень A і B ставиться у відповідність їх кон'юнкція $A \wedge B$, називається *операцією кон'юнкції висловлень*.

Означення кон'юнкції двох висловлень можна узагальнити на довільну кількість висловлень, а саме: *кон'юнкцією висловлень* називається висловлення, яке набуває логічне значення "1" тоді і тільки тоді, коли всі висловлення мають логічне значення "1". Позначається кон'юнкція висловлень $p_1, p_2, \ldots, p_n$ $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$ або $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} p_i$.

Диз'юнкцією (від лат. *disjungo* – роз'єдную, розрізняємо) довільних двох висловлень називається висловлення, яке набуває логічного значення "0" тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення мають логічне значення "0". Диз'юнкція висловлень p і q записується $p \vee q$ і читається: "p або q".

Означення диз'юнкції двох висловлень можна узагальнити на довільну кількість висловлень, а саме: *диз'юнкцією висловлень* називається висловлення, яке набуває логічного значення "0" тоді і тільки тоді, коли всі висловлення мають логічне значення "0". Позначається диз'юнкція висловлень $p_1, p_2, \ldots, p_n$ $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$ або $\overset{n}{\underset{i=1}{\vee}} p_i$.

Імплікацією (від лат. *implico* – тісно зв'язую) довільних висловлень p і q називається висловлення, яке набуває логічного значення "0" тоді і тільки тоді, коли p має логічне значення "1", а q – "0". Імплікація висловлення p і q записується $p \to q$ і читається: "якщо p, то q". В імплікації $p \to q$ висловлення p називається *умовою імплікації*, а q – *висновком* (*наслідком*) *імплікації*.

Еквіваленцією (від лат *aequivalens* – рівноцінний) довільних двох висловлень p і q називається висловлення, яке набуває логічного значення "1" тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення приймають однакові логічні значення. Еквіваленція висловлень p і q записується $p \leftrightarrow q$ і читається: "p тоді і тільки тоді, коли q".

Означення операцій диз'юнкції, імплікації, і еквіваленції двох висловлень аналогічне означенню операції кон'юнкції двох висловлень.

Таблиця істинності для кожної з операцій має такий вигляд:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

2.1.4. Формули логіки висловлень. Таблиці логічних значень формули. Логічна структура складеного висловлення.

Якщо у складеному висловленні кожне просте висловлення замінити висловлювальною змінною, а пропозиційні зв'язки – відповідними операціями логіки висловлень, то одержиться вираз, який називається *формулою логіки висловлень* або просто *формулою*. Про формулу логіки висловлень говорять, що вона задає (визначає) *логічну структуру висловлення*. Означення *формули* можна уточнити так:

1) кожна висловлювальна змінна є формулою;

2) якщо A і B – формули, то формулами є $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \leftrightarrow B$;

3) ніякі інші записи, крім тих, які утворені за 1) і 2) не є формулами.

У загальному випадку формули логіки висловлень позначаються великими писаними латинськими буквами A, B, C, … і, якщо потрібно, в дужках вказуються змінні, які входять у формулу, при цьому вважається, що змінні у формулі строго лінійно впорядковані, тобто вони утворюють кортеж, який називається *кортежем* (*набором*) *змінних*.

Порядок виконання операцій у формулі регулюється круглими дужками: спочатку виконуються операції у найглибших дужках, потім – у наступних і т. д. Якщо дужки відсутні, то порядок виконання операцій такий: заперечення над висловлювальною змінною, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація і еквіваленція. У логіці висловлень, як в алгебрі для виразів, прийнято називати формулу назвою останньої операції у ній.

Якщо у формулу входить n змінних, то набір значень змінних є кортежем довжиною n, і кожна змінна набуває, незалежно від інших змінних, двох значень "0" чи "1", а тому за правилом добутку, різних наборів значень змінних буде 2^n. Обчислення логічних значень формули на всіх наборах значень змінних записується у вигляді таблиці, яка має 2^n рядків і називається *таблицею логічних значень формули* або *таблицею істинності формули*.

2.1.5. *Тотожно істинні (логічні закони) і тотожно хибні формули.*

Формула логіки висловлень називається:

1) *нейтральною*, якщо вона набирає кожне з логічних значень;

2) *тотожно хибною* або *суперечливою*, якщо на всіх наборах значень змінних вона набирає логічне значення "0";

3) *тотожно істинною* або *тавтологією*, якщо на всіх наборах значень змінних вона набирає логічне значення "1".

У логіці особливу роль відіграють тотожно істинні формули, їх ще називають *логічними законами* або *законами логіки*. Окремі логічні закони мають свої назви і широко використовуються у міркуваннях. Назвемо деякі з них.

1) $p \to p$ – закон тотожності;

2) $p \vee \overline{p}$ – закон виключення третього;

3) $\overline{p \wedge \overline{p}}$ – закон несуперечності;

4) $(p \to q) \wedge p \to q$ – правило висновку;

5) $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$ – правило силогізму;

6) $(p \to q) \leftrightarrow (\overline{q} \to \overline{p})$ – закон контрапозиції;

7) $(p \wedge q \to r) \leftrightarrow (p \wedge \overline{r} \to \overline{q})$ – закон розширеної контрапозиції.

Усі ці закони доводяться за допомогою побудови їх таблиць істинності.

<u>Теорема 1</u>. Якщо у тотожно істинній формулі $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ із n змінними кожну змінну на всіх місцях її входження замінити відповідно формулами A_1, A_2, …, A_n, то одержана формула буде тотожно істинною.

2.1.6. *Рівносильні формули. Властивості операції логіки висловлень.*

Два висловлення називаються *рівносильними*, якщо вони мають однакові логічні значення. Очевидно, що відношення рівносильності на множині висловлень є відношенням еквівалентності і воно розбиває її на два класи: клас істинних висловлень і клас хибних висловлень.

Довільні дві формули логіки висловлень називаються *рівносильними* (*логічно еквівалентними*), якщо на всіх наборах значень змінних, що входять до їх складу, вони приймають рівні логічні значення. Рівносильність формул A і B записується $A \equiv B$ і читається: "формула A рівносильна формулі B" або "формули A і B рівносильні".

Окремі рівносильності виражають закони операцій логіки висловлень. Вкажемо основні з них.

1. Закони для констант:

$p \wedge 0 \equiv 0, \qquad p \vee 0 \equiv p,$

$p \wedge 1 \equiv p, \qquad p \vee 1 \equiv 1,$

$p \wedge \overline{p} \equiv 0, \qquad p \vee \overline{p} \equiv 1.$

2. Закон подвійного заперечення:

$$\overline{\overline{p}} \equiv p.$$

3. Комутативні закони:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p, \qquad p \vee q \equiv q \vee p.$$

4. Асоціативні закони:

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r), \qquad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r).$$

5. Закони ідемпотентності:

$$p \wedge p \equiv p, \qquad p \vee p \equiv p.$$

6. Дистрибутивні закони, що пов'язують операції кон'юнкції та диз'юнкції:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r), \qquad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

7. Закони де Моргана (правила заперечення кон'юнкції і диз'юнкції):

$$\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}, \qquad \overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}.$$

8. Правило виключення імплікації:

$$p \to q \equiv \overline{p} \vee q.$$

9. Правила виключення еквіваленції:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p), \quad p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q}).$$

Закони для констант, подвійного заперечення, комутативності асоціативності та ідемпотентності безпосередньо випливають із означення операцій логіки висловлень. Доведення інших законів можна виконати, побудувавши таблиці істинності для формул, що входять у праву і ліву частини рівностей. Покажемо це на прикладі.

Задача. Довести одне із правил виключення еквіваленції:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p).$$

► Побудуємо таблиці істинності для формул, що входять у ліву і праву частини рівносильності.

p	q	$p \leftrightarrow q$			$(p \to q) \wedge (q \to p)$		
0	0		**1**		1	**1**	1
0	1		**0**		1	**0**	0
1	0		**0**		0	**0**	1
1	1		**1**		1	**1**	1

З таблиці за означенням рівносильності формул одержуємо

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p).$$ ◄

З кожною імплікацією $p \to q$ пов'язані ще три імплікації:

$q \to p$ – імплікація обернена даній;

$\overline{p} \to \overline{q}$ – імплікація протилежна даній;

$\overline{q} \to \overline{p}$ – імплікація обернена до протилежної даній або імплікація протилежна до оберненої даній.

Таблиці істинності всіх чотирьох імплікацій будуть такими:

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$\overline{p} \to \overline{q}$	$\overline{q} \to \overline{p}$
0	0	**1**	**1**	1 **1** 1	**1**
0	1	**1**	**0**	1 **0** 0	**1**
1	0	**0**	**1**	0 **1** 1	**0**
1	1	**1**	**1**	0 **1** 0	**1**

Аналізуючи таблиці, дійдемо висновків:

1) операція імплікації висловлень не комутативна, тобто

$$p \to q \not\equiv q \to p,$$

2) мають місце рівносильності

$$p \to q \equiv \overline{q} \to \overline{p}, \quad q \to p \equiv \overline{p} \to \overline{q},$$

які називаються *законами контрапозиції*.

З означення рівносильності формул логіки висловлень та відношення еквівалентності одержується теорема.

Теорема 2. Відношення рівносильності на множині формул логіки висловлень є відношенням еквівалентності.

Відношення рівносильності дозволяє замінити формулу або її частину, яка також є формулою, на рівносильну їй і отримувати формулу, рівносильну заданій. Це дає можливість доводити рівносильність формул логіки висловлень так, як в алгебрі доводяться тотожності.

Задача. Довести, що має місце рівносильність

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q}).$$

Теорема 3. Дві довільні формули рівносильні тоді і тільки тоді, коли їх еквіваленція є тотожно істинною формулою.

2.1.7. Відношення логічного слідування на множині висловлень.

У більшості випадків нові знання одержуються з відомих раніше знань за допомогою міркувань, які проводяться на основі поняття логічного наслідку.

Формула B називається *логічним наслідком формул* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, якщо формула B набуває логічного значення "1" на всіх тих наборах значень змінних, на яких формули $A_1, A_2, \ldots, A_n$ мають логічне значення "1". Запис $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ означає, що формула B є логічним наслідком формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$, при цьому самі формули $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються *посилками* або *гіпотезами*, а формула B – *наслідком* або *висновком*. Замість терміну "формула B є логічним наслідком формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$" користуються терміном "з формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ логічно випливає формула B".

Відношення логічного слідування пов'язано з поняттям тотожно істинної формули.

<u>Теорема 4.</u> З формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ логічно випливає формула B тоді і тільки тоді, коли формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$ є тотожно істинною.

Із теореми 4 випливає наслідок.

<u>Наслідок 1</u>. З формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ логічно випливає формула B тоді і тільки тоді, коли з формули $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ логічно випливає формула B.

На основі наслідку 1 відношення логічного слідування має такі властивості.

1. Для довільної формули логіки висловлень A маємо $A \models A$. Отже, відношення логічного слідування рефлексивне.

2. Для довільних формул логіки висловлень A і B якщо $A \models B$ і $B \models A$, то $A \equiv B$.

Це своєрідна форма властивості антисиметричності відношення логічного слідування.

3. Для довільних формул логіки висловлень A, B і C, якщо $A \models B$ і $B \models C$, то $A \models C$.

Отже, відношення логічного слідування на множині формул логіки висловлень транзитивне.

4. Неважко переконатися у тому, що відношення логічного слідування на множині формул логіки висловлень незв'язне.

З одержаних результатів маємо наслідок.

<u>Наслідок 2</u>. Відношення логічного слідування на множині формул логіки висловлень є відношенням нестрогого часткового порядку.

Теорема 4 дає можливість по-іншому підійти до тлумачення логічних законів, які є імплікаціями. За теоремою 4 у таких законах це рівносильно тому, що висновок імплікації є логічним наслідком її

умови. Наприклад, правило висновку, якщо скористуватися теоремою 1, можна записати так:

$$(A \to B) \wedge A \to B.$$

На основі теореми 4 це рівносильно тому, що

$$A \to B,\ A \models B. \qquad (1)$$

Записом (1) правила висновку користуються у випадку, коли мають теорему $A \to B$ і якимось чином встановлюють, що висловлення A має логічне значення "1". Тоді на основі (1) робиться висновок, що й висловлення B має логічне значення "1".

Задача. Встановити, чи є формула $p \leftrightarrow q$ логічним наслідком формул $p \to q$ і $p \vee \overline{q}$.

► Згідно теореми 4 складаємо формулу

$$(p \to q) \wedge (p \vee \overline{q}) \to (p \leftrightarrow q).$$

До її складу входять дві змінні, а тому її таблиця істинності має $2^2 = 4$ рядки. На кожному наборі значень змінних обчислюємо результати операцій логіки висловлень у порядку, який задається формулою.

p	q	$(p \to q) \wedge (p \vee \overline{q}) \to (p \leftrightarrow q)$				
0	0	1	1	1 1	**1**	1
0	1	1	0	0 0	**1**	0
1	0	0	0	1 1	**1**	0
1	1	1	1	1 0	**1**	1

У таблиці остаточний результат виділено. З таблиці видно, що формула
$(p \to q) \wedge (p \vee \overline{q}) \to (p \leftrightarrow q)$ тотожно істинна, а тому за теоремою 4

$$(p \to q), (p \vee \overline{q}) \models (p \leftrightarrow q).$$ ◄

2.2. Логіка предикатів

2.2.1. Поняття про зміну в математиці. Предикат (висловлювальна форма) та його основні характеристики.

Під *змінною* в математиці розуміють знак (символ) у деякому запису, замість якого можна підставляти елементи певної множини, які називаються значенням змінної, а сама множина – областю визначення змінної.

Крім висловлень можна виділити твердження, що містять одну або кілька змінних і перетворюються у висловлення при заміні змінних їх значеннями. Такі твердження називаються *предикатами* (*висловлювальними формами*).

Розрізняють *одномісні, двомісні* і т. д., *n-місні* предикати у залежності від того, скільки змінних входить до їх складу. Прикладами предикатів у математиці є рівняння і нерівності із змінними.

Будь-які одномісні, двомісні і т. д., n–місні предикати позначаються відповідно $P(x)$, $Q(x, y)$, $R(x, y, z)$, … , $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Якщо ж предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n–місний, то його *областю визначення* називається множина $M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, де M_1, M_2, …, M_n є областями визначення змінних x_1, x_2, …, x_n відповідно. У випадку, коли множини M_1, M_2, …, M_n рівні, тобто $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = M$, то часто говорять, що предикат визначений на множині M, хоч в дійсності він визначений на множині M^n. Розглянемо приклад. Рівняння

$$x + 2y - z = 5, \text{ де } x, y, z \in R,$$

є тримісним предикатом. Коли надати x значення 1, то одержиться двомісний предикат

$$1 + 2y - z = 5 \text{ або, що те саме, } 2y - z = 4, \text{ де } y, z \in R.$$

При наданні значень $x = 1$ і $y = 2$ одержиться одномісний предикат $1 + 2 \cdot 2 - z = 5$ або, що те саме, $z = 0$, де $z \in R$.

При наданні ж значень $x = 1$, $y = 1$ і $z = 1$ отримаємо висловлення $1 + 2 \cdot 1 - 1 = 5$, тобто, $2 = 5$, яке буде хибним.

З кожним предикатом $P(x)$, визначеним на множині M, пов'язані:

1) *область істинності* I, тобто множина тих значень змінної з області визначення предиката, при яких він перетворюється в істинне висловлення;

2) *область хибності* X, тобто множина тих значень змінної з області визначення предиката, при яких він перетворюється у хибне висловлення.

Множини M, I і X пов'язані співвідношеннями

$$I \cup X = M \quad \text{і} \quad I \cap X = \varnothing.$$

Якщо предикат $P(x)$, визначений на множині M, то його області істинності і хибності часто позначаються відповідно I_P і $X_P = M \setminus I_p$.

2.2.2. *Тотожно істинні, тотожно хибні та рівносильні предикати.*

Предикат називається:

1) *тотожно істинним*, якщо його область істинності дорівнює області визначення;

2) *тотожно хибним*, якщо його область хибності дорівнює області визначення, тобто його область істинності є порожньою множиною.

Предикати $P(x)$ і $Q(x)$, визначені на множині M, називаються *рівносильними на ній*, якщо їх області істинності рівні. Рівносильність предикатів $P(x)$ і $Q(x)$ записується

$$P(x) \equiv Q(x),\ x \in M.$$

Властивості тотожної істинності, тотожної хибності і рівносильності предикатів істотно залежать від їх областей визначення. Наприклад, одномісні предикати

$$P(x) - \text{"}x - 2 = 0\text{"} \ \text{ і } \ Q(x) - \text{"}x^2 - 4 = 0\text{"}$$

рівносильні на множині натуральних чисел N і нерівносильні на множині цілих чисел Z, бо на множині N $I_P = I_Q = \{2\}$, а на множині Z $I_P = \{2\}$, але $I_Q = \{-2; 2\}$.

Аналогічно, як для формул логіки висловлень, одержуємо теорему.

Теорема 1. Відношення рівносильності для предикатів, визначених на одній і тій же множині, є відношенням еквівалентності.

2.2.3. Операції логіки висловлень над предикатами. Області істинності результатів цих операцій.

Предикати, як і висловлення, також набувають логічних значень"0" чи "1", тому над ними можна виконувати всі операції логіки висловлень.

Запереченням довільного одномісного предиката $P(x)$, визначеного на множині M, називається предикат, визначений на множині M, який набуває логічного значення "1" при тих і тільки тих x із множини M, при яких предикат $P(x)$ набуває логічного значення "0". Записується $\overline{P(x)}$ і читається "неправильно, що $P(x)$" або "не $P(x)$".

Операція на множині одномісних предикатів, визначених на множині M, при якій кожному предикату ставиться у відповідність його заперечення, називається *операцією заперечення предикатів*. Область істинності заперечення предиката дорівнює області хибності предиката, тобто

$$I_{\overline{P}} = X_P = M \setminus I_P .$$

Кон'юнкцією двох довільних одномісних предикатів, заданих на спільній області визначення, називається предикат, визначений на цій же множині, який набуває логічного значення "1" при тих і тільки тих значеннях змінної, при яких обидва предикати мають логічне значення "1".

Кон'юнкція предикатів $P(x)$ і $Q(x)$ записується $P(x) \wedge Q(x)$ і читається: "$P(x)$ і $Q(x)$".

Операція на множині одномісних предикатів із спільною областю визначення, при якій кожній упорядкованій парі предикатів ставиться у відповідність їх кон'юнкція, називається *операцією кон'юнкції предикатів*.

Область істинності є перерізом областей істинності цих предикатів, тобто

$$I_{P \wedge Q} = I_P \cap I_Q .$$

Поняття кон'юнкції двох одномісних предикатів із спільною областю визначення можна узагальнити для кількох одномісних предикатів.

Кон'юнкцією кількох одномісних предикатів, заданих на спільній області визначення, називається предикат, визначений на цій же множині, який набуває логічного значення "1" при тих і тільки тих значеннях змінної, при яких усі предикати приймають логічне значення "1".

Кон'юнкція предикатів $P_1(x)$, $P_2(x)$, …, $P_n(x)$ записується

$$P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge ... \wedge P_n(x) \quad \text{або} \quad \mathop{\wedge}_{i=1}^{n} P_i(x).$$

і читається: "$P_1(x)$ і $P_2(x)$ і … і $P_n(x)$".

У математиці часто кон'юнкцію кількох предикатів, особливо у випадку рівнянь або нерівностей із змінними, називають *системою предикатів* (відповідно *системою рівнянь* або *нерівностей із змінними*).

Диз'юнкцією двох довільних одномісних предикатів, заданих на спільній області визначення, називається предикат, визначений на цій же множині, який набуває логічного значення "0" при тих і тільки тих значеннях змінної, при яких обидва предикати мають логічне значення "0".

Диз'юнкція двох предикатів $P(x)$ і $Q(x)$ записується $P(x) \vee Q(x)$ і читається: "$P(x)$ або $Q(x)$".

Область істинності є об'єднанням областей істинності цих предикатів, тобто

$$I_{P \vee Q} = I_P \cup I_Q .$$

Поняття диз'юнкції двох одномісних предикатів можна узагальнити для кількох одномісних предикатів.

Диз'юнкцією кількох довільних одномісних предикатів, заданих на спільній області визначення, називається предикат, визначений на цій же множині, який набуває логічного значення "0" при тих і тільки тих значеннях змінної, при яких кожен із предикатів має логічне значення "0".

Диз'юнкція предикатів $P_1(x)$, $P_2(x)$, …, $P_n(x)$ записується

$$P_1(x) \vee P_2(x) \vee \ldots \vee P_n(x) \text{ або } \mathop{\vee}_{i=1}^{n} P_i(x)$$

і читається: "$P_1(x)$ або $P_2(x)$ або … $P_n(x)$".

У математиці часто диз'юнкцію предикатів, особливо, коли предикатами є рівняння або нерівності із змінними, називають *сукупністю предикатів* (*сукупністю рівнянь або нерівностей із змінними*).

Імплікацією одномісних предикатів $P(x)$ і $Q(x)$, визначених на множині M, називається предикат, визначений на множині M, який набуває логічного значення "0", при тих і тільки тих x з множини M, при яких предикат $P(x)$ має логічне значення "1", а предикат $Q(x)$ – "0".

Імплікація предикатів $P(x)$ і $Q(x)$ записується $P(x) \to Q(x)$ і читається: "якщо $P(x)$, то $Q(x)$". Як і для висловлень, в імплікації предикатів $P(x) \to Q(x)$ предикат $P(x)$ називається *умовою імплікації*, а предикат $Q(x)$ – *висновком*.

Щоб знайти область істинності імплікації предикатів, скористаємося правилом виключення імплікації

$$P(x) \to Q(x) \equiv \overline{P(x)} \vee Q(x).$$

Звідси на основі знаходження областей істинності заперечення і диз'юнкції предикатів отримуємо

$$I_{P \to Q} = I_{\bar{P} \vee Q} = I_{\bar{P}} \cup I_Q = X_P \cup I_Q.$$

Отже, $I_{P \to Q} = X_P \cup I_Q$.

Еквіваленцією двох довільних одномісних предикатів, визначених на спільній області визначення, називається предикат, визначений на цій же множині, який набуває логічного значення "1" при тих і тільки тих значеннях змінної, при яких обидва предикати мають рівні логічні значення.

Еквіваленція предикатів $P(x)$ і $Q(x)$ записується $P(x) \leftrightarrow Q(x)$ і читається: "$P(x)$ тоді і тільки тоді, коли $Q(x)$". Щоб знайти область істинності еквіваленції предикатів $P(x)$ і $Q(x)$, визначених на множині M, скористаємося одним із правил виключення еквіваленції, а саме:

$$P(x) \leftrightarrow Q(x) \equiv (P(x) \wedge Q(x)) \vee (\overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)}).$$

Звідси на основі знаходження областей істинності заперечення, кон'юнкції і диз'юнкції предикатів отримаємо

$$I_{P \leftrightarrow Q} = (I_P \cap I_Q) \cup (X_P \cap X_Q).$$

Аналогічно тому, як було сформульовано означення операції кон'юнкції двох одномісних предикатів, заданих на спільній області визначення, дається означення операцій диз'юнкції, імплікації та еквіваленції двох предикатів.

2.2.4. Кванторні операції над предикатами

Операція навішування квантора загальності полягає в тому, що довільному одномісному предикату $P(x)$, визначеному на множині M, ставиться у відповідність висловлення: "для всіх x з множини M має місце предикат $P(x)$", яке набуває логічного значення "1" тоді і тільки тоді, коли предикат $P(x)$ тотожно істинний на множині M, тобто, якщо область істинності предиката $P(x)$ дорівнює його області визначення.

Операція навішування квантора існування полягає у тому, що довільному одномісному предикату $P(x)$, визначеному на множині M, ставиться у відповідність висловлення: "існує x у множині M таке, що має місце предикат $P(x)$", яке набуває логічного значення "1" тоді і тільки тоді, коли область істинності предиката $P(x)$ є непорожньою множиною.

Символічно висловлення "для всіх x множини M має місце предикат $P(x)$" записується

$$\forall x \in M : P(x), \qquad (1)$$

а висловлення "існує x у множині M таке, що має місце предикат $P(x)$" –

$$\exists\, x \in M : P(x). \qquad (2)$$

Символи $\forall$ і $\exists$ називаються, відповідно, *квантором загальності* і *квантором існування*.

Операції навішування кванторів можна виконувати і над багатомісними предикатами. Змінні предиката, до яких застосовано квантори, називаються *зв'язаними*, всі інші змінні – *вільними*. З'ясуємо суть операції навішування кванторів для багатомісних предикатів на прикладі. На множині натуральних чисел N розглянемо двомісний предикат $P(x, y)$ – "$x < y$". Навісимо на нього квантор існування по змінній x, одержимо твердження

$$\exists x \in N : x < y,$$

в якому x є зв'язаною змінною, а y – вільною змінною. Якщо тепер на цей предикат навісити один із кванторів по вільній змінній, то одержимо уже висловлення. Наприклад:

$$\forall y \in N \ \exists x \in N : x < y,$$

яке буде хибним.

Задача. Із двомісного предиката $P(x, y)$ – "$x \le y$", визначеного на множині натуральних чисел N, за допомогою кванторних операцій побудувати всі можливі висловлення і встановити їх логічні значення.

► Навішуючи квантори по кожній змінній, одержимо такі висловлення:

1. $\forall x \in N \ \forall y \in N : x \le y$, 2. $\forall y \in N \ \forall x \in N : x \le y$,
3. $\exists x \in N \ \exists y \in N : x \le y$, 4. $\exists y \in N \ \exists x \in N : x \le y$,
5. $\forall x \in N \ \exists y \in N : x \le y$, 6. $\exists y \in N \ \forall x \in N : x \le y$,
7. $\forall y \in N \ \exists x \in N : x \le y$, 8. $\exists x \in N \ \forall y \in N : x \le y$.

Сформулюємо висловлення 1 – 8 словами і вкажемо їх логічне значення.

Висловлення 1 і 2 мають однаковий смисл і їх можна сформулювати так: "Кожне натуральне число не перевищує довільного натурального числа". Це хибне висловлення.

Також однаковий смисл мають висловлення 3 і 4, їх можна сформулювати так: "Існують натуральні числа, з яких одне не перевищує другого". Це висловлення істинне.

Висловлення 5 можна сформулювати так: "Для всіх натуральних чисел існує не менше за них натуральне число". Висловлення істинне.

Висловлення 6 можна сформулювати так: "Існує натуральне число, якого не перевищують всі натуральні числа". Висловлення хибне.

Висловлення 7 можна сформулювати так: "Для кожного натурального числа існує натуральне число, яке його не перевищує". Висловлення істинне.

Висловлення 8 можна сформулювати так: "Існує натуральне число, яке не перевищує довільного натурального числа, тобто існує найменше натуральне число". Висловлення істинне. ◄

За даним твердженням можна спростити запис навішування однойменних кванторів на багатомісний предикат, усі змінні якого мають одну і ту ж саму область визначення. Покажемо це на прикладі тримісного предиката $P(x, y, z)$, де $x, y, z \in M$. Висловлення, які одержуються із висловлення

$$\forall x \in M\ \forall y \in M\ \forall z \in M : P(x, y, z)$$

всіма можливими перестановками виразів $\forall\ x \in M$, $\forall\ y \in M$ і $\forall\ z \in M$, будуть рівносильними, а тому довільне з них прийнято записувати

$$\forall\ x, y, z \in M: P(x, y, z).$$

2.2.5. Правила побудови заперечення тверджень, що містять квантори.

Часто доводиться заперечувати твердження, які містять квантори. Розглянемо заперечення твердження такого виду

$$\forall\ x \in M: P(x).$$

Заперечимо його, тобто розглянемо твердження

$$\overline{\forall x \in M : P(x)}.$$

Словами воно сформулюється так: "Неправильно, що для всіх x множини M має місце предикат $P(x)$". Очевидно, що одержане твердження рівносильне такому: "Існує x у множині M таке, що має місце предикат не $P(x)$", яке символічно записується

$$\exists\, x \in M : \overline{P(x)}.$$

А тому

$$\overline{\forall x \in M : P(x)} \equiv \exists\, x \in M : \overline{P(x)}.$$

Аналогічно одержуємо, що

$$\overline{\exists x \in M : P(x)} \equiv \forall x \in M : \overline{P(x)}.$$

Проведені міркування доводять твердження, яке називається *правилом заперечення тверджень, що містять квантори*.

Щоб заперечити твердження, яке починається:

1) з квантора загальності, потрібно квантор загальності замінити на квантор існування і заперечити ту частину, яка йде за квантором;

2) з квантора існування, потрібно квантор існування замінити на квантор загальності і заперечити ту частину, яка йде за квантором.

► Розглянемо на множині натуральних чисел предикат $x \le y$. Тоді наше висловлення запишеться так

$$\exists\, y \in N \;\; \forall x \in N : x \le y.$$

За правилом заперечення тверджень, що містять квантори, одержимо

$$\overline{\exists\, y \in N \;\; \forall x \in N : x \le y} \equiv \forall y \in N \;\; \overline{\forall x \in N : x \le y} \equiv$$

$$\equiv \forall y \in N \;\; \exists\, x \in N : \overline{x \le y}.$$

Враховуючи, що $\overline{x \le y} \equiv x > y$, остаточно матимемо

$$\overline{\exists y \in N\; \forall x \in N : x \le y} \equiv \forall y \in N\; \exists x \in N : x > y.$$

2.2.6. Відношення логічного слідування на множині предикатів. Необхідні і достатні умови.

Якщо предикати $P_1(x)$, $P_2(x)$, …, $P_n(x)$, визначені на множині M, то предикат $Q(x)$ називається *логічним наслідком предикатів* $P_1(x)$, $P_2(x)$, …, $P_n(x)$, коли він набуває логічне значення "1" при всіх тих x множини M, при яких кожен із предикатів $P_1(x)$, $P_2(x)$, …, $P_n(x)$ приймає логічне значення "1". Записується

$$P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x) \models Q(x),\; x \in M.$$

Як і в логіці висловлень, користуються також терміном "з предикатів $P_1(x)$, $P_2(x)$, …, $P_n(x)$ логічно випливає предикат $Q(x)$".

<u>Теорема 2</u>. З предикатів $P_1(x)$, $P_2(x)$, …, $P_n(x)$ логічно випливає предикат $Q(x)$ тоді і тільки тоді, коли предикат

$$P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge \ldots \wedge P_n(x) \to Q(x),\;\; x \in M$$

тотожно істинний.

Наслідок 1. З предикатів $P_1(x)$, $P_2(x)$, …, $P_n(x)$ логічно випливає предикат $Q(x)$ тоді і тільки тоді, коли з предиката $P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge \ldots \wedge P_n(x)$ логічно випливає предикат $Q(x)$.

Теорема 3. З предиката $P(x)$ логічно випливає предикат $Q(x)$ тоді і тільки тоді, коли область істинності предиката $P(x)$ є підмножиною області істинності предиката $Q(x)$.

Теорема 4. З предиката $P(x)$ логічно випливає предикат $Q(x)$ тоді і тільки тоді, коли висловлення

$$\forall x \in M: P(x) \to Q(x)$$

істинне.

Теорема 5. Предикати $P(x)$ і $Q(x)$ рівносильні тоді і тільки тоді, коли кожний з них є логічним наслідком іншого.

Якщо предикати $P(x)$ і $Q(x)$, визначені на множині M, такі, що предикат $Q(x)$ є логічним наслідком предиката $P(x)$, то предикат $Q(x)$ називається *необхідною умовою для предиката* $P(x)$, а предикат $P(x)$ – *достатньою умовою для предиката* $Q(x)$. Необхідна умова може не бути достатньою, а достатня – необхідною.

Якщо з предиката $P(x)$ логічно випливає предикат $Q(x)$ і з предиката $Q(x)$ логічно випливає предикат $P(x)$, тобто вони рівносильні, то предикат $Q(x)$ називається *необхідною і достатньою умовою для предиката* $P(x)$, а предикат $P(x)$ – *необхідною і достатньою умовою для предиката* $Q(x)$.

Задача. Замість крапок поставте у реченні "для того, щоб натуральне число ділилося на 5, …, щоб воно ділилося на 10" один із трьох виразів "необхідно", "достатньо" або "необхідно і достатньо" так, щоб утворилося істинне висловлення. Відповідь обґрунтуйте.

► З даного речення можна вичленити такі два предикати: $P(x)$ – "натуральне число x ділиться на 5" і $Q(x)$ – "натуральне число x ділиться на 10". Областю визначення цих предикатів є множина натуральних чисел N. Область істинності предиката $P(x)$ є множина натуральних чисел, які кратні 5, а область істинності предиката $Q(x)$ є множина натуральних чисел, що кратні 10. Кожне число кратне 10, кратне і 5, але не кожне число кратне 5 буде кратне

10. Отже, область істинності предиката $Q(x)$ буде власною підмножиною області істинності предиката $P(x)$, а тому лише предикат $Q(x) \to P(x)$ є тотожно істинним на множині натуральних чисел. Значить, подільність натурального числа на 10 є достатньою умовою його подільності на 5. Тому у даному реченні замість крапок потрібно поставити слово "достатньо", а саме речення запишеться так: "для того, щоб натуральне число ділилося на 5, достатньо, щоб воно ділилося на 10". ◄

2.3. Міркування та перевірка їх правильності. поняття про теореми та їх доведення

2.3.1. *Поняття про міркування. Правильні і неправильні міркування.*

Знання, джерела одержання яких різні, можна поділити на безпосередні і опосередковані. *Безпосередні знання* є результатом прямої дії предметів і явищ на органи чуттів, їх прийнято називати *очевидними знаннями*. Щоб переконатися в істинності таких знань, досить послатися на певну річ або зазначити її наявність.

Але людина не завжди може здобути потрібні їй знання безпосереднім шляхом. Більшість знань, якими вона користується, є опосередкованими (вивідними), тобто здобутими у результаті зв'язного логічного міркування на основі існуючих знань, які узагальнюють попередній досвід і наукові дослідження. Отже, *опосередковані* (*вивідні*) *знання* – це знання, здобуті за допомогою міркувань на основі відомих, зафіксованих у твердженнях, знань.

Логічною формою вираження опосередкованих знань, як і безпосередніх, є твердження (судження), а формою здобуття – умовивід.

Умовиводом називається форма мислення, в якій з одного або кількох тверджень одержується (говорять також виводиться) нове твердження, яке містить у собі нові знання.

Форму або логічну структуру умовиводу становить певний спосіб сполучення окремих тверджень між собою. Кожний умовивід складається:

1) з тверджень, із яких робиться висновок, їх називають *посилками* (*гіпотезами, вихідними положеннями*) *умовиводу*;

2) твердження, яке виводиться з посилок, його називають *висновком* (*логічним наслідком*) *умовиводу*;

3) сам *вивід* (*виведення*), який визначає можливість переходу від наявних тверджень (посилок) до нового твердження (висновку).

При цьому використовуються обґрунтовуючи знання, роль яких у математиці виконують аксіоми, означення і теореми.

Серед різних видів умовиводів виділяють дедуктивні умовиводи. *Дедуктивним умовиводом* називається умовивід, за допомогою якого від загальних положень переходять до вужчих положень. Дедуктивний умовивід застосовується щоразу, коли потрібно розглянути якесь конкретне явище на основі вже відомих загальних положень і дістати щодо цього явища певний висновок. Отже, дедуктивним умовиводом користуються завжди, коли конкретний факт підводиться під загальне правило, а потім із загального правила дістають висновок щодо цього конкретного факту.

Прикладом дедуктивного умовиводу є "Натуральне число ділиться на 2 тоді і тільки тоді, коли воно закінчується парною цифрою. Число 5254 закінчується парною цифрою, отже, число 5264 ділиться на 2".

У даному умовиводі посилками є:

1. Натуральне число ділиться на 2 тоді і тільки тоді, коли воно закінчується парною цифрою.

2. Число 5264 закінчується парною цифрою.

Висновком умовиводу є: число 5264 ділиться на 2.

2.3.2. Перевірка правильності міркувань за допомогою кругів Ейлера або наведення контрприкладу.

Умовивід називається *правильним*, якщо завжди з істинності його посилок випливає істинність його висновку.

Якщо посилки умовиводу позначити A_1, A_2, …, A_n, а висновок – B, то схематично умовивід записується

$$\frac{A_1, A_2, ..., A_n}{B}. \qquad (1)$$

Виходячи із означень умовиводу і логічного слідування, маємо, що ці поняття у математичній логіці рівносильні, а тому у термінах математичної логіки схема (1) запишеться

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B. \qquad (2)$$

У математичній логіці правильні умовиводи називаються *правилами виведення*.

Кожне міркування складається з одного або більше умовиводів. Міркування називається *правильним*, якщо всі умовиводи у ньому правильні.

Отже, щоб перевірити правильність міркування, треба встановити, що всі умовиводи у ньому правильні. На мові математичної логіки це значить довести, що завжди з тверджень A_1, A_2, …, A_n логічно випливає твердження B незалежно від конкретного змісту самих тверджень.

Якщо умовивід можна записати за допомогою формул логіки висловлень, то один із методів перевірки його правильності ґрунтується на використанні таблиць істинності. Так, на основі законів логіки маємо, що правильними є умовиводи

$$\frac{A \to B, A}{B}, \quad \frac{A \to B, B \to C}{A \to C}, \quad \frac{A \wedge B}{A}, \quad \frac{A \vee \overline{B}}{A}, \quad \frac{A \to B, B \to A}{A \leftrightarrow B},$$

які в математичній логіці називаються відповідно: правилом висновку, правилом силогізму, правилом виключення кон'юнкції, правилом виключення диз'юнкції, правилом введення еквіваленції.

Для умовиводів, які містять предикати, такого методу не існує, але є деякі способи, за допомогою яких можна перевірити правильність умовиводів. Розглянемо деякі з них.

1. *Спосіб наведення контрприкладу*: щоб переконатися у тому, що умовивід неправильний, наводяться приклади конкретних предикатів, визначених на деякій множині, для яких посилки даного умовиводу є істинними, а наслідок – хибний. Взагалі,

контрприкладом називається приклад, що заперечує деяке загальне твердження.

Задача 1. З'ясувати правильність умовиводу: "Усі ромби – паралелограми. Деякі паралелограми – квадрати. Отже, деякі ромби – квадрати".

► У даному умовиводі можна виділити предикати:

$P(x)$ – "x – паралелограм", $R(x)$ – "x – ромб" і $Q(x)$ – "x – квадрат", $x \in M$, де M – множина чотирикутників.

Символічно умовивід запишеться

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x \in M : R(x) \to P(x) \\ \exists\, x \in M : P(x) \wedge Q(x)\end{array}}{\exists\, x \in M : R(x) \wedge Q(x)},$$

де над рискою записано посилки, а під рискою – висновок.

Покажемо, що цей умовивід неправильний. Дійсно, розглянемо на множині натуральних чисел предикати

$$P(x) - "x \,\vdots\, 5", \quad R(x) - "x \,\vdots\, 10" \text{ і } \quad Q(x) - "\overline{x \,\vdots\, 10}".$$

За наведеною схемою міркування запишеться так:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x \in N : (x \,\vdots\, 10) \to (x \,\vdots\, 5) \\ \exists\, x \in N : (x \,\vdots\, 5) \wedge (\overline{x \,\vdots\, 10})\end{array}}{\exists\, x \in N : (x \,\vdots\, 10) \wedge (\overline{x \,\vdots\, 10})}.$$

У ньому посилки істинні, а висновок хибний, а це означає, що міркування за такою схемою побудовані неправильно. ◄

2. *Перевірка правильності умовиводу за допомогою кругів Ейлера* ґрунтується на тому, що посилки і висновок умовиводу можуть бути записані у вигляді відношень між множинами або між множинами та їх елементами. Тоді, зображуючи ці відношення у вигляді кругів Ейлера і вважаючи посилки істинними, досліджують, чи завжди при цьому істинний висновок. Якщо виявиться, що висновок може бути хибним, то умовивід неправильний і ним користуватися не можна.

Задача 2. З'ясувати за допомогою кругів Ейлера правильність умовиводу: "Усі ромби – паралелограми. Деякі паралелограми – квадрати. Отже, деякі ромби – квадрати".

► Як і в попередній задачі міркування символічно запишеться так:

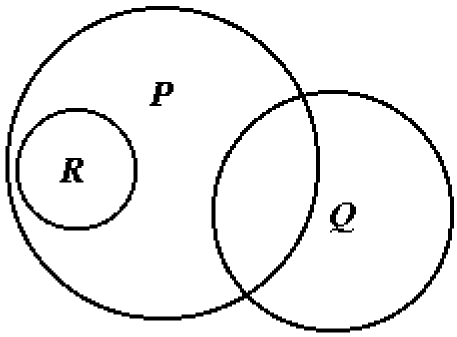
$$\frac{\begin{array}{l}\forall x \in M : R(x) \to P(x) \\ \exists\, x \in M : P(x) \wedge Q(x)\end{array}}{\exists\, x \in M : R(x) \wedge Q(x)}.$$

Якщо позначити *P, R* і *Q* множини істинності предикатів відповідно *P*(*x*), *R*(*x*) і *Q*(*x*), то на мові теорії множин міркування запишеться

$$\frac{\begin{array}{l}R \subset P \\ P \cap Q \neq \varnothing\end{array}}{R \cap Q \neq \varnothing.}$$

Тепер, вважаючи множини *P, R* і *Q* – довільними, але такими, що для них істинні посилки міркування, перевіряємо за допомогою кругів Ейлера, чи буде істинним висновок міркування.

З того, що $R \subset P$ і $P \cap Q \neq \varnothing$, ще не випливає, що $R \cap Q \neq \varnothing$. У цьому нас переконує мал. 1.



Мал. 1.

Отже, міркування за такою схемою неправильні. ◄

2.3.3. *Логічні задачі.*

При вивченні математики багато уваги приділяється розгляду задач, зокрема логічних, бо їх розв'язування сприяє не тільки глибокому засвоєнню теоретичного матеріалу, а й розвитку математичного мислення, просторової уяви, здатності до повноцінної аргументації.

Розглянемо деякі типи логічних задач та способи їх розв'язання.

1. Учні Володимир, Петро і Микола після виконання контрольної роботи сказали:

Володимир: "Я написав на 10 балів", Петро: "Я написав на 8 балів", Микола:" Я написав не на 10 балів".

Після перевірки з'ясувалося, що один із хлопців отримав 10 балів, другий – 9 балів, а третій – 8 балів. Скільки балів отримав кожний із хлопців, якщо відомо, що двоє правильно назвали свою оцінку, а один помилився?

► Задача на припущення, загальний принцип розв'язання якої полягає у тому, що припускається правильність чи хибність одного з тверджень задачі. Якщо припущення вступає у суперечність з умовою задачі, то воно – хибне і роблять припущення далі, - до тих пір, поки не знайдеться єдиний можливий варіант розв'язання. У даній задачі є три твердження:

1) Володимир написав роботу на 10 балів;
2) Петро написав роботу на 8 балів;
3) Микола не написав роботу на 10 балів.

З них тільки одне хибне. Якщо хибне твердження 1, а правильними будуть твердження 2 і 3, тоді виявиться, що на 10 балів не написав жодний з хлопців, що суперечить умові задачі.

Припустимо, що хибним є 3-є твердження. Тоді виявиться, що Володимир і Микола написали роботу на 10 балів, що також суперечить умові задачі.

Будемо вважати, що твердження 2 є хибним. Тоді 1 і 3 твердження будуть правильними. В такому випадку Володимир написав роботу на 10 балів, Петро – на 9 балів, а Микола – на 8 балів, інших варіантів бути не може.

Отже, можливий тільки такий варіант: Володимир написав роботу на 10 балів, Петро – на 9 балів, а Микола – на 8 балів. ◄

2. В одному класі уроки з математики, географії та ботаніки викладають три вчителі: Андрієнко, Петренко, Романенко. Визначити, хто з них який предмет викладає, якщо відомо:

1) всі троє – Петренко, учитель математики і Романенко йдуть разом зі школи додому;

2) вчитель географії старший за вчителя математики, а Петренко - наймолодший серед них.

► Це задача на метод виключення, при розв'язуванні якої доцільно використовувати таблицю, яка будується за правилом екстраполяції (у рядку і стовпці таблиці може бути лише один плюс) і виключаються випадки, що вступають у суперечність із умовою задачі. Таблицю складаємо так: по горизонталі записуємо прізвища вчителів, а по вертикалі – їх фах, або по горизонталі записуємо фах учителя, а по вертикалі – прізвище.

	Андрієнко	Петренко	Романенко
математик	+	–	–
географ	–	–	+
ботанік	–	+	–

За умовою задачі Петренко і Романенко не можуть бути математиками, отже, математиком є Андрієнко. Якщо Андрієнко математик, то Петренко не може бути географом, значить, він є ботаніком, а Романенко – географ. Таким чином, Андрієнко викладає математику, Петренко – ботаніку, а Романенко – географію. ◄

3. На трьох гілках сиділо 24 горобці. Коли з першої гілки перелетіло на другу 4 горобці, а з другої на третю – 3 горобці, то на всіх гілках їх стало порівну. Скільки горобців сиділо на кожній гілці спочатку?

► Задачі такого типу зручно розв'язувати з кінця. Остаточно на кожній гілці горобців стало порівну, тобто по 8 (24 : 3). Це сталося після того, як із другої гілки перелетіло на третю 3 горобці. Значить, до того, як з другої гілки перелетіло 3 горобці, на ній було 8 + 3 = 11 горобців, на першій – 8 горобців, а на третій – 8 – 3 = 5 горобців. До того, як з першої гілки на другу перелетіло 4 горобці, то на першій гілці було 8 + 4 = 12 горобців, а на другій – 11 – 4 = 7 горобців, а на третій – 5 горобців.

1 гілка	2 гілка	3 гілка
8	8	8
8	11	5
12	7	5

Для перевірки правильності розв'язку будемо міркувати так: на першій гілці сиділо 12 горобців, на другій – 7 горобців, а на третій – 5 горобців. Після того, як з першої гілки на другу перелетіло 4 горобці, на першій гілці залишилося 8 горобців, на другій стало 7 + 4 = 11 горобців, а на третій – 5 горобців. Коли ж після цього з другої гілки на третю перелетіло 3 горобці, то на першій так і залишилося 8 горобців, на другій – $11 - 3 = 8$ горобців, а на третій – $5 + 3 = 8$ горобців, тобто на кожній із гілок стало по 8 горобців. Отже, знайдені числа 12, 7, 5 задовольняють умову задачі. ◄

4. Два рибалки зварили юшку: у одного було 5 рибин, а у другого – 7. До них підійшов перехожий і попросив пригостити його юшкою. Рибалки погодились і юшку з рибою розділили порівну. Після обіду перехожий заплатив рибалкам 6 грн. Як розділити ці гроші між рибалками по справедливості?

► Задачі такого виду називаються задачами на рівний розподіл предметів, що випливає з їх змісту. Залежно від домовленості між людьми, внеску кожного із учасників, потрібно здійснити розподіл предметів чи грошей між тими, хто уклав угоду, по справедливості.

Перехожий заплатив за обід 6 грн., отже, вартість юшки, тобто обіду для трьох осіб, становить $6 \cdot 3 = 18$ грн. Юшка була зварена з $5 + 7 = 12$ рибин, тому ціна 1 рибини $18 : 12 = 1,5$ грн. Вартість 5 рибин $1,5 \cdot 5 = 7,5$ грн., а 7 рибин – $1,5 \cdot 7 = 10,5$ грн. Значить, перший рибалка повинен отримати $7,5 - 6 = 1,5$ грн., а другий – $10,5 - 6 = 4,5$ грн. ◄

5. Як за допомогою шалькових терезів без гир відважити 14 кг цукру, якщо у торбині є 16 кг цукру?

► Це задача на зважування. При розв'язуванні таких задач користуються правилом: можна заміняти один вантаж на інший, рівний за масою попередньому, або знімати з обох шальок терезів рівні за масою вантажі.

Цукор розсипають на дві шальки, з однієї шальки знімають 8 кг, а цукор із другої шальки розсипають на дві шальки. Знову знімають з однієї шальки 4 кг, а інші 4 кг розсипають на дві шальки. Тепер є 8 кг + 4 кг + 2 кг = 14 кг. ◄

2.4. Теореми та їх доведення

2.4.1. Теореми і їх будова. Твердження, що пов'язані з даною теоремою, яка записана в імплікативній формі.

Твердження, істинність яких доводиться на основі вже відомих істинних тверджень, у математиці називається *теоремами*. Іноді замість терміну "теорема" вживаються також терміни "закон", "властивість", "наслідок", "правило" тощо.

Більшість теорем символічно можна записати у вигляді імплікації предикатів, на змінні яких навішено квантори. Наприклад,

$$\forall\ x \in M\colon P(x) \to Q(x).$$

Це так званий *імплікативний* (*умовний*) *запис теореми*. У теоремі, записаній у такій формі, виділяють три частини.

1. *Пояснювальна частина*: у ній описується множина об'єктів, про які йде мова у теоремі. Символічно до пояснювальної частини слід віднести запис, який стосується кванторів, у даному випадку $\forall\ x \in M$.

2. *Умова теореми*: предикат, який є умовою імплікації, тобто $P(x)$.

3. *Висновок теореми*: предикат, який є висновком імплікації, тобто $Q(x)$.

Іноді при формулюванні теореми опускають пояснювальну частину і змінні, але їх завжди мають на увазі.

З кожною теоремою виду

$$\forall\ x \in M\colon P(x) \to Q(x)$$

пов'язані ще три твердження:

1) твердження, *обернене даній теоремі*

$$\forall\ x \in M\colon Q(x) \to P(x);$$

2) твердження, *протилежне даній теоремі*

$$\forall x \in M : \overline{P(x)} \to \overline{Q(x)}.$$

3) твердження, *обернене до протилежного даній теоремі* або *протилежне до оберненого даній теоремі*

$$\forall x \in M : \overline{Q(x)} \to \overline{P(x)}.$$

За законом контрапозиції рівносильними є твердження 1) і 2) та сама теорема і твердження 3). Звідси отримуємо, що твердження 3) є також теоремою, її називають *теоремою оберненою до протилежної даній* або *протилежною до оберненої даній*. Твердження, обернене даній теоремі, не завжди є теоремою, але коли воно є нею, то й друге твердження також буде теоремою, і їх тоді називають: 1) – *теорема, обернена даній*, 2) – *теорема, протилежна даній*.

Задача 3. Користуючись логічною і математичною символікою, записати теорему: "Рівнобедрений трикутник має вісь симетрії" у символічній формі. Встановити будову теореми. Записати у символічній формі і сформулювати словами твердження, які пов'язані з даною теоремою, та встановити їх логічні значення.

► Щоб встановити будову теореми і сформулювати твердження, пов'язані з нею, запишемо її так: "Якщо трикутник рівнобедрений, то він має вісь симетрії". Запис теореми словами не містить пояснювальної частини і змінних, але їх легко встановити за змістом теореми. Дійсно, у даній теоремі мова йде про довільні трикутники з множини M усіх трикутників. Отже, x – будь-який трикутник множини M, і теорема символічно запишеться так:

$$\forall\, x \in M: P(x) \to Q(x),$$

де предикат $P(x)$ – "x – рівнобедрений",

предикат $Q(x)$ – "x має вісь симетрії".

Дана теорема має таку будову:

1) пояснювальна частина: $\forall\ x \in M$;

2) умова теореми: $P(x)$;

3) висновок теореми $Q(x)$.

Твердження, обернене даній теоремі, символічно запишеться

$$\forall\, x \in M: Q(x) \to P(x).$$

Словами воно сформулюється: "Якщо трикутник має вісь симетрії, то він рівнобедрений".

Твердження, протилежне даній теоремі, символічно запишеться:

$$\forall x \in M : \overline{P(x)} \to \overline{Q(x)},$$

а словами: "Якщо трикутник не рівнобедрений, то він не має вісі симетрії".

Твердження, обернене протилежному до даної теореми, символічно запишеться:

$$\forall x \in M : \overline{Q(x)} \rightarrow \overline{P(x)},$$

а словами: "Якщо трикутник не має вісі симетрії, то він не рівнобедрений".

Усі твердження, пов'язані з даною теоремою, істинні. Отже, вони є теоремами. ◄

Теореми іноді формулюють у вигляді еквіваленції предикатів, на змінні якої навішено квантори. Логічна структура такої теореми

$$\forall\ x \in M\text{: } P(x) \leftrightarrow Q(x).$$

При формулюванні її словами квантори й змінні опускаються. Наприклад, натуральне число ділиться на 3 тоді і тільки тоді, коли сума його цифр ділиться на 3.

Теорема, яка записана у вигляді еквіваленції, на основі правила виключення еквіваленції рівносильна кон'юнкції двох теорем, записаних у імплікативній формі, а саме

$$(\forall\ x \in M\text{: } P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall\ x \in M\text{: } Q(x) \rightarrow P(x)).$$

Щоб встановити її істинність, треба довести істинність таких теорем

$$\forall\ x \in M\text{: } P(x) \rightarrow Q(x) \text{ і } \forall\ x \in M\text{: } Q(x) \rightarrow P(x).$$

РОЗДІЛ 3. ЦІЛІ ЧИСЛА

3.1. Різні підходи до побудови множини цілих невід’ємних чисел. теоретико-множинний підхід до побудови множини цілих невід’ємних чисел

3.1.1. Короткі історичні відомості про виникнення натурального числа і нуля.

Одне з основних понять математики – поняття числа, зокрема натурального. Виникнення поняття натурального числа – питання загальної культури людства. Його формування не можна простежити за безпосередніми письмовими джерелами. Про виникнення лічби і зумовлених нею понять можна судити на основі таких джерел:

1. Дослідження відсталих у культурному розвитку народів, що проводились у XVII–XX століттях.

2. Вивчення історичних пам'яток: художніх виробів, наскальних малюнків, написів на руїнах старих будівель тощо.

3. Вивчення родових переказів, казок, прислів'їв, приказок, а особливо мов, які зберігають багато слідів тих часів, коли люди ще не вміли писати.

4. Спостереження за дітьми, коли вони навчаються говорити і лічити. Кожна дитина, розвиваючись, повторює розвиток усього людства. Звичайно, цей процес відбувається дуже швидко: шлях розвитку, на який попереднім поколінням потрібні були століття або навіть тисячоліття, дитина проходить за роки або навіть місяці.

Порівнюючи відомості, взяті з цих чотирьох джерел, можна приблизно відтворити картину того, як люди опановували лічбу і виникло поняття натурального числа, що тісно пов'язане з поняттям скінченної множини. У процесі практичної діяльності людині часто доводиться порівнювати між собою скінченні множини. Наприклад, для одержання відповіді на питання, чи вистачить спійманих рибин на всіх членів сім'ї, можна встановити взаємно однозначну відповідність між елементами множин спійманих рибин і членів сім'ї або між елементами однієї з них і елементами власної підмножини іншої.

Якщо виконується перший випадок, то вважають, що чисельності множин однакові, якщо – другий, то та з множин має меншу чисельність, яка рівнопотужна власній підмножині іншої.

Цей спосіб порівняння чисельності множин не потребує переліку їх елементів, але ним можна користуватися не завжди. Зокрема, з його допомогою не можна дізнатися, в якому із двох табунів, що знаходяться на різних пасовищах, коней більше, або порівняти чисельність табуна коней у даний момент часу з його чисельністю у минулому році. Тому для порівняння й фіксації чисельності множин стали використовувати множини-посередники, що складалися з пальців рук людини, камінців, раковин тощо, і з якими легко оперувати. Так, для порівняння двох табунів коней брали множину камінців, що дорівнювала чисельності одного з них, переносили її туди, де перебував інший табун, і порівнювали її з ним.

Одну і ту ж саму множину-посередник можна було порівнювати і з множиною тварин у стаді, і з множиною мішків зібраного урожаю і т. д. Тому назви множин-посередників почали використовувати, як вираження чисельності порівнюваних з ними множин. Наприклад, говорили "рука яблук", тобто стільки яблук, скільки пальців на руці. А для вираження числа стріл, що дорівнює числу пальців людини, говорили "людина стріл". Так виникло поняття числівника як назва множини-посередника. Процес абстрагування призвів до виникнення загального поняття натуральних чисел "один", "два", "три", "чотири", "п′ять" і т. д. Оскільки найчастіше лічба велася за допомогою пальців, то такі множини-посередники, які є представниками числівників 1, 5, 10, 20, 100 (десять десятків) відігравали особливу роль. Інші числа одержувалися з цих чисел шляхом додавання або віднімання (говорили, наприклад, "двадцять без двох" замість "вісімнадцять"). Отже, спочатку натуральні числа з'явилися у вигляді чисел-острівців, які потім злилися в єдиний материк – множину натуральних чисел. Пізніше стали розміщувати натуральні числа у ряд, в якому кожне наступне число одержується з попереднього додаванням до нього одиниці. Так виникло поняття натурального ряду чисел:

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots .$$

Виникнення понять натурального числа і натурального ряду є важливим етапом у розвитку математики. Стало можливим вивчати ці числа незалежно від конкретних задач, у зв'язку з якими вони виникли. Появляється теоретична наука про число – *арифметика* або *теорія чисел*.

3.1.2. Різні підходи до побудови множини цілих невід’ємних чисел.

Нуль використовувався спочатку для позначення відсутності відповідних розрядних одиниць у запису числа. Лише значно пізніше нуль стали називати числом, яке означало чисельність порожньої множини. Множина, яка є результатом приєднання числа нуль до множини натуральних чисел, називається *множиною цілих невід'ємних чисел*, а її елементи – *цілими невід'ємними числами*. Саме побудова множини цілих невід'ємних чисел і буде далі розглянута.

Натуральні числа виконують дві функції:

1) дають інформацію про чисельність множини класу рівнопотужних скінченних непорожніх множин, тобто вони виконують кількісну функцію. У цьому випадку натуральні числа називаються *кількісними*;

2) визначають положення елементів певним чином строго лінійно впорядкованої скінченної непорожньої множини. У цьому випадку натуральні числа називаються *порядковими*.

Відповідно до цих функцій існують *теоретико-множинна* (*кількісна*) й *аксіоматична* теорії натуральних чисел. Кількісна теорія натуральних чисел була розроблена у 70-х роках XIX ст. німецьким математиком Г. Кантором (1845-1918); аксіоматична теорія розроблялася багатьма математиками і остаточно була сформульована італійським математиком Д. Пеано (1853-1932) наприкінці XIX ст.

3.1.2. Скінченні множини та їх властивості.

Натуральне число виникло внаслідок оперування із скінченними множинами і може бути означене через поняття "скінченна множина". У зв'язку з цим раніше сформульованим означенням скінченної множини, елементи якої можна перелічити, користуватися не можна. Отже, потрібно дати означення скінченної множини, не використовуючи поняття натурального числа.

Множина називається:

1) *скінченною*, якщо вона не має власної підмножини, рівнопотужної їй;

2) *нескінченною*, якщо вона має власну підмножину, рівнопотужну їй.

Означення скінченної множини можна сформулювати і так: множина називається *скінченною*, якщо вона збігається з будь-якою своєю підмножиною, що рівнопотужна їй.

Порожня і одинична множини є скінченними, тому що вони зовсім не мають власних підмножин.

На основі теорії множин і наведеного означення скінченної множини можна довести, хоч це не завжди і просто, ряд властивостей скінченних множин, які потрібні для побудови кількісної теорії цілих невід'ємних чисел.

1. Множина, рівнопотужна скінченній множині, скінченна.
2. Довільна підмножина скінченної множини є множина скінченна.
3. Об'єднання скінченної множини і одиничної множини є множина скінченна.
4. Кожна скінченна непорожня множина, що відмінна від одиничної, є об'єднанням скінченної множини попарно різних одиничних множин.

3.1.3. Натуральне число як спільна властивість класу скінченних непорожніх рівнопотужних множин. Поняття про нуль. Множина цілих невід'ємних чисел.

Користуючись відношенням рівнопотужності, яке, як відомо, є відношенням еквівалентності, сукупність скінченних непорожніх множин можна розбити на класи рівнопотужних множин.

Кожний такий клас містить множини, природа елементів яких може бути найрізноманітнішою, і єдине спільне, незмінне, що не залежить при переході від однієї до іншої множини того самого класу, є те, що вони мають однакову кількісну характеристику.

Натуральним числом називається клас рівнопотужних скінченних непорожніх множин.

Як відомо, клас рівнопотужних скінченних непорожніх множин називається потужністю множини, яка йому належить, а тому натуральне число може бути означене й так: *натуральним числом* називається потужність скінченної непорожньої множини.

На інтуїтивному рівні натуральне число – це спільна властивість рівнопотужних скінченних непорожніх множин, яка не залежить ні від природи елементів цих множин, ні від порядку елементів у них. Ця властивість є не чим іншим, як чисельністю або числом елементів скінченної непорожньої множини.

Натуральні числа, які є потужностями скінченних непорожніх множин A, B, C, …, позначаються буквами a, b, c, … і це записується $a = |A|$, $b = |B|$, $c = |C|$, …; читається, наприклад, $a = |A|$: "число a є потужністю множини A".

Потужність одиничної множини називається *одиницею* і позначається 1. Отже, $1 := |E|$, де E – одинична множина.

Усі натуральні числа складають множину натуральних чисел, її позначають N.

Потужність порожньої множини називається *нулем* і позначається 0. Значить $0 := |\varnothing|$.

Множина, елементами якої є всі натуральні числа і число нуль, називається *множиною цілих невід'ємних чисел* і позначається N_0, а її елементи – *цілими невід'ємними числами*. Таким чином,

$$N_0 := N \cup \{0\}.$$

На основі означення натурального числа і числа нуль, означення цілого невід'ємного числа можна сформулювати так: *цілим невід'ємним числом* називається потужність скінченної множини.

<u>Зауваження 1</u>. Іноді у науковій літературі число нуль теж називають натуральним числом, а цілі невід'ємні числа – натуральними числами.

Домовимося для скорочення запису у розділі "Цілі невід'ємні числа" замість терміну "ціле невід'ємне число" вживати термін "число".

3.1.4. Відношення „рівності” на множині цілих невід’ємних чисел та його властивості.

Цілі невід'ємні числа a і b називаються рівними (записується $a = b$), якщо множини, для яких ці числа є потужностями, рівнопотужні, і нерівними (записується $a \neq b$), якщо відповідні їм множини нерівнопотужні.

Теорема 1. Відношення рівності на множині цілих невід'ємних чисел є відношенням еквівалентності.

Кожному класу рівнопотужних скінченних множин ставиться у відповідність єдине ціле число, яке є потужністю будь-якої множини цього класу, при цьому різним класам ставляться у відповідність різні числа. Але й кожному цілому невід'ємному числу ставиться у відповідність єдиний клас рівнопотужних скінченних множин, для представників якого воно є потужністю. Цим самим встановлено взаємно однозначну відповідність між множиною різних класів рівнопотужних скінченних множин і множиною цілих невід'ємних чисел.

Кожній скінченній множині ставиться у відповідність єдине ціле невід'ємне число, яке є її потужністю, але кожному цілому невід'ємному числу, за винятком нуля, можна поставити у відповідність не одну скінченну множину, тому що клас рівнопотужних скінченних множин містить безліч множин. У зв'язку з цим, при встановленні тверджень про властивості цілих невід'ємних чисел, які ґрунтуються на властивостях множин, потрібно доводити, що їх суть не залежить від вибору множин-представників, для яких цілі невід'ємні числа є потужностями. Це дає можливість оперувати у міркуваннях про числа множинами довільної природи.

Можна показати, що відношення рівності і нерівності на множині цілих невід'ємних чисел не залежать від вибору множин-представників.

3.1.5. Відношення „менше” і „більше” на множині цілих невід’ємних чисел та їх властивості.

Для довільних цілих невід'ємних чисел a і b число a, яке є потужністю множини A, називається *меншим* числа b, що є потужністю множини B (позначається $a < b$), якщо у множині B знайдеться відмінна від неї підмножина B_1, рівнопотужна множині A.

$\forall\, a, b \in N_0$: $a < b$: $\Leftrightarrow \exists\, B_1 \subset B$: $B_1 \neq B \wedge A \sim B_1$, де $a = |A|$, $b = |B|$.

Теорема 2. Відношення "менше" на множині цілих невід'ємних чисел не залежить від вибору множин-представників.

На основі теореми 2 і властивості скінченних множин одержуємо теорему.

Теорема 3. Для довільних цілих невід'ємних чисел a і b має місце одне і тільки одне із відношень

$$a = b,\ \ a < b,\ \ b < a.$$

Теорема 4. Відношення "менше" на множині цілих невід'ємних чисел транзитивне:

$$\forall\ a, b, c \in N: (a < b) \wedge (b < c) \rightarrow (a < c).$$

Із теорем 3 і 4 одержуємо наслідок.

Наслідок 1. Відношення "менше" на множині цілих невід'ємних чисел є відношенням строгого лінійного порядку, а сама множина N_0 з цим відношенням є строго лінійно впорядкованою множиною.

Відношення, обернене до відношення "менше" на множині цілих невід'ємних чисел, називається відношенням "*більше*" (позначається ">"):

$$\forall\ a, b \in N_0: a > b: \Leftrightarrow b < a.$$

Відношення "менше" і "більше", як взаємно обернені, мають однакові властивості.

Відношення "*менше або рівне*" (позначається "≤") можна розглядати як об'єднання відношень "менше" і "рівне":

$$\forall\ a, b \in N_0: (a \leq b): \Leftrightarrow (a = b) \vee (a < b).$$

Відношення "*більше або рівне*" (позначається "≥") можна розглядати і як об'єднання відношень "більше" і "рівне", і як обернене до відношення "менше або рівне":

$$\forall\ a, b \in N_0: (a \geq b): \Leftrightarrow (a = b) \vee (a > b).$$

$$\forall\ a, b \in N_0: (a \geq b): \Leftrightarrow (b \leq a).$$

На основі властивостей відношень "рівне і менше" та означень відношень "більше", "менше або рівне" і "більше або рівне" одержуємо наслідок.

Наслідок 2. Відношення "менше або рівне" і "більше або рівне" на множині цілих невід'ємних чисел є відношеннями нестрогого лінійного порядку.

Відношення <, >, ≤ і ≥ часто називаються *відношеннями природного порядку* на множині цілих невід'ємних чисел, а сама множина цілих невід'ємних чисел з одним із цих відношень – *природно впорядкованою*. Коли говорять про впорядкованість множини цілих невід'ємних чисел, то мають на увазі одне із відношень природного порядку. Властивості всіх відношень природного порядку випливають із властивостей відношень "менше" і "рівне". От чому надалі розглядаються в основному властивості лише цих двох відношенью

Наслідок 3. Нуль є найменшим цілим невід'ємним числом:

$$\forall\, a \in N_0\colon 0 \le a.$$

Наслідок 4. Одиниця є найменшим натуральним числом

$$\forall\, a \in N\colon 1 \le a.$$

Наслідок 5. У множині цілих невід'ємних чисел не існує найбільшого числа.

Останній наслідок є одним із формулювань властивості нескінченності множини цілих невід'ємних чисел.

3.2. Додавання і віднімання цілих невід’ємних чисел

3.2.1. Означення суми цілих невід’ємних чисел через об’єднання множин. Існування і єдиність суми.

Сумою довільних цілих невід'ємних чисел a і b (позначається $a + b$) називають потужність об'єднання множин A і B, які не перетинаються і мають своїми потужностями відповідно числа a і b:

$$\forall\, a, b \in N_0\colon a + b = |A \cup B|, \text{ де } A \cap B = \varnothing,\ a = |A| \text{ і } b = |B|.$$

Теорема 5. Сума двох довільних цілих невід'ємних чисел є цілим невід'ємним числом. Вона завжди існує і визначається однозначно.

Із теореми 5 одержуємо наслідок.

Наслідок 3. Сума довільного цілого невід'ємного і натурального чисел є натуральним числом.

Наслідок 4. Властивість нуля при додаванні:

$$\forall\, a \in N_0\colon a + 0 = 0 + a = a.$$

3.2.2. Операція додавання цілих невід'ємних чисел та їх властивості.

Операція на множині цілих невід'ємних чисел, при якій кожній парі чисел a і b ставиться у відповідність їх сума $a + b$, називається *додаванням цілих невід'ємних чисел*. Компоненти додавання називаються *доданками*, а результат – *сумою*.

На основі означення додавання і властивостей операції об'єднання множин одержуються властивості додавання, які сформульовані у наступній теоремі.

<u>Теорема 6</u>. Операція додавання цілих невід'ємних чисел:

1) комутативна: $\forall\ a, b \in N_0$: $a + b = a + b$.
2) асоціативна: $\forall\ a, b, c \in N_0$: $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3) монотонна відносно відношення рівності:

$$\forall\ a, b, c \in N_0: a = b \rightarrow a + c = b + c.$$

Користуючись додаванням цілих невід'ємних чисел, можна по-іншому дати означення відношення "менше". Підставою є наступна теорема.

<u>Теорема 7</u>. Для довільних цілих невід'ємних чисел a і b $a < b$ тоді і тільки тоді, коли існує натуральне число x таке, що $a + x = b$, де $a = |A|$ і $b = |B|$.

На основі теореми 7 можна дати таке означення: для довільних цілих невід'ємних чисел a і b число a називається меншим числа b, якщо існує натуральне число x таке, що $a + x = b$.

$$\forall\ a, b \in N_0: a < b: \Leftrightarrow \exists\ x \in N: a + x = b.$$

Цим означенням зручно користуватися при доведеннях. За його допомогою доводяться наступні теореми.

<u>Теорема 8</u>. Операція додавання цілих невід'ємних чисел монотонна відносно відношень порядку, зокрема

$$\forall\ a, b, c \in N_0: a < b: \rightarrow a + c < b + c.$$

<u>Теорема 9</u> (<u>правила скорочення для додавання</u>). Для додавання цілих невід'ємних чисел мають місце правила скорочення:

1) відносно відношення рівності

$$\forall\ a, b, c \in N_0: a + c = b + c \rightarrow a = b.$$

2) відносно відношень порядку, зокрема

$$\forall\ a, b, c \in N_0: a + c < b + c \rightarrow a < b.$$

3.2.3. Означення різниці цілих невід'ємних чисел через доповнення. Існування і єдиність різниці.

Операція віднімання цілих невід'ємних чисел у кількісній теорії цілих невід'ємних чисел пов'язана з доповненням підмножини до множини, тобто з відніманням множин.

Різницею довільних цілих невід'ємних чисел a і b (позначається $a - b$) називається потужність доповнення підмножини B до множини A, де число a є потужністю множини A, а число b є потужністю множини B:

$$\forall\ a, b \in N_0: a - b: = |A \setminus B|, \text{ де } a = |A|, b = |B| \text{ і } B \subset A.$$

Можна показати, що означена так різниця не залежить від вибору множин-представників. Оскільки для довільних множин, у тому числі і для скінченних, $A \setminus B \subset A$, то різниця цілих невід'ємних чисел a і b, які є потужностями множин A і B, де $B \subset A$, є цілим невід'ємним числом і існує тільки при $a \geq b$.

Різницю двох цілих невід'ємних чисел можна визначити через суму. *Різницею* довільних цілих невід'ємних чисел a і b називається ціле невід'ємне число x, сума якого з числом b дорівнюватиме числу a, тобто $x + b = a$ або $(a - b) + b = b + (a - b) = a$.

У більшості випадків доцільніше користуватися означенням різниці через суму, особливо в доведеннях.

<u>Теорема 10</u>. Для довільних цілих невід'ємних чисел a та b їх різниця існує тоді і тільки тоді, коли $a \geq b$. Якщо різниця цілих невід'ємних чисел існує, то вона єдина.

<u>Наслідок 5</u>.

$$\forall\ a \in N_0: a - 0 = a;$$
$$\forall\ a \in N_0: a - a = 0.$$

3.2.4. Операція віднімання цілих невід'ємних чисел. Правила віднімання числа від суми і суми від числа.

Операція у множині цілих невід'ємних чисел, при якій кожній парі чисел a і b ставиться у відповідність їх різниця $a - b$, називається *відніманням цілих невід'ємних чисел*. Компоненти віднімання називаються: перша – *зменшуваним*, друга – *від'ємником*, а результат – *різницею*.

На підставі означення різниці через суму одержуємо, що віднімання цілих невід'ємних чисел є оберненою операцією до додавання. А теорема 10 показує, що віднімання є частковою операцією для цілих невід'ємних чисел.

Теорема 11 (правило віднімання числа від суми). Для довільних цілих невід'ємних чисел a, b і c, якщо відповідні різниці існують, то мають місце рівності:

$$(a + b) - c = a + (b - c) = (a - c) + b.$$

Теорему 11 можна узагальнити на довільне скінченне число доданків.

При умові існування відповідних різниць, щоб відняти число від суми кількох доданків, достатньо відняти його від одного з них і одержану різницю додати до суми решти доданків.

Теорема 12 (правило віднімання суми від числа). Для довільних цілих невід'ємних чисел a, b і c, якщо існують відповідні різниці, то має місце рівність:

$$a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b.$$

Теорема 12 також узагальнюється на довільне скінченне число доданків.

Щоб відняти суму від числа, достатньо відняти від цього числа один із доданків, від одержаної різниці відняти ще один із доданків, що залишився, і т. д. поки не віднімемо останній доданок.

Задача. На основі теоретико-множинного підходу до побудови множини цілих невід'ємних чисел обґрунтувати вибір операцій при розв'язуванні задачі.

Брат і сестра збирали гриби. Брат знайшов 32 гриби, а сестра на 5 грибів менше. Скільки грибів знайшли брат і сестра разом?

► Задача зводиться до знаходження потужності об'єднання двох скінченних множин , які не перетинаються і потужністю однієї з них є число 32, а потужність другої невідома. Оскільки сестра зібрала на 5 грибів менше, то множина її грибів рівнопотужна множині підмножині грибів, яка є доповненням підмножини, потужністю якої є число 5 до множини грибів брата, потужністю якої є число 32.. За означенням різниці, потужність цього доповнення дорівнює 32 – 5 = 27. Тобто, сестра зібрала 27 грибів. Оскільки множини грибів, які зібрав брат і які зібрала сестра, не перетинаються, то за означенням суми цілих невід'ємних чисел, число елементів в об'єднанні цих множин, дорівнює сумі чисел елементів у кожній з них, тобто, 32 + 27 = 59.

Відповідь: брат і сестра зібрали разом 59 грибів. ◄

3.3. Множення і ділення цілих невід'ємних чисел

*3.3.1. **Означення добутку цілих невід'ємних чисел . Існування і єдиність добутку.***

Операція множення цілих невід'ємних чисел у кількісній теорії пов'язана з декартовим множенням множин.

Добутком довільних цілих невід'ємних чисел a і b (позначається $a\cdot b$) називається потужність декартового добутку множин A і B, потужностями яких є відповідно числа a і b:

$$\forall\, a, b \in N_0 \colon a\cdot b := |A \times B|, \text{ де } a = |A|,\ b = |B|.$$

Теорема 13. Означення добутку двох цілих невід'ємних чисел не залежить від вибору множин-представників.

Теорема 14. Добуток двох довільних цілих невід'ємних чисел є цілим невід'ємним числом. Він завжди існує і визначається однозначно.

Добутком довільних цілих невід'ємних чисел a і b (позначається $a\cdot b$) називається:

1) число нуль, якщо $b = 0$;

2) число a, якщо $b = 1$;

3) число, яке є сумою b доданків, кожний з яких дорівнює a, якщо $b > 1$.

$$\forall a, b \in N_0 : a\cdot b := \begin{cases} 0, \text{якщо } b = 0; \\ a, \text{якщо } b = 1; \\ \underbrace{a + a + \ldots + a}_{b \text{ доданків}}, \text{якщо } b > 1; \end{cases}$$

3.3.2. Операція множення цілих невід'ємних чисел та її властивості.

Операція на множині цілих невід'ємних чисел, при якій кожній парі чисел a і b ставиться у відповідність їх добуток $a \cdot b$, називається *множенням цілих невід'ємних чисел*. Компоненти множення називаються *множниками*, а результат – *добутком*.

Із теореми 14 одержуються наслідки.

Наслідок 6 (властивість нуля при множенні):

$$\forall\, a \in N_0\colon a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

Наслідок 7 (властивість одиниці при множенні):

$$\forall\, a \in N_0\colon a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

Наслідок 8. Добуток двох довільних натуральних чисел є натуральним числом.

Теорема 15. Операція множення цілих невід'ємних чисел:

1) комутативна: $\forall\, a, b \in N_0\colon a \cdot b = b \cdot a$;
2) асоціативна: $\forall\, a, b, c \in N_0\colon (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
3) дистрибутивна відносно додавання: $\forall\, a, b, c \in N_0\colon (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Теорема 16 (закони монотонності множення). Операція множення цілих невід'ємних чисел монотонна:

1) відносно відношення рівності:

$\forall\, a, b, c \in N_0\colon (a = b) \to (a \cdot c = b \cdot c)$;

2) відносно відношень порядку, зокрема:

$$\forall\, a, b, c \in N_0\colon (a < b) \wedge (c \neq 0) \to (a \cdot c < b \cdot c).$$

Теорема 17 (правила скорочення для множення). Для операції множення цілих невід'ємних чисел мають місце правила скорочення:

1) відносно відношення рівності:

$$\forall\, a, b, c \in N_0\colon (a \cdot c = b \cdot c) \wedge (c \neq 0) \to (a = b);$$

2) відносно відношень порядку, зокрема:

$$\forall\, a, b, c \in N_0\colon (a \cdot c < b \cdot c) \wedge (c \neq 0) \to (a < b).$$

Зауваження. Потрібно звернути увагу на формулювання законів монотонності і правил скорочення для множення цілих невід'ємних чисел, бо в них є істотна відмінність від формулювань аналогічних законів і правил для додавання.

Поняття добутку двох цілих невід'ємних чисел можна узагальнити на довільну скінченну сукупність чисел.

Добутком довільних цілих невід'ємних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (позначається $a_1a_2\ldots a_n$) називається потужність декартового добутку множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$, потужностями яких є відповідно числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

3.3.3. Означення частки цілих невід'ємних чисел. Існування і єдиність частки. Операція ділення цілих невід'ємних чисел.

Операція ділення цілих невід'ємних чисел у кількісній теорії пов'язана з розбиттям множини на класи.

Нехай a – довільне ціле невід'ємне число, що є потужністю множини A, яку розбито на рівнопотужні підмножини, що попарно не перетинаються, а b – довільне натуральне число. *Часткою* чисел a і b (позначаються $a : b$) називається або потужність кожної із множин розбиття, якщо множину A розбити на b підмножин, або число підмножин розбиття, якщо кожна з них має потужність b.

Можна показати, що означення частки не залежить від вибору множини-представника і що, коли частка існує, то вона визначається однозначно.

У математиці, зокрема у початковому курсі, користуються іншим означенням, в якому істотно використовується поняття добутку.

Часткою довільних цілого невід'ємного числа a і натурального числа b (позначається $a : b$ або $\frac{a}{b}$) називається ціле невід'ємне число x, добуток якого з числом b дорівнює a, тобто

$$\forall\, a \in N_0\ \forall\, b \in N\colon a : b = x \Leftrightarrow b\cdot x = a.$$

Не існує простих умов існування частки, але має місце теорема.

Теорема 18. Для довільних цілого невід'ємного числа a і натурального числа b, якщо їх частка існує, то вона єдина.

Операція у множині цілих невід'ємних чисел, при якій кожній парі чисел a і b, де $b \neq 0$, ставиться у відповідність їх частка $a : b$ називається *діленням цілих невід'ємних чисел*. При діленні перша компонента називається *діленим*, друга – *дільником*, а результат – *часткою*.

Операція ділення на основі означення частки є оберненою до операції множення, при якій за добутком двох чисел і одним із множників визначається другий множник. Безпосередньо з означення частки одержуємо такі наслідки.

Наслідок 9 (властивість нуля при діленні).

$$\forall\, a \in N\colon 0 : a = 0.$$

Наслідок 10 (властивість одиниці при діленні).

$$\forall\, a \in N_0\colon a : 1 = a.$$

Наслідок 11.

$$\forall\, a \in N\, a : a = 1.$$

3.3.4. Основна властивість частки. Правила ділення суми, різниці і добутку на натуральне число.

Теорема 19 (основна властивість частки). При умові існування відповідних часток, частка не зміниться, якщо ділене і дільник поділити або помножити на одне й те саме число.

Теорема 20 (правило ділення суми на число). При умові існування відповідних часток, щоб поділити суму декількох цілих невід'ємних чисел на натуральне число, потрібно поділити на це число кожний із доданків і одержані частки додати.

Теорема 21 (правило ділення різниці на число). При умові існування відповідних часток, щоб поділити різницю двох цілих невід'ємних чисел на натуральне число, потрібно поділити на це число зменшуване та від’ємник і від першої частки відняти другу.

Теорема 22 (правило ділення добутку на число). При умові існування відповідних часток, щоб поділити добуток кількох цілих невід'ємних чисел на натуральне число, достатньо поділити на це число один із множників і одержану частку помножити на добуток решти множників.

3.4. Аксіоматичний підхід до побудови множини цілих невід’ємних чисел

3.4.1. Поняття про аксіоматичний метод побудови теорії.

Твердження, які приймаються в межах даної теорії істинними без доведення, називаються *аксіомами*.

Будь-яка теорія є сукупністю понять і тверджень про них.

Аксіоматичний метод побудови теорії полягає у тому, що:

1) виділяються *неозначувані* (*первісні*) *поняття теорії*, всі інші поняття цієї теорії означаються через раніше означені, зрештою через первісні;

2) виділяються деякі вихідні твердження – аксіоми, які приймаються істинними у теорії без доведення, всі інші твердження цієї теорії, які називають її *теоремами*, доводяться на основі раніше доведених, зрештою – на основі аксіом. Аксіоми теорії є неявними означеннями її первісних понять.

Система аксіом, на основі якої будується теорія, повинна задовольняти певним умовам (вимогам), найважливішою з яких є несуперечливість.

Система аксіом вважається *несуперечливою*, якщо серед її логічних наслідків немає двох, які є запереченням один одного.

Важливою також є *вимога незалежності системи аксіом*, яка полягає у тому, що жодна з аксіом не є логічним наслідком інших аксіом цієї системи.

3.4.2. Аксіоматична побудова множини цілих невід’ємних чисел; неозначувані поняття, аксіоми Пеано та деякі наслідки з них.

Первісними поняттями аксіоматичної теорії цілих невід'ємних чисел є: "ціле невід'ємне число", "нуль" і відношення між числами "безпосередньо йде за" ("наступне за" або "йде за").

Цілі невід'ємні числа позначаються малими латинськими буквами a, b, c, …, число нуль – цифрою 0, ціле невід'ємне число, що йде безпосередньо за a – a', а множину всіх цілих невід'ємних чисел – N_0.

Рівність $a = b$ означає, що одне і те саме ціле невід'ємне число позначене двома різними буквами. Відношення рівності на множині цілих невід'ємних чисел є відношенням еквівалентності.

Нерівність $a \neq b$ означає, що буквами a і b позначено різні цілі невід'ємні числа.

Аксіомами при аксіоматичній побудові множини цілих невід'ємних чисел є:

1. Нуль є цілим невід'ємним числом, яке безпосередньо не йде за жодним невід'ємним числом:

$$\forall\, a \in N_0\colon a' \neq 0.$$

2. Для кожного цілого невід'ємного числа існує одне і тільки одне ціле невід'ємне число, яке безпосередньо йде за ним:

$$\forall\, a, b \in N_0\colon a = b \rightarrow a' = b'.$$

3. Кожне ціле невід'ємне число безпосередньо йде не більш як за одним цілим невід'ємним числом:

$$\forall\, a, b \in N_0\colon a' = b' \rightarrow a = b.$$

4. (Аксіома індукції). Нехай M – довільна підмножина множини цілих невід'ємних чисел, яка має властивості:

1) нуль належить множині M;

2) для довільного цілого невід'ємного числа a, якщо a належить множині M, то й число a', яке йде безпосередньо за числом a, належить множині M.

Тоді множина M містить усі цілі невід'ємні числа, тобто $M = N_0$.

$$((M \subset N_0) \wedge (0 \in M) \wedge (\forall\, a \in N_0\colon a \in M \rightarrow a' \in M)) \rightarrow (M = N_0).$$

Перелічені аксіоми називаються аксіомами Пеано. Перед тим, як провести їх аналіз, розглянемо теорему.

Теорема 1. Кожне ціле невід'ємне число відмінне від числа, що безпосередньо йде за ним.

Перша аксіома виділяє властивості числа нуль. **Друга** аксіома разом з теоремою 1 встановлює, фактично, нескінченність множини цілих невід'ємних чисел. **Третя** аксіома показує, що жодне ціле невід'ємне число не може бути наступним за двома різними числами. Нарешті, **четверта** аксіома покладена в основу методу доведення, який називається *методом математичної індукції* і який широко використовується в математиці.

Крім відношення "наступне за" часто використовується відношення "попереднє до".

Ціле невід'ємне число a називається *попереднім до* цілого невід'ємного числа b, якщо число b безпосередньо йде за числом a, тобто $a' = b$.

Теорема 2. Для кожного, відмінного від нуля, цілого невід'ємного числа a існує єдине попереднє число.

Теорема 3. Для довільних двох цілих невід'ємних чисел, якщо вони різні, то й наступні за ними числа різні:

$$\forall\, a, b \in N_0: a \neq b \rightarrow a' \neq b'.$$

Теорема 4. Для довільних двох цілих невід'ємних чисел, якщо наступні за ними числа різні, то й самі числа різні:

$$\forall\, a, b \in N_0: a' \neq b' \rightarrow a \neq b.$$

Цілі невід'ємні числа $0'$, $0''$, $0'''$, $0''''$, … позначають відповідно 1, 2, 3, 4…

Цілі невід'ємні числа, відмінні від нуля, називаються *натуральними числами*. Множину всіх натуральних чисел позначають N. Отже, $N := N_0 \setminus \{0\}$.

3.4.3. Аксіоматичне означення операції додавання цілих невід'ємних чисел. Теорема про існування і єдиність операції додавання (без доведення). Закони додавання. Таблиця додавання.

Додаванням цілих невід'ємних чисел називається операція, яка кожній парі чисел a і b ставить у відповідність число $a + b$ таке, що мають місце аксіоми:

1. $\forall\, a \in N_0: a + 0 = a$;
2. $\forall\, a, b \in N_0: a + b' = (a + b)'$.

Число $a + b$ називається *сумою* чисел a і b, а самі числа a та b – *доданками*.

Теорема 5. Операція додавання цілих невід'ємних чисел завжди існує, причому єдина.

Наслідок 1. Операція додавання на множині натуральних чисел завжди існує, причому єдина.

Теорема 6. Для довільних цілих невід'ємних чисел a, b і c при додаванні мають місце властивості (закони):

1) $a + 0 = 0 + a = a$	властивість нуля при додавання;
2) $a + 1 = 1 + a = a'$	властивість одиниці при додавання;
3) $(a + b) + c = a + (b + c)$	асоціативний закон додавання;
4) $a + b = b + a$	комутативний закон додавання;
5) $a = b \to a + c = b + c$	закон монотонності додавання відносно відношення рівності.

Відому з початкового курсу математики таблицю додавання одноцифрових чисел можна одержати на основі аксіом 1 – 6, позначивши $1 := 0'$, $2 := 1'$, $3 := 2'$, $4 := 3'$, $5 := 4'$, …

Оскільки за властивостями додавання цілих невід'ємних чисел

$$\forall\, a \in N_0\text{: } a + 0 = a; \quad \forall\, a \in N_0\text{: } a + 1 = a'; \quad \forall\, a, b \in N_0\text{: } a + b = b + a,$$

то таблицю можна розпочати будувати з 2 + 2, 2 + 3, … 2 + 9, 3 + 3, 3 + 4, …, 3 + 9, … і закінчити 9 + 9.

Наведемо перші приклади її складання для числа 2.

1) $2 + 2 =$	за означенням числа 2
$= 2 + 1' =$	за аксіомою 6
$= (2 + 1)' =$	за властивістю одиниці при додаванні
$= (2')' =$	за означенням числа 3
$= 3' =$	за означенням числа 4
$= 4.$	

Звідси за транзитивністю відношення рівності одержуємо $2 + 2 = 4$.

2) $2 + 3 =$	за означенням числа 3
$= 2 + 2' =$	за аксіомою 6
$= (2 + 2)' =$	за випадком 1)
$= 4' =$	за означенням числа 5
$= 5.$	

Звідси за транзитивністю відношення рівності $2 + 3 = 5$.

3) Запишемо коротко суму $2 + 4 = 2 + 3' = (2 + 3)' = 5' = 6$.

Отже, $2 + 4 = 6$.

За допомогою аналогічних міркувань, користуючись комутативним законом, можна одержати всю таблицю додавання одноцифрових чисел.

3.4.4. Аксіоматичне означення операції множення цілих невід'ємних чисел. Теорема про існування і єдиність операції множення (без доведення). Закони множення. Таблиця множення.

Множенням цілих невід'ємних чисел називається операція, яка кожній парі чисел a і b ставить у відповідність число $a \cdot b$ таке, що мають місце аксіоми:

7. $\forall\, a \in N_0$: $a \cdot 0 = 0$;

8. $\forall\, a, b \in N_0$: $a \cdot b' = a \cdot b + a$

Число $a \cdot b$ називається *добутком чисел* a та b, а самі числа a і b – *множниками*.

Теорема 7. Операція множення на множині цілих невід'ємних чисел існує, причому єдина.

Наслідок 2. Операція множення на множині натуральних чисел існує, причому єдина.

Теорема 8. Для довільних цілих невід'ємних чисел a, b і c при множенні мають місце властивості (закони):

1) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ – властивість нуля при множенні;

2) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ – властивість одиниці при множенні;

3) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ – правий дистрибутивний закон множення відносно додавання;

4) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ – асоціативний закон множення;

5) $a \cdot b = b \cdot a$ – комутативний закон множення;

6) $a = b \rightarrow a \cdot c = b \cdot c$ – закон монотонності множення відносно відношення рівності.

Відому з початкового курсу математики таблицю множення одноцифрових чисел можна отримати на основі аксіоматичного означення операцій додавання і множення, тобто на основі аксіом 1 – 8. Оскільки для множення цілих невід'ємних чисел

$$\forall\, a \in N_0: a \cdot 0 = 0; \quad \forall\, a \in N_0: a \cdot 1 = a; \quad \forall\, a, b \in N_0: a \cdot b = b \cdot a,$$

то таблицю можна розпочати будувати з 2 · 2, 2 · 3, …, 2 · 9; 3 · 3, 3 · 4, …, 3 · 9 і т. д., та закінчити 9 · 9.

Розглянемо перші кілька прикладів складання таблиці для числа 2.

1) 2 · 2 = за означенням числа 2
= 2 · 1′ = за аксіомою 8
= 2 · 1 + 2 = за властивістю одиниці при множенні
= 2 + 2 = за таблицею додавання для числа 2
= 4.

Отже, 2 · 2 = 4.

2) 2 · 3 = за означенням числа 3
= 2 · 2′ = за аксіомою 8
= 2 · 2 + 2 = за таблицею множення для числа 2
= 4 + 2 = за таблицею додавання для числа 2
= 6.

Отже, 2 · 3 = 6.

3) Запишемо коротко добуток 2 · 4, опускаючи обґрунтування:

$$2 \cdot 4 = 2 \cdot 3' = 2 \cdot 3 + 2 = 6 + 2 = 8.$$

Отже, 2 · 4 = 8.

Операції віднімання і ділення цілих невід’ємних чисел в аксіоматичній теорії розглядаються, як обернені операції відповідно до операцій додавання та множення.

3.4.5. Дискретність і нескінченність множини цілих невід’ємних чисел. Принципи найменшого і найбільшого чисел.

Строго лінійно впорядкована множина називається *дискретною*, якщо для кожного її елемента існує сусідній елемент, тобто строго лінійно впорядкована відношенням ρ множина M називається *дискретною*, коли

$$\forall\, x \in M \ \exists\, y \in M\colon\ (x\,\rho\,y) \wedge \overline{\exists z \in M : (x\,\rho\,z) \wedge (z\,\rho\,y)}\,.$$

<u>Теорема 9</u>. Множина цілих невід'ємних чисел N_0, впорядкована відношенням "менше", дискретна.

<u>Теорема 10</u> (<u>принцип найменшого числа</u>). У кожній непорожній множині цілих невід'ємних чисел існує найменше число.

Теорема 11 (принцип найбільшого числа). У кожній непорожній множині цілих невід'ємних чисел, які не перевищують заданого числа, існує найбільше число.

Із законів монотонності множення і додавання цілих невід'ємних чисел одержуються властивості рівностей і нерівностей, пов'язаних з операціями над ними.

Наслідок 3. Рівності з цілими невід'ємними числами можна почленно додавати (множити):

$$\forall\, a, b, c, d \in N_0\colon (a = b) \wedge (c = d) \rightarrow (a + c = b + d), \qquad (7)$$

$$\forall\, a, b, c, d \in N_0\colon (a = b) \wedge (c = d) \rightarrow (a \cdot c = b \cdot d). \qquad (8)$$

Нерівності $a < b$, $c < d$ ($a > b$ і $c > d$) називаються *нерівностями однакового смислу*, а нерівності $a < b$, $c > d$ ($a > b$ і $c < d$) – *нерівностями протилежного смислу*.

Наслідок 4. Нерівності з цілими невід'ємними числами однакового смислу можна почленно додавати (множити), зокрема:

$$\forall\, a, b, c, d \in N_0\colon (a < b) \wedge (c < d) \rightarrow (a + c < b + d), \qquad (9)$$

$$\forall\, a, b, c, d \in N_0\colon (a < b) \wedge (c < d) \rightarrow (a \cdot c < b \cdot d). \qquad (10)$$

Наслідок 5. Рівність і нерівність з цілими невід'ємними числами можна також почленно додавати, зберігаючи в результаті знак нерівності, зокрема:

$$\forall\, a, b, c, d \in N_0\colon (a = b) \wedge (c < d) \rightarrow (a + c < b + d).$$

Наслідок 6. Рівність з натуральними числами і нерівність з цілими невід'ємними числами можна почленно перемножати, зберігаючи при цьому знак нерівності, зокрема:

$$\forall\, a, b \in N\colon \forall\, c, d \in N_0\colon (a = b)\, (c < d) \rightarrow (a \cdot c < b \cdot d).$$

3.4.6. Ділення з остачею. Операція ділення з остачею.

Ділення цілих невід'ємних чисел є частковою операцією. Розглянемо деяке її узагальнення, яке називається діленням з остачею. Для довільних цілих невід'ємних чисел a і $b \neq 0$ *поділити a на b з остачею* означає знайти таку пару цілих невід'ємних чисел q і r, що

$$a = b \cdot q + r,\ r < b.$$

Число q називається *часткою* (*неповною часткою*), а r – *остачею* при діленні числа a на число b з остачею.

Має місце теорема.

Теорема 12. Для довільних цілих невід'ємних чисел a і $b \neq 0$ існує і при тому єдина пара цілих невід'ємних чисел q і r така, що

$$a = b \cdot q + r, \quad r < b. \qquad (1)$$

Відображення декартового добутку множини цілих невід'ємних чисел і натуральних чисел у декартів квадрат множини цілих невід'ємних чисел, при якому кожній парі чисел a і $b \neq 0$ ставиться у відповідність пара цілих невід'ємних чисел q і r така, що

$$a = b \cdot q + r, \; r < b.$$

називається *діленням з остачею* у множині цілих невід'ємних чисел.

Операція ділення з остачею у множині цілих невід'ємних чисел не є бінарною алгебраїчною операцією, бо її результатом є не число, а впорядкована пара, тобто результат не належить самій множині. Поняття ділення з остачею дає можливість встановити умову існування частки у множині цілих невід'ємних чисел.

Теорема 13. Для довільних цілих невід'ємних чисел a і $b \neq 0$ їх частка $a : b$ існує тоді і тільки тоді, коли при діленні a на b з остачею, остача дорівнює нулю.

3.4.7. Відрізок натурального ряду.

Множина натуральних чисел, впорядкованих відношенням "менше",
називається *натуральним рядом чисел* (*натуральним рядом*). Перші елементи натурального ряду записуються

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

Множина натуральних чисел, які не перевищують заданого натурального числа n, називається *відрізком натурального ряду*, позначається або N_n, або і читається "відрізок натурального ряду від 1 до n" або "натуральні числа від 1 до n включно": $\overline{1;n} = \{x \in N \mid x \leq n\}$.

Наприклад: $\overline{1;6} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, . $\overline{1;1} = \{1\}$.

Із означення відрізка натурального ряду випливає, що одиниця належить кожному відрізку натурального ряду.

Теорема 14. Кожний відрізок натурального ряду є скінченною множиною.

Теорема 15. Кожна скінченна непорожня множина рівнопотужна єдиному відрізку натурального ряду.

На основі теореми 15, одержуємо, що рівнопотужним множинам ставиться у відповідність одне й те ж саме натуральне число, тоді як нерівнопотужним множинам ставляться у відповідність різні натуральні числа. Отже, натуральні числа можна розглядати як потужності скінченних непорожніх множин. Потужність скінченної непорожньої множини A називають *кількісним натуральним числом*.

Кількісні натуральні числа вживаються при розгляді задач про кількість елементів у тій чи іншій множині. Якщо множина порожня, то кількість елементів приймається рівною 0. Отже, кожне ціле невід'ємне число є кількісною характеристикою скінченної множини.

З другого боку цілі невід'ємні числа, які визначають порядок розміщення елементів у множині, називають *порядковими цілими невід'ємними числами* (зокрема, *порядковими натуральними числами*). Порядкові натуральні числа вживаються при розгляді задач про порядок елементів у тій чи іншій множині. Отже, одне й те саме натуральне число, залежно від обставин, можна розглядати як кількісне і як порядкове натуральне число.

Встановлення взаємно однозначної відповідності між числами відрізка натурального ряду і елементами скінченної непорожньої множини A називається *нумерацією її елементів*, а сам процес – *лічбою елементів множини A*. За теоремою 15 результат лічби не залежить від її порядку за умови, що при лічбі не було пропущено жодного з елементів. Останнє твердження іноді називають *аксіомою лічби*, з ним учні ознайомлюються на перших уроках математики.

При теоретико-множинному підході до побудови множини цілих невід'ємних чисел користувалися таким означенням скінченної множини:

1. Множина називається *скінченною*, якщо вона нерівнопотужна жодній своїй власній підмножині.

У математиці користувалися й іншим означенням скінченної множини.

2. Множина називається *скінченною*, якщо вона або порожня, або рівнопотужна деякому відрізку натурального ряду.

Теорема 16. Жодний відрізок натурального ряду нерівнопотужний ніякій своїй власній підмножині.

3.5. Натуральне число як міра відрізка

3.5.1. ***Поняття про величини та їх вимірювання.***

У практичній діяльності людина має справу з різними величинами. Вимірювання їх, як і потреба лічби, сприяли виникненню поняття натурального числа. Способи вимірювання величин різні, але всі вони ґрунтуються на одному і тому ж самому принципі: серед об'єктів, що потрібно виміряти, вибирається довільний, який називають *еталоном* або *одиничним елементом*, а всі інші порівнюються з ним. Результатом порівняння є різного виду числа, насамперед натуральні. А тому зміст натурального числа, як результату вимірювання величин, можна розглянути на прикладі однієї з них – вимірюванні відрізка.

3.5.2. Поняття про відрізок. Відношення „дорівнює", „менше", „більше" на множині відрізків та їх властивості.

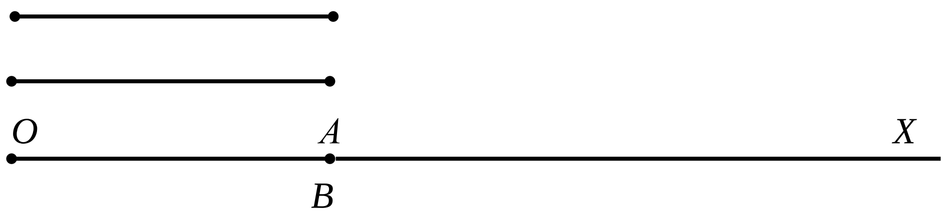
Відрізком називається множина точок прямої, що лежать між двома її різними точками, які називаються кінцями відрізка, а всі інші точки відрізка – його *внутрішніми точками*.

Відрізки α і β називаються рівними (позначаються $\alpha = \beta$), якщо один з них можна накласти на другий так, що їхні кінці збіжаться.

<u>Теорема 1</u>. Відношення рівності на множині відрізків є відношенням еквівалентності.

Для порівняння відрізків α і β на промені OX відкладають відрізки $OA = \alpha$ і $OB = \beta$. Можливі три випадки.

1. Точки A і B збігаються (мал. 1). В цьому випадку $OA = OB$



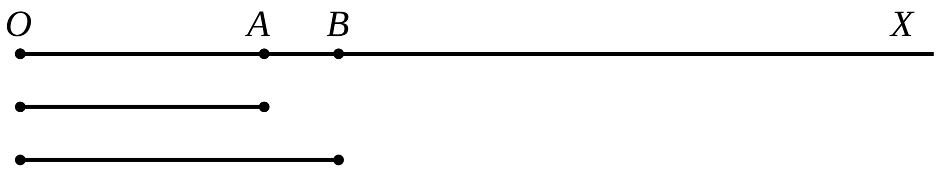
або, що те саме, $\alpha = \beta$.

Мал. 1.

2. Точка B є внутрішньою точкою відрізка OA (мал. 2). У цьому випадку
відрізок OB називається *меншим* за відрізок OA, а відрізок OA – *більшим* за відрізок OB (записується відповідно $OB < OA$ чи $OA > OB$ або, що те саме, $\beta < \alpha$ чи $\alpha > \beta$).

Мал. 2.

3. Точка A є внутрішньою точкою відрізка OB (мал. 3). У цьому випадку відрізок OA називається *меншим* за відрізок OB, а відрізок OB – *більшим* за відрізок OA (записується відповідно $OA < OB$ чи $OB > OA$ або, що те саме, $\alpha < \beta$ чи $\beta > \alpha$).



Мал. 3.

На основі проведених міркувань одержуємо теорему.

Теорема 2. Для довільних відрізків α і β має місце одне і тільки одне із відношень: або $\alpha = \beta$, або $\alpha < \beta$, або $\alpha > \beta$.

Теорема 3. Відношення "менше" ("більше") транзитивне на множині відрізків.

Із теорем 2 і 3 одержуємо наслідок.

Наслідок 1. Відношення "менше" ("більше") є відношенням строгого лінійного порядку на множині відрізків.

Користуючись відношенням "рівне", "менше" ("більше") множину всіх відрізків можна розбити на класи рівних між собою відрізків і класи строго лінійно впорядкувати.

3.5.3. Операції над відрізками.

Над відрізками можна виконувати різні операції, зокрема додавання і віднімання.

Кажуть, що відрізок β складається із відрізків α_1, α_2, …, α_n, якщо він є об'єднанням цих відрізків, причому будь-які два з них не мають спільних внутрішніх точок, хоча можуть мати спільні кінці. Записується $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$.

Замість терміна "відрізок складається з відрізків" користуються терміном "відрізок розбито на відрізки".

Якщо відрізок β складається з n рівних відрізків, кожний з яких дорівнює α, тобто $\beta = \alpha + \alpha + \ldots + \alpha$ або, то кажуть, що відрізок β поділено на n рівних частин (відрізків) і

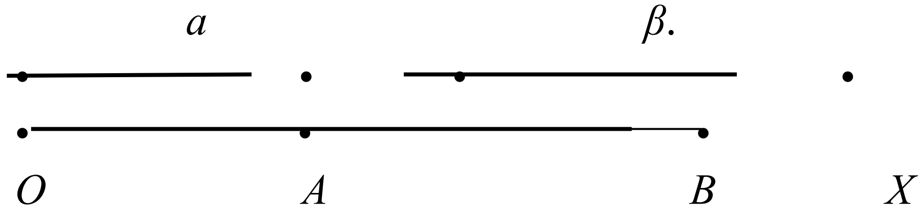
записують $\beta = n\alpha$, або .

Замість терміну "відрізок β поділено на n рівних відрізків α" користуються також терміном "відрізок a вміщується (вкладається) у відрізку β n разів".

Якщо відрізок $\beta = \alpha$, то говорять, що відрізок α вміщується у відрізку β один раз і записують $\beta = 1\alpha$.

Сумою довільних відрізків α і β (позначається $\alpha + \beta$) називається в ідрізок γ, який складається з них.

Для знаходження суми відрізків α і β на промені OX (мал. 4) відкладається відрізок $OA = \alpha$, а потім відрізок $AB = \beta$. Одержаний відрізок OB буде сумою $\alpha + \beta$ відрізків α і β.



Мал. 4.

Теорема 4. Сума довільних двох відрізків завжди існує і єдина (з точністю до відношення рівності відрізків).

Операція на множині відрізків, при якій кожній парі відрізків α і β ставиться у відповідність їх сума $\alpha + \beta$, називається *дод аванням відрізків*.

Теорема 5. Для операції додавання довільних відрізків α, β і γ мають місце властивості:

1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ – комутативний закон додавання;

2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$– асоціативний закон додавання;

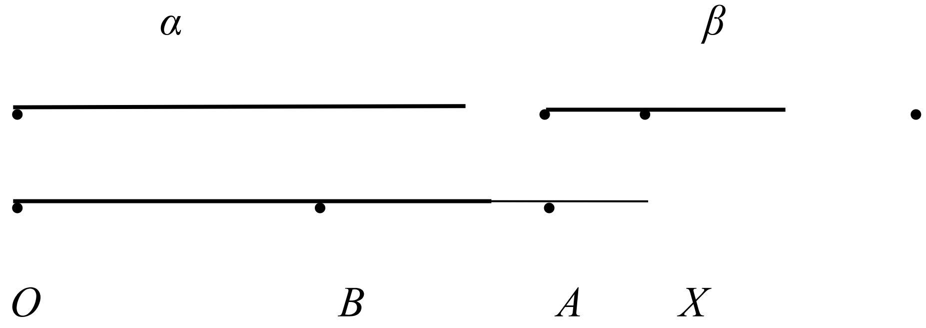
3) $\alpha + \beta > \alpha \wedge \alpha + \beta > \beta$;

4) $\alpha = \beta \leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$;

5) $\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$.

Різницею довільних відрізків α і β (позначається $\alpha - \beta$) називається відрізок γ такий, що $\beta + \gamma = \alpha$.

Для знаходження різниці відрізків на промені OX (мал. 5) відкладають відрізки $OA = \alpha$ і $OB = \beta$. Тоді відрізок BA і буде різницею відрізків.



Мал. 5.

<u>Теорема 6</u>. Різниця довільних відрізків α і β існує тоді і тільки тоді, коли $\alpha > \beta$. Якщо різниця відрізків α і β існує, то вона єдина.

Операція у множині відрізків, при якій кожній парі відрізків α і β, де $\alpha > \beta$, ставиться у відповідність їх різниця $\alpha - \beta$, називається *відніманням відрізків*.

Щоб помножити відрізок α на число n, достатньо на півпрямій від її початку (точки О) послідовно відкласти n відрізків, кожен з яких рівний відрізку α. Наприклад, знайти відрізок β, який отримаємо в результаті множення відрізка α на число 4 (мал. 6).

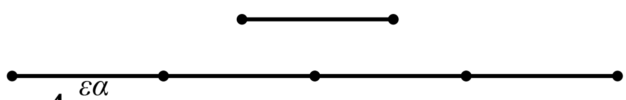
3.5.4. Поняття про вимірювання відрізків. Натуральне число як міра відрізка.

Порівняння відрізків та операції над ними не завжди зручно виконувати, користуючись самими відрізками, а тому виникає задача, як звести це до порівняння і операцій над числами, зокрема натуральними. Виявляється, що дана задача розв'язується за допомогою вимірювання відрізків.

Зафіксуємо у множині відрізків деякий відрізок ε, який назвемо *одиничним відрізком*. Візьмемо тепер довільний відрізок α. Будемо розбивати його на відрізки рівні одиничному відрізку ε. Можливі два випадки:

1) Відрізок α розіб'ється на n відрізків рівних ε, тобто

$$\alpha = \underbrace{\varepsilon + \varepsilon + \ldots + \varepsilon}_{n\ \text{доданків}}.$$

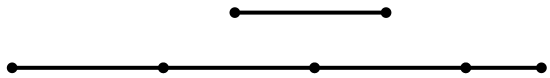


На мал. 6 n = 4.

Мал. 6.

2) Не існує такого натурального числа n, щоб відрізок α можна було розбити на n відрізків, кожний з яких дорівнює ε. На мал. 7 наведено такий приклад.

ε



Мал. 7.

Якщо вибрано одиничний відрізок ε і відрізок α можна розбити на n одиничних відрізків, то число n називається *мірою відрізка α при одиничному відрізку ε.* Якщо ж відрізок α дорівнює одиничному відрізку, то за означенням покладають, що його міра дорівнює одиниці.

За цим означенням, коли натуральне число n є мірою відрізка α при одиничному відрізку ε, то

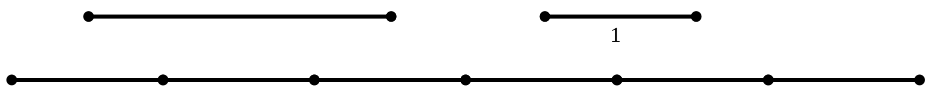
$$\alpha = \begin{cases} \underbrace{\varepsilon + \varepsilon + \ldots + \varepsilon}_{n \text{ доданків}}, \text{ якщо } n > 1; \\ \varepsilon, \text{якщо } n = 1, \end{cases}$$

або

$$\alpha := n \cdot \varepsilon.$$

Число n ще називають *числовим значенням довжини відрізка α при одиничному відрізку ε* або коротко – *довжиною відрізка α*.

Як показує наведений на мал. 8 приклад, числове значення довжини відрізка залежить від одиничного відрізка, де $\alpha = 3 \cdot \varepsilon$ і $\alpha = 6 \cdot \varepsilon_1$.



Мал. 8.

Коли ж одиничний відрізок зафіксовано і відрізок має міру, то вона визначається однозначно.

Для довільного натурального числа n при вибраному одиничному відрізку ε існує і притому єдиний відрізок, з точністю до відношення рівності, мірою якого є число n. Але, як показано на мал. 7, не кожен відрізок при одиничному відрізку має своєю мірою натуральне число.

З попередніх міркувань одержується наслідок.

Наслідок 2. Натуральне число як міра відрізка вказує, сумою скількох одиничних відрізків є заданий відрізок. При вибраному одиничному відрізку це число єдине.

Якщо зафіксувати одиничний відрізок і розглядати натуральні числа як міри відрізків, то матимемо наслідки.

Наслідок 3. Два натуральні числа будуть рівними тоді і тільки тоді, коли відрізки, для яких вони є мірами, рівні.

Наслідок 4. З двох натуральних чисел перше буде менше другого тоді і тільки тоді, коли перший відрізок, мірою якого є перше число, менший другого відрізка, мірою якого є друге число.

Тлумачення натурального числа як міри відрізка дає можливість по-іншому підійти до означення арифметичних операцій над натуральними числами, які будуть потрібні надалі для розширення поняття натурального числа.

3.5.5. Додавання і віднімання, множення і ділення натуральних чисел, що розглядаються як міри відрізків.

Нехай n і k – будь-які натуральні числа. Виберемо довільний одиничний відрізок ε і розглянемо відрізки $\alpha = n\cdot\varepsilon$ та $\beta = k\cdot\varepsilon$. Матимемо

$$\alpha+\beta = n\cdot\varepsilon + k\cdot\varepsilon = (\underbrace{\varepsilon+\varepsilon+\ldots+\varepsilon}_{n\text{ доданків}}) + (\underbrace{\varepsilon+\varepsilon+\ldots+\varepsilon}_{k\text{ доданків}})$$

В останню суму відрізок ε входить $n + k$ разів, а тому

$$\alpha + \beta = (n + k)\cdot\varepsilon.$$

Цим самим доведено теорему.

Теорема 7. Якщо при вибраному одиничному відрізку ε відрізки α і β мають мірами відповідно натуральні числа n і k, то їх сума має мірою натуральне число $n + k$.

Теорема дає можливість так сформулювати означення суми довільних двох натуральних чисел.

Сумою довільних двох натуральних чисел n і k (позначається $n + k$) називається натуральне число, яке є мірою відрізка, що є сумою двох відрізків, перший з яких має мірою натуральне число n, а другий – натуральне число k при одному й тому ж одиничному відрізку.

Теорема 8. Так означена сума натуральних чисел завжди існує і єдина.

Теорема 8 дає можливість вести мову про операцію додавання на множині натуральних чисел. Оскільки сума натуральних чисел означена через суму відрізків, то для операції додавання натуральних чисел матимуть місце властивості, аналогічні властивостям операції додавання відрізків (теорема 5).

Аналогічні міркування приводять до такого означення різниці натуральних чисел, які розглядаються як міри відрізків.

Різницею двох довільних натуральних чисел n і k (позначається $n - k$) називається натуральне число, яке є мірою різниці двох відрізків, перший з яких має мірою натуральне число n, другий – натуральне число k при одному і тому ж одиничному відрізку.

Оскільки різниця натуральних чисел означена через різницю відрізків, яка існує і єдина тоді і тільки тоді, коли перший відрізок більший другого, то й різниця натуральних чисел існує і єдина тоді і тільки тоді, коли перше число більше за друге. Отже, операція віднімання є частковою операцією у множині натуральних чисел.

Розгляд суми і різниці натуральних чисел як міри величин дозволяє обґрунтувати вибір операцій при розв'язуванні різних задач, які розглядаються у курсі математики.

Задача 1. Обґрунтувати вибір операцій при розв'язуванні задачі.

За перший день турист пройшов 7 км, а за другий – 5 км. Яку відстань пройшов турист за два дні? На скільки кілометрів більше пройшов турист першого дня, ніж другого?

► Шлях, пройдений туристом за два дні, можна розглядати як суму двох відрізків, кожний з яких є шляхом, пройденим туристом відповідно за перший і другий дні, мірами яких є числа 7 і 5 при одиничному відрізку кілометр.

Міра відрізка, який є сумою відрізків, дорівнює сумі мір даних відрізків, тому міра всього шляху знаходиться за допомогою операції додавання:

$$7 + 5 = 12 \text{ (км)}.$$

Оскільки 7 > 5, то існує відрізок, який є різницею відрізків, що відповідають шляхам, пройденим туристом відповідно за перший і другий дні, а його числове значення вказує, на скільки перший відрізок більший за другий. Міра відрізка, що дорівнює різниці відрізків, знаходиться за допомогою операції віднімання:

$$7 - 5 = 2 \text{ (км)}.$$

Відповідь: турист пройшов за два дні 12 км, причому за перший день на 2 км більше, ніж за другий. ◄

До поняття добутку і частки натуральних чисел, що розглядаються як міри відрізків, можна дійти за допомогою розв'язування задач про знаходження міри відрізка при різних одиничних відрізках.

Нехай ε і ε_1 – одиничні відрізки, а n і k – натуральні числа такі, що n – міра відрізка α при одиничному відрізку ε, а k – міра відрізка ε при одиничному відрізку ε_1, тобто $\alpha = n\varepsilon$ і $\varepsilon = k\varepsilon_1$. За означенням міри відрізка матимемо

$$\alpha = \underbrace{\varepsilon + \varepsilon + \ldots + \varepsilon}_{n \text{ доданків}} \quad \text{і} \quad \varepsilon = \underbrace{\varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_1}_{k \text{ доданків}}$$

Звідси

$$\left.\begin{aligned} \alpha = \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_1 &+ \\ + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_1 &+ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ \underbrace{+ \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_1}_{k \text{ доданків у кожному рядку}}& \end{aligned}\right\} n \text{ рядків}$$

А тому за означенням добутку натуральних чисел дістанемо

$$\alpha = (n \cdot k) \cdot \varepsilon_1.$$

Отже, *добутком* двох довільних натуральних чисел n і k (позначається $n \cdot k$) називається натуральне число, яке є мірою відрізка при одиничному відрізку ε_1, де n є мірою цього ж самого відрізка при одиничному відрізку ε, а число k є мірою відрізка ε при одиничному відрізку ε_1.

Теорема 10. Так означений добуток двох довільних натуральних чисел завжди існує і єдиний.

Нехай ε і ε_1 – одиничні відрізки, а n і k – натуральні числа такі, що n – міра відрізка α при одиничному відрізку ε, а k – міра відрізка ε_1 при одиничному відрізку ε, тобто $\alpha = n\varepsilon$ і $\varepsilon_1 = k\,\varepsilon$

Встановимо, якою буде міра відрізка α при одиничному відрізку ε_1. Визначивши, що $\varepsilon = \varepsilon_1 : k$, то $\alpha = (n : k)\cdot\varepsilon_1$.

Отже, маємо теорему.

Теорема 11. Якщо при вибраних одиничних відрізках ε і ε_1 таких, що відрізок α має мірою натуральне число n при одиничному відрізку ε, а відрізок ε_1 має мірою натуральне число k при одиничному відрізку ε, то мірою відрізка α при одиничному відрізку ε_1 буде частка чисел n і k, при умові, що частка існує:

$$\alpha = (n : k) \cdot \varepsilon_1.$$

Дана теорема дає можливість так сформулювати означення частки натуральних чисел, що розглядаються як міри відрізків.

Часткою двох довільних натуральних чисел n і k (позначається $n : k$ або $\frac{n}{k}$) називається натуральне число, яке є мірою відрізка при одиничному відрізку ε_1, де число n є мірою цього ж відрізка при одиничному відрізку ε, а число k є мірою відрізка ε_1 при одиничному відрізку ε.

Оскільки довільний відрізок α не завжди можна розбити на відрізки $\varepsilon_1 = k\cdot\varepsilon$, де $k > 1$, то частка натуральних чисел не завжди існує. Якщо ж частка натуральних чисел існує, то вона єдина. А тому, коли знаходження частки натуральних чисел назвати *діленням*, то ця операція буде частковою операцією у множині натуральних чисел.

Означення добутку і частки натуральних чисел, що розглядаються як міри відрізків, показують, що за допомогою множення здійснюється перехід до менших, а при діленні – до більших одиничних відрізків.

Трактування натуральних чисел як міри величин дозволяє обґрунтувати вибір арифметичних операцій при розв'язуванні задач.

Задача 2. Обґрунтувати вибір арифметичних операцій при розв'язуванні задачі.

На дитяче пальто витрачають два метри сукна. Скільки таких пальт можна пошити з 12 м сукна?

► Все сукно можна розглядати як відрізок, мірою якого є натуральне число 12 при одиничному відрізку "метр", а пальто – як новий еталон, мірою якого є натуральне число 2 при одиничному відрізку "метр". Число пальт буде мірою відрізка «сукно» при еталоні вимірювання "пальто", і, оскільки "пальто" є більшим еталоном, ніж "метр", то відповідь на питання задачі одержуємо за допомогою операції ділення:

$$12 : 2 = 6 \text{ (пальт).}$$

Відповідь: із 12 м сукна можна пошити 6 дитячих пальт. ◄

3.6. Десяткова система числення

*3.6.1. **Поняття про систему числення. Число і цифра. Непозиційні та позиційні системи числення.***

Діяльність людини сприяла появі все нових і нових чисел, які потрібно було не тільки називати і записувати, але й виконувати над ними різні операції. За тривалий період розвитку у різних народів були створені різні системи найменування і позначення чисел.

Системою числення називається сукупність знаків і правил, за допомогою яких можна записати і прочитати довільне ціле невід'ємне число.

Перед кожною системою числення ставляться такі три вимоги:

1) будь-яке ціле невід'ємне число однозначно записується у даній системі числення;

2) числа легко порівнювати на основі їх запису;

3) алгоритми виконання арифметичних операцій над числами, записаними у даній системі числення, порівняно прості.

Для деяких цілих невід'ємних чисел є індивідуальні спеціальні знаки для їх позначення і запису. Ці знаки називаються *цифрами*, а самі числа, що позначаються цими знаками, називаються *вузловими*, усі інші числа записуються за допомогою арифметичних операцій над вузловими числами і називаються *алгоритмічними*.

Системи числення поділяються на *позиційні* і *непозиційні*. У непозиційних системах числення значення цифри не залежить від того, яке місце (позицію) вона займає у запису числа. З непозиційних систем числення на даний час найбільш відомою є римська, якою іноді користуються і зараз. Основні її цифри I, V, X, L, C, D, M, якими зображаються відповідно вузлові числа 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000. Інші числа можна одержати у результаті додавання і віднімання вузлових чисел за певними правилами. Наприклад, у римській системі числення записом числа 1996 буде M CM XC VI. Одним із недоліків непозиційних систем числення є те, що у них для запису великих чисел потрібно вводити все нові і нові вузлові числа, а, значить, нові цифри.

У позиційних системах числення, на відміну від непозиційних, числове значення кожної цифри змінюється із зміною її положення (позиції) у запису числа, що значно полегшує його запис, а також порівняння чисел і виконання арифметичних операцій над ними. Тому позиційні системи числення набули широкого вжитку. У них використовується розрядний принцип запису чисел: число g одиниць одного розряду складає одну одиницю наступного вищого розряду. Іншими словами число g, яке називається *основою системи числення*, вказує на те, що при зміні положення цифри у запису числа на одну одиницю вліво (вправо) числове значення її збільшується (зменшується) у g разів. За основу системи числення може бути вибране довільне натуральне число $g > 1$. Для запису чисел у позиційній системі числення з основою g потрібно g цифр, кожна з яких позначає одне з цілих невід'ємних чисел від 0 до $g - 1$, які називаються *одноцифровими числами*. Зокрема, при $g = 10$ одержується позиційна система числення, яка називається *десятковою*.

3.6.2. Десяткова система числення, запис, читання та порівняння цілих невід'ємних чисел у ній.

Десяткова система числення є одним із видів позиційних систем числення. Широке впровадження її у практику обумовлено наявністю у людини найпростішого лічильного пристрою – 10 пальців рук. Вивчення десяткової системи числення – одне з основних завдань курсу математики сучасної школи.

У десятковій системі числення для запису перших десяти цілих невід'ємних чисел використовуються десять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, які називаються *цифрами десяткової системи числення*, а самі числа –*одноцифровими*.

Десятковим записом натурального числа a називається подання його у вигляді

$$a = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0. \qquad (1)$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – цифри десяткової системи числення і $a_n \neq 0$.

Сума $a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$ коротко записується $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$.

Числа $1 = 10^0$, 10^1, 10^2, …, 10^n, тобто 1, 10, 100, …, $1\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ нулів}}$ (у числі n нулів) називаються розрядними одиницями відповідно першого, другого, …, $(n + 1)$-розрядів, причому 10 одиниць одного розряду складають одну одиницю наступного вищого розряду.

У запису (1) доданки a_0, $a_1 10^1$, $a_2 10^2$,… $a_{n-1}10^{n-1}$, $a_n 10^n$ називають *розрядними доданками*.

Десятковий запис числа показує, скільки одиниць найнижчого розряду є у числі і як вони розподілені, як одиниці вищих розрядів.

<u>Теорема 1</u>. Десятковий запис натурального числа завжди існує і єдиний.

Теорема 1 є окремим випадком теореми про запис числа у позиційній системі числення, яка буде доведена пізніше.

<u>Зауваження</u>. Оскільки

$$\forall\, a \in N_0 : 0 \cdot a = 0 \quad \text{і} \quad \forall\, a \in N_0 : 0 + a = a,$$

то приписування нулів зліва до числа, записаного у десятковій системі числення не змінює його значення, що дає можливість зрівнювати кількості цифр, де це доцільно, у десятковому записі чисел.

У шкільному, зокрема, початковому курсі математики під десятковим записом часто розуміють суму його розрядних доданків, тобто коли у запису

$$a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$$

операції множення і піднесення до степеня замінити їх результатами. Наприклад,

$23081 = 2\cdot10^4 + 3\cdot10^3 + 0\cdot10 + 8\cdot10 + 1 = 20000 + 3000 + 80 + 1.$

Для читання числа його розряди, починаючи з найнижчого, діляться на *класи* по три розряди у кожному, причому останній клас може включати і менше розрядів. Перший розряд (найнижчий) кожного з класів називається *розрядом одиниць*, другий – *розрядом десятків*, третій – *розрядом сотень* відповідного класу.

Перший клас (найнижчий) називається *класом одиниць*, другий – *класом тисяч*, третій – *класом мільйонів*, четвертий – *класом мільярдів*, п'ятий – *класом трильйонів* і т. д.

Для найменування чисел у межах трильйона потрібно знати лише 18 слів: нуль, один, два, три, чотири, п'ять, шість, сім, вісім, дев'ять, десять, сорок, дев'яносто, сто, тисяча, мільйон, мільярд і трильйон.

Назва чисел другого десятка, крім десяти, тобто чисел виду $\overline{1a_0} = 10 + a_0$, утворюється із поєднання назв одноцифрового числа і слова "десять" (десять є першим двоцифровим числом). Наприклад, число 12 читається: "два-на-дцять" (два на десять). У цих назвах природно вживати сполучник "і" (два і десять), але наші пращури вживали прийменник "на", що й залишилося у мові.

Числа від 21 до 999 в основному читаються так: послідовно називається число одиниць, якщо воно є у запису, третього, другого і першого розрядів, причому назва останнього розряду не вказується. Наприклад, число 254 читається: двісті п'ятдесят чотири.

Для читання чисел, записи яких містять більше як три цифри, їх спочатку ділять на класи, а потім послідовно читають числа кожного класу, починаючи з найвищого, причому вказується найменування кожного класу, за винятком класу одиниць. Наприклад, число 34 605 328 006 670 містить 5 класів і читається: тридцять чотири трильйони шістсот п'ять мільярдів триста двадцять вісім мільйонів шість тисяч шістсот сімдесят.

Порівняння чисел, записаних у десятковій системі числення, ґрунтується на таких теоремах.

Теорема 2. Одна одиниця вищого розряду більша за число, яке складається з одиниць нижчих розрядів:

$$\forall\, k \in N\colon 10^k > \overline{a_{k-1}a_{k-2}...a_1a_0}\,.$$

Теорема 3. З двох чисел більшим буде те, у десятковому записі якого раніше зустрічається більша кількість одиниць відповідного розряду.

У десятковій системі числення:

1) кожне ціле невід'ємне число записується однозначно;

2) легко порівнювати числа на основі їх запису.

3.6.3. Алгоритми додавання та віднімання чисел в десятковій системі числення.

1. Записати перший доданок і під ним підписати другий доданок так, щоб одиниці однойменних розрядів знаходились одні під одними.

2. Доданки від суми відділити горизонтальною рискою.

3. Додати одиниці найнижчих розрядів. Якщо їх сума одноцифрове число, то записати її під одиницями цього розряду і перейти до додавання одиниць наступного розряду.

4. Якщо сума одиниць найнижчого розряду є двоцифровим числом, то його подати у вигляді 10 + c_0, де c_0 – одноцифрове число, записати c_0 під одиницями найнижчого розряду, а число 1 додати до суми одиниць наступного розряду і перейти до знаходження цієї суми.

5. Повторювати ці ж операції з одиницями кожного наступного розряду.

Процес закінчиться після того, як будуть додані одиниці найвищого розряду, причому їх сума повністю записується під рискою.

6. Число, записане під рискою, буде сумою даних чисел.

Наприклад:

1) 8276 + 7629 = 15905; 2) 35647 + 6849 = 42496.

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 8276 \\ 7629 \\ \hline 15905 \end{array} \qquad + \begin{array}{r} 35647 \\ 6849 \\ \hline 42496 \end{array} \end{array}$$

При виконанні операції додавання не обов'язково зрівнювати кількість цифр у доданках.

Алгоритм віднімання цілих невід’ємних чисел наступний:

1. Записати зменшуване і під ним від'ємник так, щоб одиниці однойменних розрядів знаходилися одні під одними.
2. Від'ємник і зменшуване відділити від різниці горизонтальною рискою.
3. Якщо число одиниць найнижчого розряду зменшуваного не менше числа одиниць від'ємника, то виконати їх віднімання, результат записати під одиницями цього розряду і перейти до віднімання одиниць наступного розряду.
4. Якщо ж у зменшуваному число одиниць найнижчого розряду менше числа одиниць цього розряду від'ємника, а число одиниць наступного розряду відмінне від нуля, то одночасно у зменшуваному число одиниць наступного розряду зменшити на одиницю, а число одиниць найнижчого розряду збільшити на 10, тепер виконати віднімання одиниць цього розряду, результат записати під ним і перейти до віднімання одиниць наступного розряду.
5. Якщо у зменшуваному число одиниць найнижчого розряду менше числа одиниць цього розряду від'ємника, а число одиниць наступного розряду в зменшуваному рівне нулю, то у першому з наступних вищих розрядів, число одиниць якого відмінне від нуля, число одиниць зменшити на одиницю, число одиниць всіх нижчих розрядів, крім останнього, збільшити на 9, а число одиниць

останнього розряду збільшити на 10 і виконати віднімання одиниць цього розряду. Результат записати під ним і перейти до віднімання одиниць наступного розряду.

6. У наступному розряді повторити описаний процес.

7. Віднімання закінчити після того, як буде здійснено віднімання одиниць найвищого розряду.

8. Число, записане під рискою, буде різницею даних чисел.

Наприклад:

1) 7452 –5637 = 1815; 2) 4605 – 598 = 3007; 3) 400002 – 398725 = 1277.

$$
\begin{array}{r} 7452 \\ -\,5637 \\ \hline 1815 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 4605 \\ -\,0598 \\ \hline 3007 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 400002 \\ -\,398725 \\ \hline 001277 \end{array}
$$

При виконанні віднімання, як і при додаванні, не обов'язково зрівнювати кількість цифр у компонентах.

3.6.4. Алгоритми множення та ділення цілих невід’ємних чисел.

Алгоритм множення багатоцифрового числа на одноцифрове у десятковій системі числення можна сформулювати так:

1. Записати першим багатоцифрове число a і під його одиницями найнижчого розряду підписати число b.

2. Множники від добутку відділити горизонтальною рискою.

3. Помножити число одиниць найнижчого розряду числа a на число b. Якщо добуток $a_0 \cdot b$ менший від десяти, то записати його під числом b і перейти до множення числа одиниць наступного розряду числа a на число b.

4. Якщо добуток $a_0 \cdot b$ не менший від десяти, то потрібно представити його у вигляді $c_1 10 + c_0$, де c_1 і c_0 – цифри десяткової системи числення. Число c_0 записати як одиницю найнижчого розряду шуканого добутку, а число c_1 запам'ятати і перейти до множення одиниць наступного розряду числа a на число b. До добутку $a_1 \cdot b$ додати число c_1. Якщо одержана сума менша 10, то її записати як другу розрядну одиницю добутку. Якщо ж одержана сума

не менша від десяти, то її потрібно записати у вигляді $d_1 10 + d_0$, де d_1 і d_0 – цифри десяткової системи числення, при цьому число d_0 записати під рискою як цифру наступного розряду добутку чисел a і b, а число d_1 запам'ятати і перейти до множення одиниць наступного розряду числа a на число b, до якого потім додати число d_1.

5. Процес множення закінчити після того, як помножаться одиниці найвищого розряду числа a на число b.

6. Число, записане під рискою, буде добутком чисел a і b.

Враховуючи закони арифметичних операцій над цілими невід'ємними числами, запис їх у десятковій системі числення, таблицю множення одноцифрових чисел, алгоритм множення багатоцифрового числа на одноцифрове число та множення числа на натуральний степінь десяти, можна сформулювати алгоритм множення у десятковій системі числення багатоцифрового числа на багатоцифрове:

1. Записати перший множник і під ним підписати другий множник так, щоб однойменні розрядні одиниці були підписані одні під одними. Як правило, першим береться той множник, у якого більша кількість цифр.

2. Множники a і b від добутку відділити горизонтальною рискою.

3. Помножити число a на число одиниць найнижчого розряду числа b і записати добуток $a \cdot b_0$ (перший неповний добуток) під рискою.

4. Помножити число a на число одиниць наступного розряду числа b і записати добуток $a \cdot b_1$ (другий неповний добуток) під числом $a \cdot b_0$, але із зсувом на один розряд вліво, що відповідає множенню на число 10.

5. Процес обчислення неповних добутків закінчиться після того, як помножиться число a на число одиниць найвищого розряду числа b.

6. Всі знайдені неповні добутки додати.

7. Одержана сума є добутком чисел a і b.

Аналіз алгоритму множення та властивості множення цілих невід'ємних чисел на нуль дають можливість зробити такі два зауваження:

1. Якщо у другому множнику одна із цифр дорівнює нулю, то на неї можна і не множити, а наступний неповний добуток потрібно зсунути вліво на дві цифри.

2. Якщо хоч один з множників закінчується нулями, то при підписуванні множників один під одним і множенні нулі не враховуються. Лише після виконання множення до одержаного добутку дописується стільки нулів, скількома нулями закінчуються обидва множники разом.

Наприклад:

$$40700 \cdot 3050 = 124135000;$$

$$\begin{array}{rl} \times & 40700 \\ & \underline{3050} \\ + & 2035 \\ & \underline{1221} \\ & 124135000 \end{array}$$

Розглянуті алгоритми додавання, віднімання і множення називаються виконанням операцій "у стовпчик".

Алгоритм ділення багатоцифрового числа на одноцифрове число у десятковій системі числення можна сформулювати так:

1. Записати ділене $a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$, потім дільник b з невеликим проміжком між ними в одному рядку.

2. Між діленим і дільником спочатку провести вертикальну риску, а потім під дільником провести горизонтальну риску до перетину з вертикальною.

3. Якщо $a_n \geq b$, то неповну частку q_n від ділення числа a_n на число b записують під горизонтальною рискою відразу після вертикальної, добуток $b \cdot q_n$ підписують під a_n і знаходять їх різницю r_n.

4. До числа r_n дописують a_{n-1} і неповну частку q_{n-1} від ділення числа $\overline{r_n a_{n-1}}$ на число b записують справа від q_n, добуток $b \cdot q_{n-1}$ підписують під $\overline{r_n a_{n-1}}$ і знаходять їх різницю r_{n-1}.

5. Процес продовжують, поки при діленні на число b не будуть

використані всі цифри числа a.

6. Якщо ж $a_n < b$, то замість числа a_n розглядають число $\overline{a_n a_{n-1}}$ і діють згідно пункту 3.

7. Число, записане під горизонтальною рискою, є неповною часткою, а остання остача r_0 – остачею від ділення числа a на число b.

Сформульований алгоритм ділення прийнято називати "ділення кутом". Наприклад:

1) 8473 : 6 = 1412 (остача1)

або 8473 = 6 · 1412 + 1,

бо

```
_8 4 7 3 | 6
 6       |----
---      | 1412
_2 4
 2 4
-----
   0 7
 –   6
 -----
     1 3
   – 1 2
   -----
       1
```

2) 2142 : 7 = 306

або 2142 = 7 · 306, бо

```
  2 1 4 2 | 7
– 2 1     |----
  ---     | 306
    0 4 2
  –   4 2
    -----
        0
```

Алгоритм ділення багатоцифрового числа на багатоцифрове в десятковій системі числення встановлюється і записується аналогічно.

Наприклад, 79823 : 26 = 3070 (остача 3) або 79823 = 26 · 3070 + 3.

```
 7 9 8 2 3 | 26
–7 8       |-----
-----      | 3070
   1 8 2
–- 1 8 2
--------
       3
```

3.7. Недесяткові позиційні системи числення

3.7.1. Недесяткові позиційні системи числення: запис, читання та порівняння чисел у них.

У практичній діяльності люди користувалися різними системами числення, особливо позиційними, бо, як уже зазначалося, вони дають можливість досить просто записувати, порівнювати і виконувати над числами арифметичні операції. Поділ року на 12 місяців, години на 60 хв. підтверджують існування позиційних систем числення з різними основами. З часом найбільш вживаною серед них виявилася десяткова система.

Для запису чисел у різних позиційних системах числення користуються цифрами десяткової системи числення. Наприклад, цифрами системи числення з основою $g = 2$ є 0 і 1, а при $g = 5$ – 0, 1, 2, 3 і 4. Якщо ж основа системи числення $g > 10$, то її цифри, як багатоцифрові числа десяткової системи числення, беруться в дужки. Наприклад, якщо основа системи числення $g = 12$, то цифрами її будуть 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, (10), (11).

З розвитком обчислювальної техніки для зображення чисел потрібно було використовувати якнайменше стійких станів, а для цього потрібна система числення з малою кількістю цифр. Такою системою є двійкова система, якою найчастіше користуються при роботі на сучасних ЕОМ.

Записом натурального числа у позиційній системі числення з основою $g \geq 2$ називається подання його у вигляді

$$a = a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot g + a_0,$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – цифри системи числення і $a_n \neq 0$.

Сума $a = a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot g + a_0$ коротко записується

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}_g .$$

Числа $1 = g^0, g^1, g^2, \ldots g^{n-1}, g^n$ називаються *розрядними одиницями*, а доданки $a_0, a_1 \cdot g^1, a_2 \cdot g^2, \ldots, a_{n-1} \cdot g^{n-1}, a_n \cdot g^n$ – *розрядними доданками*.

При читанні числа, записаного у позиційній системі числення з основою g, послідовно називають цифри числа, починаючи з найвищого розряду, і основу системи числення. Наприклад, число 25064_8 читається: "два п'ять нуль шість чотири у системі числення з основою вісім".

Теорема 5. Запис натурального числа у позиційній системі числення з основою $g > 1$ завжди існує і єдиний.

3.7.2. Порівняння цілих невід'ємних чисел і алгоритми арифметичних операцій над ними в різних позиційних системах числення.

Порівняння цілих невід'ємних чисел і алгоритми виконання арифметичних операцій над ними у різних позиційних системах числення здійснюється так само, як і у десятковій системі числення, при цьому тільки потрібно враховувати основу системи числення і пам'ятати, що g одиниць нижчого розряду дорівнюють одній одиниці наступного вищого розряду, і, навпаки, одна одиниця вищого розряду дорівнює g одиницям сусіднього нижчого розряду. Наприклад, число $32405_7 > 32366_7$, бо 3 = 3, 2 = 2, а 4 > 3.

Для полегшення обчислення часто складають таблиці додавання і множення одноцифрових чисел у позиційній системі числення, в якій проводять обчислення. Щоб записи не були громіздкими при виконанні операцій в одній і тій же системі числення, її основу можна не вказувати у проміжних результатах.

<u>Задача 2</u>. Обчислити значення виразу, який складений з чисел, що записані у системі числення з основою 6:

$$(2345_6 + 3235_6) : 24_6 + (5002_6 - 25\,04_6) \cdot 35_6.$$

► 1. Складемо таблиці додавання і множення одноцифрових чисел у системі числення з основою 6.

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	10
2	2	3	4	5	10	11
3	3	4	5	10	11	12
4	4	5	10	11	12	13
5	5	10	11	12	13	14

×	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	10	13	14
3	0	3	10	13	20	23
4	0	4	12	20	24	32
5	0	5	14	23	32	41

3. Користуючись побудованими таблицями, виконаємо операції:

1)
$$\begin{array}{r} 2345 \\ +\ 3235 \\ \hline 10024 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} 5002 \\ -\ 2504 \\ \hline 2054 \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r|l} 10024 & 24 \\ \cline{2-2} 52 & 214 \\ \cline{1-1} 42 & \\ 24 & \\ \cline{1-1} 144 & \\ 144 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{r} 2054 \\ \times\ 35 \\ \hline 14442 \\ +10250 \\ \hline 121342 \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{r} 121342 \\ +\ 214 \\ \hline 122000 \end{array}$$

<u>Відповідь</u>: 122000_6. ◄

Особливо просто виконуються арифметичні операції у двійковій системі числення. Наприклад:

$$\begin{array}{r} 10011 \\ +\ 1101 \\ \hline 100000 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 1101 \\ \times\ 101 \\ \hline 1101 \\ 1101 \\ \hline 1000001 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 1001 \\ -\ 110 \\ \hline 11 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} 100111 & 11 \\ \cline{2-2} -11 & 1101 \\ \cline{1-1} 11 & \\ -11 & \\ \cline{1-1} 011 & \\ -011 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Зручність двійкової системи числення полягає не тільки у тому, що у ній запис чисел здійснюється за допомогою лише двох цифр, а й у тому, що все це може бути просто реалізовано в електронних пристроях.

3.7.3. Перехід від запису чисел в одній позиційній системі числення до запису в іншій.

Одне й те ж саме число може бути записане у різних позиційних системах числення. Часто потрібно, знаючи запис числа у системі числення з основою g, записати його у системі числення з основою h. Способи переходу від однієї системи числення до іншої ґрунтуються на тому, що у кожному числі всіх одиниць найнижчого розряду у будь-якій системі числення однакова кількість, тільки як одиниці вищих розрядів у них вони розподілені по-різному. Найбільш вживані два способи переходу – ділення і множення. Розглянемо їх.

Метод ділення виконується за такою схемою.

1. Якщо дане число менше від основи h нової системи числення, то воно запишеться у ній як одноцифрове число.

2. Якщо число не менше від основи h нової системи числення, то воно у цій системі містить і одиниці вищих розрядів. Щоб знайти їх кількість, потрібно поділити дане число на h. Частка від ділення вказує, скільки одиниць другого розряду є у числі, а остача – скільки одиниць першого розряду. Якщо одержана частка не менша від h, то дане число містить одиниці ще вищого третього розряду. Щоб знайти їх кількість, слід одержану частку поділити на h. Цей процес продовжується поки не одержиться частка, яка менша від h. Вона буде вказувати кількість одиниць найвищого розряду, а всі остачі вказуватимуть кількість одиниць наступних нижчих розрядів у запису даного числа у позиційній системі числення з основою h.

3. Усі операції виконуються у старій системі числення з основою g, а тому цим способом зручно користуватися, коли $g > h$, бо тоді h записується як одноцифрове число у системі числення з основою g і остачі від ділення будуть менші від h, отже, вони будуть одноцифровими числами у новій системі числення.

Методом ділення зручно користуватися також, коли $g = 10$, бо тоді добре відомі алгоритми виконання операцій.

Задача 3. Число 2564_7 записати у системі числення з основою 6.

► Оскільки $7 > 6$, то скористаємося методом ділення. Послідовно ділимо число 2564_7 і частки, які отримуються, на число 6. Дістанемо

```
 25647₇ | 6
-24     |-----
  16    | 321 | 6
 -15    |-24  |-----
   14   |  51 | 36 | 6
  - 6   | -51 |-33 |---
    5   |   0 |  3 | 4
```

Відповідь: $2564_7 = 4305_6$. ◄

Суть *методу множення* можна викласти так:

1. Якщо дане число менше h, то воно запишеться у ній як одноцифрове.

2. Якщо дане число у системі числення з основою g має вищі розрядні одиниці, то множимо його кількість одиниць найвищого розряду на g і до одержаного добутку додаємо кількість одиниць наступного нижчого розряду. Одержану суму множимо на g і до добутку додаємо кількість одиниць наступного нижчого розряду. Ці операції проводимо до тих пір, поки не додамо кількість одиниць найнижчого розряду даного числа, і на цьому процес закінчено.

3. Обчислення проводяться у новій системі числення. А тому методом множення користуються тоді, коли $g < h$, бо тоді всі цифри і основа старої системи числення є цифрами нової системи числення, або ж коли переходять від будь-якої системи числення до десяткової.

Задача 4. Число 530142_8 записати у десятковій системі числення.

► Переходимо до десяткової системи числення, а тому скористаємося методом множення. Обчислення проводяться у десятковій системі числення.

```
5·8+3=43
       × 8
       ----
        44+  0= 344
              ×   8
             ------
             2752 +  1=2753
```

$$\begin{array}{l} \underline{\times\quad 8\quad} \\ 22024+4=22028 \\ \qquad\quad \underline{\times\quad 8\quad} \\ \qquad\quad 176224+2=176226 \end{array}$$

Відповідь: $530142_8 = 176226$. ◄

Задача 5. Число 2313_4 записати у системі числення з основою 6.

► Оскільки $4 < 6$, то скористаємося методом множення. Обчислення проводимо у системі числення з основою 6.

$$\begin{array}{l} 2\cdot4+3=15 \\ \qquad \underline{\times 4} \\ \qquad 112+1=113 \\ \qquad\qquad \underline{\times 4} \\ \qquad\qquad 500+3=503_6 \end{array}$$

Відповідь: $2313_4 = 503_6$. ◄

3.8. Відношення подільності

*3.8.1. **Відношення подільності на множині цілих невід'ємних чисел та його властивості. Подільність суми, різниці і добутку.***

Для цілих невід'ємних чисел віднімання і ділення є частковими операціями. Якщо для віднімання існує проста ознака виконуваності, то для ділення вона не існує. Пошуки таких ознак почалися давно. Вони привели не тільки до відкриття ряду ознак, а й до встановлення важливих властивостей чисел, пов'язаних з розглядом спеціального відношення, яке називається *відношенням подільності*.

Про довільні цілі невід'ємні числа a і b говорять, що a знаходиться у відношенні подільності з b, або що *a ділиться на b* (позначається $a \vdots b$), якщо існує ціле невід'ємне число x таке, що $a = b\cdot x$:

$$\forall\, a, b \in N_0 : a \vdots b \Leftrightarrow \exists\, x \in N_0 : a = b\cdot x.$$

З означення відношення подільності випливають наслідки.

Наслідок 1. Нуль ділиться на будь-яке ціле невід'ємне число:

$$\forall a \in N_0 : 0 \;\vdots\; a.$$

Наслідок 2. Будь-яке ціле невід'ємне число ділиться на одиницю:

$$\forall a \in N_0 : a \;\vdots\; 1.$$

Теорема 1. Відношення подільності на множині цілих невід'ємних чисел:

1) рефлексивне: $\forall a \in N_0 : a \;\vdots\; a$;

2) антисиметричне: $\forall a, b \in N_0 : (a \;\vdots\; b) \wedge (b \;\vdots\; a) \to (a = b)$;

3) транзитивне: $\forall a, b, c \in N_0 : (a \;\vdots\; b) \wedge (b \;\vdots\; c) \to (a \;\vdots\; c)$;

4) не зв'язне.

З теореми 1 випливає наслідок.

Наслідок 3. Відношення подільності на множині цілих невід'ємних чисел є відношенням нестрогого часткового порядку.

Особливе місце у теорії подільності займають числа 0 і 1. За наслідком 1 нуль ділиться на довільне ціле невід'ємне число, а тому висловлення "$0 \;\vdots\; 0$" буде істинним. З другого боку, якщо $a \;\vdots\; 0$, то за означенням подільності $a = 0 \cdot x$, що можливо лише тоді, коли $a = 0$. Отже, на нуль з цілих невід'ємних чисел ділиться лише 0. А тому іноді відношення подільності $a \;\vdots\; b$ розглядається лише тоді, коли b є натуральним числом. У цьому випадку замість терміну "a ділиться на b" користуються термінами "*a кратне b*", "*b є дільником a*" або "*a ділиться націло на b*".

Зауваження. Відношення подільності на множині цілих невід'ємних чисел слід відрізняти від операції ділення у цій множині: пару чисел, яка належить цьому відношенню, не можна ототожнювати з результатом операції ділення, що ставиться їй у відповідність.

На основі означення відношення подільності, частки і ділення з остачею одержуються наслідки.

Наслідок 4. Для довільних цілого невід'ємного числа a і натурального числа b число a ділиться на b тоді і тільки тоді, коли при діленні a на b з остачею остача дорівнює нулю.

<u>Наслідок 5</u>. Для довільних цілого невід'ємного числа a і натурального числа b число a ділиться на b тоді і тільки тоді, коли існує частка чисел a і b.

Наступна теорема є необхідною умовою подільності натуральних чисел.

<u>Теорема 2</u>. Для довільних натуральних чисел a і b якщо a ділиться на b, то a не менше b, зокрема, якщо $a \neq b$, то $a > b$.

<u>Теорема 3</u>. Якщо кожний із доданків ділиться на задане число, то й сума ділиться на це число.

<u>Теорема 4</u>. Якщо зменшуване і від'ємник діляться на дане число, то й різниця ділиться на це число.

Вираз, у якому є тільки операції додавання і віднімання, називається *алгебраїчною сумою*, а його компоненти – *доданками*. Із теорем 3 і 4 одержується наслідок.

<u>Наслідок 6</u>. Якщо алгебраїчна сума кількох чисел і кожний її доданок, за винятком одного, діляться на задане число, то й цей доданок ділиться на задане число.

<u>Теорема 5</u>. Якщо у добутку кількох чисел хоч один із множників ділиться на задане число, то й добуток ділиться на це число.

<u>Наслідок 7</u>. Якщо число ділиться на добуток кількох чисел, то воно ділиться на кожний множник.

Теореми 3, 4 і 5 називаються відповідно теоремами про подільність суми, різниці і добутку.

3.8.2. Поняття про ознаку подільності. Ознаки подільності на 2, 3, 4, 5, 9, 11, 25 в десятковій системі числення.

<u>Теорема 7</u>. Для того щоб натуральне число $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$, записане у десятковій системі числення, ділилося:

1) на 2, необхідно і достатньо, щоб a_0 ділилося на 2;

2) на 5, необхідно і достатньо, щоб остання його цифра a_0 була 0 або 5;

3) на 3 (або 9), необхідно і достатньо, щоб на 3 (або 9) ділилося число, яке дорівнює сумі цифр запису числа a, тобто $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

4) на 4, необхідно і достатньо, щоб число, яке дорівнює подвоєній передостанній цифрі в сумі з останньою цифрою, тобто, $a_0 + 2a_1$ ділилося на 4;

5) на 11 необхідно і достатньо, щоб на 11 ділилася різниця сум цифр, що стоять на парних місцях і суми цифр, що стоять на непарних місцях,тобто,

$$(a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots);$$

6) на 25, необхідно і достатньо, щоб на 25 ділилося число число, яке записане двома останніми цифрами, тобто, $\overline{a_1a_0}$.

Наприклад, число 153623 не ділиться на 11, бо (3 + 6 + 5) – (2 + 3 + 1) = 8 і 8 не ділиться на 11, а число 150623 ділиться на 11, бо (3 + 6 + 5) – (2 + 0 + 1) = 11 і 11 ділиться на 11.

3.9. Спільні кратні та дільники

3.9.1. ***Спільні кратні та найменше спільне кратне кількох натуральних чисел і його властивості.***

Нехай a_1, a_2, a_3, …, a_n – довільні натуральні числа. Натуральне число, яке ділиться на кожне із заданих чисел, називається їх *спільним кратним*, а найменше із спільних кратних – їх *найменшим спільним кратним* і позначається НСК(a_1, a_2, …, a_n).

Множина спільних кратних для натуральних чисел a_1, a_2, …, a_n нескінченна. За принципом найменшого числа у множині спільних кратних існує найменше число, яке і буде найменшим спільним кратним заданих чисел. Отже, для довільних натуральних чисел a_1, a_2, …, a_n їх найменше спільне кратне існує і причому єдине.

Теорема 8. Для довільних натуральних чисел a і b, якщо одне з чисел ділиться на друге, то перше число і буде найменшим спільним кратним заданих чисел:

$$\forall\, a, b \in N\colon a \,\vdots\, b \to \text{НСК}(a, b) = a.$$

Теорема 9. Кожне спільне кратне кількох натуральних чисел ділиться на їх найменше спільне кратне.

3.9.2. Спільні дільники та найбільший спільний дільник кількох натуральних чисел і його властивості. Взаємно прості та попарно взаємно прості числа.

Нехай a_1, a_2, …, a_n – довільні натуральні числа. Натуральне число, на яке ділиться кожне із заданих чисел, називається їх *спільним дільником*, а найбільший із спільних дільників – їх *найбільшим спільним дільником* і позначається НСД(a_1, a_2, …, a_n). Множина спільних дільників декількох натуральних чисел є не порожньою і скінченною. Це випливає з того, що число 1 – спільний дільник довільних натуральних чисел, а дільник числа не перевищує його. Тоді за принципом найбільшого числа у множині спільних дільників заданих чисел існує найбільше число, яке і буде найбільшим спільним дільником заданих чисел. Отже, для довільних натуральних чисел a_1, a_2, …, a_n їх найбільший спільний дільник завжди існує і причому єдиний.

З означення найбільшого спільного дільника випливає теорема.

Теорема 10. Для довільних натуральних чисел a і b, якщо a ділиться на b, то їх найбільший спільний дільник дорівнює b:

$$\forall\, a, b \notin N: a \,\vdots\, b \to \text{НСД}(a, b) = b.$$

Теорема 11. Довільний спільний дільник заданих натуральних чисел є дільником їх найбільшого спільного дільника.

Натуральні числа a_1, a_2, ..., a_n називаються *взаємно простими*, якщо їх найбільший спільний дільник дорівнює одиниці, і *попарно взаємно простими*, якщо НСД(a_i, a_j) = 1 для всіх $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Для двох чисел поняття взаємно прості і попарно взаємно прості числа рівносильні. Якщо ж чисел більше як два, то ці поняття нерівносильні. Очевидно, що завжди, коли числа попарно взаємно прості, то вони і взаємно прості, але обернене твердження хибне. Наприклад, числа 2, 3 і 4 взаємно прості, але вони не будуть попарно взаємно простими, бо НСД(2, 4) = 2.

3.9.3. Властивості найменшого спільного кратного та найбільшого спільного дільника двох чисел.

Теорема 12. Для довільних натуральних чисел a і b їх найменше спільне кратне дорівнює добутку даних чисел, що ділиться на їх найбільший спільний дільник:

$$\forall\, a, b \in N\text{: НСК}(a, b) = \frac{ab}{\text{НСД}(a, b)}.$$

Наслідок 8. Для того щоб найменше спільне кратне двох чисел дорівнювало їх добутку, необхідно і достатньо, щоб ці числа були взаємно простими.

Теорема 12 не може бути застосована більше, ніж до двох чисел, бо, наприклад, НСК(2, 4, 6) = 12, тоді як за теоремою НСК(2, 4, 6) = $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{2}$ = 24.

Теорема 13. Для того щоб спільний дільник d натуральних чисел a і b був їх найбільшим спільним дільником, необхідно і достатньо, щоб числа $\frac{a}{d}$ і $\frac{b}{d}$ були взаємно простими.

Теорему 13 можна узагальнити на довільну скінченну сукупність натуральних чисел.

Теорема 14. Спільний дільник двох натуральних чисел можна виносити за знак їхнього найбільшого спільного дільника і найменшого спільного кратного:

$$\forall\, a, b, c \in N\text{: НСД}(a \cdot c, b \cdot c) = c \cdot \text{НСД}(a \cdot b);$$

$$\forall\, a, b, c \in N\text{: НСК}(a \cdot c, b \cdot c) = c \cdot \text{НСК}(a \cdot b).$$

Теорема 14 полегшує знаходження найменшого спільного кратного та найбільшого спільного дільника двох чисел. Наприклад:

$$\text{НСК}(45, 60) = 15 \cdot \text{НСК}(3, 4) = 15 \cdot 3 \cdot 4 = 180;$$

$$\text{НСД}(45, 60) = 15 \cdot \text{НСД}(3, 4) = 15.$$

Теорему 14 також можна узагальнити на довільну скінчену сукупність натуральних чисел.

3.9.4. Теореми про подільність, що пов'язані із взаємно простими числами. Ознаки подільності на складені числа.

Теорема 15. Якщо добуток двох натуральних чисел ділиться на третє натуральне число, яке взаємно просте з одним із множників, то другий множник ділиться на це число:

$$\forall\, a, b, c \in N: a \cdot b \,\vdots\, c \wedge \text{НСД}(b, c) = 1 \rightarrow a \,\vdots\, c.$$

Теорема 16. Якщо натуральне число ділиться на кожне із двох взаємно простих чисел, то воно ділиться і на їх добуток:

$$\forall\, a, b, c \in N: (a \,\vdots\, b) \wedge (a \,\vdots\, c) \wedge \text{НСД}(b, c) = 1 \rightarrow a \,\vdots\, b \cdot c.$$

Наслідок 9. Для того щоб натуральне число ділилося на добуток двох взаємно простих чисел, необхідно і достатньо, щоб воно ділилося на кожний із множників.

Одержаний наслідок дає можливість встановлювати ознаки подільності на натуральні числа, які можна подати у вигляді добутку двох взаємно простих чисел. Відмітимо також, що цей наслідок можна застосувати і до множників числа, подільність на яке встановлюється.

Задача 1. Встановити ознаку подільності на 165.

► Число $165 = 3 \cdot 55$, де числа 3 і 55 взаємно прості. На основі наслідку 9

$$a \,\vdots\, 165 \Leftrightarrow a \,\vdots\, 3 \wedge a \,\vdots\, 55. \qquad (1)$$

Число $55 = 5 \cdot 11$, де числа 5 і 11 взаємно прості. На основі наслідку 9

$$a \,\vdots\, 55 \Leftrightarrow a \,\vdots\, 5 \wedge a \,\vdots\, 11.$$

Підставивши в **(**1**)** замість $a \,\vdots\, 55$ йому рівносильне твердження $a \,\vdots\, 5 \wedge a \,\vdots\, 11$, одержимо

$$a \,\vdots\, 165 \Leftrightarrow a \,\vdots\, 3 \wedge a \,\vdots\, 5 \wedge a \,\vdots\, 11.$$

Отже, число ділиться на 165 тоді і тільки тоді, коли воно ділиться на числа 3, 5 і 11.

За цією ознакою число 8745 ділиться на 165, бо сума його цифр ділиться на 3, закінчується цифрою 5 і $(5 + 7) - (4 + 8) = 0 \,\vdots\, 11$. ◄

3.9.5. Алгоритм Евкліда.

Відомі властивості найменшого спільного кратного і найбільшого спільного дільника двох чисел не завжди дають можливість їх обчислювати. За теоремою 12

$$\forall\, a, b \in N\text{: НСК}(a, b) = \frac{a \cdot b}{\text{НСД}(a,b)}.$$

Отже, достатньо вміти знаходити найбільший спільний дільник двох чисел. Для розв'язання цієї задачі є спеціальний метод, який називається *послідовним діленням* або *алгоритмом Евкліда*. Теоретичною основою його є теорема про ділення з остачею, теорема 10 і наступна теорема.

Теорема 17. Для довільних натуральних чисел a, b, g і r, якщо між ними має місце залежність

$$a = b \cdot g + r,$$

то множина спільних дільників чисел a і b дорівнює множині спільних дільників чисел b і r, зокрема

$$\text{НСД}(a, b) = \text{НСД}(b, r).$$

Алгоритм Евкліда полягає у тому, що:

1. Число a ділиться на число b з остачею r_1, тобто,

$$a = b \cdot g_1 + r_1, \quad r_1 < b.$$

Якщо $r_1 = 0$, то $b = \text{НСД}(a, b)$.

2. Якщо $r_1 > 0$, то число b ділять на число r_1 з остачею r_2, тобто,

$$b = r_1 \cdot g_2 + r_2, \; r_2 < r_1.$$

Якщо $r_2 = 0$, то $r_1 = \text{НСД}(b, r_1) = \text{НСД}(a, b)$.

3. Якщо $r_2 > 0$, то число r_1 ділять на число r_2 з остачею r_3, тобто,

$$r_1 = r_2 \cdot g_3 + r_3, \quad r_3 < r_2.$$

Якщо $r_3 = 0$, то

$$r_2 = \text{НСД}(r_1, r_2) = \text{НСД}(b, r_1) = \text{НСД}(a, b).$$

4. Якщо $r_3 > 0$, то повторюють ділення аналогічно пункту 3**,** поки не отримають остачу, рівну нулю.

5. Остання, відмінна від нуля, остача і буде найбільшим спільним дільником чисел a і b. Процес ділення в алгоритмі Евкліда скінченний, бо остачі, які є цілими невід'ємними числами, на кожному кроці зменшуються, залишаючись меншими від b, а таких чисел не більше, як b.

Задача 2. Знайти найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне чисел 20553 і 713, користуючись алгоритмом Евкліда та залежністю між найменшим спільним кратним і найбільшим спільним дільником двох чисел.

► Застосуємо до чисел 20553 і 713 алгоритм Евкліда.

$$20553 = 713 \cdot 28 + 589,$$
$$713 = 589 \cdot 1 + 124,$$
$$589 = 124 \cdot 4 + 93,$$
$$124 = 93 \cdot 1 + 31,$$
$$93 = 31 \cdot 3 + 0.$$

Обчислення зручно проводити за такою схемою:

	28	1	4	1	3
20553	713	589	124	93	31
1426	589	496	93	93	
6293	124	93	31	0	
5704					
589					

Остання, відмінна від нуля, остача дорівнює 31, а тому

$$НСД(20553, 713) = 31.$$

На основі залежності між найменшим спільним кратним і найбільшим спільним дільником двох чисел отримуємо

$$НСК(20553, 713) = \frac{20553 \cdot 713}{31} = 472719.$$

<u>Відповідь</u>: НСД(20553, 713) = 31, НСК(20553, 713) = 472719. ◄

3.10. Прості і складені числа. знаходження найменшого спільного кратного та найбільшого спільного дільника кількох натуральних чисел за їх канонічними розкладами

3.10.1. Розбиття множини цілих невід’ємних чисел на 4 класи за кількістю дільників. Прості і складені числа.

Як відомо, для довільного цілого невід'ємного числа a і натурального числа b, якщо a ділиться на b, то число b називається дільником числа a.

Множину цілих невід'ємних чисел за кількістю натуральних дільників можна розбити на такі 4 класи:

1) клас, єдиним елементом якого є число нуль, що має безліч дільників;

2) клас, єдиним елементом якого є число 1, що має єдиний дільник;

3) клас, елементи якого мають два дільники;

4) клас, елементи якого мають більше як два дільники, але їх скінченна кількість.

Числа останніх двох класів займають у математиці особливе місце. Вони складають обсяги двох важливих понять.

Натуральне число більше одиниці називається:

1) *простим*, якщо воно має своїми дільниками тільки одиницю і саме себе;

2) *складеним*, якщо воно має не менше трьох дільників.

Наприклад, за цим означенням числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 прості, а числа 4, 6, 8, 9, 10, 12 – складені.

Теорема 18. Якщо просте число ділиться на натуральне число більше одиниці, то ці числа рівні.

Теорема 19. Для довільних натурального числа a і простого числа p має місце одне і тільки одне із відношень: або a ділиться на p, або вони взаємно прості.

Теорема 20. Добуток кількох натуральних множників ділиться на просте число тоді і тільки тоді, коли хоч один із множників ділиться на просте число.

Теорема 21. Кожне натуральне число більше одиниці має принаймні один простий дільник.

Наслідок 10. Найменший, відмінний від одиниці, дільник натурального числа є числом простим.

3.10.2. Нескінченність множини простих чисел (теорема Евкліда) Решето Ератосфена. Критерії простоти натурального числа.

Теорема 22 (теорема Евкліда). Множина простих чисел нескінченна.

► Доведемо теорему методом від супротивного. Припустимо, що множина простих чисел скінченна, тобто, що вона складається із простих чисел $p_1, p_2, ..., p_n$. Розглянемо число

$$g = p_1 \cdot p_2 \cdot \ ... \ \cdot p_n + 1.$$

Число g натуральне і більше одиниці, а тому воно має принаймні один простий дільник (теорема 21). Таким простим числом не може бути жодне з простих чисел $p_1, p_2, ..., p_n$, бо число g при діленні на кожне з них дає в остачі 1. Отже, існує просте число, відмінне від чисел $p_1, p_2, ..., p_n$. Значить, наше припущення про скінченність множини простих чисел хибне. ◄

Простим чи складеним є задане натуральне число, більше від 1, встановлюється на основі теореми, яка може бути використана як критерій простоти натурального числа.

Теорема 23. Якщо натуральне число a більше одиниці не ділиться на жодне з простих чисел, квадрати яких не перевищують a, то число a просте.

Наслідок 11. Найменший простий дільник натурального числа не перевищує кореня квадратного з даного числа.

Задача 3. Встановити, простим чи складеним є число 967.

► Для того, щоб встановити простим чи складеним є число 967, потрібно на основі теореми 23 перевірити, чи є його дільниками всі прості числа від 2 до 31, бо $31^2 = 961 < 967$, а $32^2 = 1024 > 967$.

За ознаками подільності встановлюємо, що число 967 не ділиться на прості числа 2, 3, 5 і 11. Безпосередньо перевіряємо, що це число не ділиться на прості числа **7,** 13, 17, 19, 23, 29 і 31.

Отже, число 967 не ділиться на жодне з простих чисел, квадрати яких не перевищують числа 967, а тому воно буде простим.

Відповідь: число 967 – просте. ◄

Прості числа у натуральному ряді розподілені нерівномірно.

Для вивчення розподілу простих чисел у натуральному ряді та інших задач теорії чисел потрібно знайти всі прості числа, які не перевищують заданого натурального числа. Для розв'язання цієї задачі є спеціальний метод, який називається *решетом Ератосфена*. Суть його полягає у наступному.

1. Виписують всі натуральні числа від 2 до n.

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ..., n. \qquad (1)$$

2. Число 2 ділиться тільки на 1 і саме на себе, отже, воно є простим. Викреслюють у ряді (1) усі числа кратні двом, крім самого числа 2.

3. Перше, наступне за 2 не викреслене число, буде 3. Воно не ділиться на 2 (інакше його б викреслили). Отже, 3 ділиться тільки на 1 і самого себе, а тому також буде простим. Викреслюють усі числа кратні 3, крім самого числа 3.

4. Перше, наступне за 3 не викреслене число, буде 5. Воно не ділиться ні на 2, ні на 3. Отже, 5 ділиться тільки на 1 і саме на себе, тому воно також буде простим. Викреслюють усі числа кратні 5, крім самого числа 5 і т. д.

Процес буде закінчено, коли одержиться просте число p таке, що $p^2 \le n$, але для першого, наступного за p не викресленого простого числа p_1, $p_1^2 > n$. Усі не викреслені числа від 2 до n будуть простими.

Наприклад, щоб скласти таблицю простих чисел, які не перевищують 1000, викреслювання потрібно закінчити при $p = 31$, тому що $31^2 = 961 < 1000$. Для наступного числа за 31, тобто для числа 32, маємо $32^2 = 1024 > 1000$, а тому й поготів для наступного простого за 31 числа будемо мати таку ж нерівність.

Зауваження. 1. Щоб викреслити всі складені числа кратні простому числу p, не потрібно знати ознаки подільності на p, для цього досить у ряді (1) викреслити кожне p-те число після числа p, враховуючи й ті, які вже раніше були викреслені.

2. Викреслювання чисел кратних простому числу p слід починати з p^2, тому що всі складені числа між p і p^2 уже викреслені як кратні простим числам, меншим від p (на основі теореми 23).

3.10.3. Основна теорема арифметики. Канонічний розклад натурального числа більшого за одиницю.

Теорема 24 *(основна теорема арифметики)*. Кожне натуральне число більше одиниці є або простим або розкладається у добуток простих множників, причому цей розклад єдиний з точністю до порядку слідування множників.

Якщо для складеного натурального числа знайдено його представлення у вигляді добутку простих множників, і у ньому рівні прості множники записано у вигляді степенів простих множників, а самі прості множники розміщені у порядку зростання, то такий запис складеного числа у вигляді добутку простих множників називається *канонічним розкладом натурального числа* $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, де p_1, p_2, …, p_n – різні прості дільники числа a і $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$. Якщо натуральне число a є простим, то сам його запис і є канонічним розкладом числа a.

Говорять, що просте число p *входить у канонічний розклад числа* $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, якщо воно дорівнює одному з чисел p_1, p_2, …, p_n.

На основі поняття канонічного розкладу з основної теореми арифметики одержується наслідок.

<u>Наслідок 12</u>. Канонічний розклад складеного числа єдиний.

Щоб знайти канонічний розклад складеного числа, випробовують його подільність на прості числа у порядку зростання. При цьому користуються відомими ознаками подільності на прості числа. Результати обчислень зручно розташовувати так, як показано у наступній задачі.

<u>Задача 4</u>. Знайти канонічний розклад натурального числа 446688.

► Користуючись ознаками подільності на відомі нам прості числа, матимемо

$$\begin{array}{r|l}
446688 & 2 \\
223344 & 2 \\
111672 & 2 \\
55836 & 2 \\
27918 & 2 \\
13959 & 3 \\
4653 & 3 \\
1551 & 3 \\
517 & 11 \\
47 & 47
\end{array}$$

1 |

Відповідь: 446688 = $2^5 \cdot 3^3 \cdot 11 \cdot 47$. ◄

3.10.4. Ознака подільності на складене число. Знаходження найменшого спільного кратного і найбільшого спільного дільника кількох натуральних чисел за їх канонічними розкладами.

При розгляді кількох натуральних чисел можна вважати, що їх канонічні розклади містять степені одних і тих самих простих множників, при цьому показники степенів у деяких з них можуть бути рівні нулеві, бо за означенням нульового показника степеня $x^0 = 1$ для довільного числа $x \neq 0$.

За допомогою канонічного розкладу натуральних чисел можна встановити вигляд їх дільників.

<u>Теорема 25</u>. Якщо натуральне число a має канонічний розклад

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n},$$

то натуральне число b є його дільником тоді і тільки тоді, коли воно має канонічний розклад $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}$ і $0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1$, $0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2$, …, $0 \leq \beta_n \leq \alpha_n$.

<u>Наслідок 13</u>. Натуральне число ділиться на просте число тоді і тільки тоді, коли дане просте число входить до його канонічного розкладу.

<u>Наслідок 14</u>. Два натуральних числа взаємно прості тоді і тільки тоді, коли їх канонічні розклади не мають спільних простих дільників.

<u>Наслідок 15</u>. Якщо кожне з двох даних натуральних чисел взаємно просте з третім натуральним числом, то і їх добуток взаємно простий з даним числом.

Теорема 25 також дає можливість за канонічними розкладами кількох натуральних чисел знайти їх найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне.

<u>Теорема 26</u>.

1. Канонічний розклад найбільшого спільного дільника кількох натуральних чисел містить ті ж самі прості множники, що й канонічні розклади цих чисел, але взятими з найменшими показниками

степенів.

2. Канонічний розклад найменшого спільного кратного кількох натуральних чисел містить ті ж самі прості множники, що й канонічні розклади даних чисел, але взяті з найбільшими показниками степенів.

<u>Задача 5.</u> Знайти найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне чисел 4680, 7722 і 4368 за їх канонічними розкладами.

► Знаходимо канонічні розклади даних чисел:

4680	2	7722	2	4368	2
2340	2	3861	3	2184	2
1170	2	1287	3	1092	2
585	3	429	3	546	2
195	3	143	11	273	3
65	5	13	13	91	7
13	13	1		13	13
1				1	

Маємо $4680 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$. $7722 = 2 \cdot 3^3 \cdot 11 \cdot 13$. $4368 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$.

Отже, за теоремою 26 НСД(4680, 7722, 4368) $= 2 \cdot 3 \cdot 13 = 78$ і НСК(4680, 7722, 4368) $= 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 2162160$.

<u>Відповідь:</u> НСД(4680, 7722, 4368) = 78, НСК(4680, 7722, 4368) = 2162160. ◄

РОЗДІЛ 4. РОЗШИРЕННЯ ПОНЯТТЯ ЧИСЛА

4.1. Множина додатних раціональних чисел. арифметичні операції над додатними раціональними числами

4.1.1. Задача розширення поняття числа.

У практичній діяльності людина найчастіше використовує числа при розв'язуванні задач про підрахунок числа елементів скінченної множини та вимірюванні величин. Для розв'язування першої задачі достатньо натуральних чисел, чого не можна сказати про другу задачу. Міра вимірюваного об'єкта при довільно вибраному еталоні не завжди може бути виражена натуральним числом. Отже, щоб задача вимірювання величин була розв'язною, одних тільки натуральних чисел недостатньо, потрібне більш широке поняття числа. Крім того, потреби самої математики вимагають також узагальнення, розширення поняття числа. Зокрема, у множині натуральних чисел не завжди існують результати операцій віднімання і ділення. Бажано мати числові множини, які б включали множину натуральних чисел, де б ці операції були виконуваними.

Нехай A і B – довільні непорожні числові множини. Множина B називається *розширенням множини A*, якщо:

1) множина A є власною підмножиною множини B;

2) операції і відношення, які визначені на множині A, визначені також і у множині B, причому їх смисл для елементів множини A, що розглядаються як елементи множини B, повинен збігатися з тим, який вони мали у множині A;

3) у множині B повинні виконуватися операції або мати місце властивості, які не завжди виконувались або мали місце у множині A.

Якщо числова множина B є розширенням числової множини A, то числа, які розглядаються як елементи множини B, називаються *узагальненням чисел*, що розглядаються як елементи множини A, а сам процес побудови узагальнення – *розширенням поняття числа*. Виконання нових операцій або відношень у ново побудованій множині є основним для неї, власне саме для цього і будується розширення.

4.1.2. Короткі історичні відомості про виникнення раціональних і дійсних чисел.

Процес розширення поняття числа пройшов довгий шлях історичного розвитку. Натуральне число, як засіб лічби, з'явилося на ранніх етапах розвитку людства. Першим розширенням було приєднання до множини натуральних чисел дробових чисел. Спочатку з'явилися зручні дроби виду $\frac{1}{n}$, які називають *аліквотними* або *основними*. Тільки пізніше і дуже повільно виникає уявлення про більш складні дроби як частку від ділення двох натуральних чисел одного на інше у випадку, коли ділене націло не ділиться на дільник. Збереглися єгипетські папіруси з часів 2000 – 1600 рр. до н. е. із записом арифметичних операцій над дробами. Стародавні вавілоняни залишили після себе пам'ятки, які містять обчислення з дробами. Запис дробів у індійців відрізняється від сучасного тільки відсутністю дробової риски. У стародавній Греції дроби широко використовувалися, починаючи з V ст. до н. е. Ними користувалися не тільки у задачах обчислювальної геометрії, комерційної арифметики та алгебри, а й теорії музики. Греки вільно виконували всі арифметичні операції над дробами, хоча числами їх не вважали.

До XV – XVI ст. вчення про дроби набуває, по–суті, сучасного вигляду, але за формою воно було не досить виразним: про походження дробів тоді часто не говорили або говорили дуже мало. Чітке уявлення про дробові числа, як про абстрактні числа, виникло тільки у XVI ст.

Треба зазначити, що розділ арифметики про дроби довгий час був одним із найважчих. У німців збереглося прислів'я: "Потрапити у дроби", що означає – потрапити у безвихідне становище. Навіть найосвіченіші люди вважали операції з дробами дуже важкими, бо не було розроблено алгоритмів арифметичних операцій над дробами.

Отже, історично перше розширення поняття числа – приєднання до множини натуральних чисел дробових додатних чисел. Утворилася нова числова множина, яка називається множиною *додатних раціональних чисел* (позначається Q_+), в якій завжди виконуваною є операція ділення і міра відрізка, сумірного з одиничним відрізком, є елементом цієї множини.

Два відрізки не завжди сумірні. Ще старогрецькі математики відкрили існування несумірних відрізків (наприклад, сторона квадрата і його діагональ). Міра відрізка, несумірного з одиничним відрізком, не може бути виражена додатним раціональним числом. Отже, потреба вимірювання відрізків вимагає нового розширення числа, яке б дозволило виражати міру відрізка, несумірного з одиничним. Виникає поняття додатного ірраціонального числа.

Індійці та араби першими почали розглядати ірраціональні числа як числа нового виду, поширюючи на них закони операцій над раціональними числами. У Західній Європі згадка про ірраціональні числа зустрічається у книзі Леонарда Пізанського у XIII ст. Проте ці числа ввійшли в європейську математику лише у XV – XVII ст., з розвитком алгебри і тригонометрії.

Знайти прообрази додатних ірраціональних чисел поза геометричними величинами математики XV – XVI ст. не вміли, тому для них ірраціональні числа поза геометрією були символами, позбавленими конкретного змісту.

Будь-яке додатне раціональне число може бути виражене як частка двох натуральних чисел. Але додатне ірраціональне число не можна подати скінченною комбінацією додатних раціональних чисел, зв'язаних чотирма арифметичними операціями. Ці факти знали математики XV-XVI ст. і майже завжди використовували як аргумент "неповноцінності" ірраціональних чисел. Але оскільки багато задач приводили до появи ірраціональних чисел, їх все одно потрібно було розглядати.

Отже, другим розширенням поняття числа була множина, яка складалася з усіх додатних раціональних чисел та усіх додатних ірраціональних чисел, яка називається *множиною додатних дійсних чисел* (позначається R_+), в якій будь-який відрізок має міру при довільному одиничному відрізку.

Додатних дійсних чисел достатньо для вимірювання величин. Але їх недостатньо, щоб характеризувати зміну величини. Крім того, у множині додатних дійсних чисел не завжди виконується операція віднімання, тобто рівняння $b + x = a$ не завжди має розв'язок. Потреби практики і математики вимагали нового розширення поняття числа, що пов'язується з введенням від'ємних чисел.

Вперше поняття про додатні та від'ємні дійсні числа зустрічаються понад 2000 р. тому у Китаї у книзі "Математика у дев'яти книгах", де додатні числа трактуються як майно, а від'ємні – як борг.

У VI-VII ст. н. е. індійські вчені вже систематично користувалися від'ємними числами при розв'язуванні рівнянь, причому віднімання замінювалося додаванням. Проте, запровадивши від'ємні числа, індійські вчені вважали їх нерівноправними з додатними числами.

У європейській математиці до ідеї від'ємного числа досить близько підійшов на початку XIII ст. Леонардо Пізанський, але ці числа почали широко використовуватися з часів французького математика і філософа Р. Декарта (1596-1650). Створена ним і П. Ферма (1601-1665) аналітична геометрія дала можливість розглядати корені рівняння $f(x) = 0$ як координати точок перетину кривої $y = f(x)$ з віссю абсцис. Це остаточно усунуло принципову відмінність між додатними і від'ємними числами, бо їх тлумачення, по–суті, стало однаковим. Нуль перестав бути знаком нічого і почав розглядатися як число рівноправне з іншими числами.

Множина, елементами якої є всі додатні дійсні числа, всі від'ємні дійсні числа і число нуль, називається *множиною дійсних чисел* (позначається R), а її елементи – *дійсними числами*. У множині дійсних чисел виконуваними є всі арифметичні операції, за винятком ділення на нуль, тобто ця множина є полем. Але рівняння $x^2 + 1 = 0$ не має розв'язків у множині дійсних чисел, тому що за означенням добутку дійсних чисел для довільних дійсного числа $x \neq 0$ і парного натурального числа n: $x^n > 0$.

Дальший етап розширення поняття числа пов'язаний із введенням уявної одиниці i як числа, квадрат якого дорівнює –1, тобто $i^2 = -1$. Числа виду $a + bi$, де a і b – довільні дійсні числа, називаються комплексними. При $b = 0$ дістаємо дійсні числа, тобто множина дійсних чисел є підмножиною множини комплексних чисел (позначається C).

4.1.2. Поняття дробу. Відношення рівності дробів. Відношення „менше”, „більше” на множині дробів та його властивості.

Упорядкована пара натуральних чисел m і n, що записується символом $\frac{m}{n}$, називається *звичайним дробом* або просто *дробом*, при цьому число m називається *чисельником*, а число n – *знаменником* дробу. Дріб $\frac{m}{n}$ читається: "ем ентих".

Іншими словами, звичайний дріб – це елемент множини

$N \times N = N^2$, що записується у вигляді $\frac{m}{n}$.

Довільні дроби $\frac{m}{n}$ і $\frac{r}{s}$ називаються *рівними* (позначається $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$) тоді і тільки тоді, коли $m \cdot s = r \cdot n$:

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow m \cdot s = r \cdot n$$

Зауваження. У математиці замість терміну "рівні дроби" вживаються також терміни "рівносильні дроби", "еквівалентні дроби".

Теорема 1(Основна властивість дробу). Якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити (якщо ділення можливе) на одне і те ж саме натуральне число, то одержиться дріб рівний даному.

За допомогою основної властивості дробів розв'язуються такі дві задачі для них:

1. Скорочення дробів: заміна дробу на рівний йому дріб шляхом ділення чисельника і знаменника на одне і те ж натуральне число, яке є їх спільним дільником.

2. Зведення дробів до спільного знаменника: заміна кожного дробу рівним йому дробом з однаковими знаменниками.

Задача 1. Скоротити дріб $\frac{11730}{23664}$.

► Застосування ознак подільності дозволяє зробити висновок, що числа 11730 і 23664 діляться на 2 і 3, тобто на 6. Поділивши чисельник і знаменник дробу на 6, отримаємо $\frac{11730}{23664} = \frac{1955}{3944}$. .

Стверджувати, що дріб $\frac{1955}{3944}$ нескоротний не можна, хоча подальше використання ознак подільності не дає відповіді на це питання. Потрібно тепер, скориставшись алгоритмом Евкліда, знайти НСД (1955, 3944).

	2	57	2
3944	1955	34	17
3910	170	34	
34	255	0	
	238		
	17		

Звідси, НСД (1955, 3944) = 17 і $\frac{1955}{3944} = \frac{115}{232}$.

<u>Відповідь</u>: $\frac{1955}{3944} = \frac{115}{232}$. ◄

<u>Задача 2</u>. Звести до спільного знаменника дроби $\frac{2}{5}, \frac{12}{18}, \frac{20}{24}$.

► Дроби $\frac{12}{18}$ та $\frac{20}{24}$ можна скоротити. Після цього одержаться дроби $\frac{2}{3}$ і $\frac{5}{6}$. НСК (5, 3, 6) = 30, а множники, на які потрібно помножити чисельники і знаменники дробів $\frac{2}{5}, \frac{2}{3}$ і $\frac{5}{6}$.
рівні відповідно 30 : 5 = 6, 30 : 3 = 10, 30 : 6 = 5.

Отже, дроби $\frac{2}{5}, \frac{12}{18}, \frac{20}{24}$ рівні дробам $\frac{12}{30}, \frac{20}{30}$ і $\frac{25}{30}$ та мають однакові знаменники. Відмітимо, якщо дроби $\frac{12}{18}$ та $\frac{20}{24}$ попередньо не скоротити, то НСК (5, 18, 24) = 120, що менш зручно, ніж при користуванні числом 30.

<u>Відповідь</u>: $\frac{12}{30}, \frac{20}{30}$ і $\frac{25}{30}$. ◄

Дріб називається *нескоротним*, якщо його чисельник і знаменник взаємно прості числа.

Серед рівних дробів існує єдиний нескоротний дріб.

Кожний дріб одержується із нескоротного дробу цього класу множенням чисельника і знаменника нескоротного дробу даного класу на натуральне число.

Дріб називається *правильним*, якщо його чисельник менший від знаменника, у протилежному випадку, тобто, коли чисельник дробу не менший від знаменника, то дріб називається *неправильним*.

Для довільних дробів $\frac{m}{n}$ i $\frac{r}{s}$ дріб $\frac{m}{n}$ називається *меншим* дробу $\frac{r}{s}$ (позначається $\frac{m}{n} < \frac{r}{s}$) тоді і тільки тоді, коли $m \cdot s < r \cdot n$.

<u>Наслідок 1</u>. З двох дробів із рівними знаменниками менший той, у якого чисельник менший.

<u>Наслідок 2</u>. З двох дробів із рівними чисельниками менший той, у якого знаменник більший.

<u>Теорема 2</u>. Відношення "менше" на множині дробів транзитивне.

<u>Теорема 3</u>. Для довільних дробів $\frac{m}{n}$ $і$ $\frac{r}{s}$ має місце одне і тільки одне із відношень:

$$\text{або } \frac{m}{n} = \frac{r}{s}, \text{ або } \frac{m}{n} < \frac{r}{s}, \text{ або } \frac{r}{s} < \frac{m}{n}.$$

<u>Наслідок 3</u>. Відношення "менше" на множині дробів є відношенням строгого лінійного порядку.

Відношення "більше" на множині дробів розглядається як обернене до відношення "менше", тому воно також буде відношенням строгого лінійного порядку.

Відношення "менше або рівне" є об'єднанням відношень "рівне" і "менше", а відношення "більше або рівне" можна розглядати як обернене до відношення "менше або рівне" або як об'єднання відношень "рівне" і "більше". Обидва з цих відношень є відношеннями нестрогого лінійного порядку.

Елементарні уявлення про дроби учні одержують на основі задачі про поділ предметів на рівні частини і розгляду однієї з них, яку позначають $\frac{1}{n}$, де n – число рівних частин, на які ділиться предмет. Дещо пізніше учні знайомляться із дробами виду $\frac{m}{n}$, $m, n \in N$, та їх тлумаченням: предмет поділено на n рівних між собою частин і взято m таких частин.

4.1.4. Додатне раціональне число та його запис (зображення). Нескоротний запис додатного раціонального числа.

Об'єднання множин натуральних і дробових чисел утворюють *множину додатних раціональних чисел*, яка позначається Q_+. А кожне число з цієї множини називають додатним раціональним числом.

Отже, кожне натуральне число є додатним раціональним числом, але не кожне додатне раціональне число є натуральним. Наприклад, додатне раціональне число

$$\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \ldots, \frac{n}{3n}, \ldots\right\}$$

не є натуральним числом.

Натуральні числа, що розглядаються як елементи множини додатних раціональних чисел, називаються *цілими додатними раціональними числами* або *цілими додатними числами*, а всі інші додатні раціональні числа – *дробовими додатними раціональними числами* або *дробовими додатними числами*. *Записом* або *зображенням додатного раціонального числа* називається запис його дробом.

Кожне додатне раціональне число має безліч зображень, серед яких виділяється єдине *нескоротне зображення*, тобто зображення у вигляді нескоротного дробу. Твердження "додатне раціональне число a має своїм зображенням дріб $\frac{m}{n}$" символічно записується $a = \frac{m}{n}$.

Довільне натуральне числа m можна зобразити

$$\left\{\frac{m}{1}, \frac{2m}{2}, \frac{3m}{3}, \ldots, \frac{k \cdot m}{k}, \ldots\right\}, k \in N,$$

А тому означення відношень «рівно», "менше", більше" "менше або рівне", "більше або рівне" на множини додатних раціональних чисел означаються аналогічно як для дробів.

Теорема 1. Довільні додатні раціональні числа a і b, що мають своїми зображеннями відповідно дроби $\frac{m}{n}$ і $\frac{r}{s}$, рівні тоді і тільки тоді, коли $m{\cdot}s = r{\cdot}n$.

Теорема 2. Для довільних додатних раціональних чисел a і b, що мають своїми зображеннями відповідно дроби $\frac{m}{n}$ і $\frac{r}{s}$, $a < b$ тоді і тільки тоді, коли $m{\cdot}s < r{\cdot}n$.

4.1.5. Щільність множини додатних раціональних чисел.

Множина M, на якій визначено відношення строгого лінійного порядку ρ, називається *щільною*, якщо для довільних її елементів x і y таких, що $x \rho y$, існує елемент $z \in M$ такий, що $x \rho z$ і $z \rho y$.

Доведемо, що множина додатних раціональних чисел щільна.

Теорема 3. Для довільних додатних раціональних чисел a і b, якщо $a < b$, то існує додатне раціональне число c таке, що $a < c < b$:

$$\forall a, b \in Q_+: a < b \rightarrow \exists\, c \in Q_+: a < c < b.$$

► Не обмежуючи загальності міркувань серед зображень чисел a

і b можна вибрати такі їх зображення: $a = \frac{2m}{2n}$ і b=$\frac{2r}{2n}$. Оскільки $a < b$, то за означенням відношення "менше" для додатних раціональних чисел матимемо $2m < 2r$. Враховуючи, що $2m$ і $2r$ є парними натуральними числами, існує натуральне число s таке, що

$$2m < s < 2r.$$

Тоді за означенням відношення "менше" для дробів дістанемо

$$\frac{2m}{2n} < \frac{s}{2n} < \frac{2r}{2n}.$$

і за число c можна взяти додатне раціональне число, яке має зображенням дріб $\frac{s}{2n}$. ◄

4.1.6. Означення суми додатних раціональних чисел, її існування і єдиність. Операція додавання та її властивості.

Сумою довільних додатних раціональних чисел a і b (позначається $a + b$), які мають своїми зображеннями відповідно дроби $\frac{m}{n}$ i $\frac{r}{s}$, називається додатне раціональне число, яке має своїм зображенням дріб $\frac{ms+rn}{ns}$.

Це означення є одночасно і означенням суми дробів

$$\frac{m}{n} + \frac{r}{s} := \frac{ms+rn}{ns} .$$

Теорема 5. Сума довільних додатних раціональних чисел не залежить від їх зображень.

Наслідок 1. Сума двох дробів з рівними знаменниками є дробом з тим самим знаменником і чисельником, що дорівнює сумі чисельників даних дробів.

Теорема 6. Сума довільних двох додатних раціональних чисел завжди існує і єдина.

Операція на множині додатних раціональних чисел, при якій кожній парі чисел a і b ставиться у відповідність їх сума $a + b$, називається *додаванням додатних раціональних чисел*.

Теорема 7. Операція додавання додатних раціональних чисел:

1) комутативна :$\forall a, b \in Q_+: a + b = b + a$;

2) асоціативна :$\forall a, b, c \in Q_+: (a + b) + c = a + (b + c)$.

Теорема 8. Для довільних додатних раціональних чисел a і b $a < b$ тоді і тільки тоді, коли існує додатне раціональне число x таке, що $a + x = b$.

На основі теореми 8 можна по-іншому дати означення відношення "менше" для додатних раціональних чисел.

Для довільних додатних раціональних чисел a і b a називається *меншим* b, якщо існує додатне раціональне число x таке, що $a + x = b$.

$$\forall a, b \in Q_+: a < b :\Leftrightarrow \exists\, x \in Q_+: a + x = b.$$

Цим означенням відношення "менше" зручно користуватися у доведеннях.

Теорема 9 (закони монотонності додавання). Операція додавання додатних раціональних чисел монотонна відносно:

1) відношення рівності: $\forall a, b, c \in Q_+$: $a = b \to a + c = b + c$;

2) відношень порядку, зокрема: $\forall a, b, c \in Q_+$: $a < b \to a + c < b + c$.

На основі законів монотонності додавання додатних раціональних чисел, скориставшись методом доведення від супротивного, можна довести наступну теорему.

Теорема 10 (правила скорочення для додавання). Для операції додавання додатних раціональних чисел мають місце правила скорочення відносно:

1) відношення рівності: $\forall a, b, c \in Q_+$: $a + c = b + c \to a = b$;.

2) відношень порядку, зокрема: $\forall a, b, c \in Q_+$: $a + c < b + c \to a < b$.

Якщо дробове додатне раціональне число має своїм зображенням неправильний дріб $\frac{m}{n}$, то тоді $m > n$. Поділивши m на n з остачею, матимемо $m = n \cdot g + r$, де $0 < r < n$. Отже,

$$\frac{m}{n} = \frac{n \cdot g + r}{n} = g + \frac{r}{n}.$$

Запис $g+\frac{r}{n}$ вживається рідко, замість нього користуються таким $g\frac{r}{n}$, тобто знак операції додавання опускається.

Мішаним числом називається сума натурального числа і правильного дробу, що записані поруч (спочатку пишеться натуральне число, а потім дріб).

Слід пам'ятати, що у запису мішаного числа опущено знак додавання, а не множення.

Зауваження. 1. При проведенні обчислень з додатними раціональними числами, тобто з дробами, додаткові відомості або обчислення подаються у фігурних дужках.

2. Остаточний результат обчислення виражається нескоротним дробом, а якщо він неправильний, то ще й мішаним числом.

Приклади.

1) $\frac{5}{8}+\frac{6}{7}$={НСК (8, 7) = 56}= $\frac{5\cdot7+6\cdot8}{56}=\frac{35+48}{56}=\frac{83}{56}=1\frac{27}{56}$;

2) $2\frac{14}{15}+7\frac{11}{18}+1\frac{1}{6}=$ {НСК(15, 18, 6) = 90} $=10\,\frac{14\cdot6+11\cdot5+15}{90}=10\frac{84+55+15}{90}=10\frac{154}{90}=11\frac{32}{45}$.

Відмітимо, що додавання натуральних чисел є частковим випадком додавання додатних раціональних чисел. Дійсно, будь-яке натуральне число можна зобразити дробом із знаменником рівним 1. Отже, рівність $m + n = k$, де $m, n, k \in N$, може бути записана у вигляді

$$\frac{m}{1}+\frac{n}{1}=\frac{m+n}{1}=m+n=k$$

.

4.1.7. *Означення різниці додатних раціональних чисел, її існування і єдиність. Операція віднімання.*

Операція віднімання додатних раціональних чисел розглядається як обернена до операції додавання.

Різницею довільних додатних раціональних чисел a і b (позначається $a – b$) називається додатне раціональне число x таке що $b + x = a$.

Теорема 11. Для довільних додатних раціональних чисел a і b їх різниця існує тоді і тільки тоді, коли $b < a$.

Якщо різниця додатних раціональних чисел існує, то вона єдина.

Теорема 11 є теоретичною основою наступного означення.

Операція у множині додатних раціональних чисел, при якій кожній парі чисел a і b ставиться у відповідність їх різниця $a - b$, називається *відніманням додатних раціональних чисел*.

У силу теореми 11 віднімання додатних раціональних чисел є частковою операцією. Операція віднімання додатних раціональних чисел має ті ж самі властивості, що й віднімання цілих невід'ємних чисел.

Приклади:

1) $\frac{7}{8}-\frac{5}{6}$ $\{7 \cdot 6 > 5 \cdot 8, \text{НСК}(8, 6) = 24\}$ $=\frac{7\cdot 3-5\cdot 4}{24}=\frac{1}{24}$;

2) $5-2\frac{2}{7}=4\frac{7}{7}-2\frac{2}{7}=2\frac{7-2}{7}2\frac{5}{7}$;

3) $5\frac{1}{3}-2\frac{5}{6}=\left\{1\cdot 6<3\cdot 5\rightarrow\frac{1}{3}<\frac{5}{6}\right\}=4\frac{4}{3}-2\frac{5}{6}=2\frac{4\cdot 3-5}{6}=3\frac{3}{6}$=$2\frac{1}{2}$.

4.1.8. Означення добутку додатних раціональних чисел, його існування і єдиність. Операція множення додатних раціональних чисел та її властивості.

Добутком довільних додатних раціональних чисел a і b (позначається $a\cdot b$), які мають своїми зображеннями відповідно дроби $\frac{m}{n}i\frac{r}{s}$, називається додатне раціональне число c, що має своїм зображенням дріб $\frac{mr}{ns}$.

Означення добутку двох додатних раціональних чисел є одночасно й означенням добутку двох дробів:

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{r}{s}:=\frac{m\cdot r}{n\cdot s}.$$

Теорема 12. Добуток двох додатних раціональних чисел не залежить від їх зображень.

Теорема 13. Добуток довільних двох додатних раціональних чисел завжди існує і єдиний.

Операція на множині додатних раціональних чисел, при якій кожній парі чисел a і b ставиться у відповідність їх добуток $a\cdot b$, називається *множенням додатних раціональних чисел*.

Теорема 14. Операція множення додатних раціональних чисел:

1) комутативна: $\forall a, b \in Q_+$: $a\cdot b = b\cdot a$;

2) асоціативна: $\forall a, b, c \in Q_+$: $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$;

3) дистрибутивна відносно додавання: $\forall a, b, c \in Q_+$: $(a + b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$.

Теорема 15 (закони монотонності множення). Операція множення додатних раціональних чисел монотонна відносно:

1) відношення рівності: $\forall a, b, c \in Q_+$: $a = b \to a\cdot c = b\cdot c$;

2) відношень порядку, зокрема: $\forall a, b, c \in Q_+$: $a < b \to a\cdot c < b\cdot c$.

Доведення теореми 15 цілком аналогічне доведенню теореми 8.

Теорема 16 (правила скорочення для множення). Для множення додатних раціональних чисел мають місце правила скорочення відносно:

1) відношення рівності: $\forall a, b, c \in Q_+$: $a\cdot c = b\cdot c \to a = b$;

2) відношень порядку, зокрема: $\forall a, b, c \in Q_+$: $a\cdot c < b\cdot c \to a < b$.

На підставі законів монотонності додавання і множення додатних раціональних чисел, аналогічно як і для цілих невід'ємних чисел, доводяться властивості рівностей чи нерівностей.

Знайдемо добуток двох натуральних чисел, що розглядаються як додатні раціональні числа. Нагадаємо, що їх нескоротними зображеннями є дроби, чисельники яких дорівнюють заданим натуральним числам, а знаменники – одиниці. Нехай m і k довільні натуральні числа. Розглядаючи натуральні числа m і k як дроби, матимемо

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{k}{1}=\frac{m\cdot k}{1\cdot 1}=\frac{m\cdot k}{1}=m\cdot k.$$

Це показує, що множення додатних раціональних чисел є узагальненням поняття множення натуральних чисел, а поняття множення натуральних чисел – частковим випадком множення додатних раціональних чисел.

Зауваження. Іноді у прикладах і задачах дроби $\frac{m}{n}$ записуються m/n, а мішані числа $g\frac{r}{n}$ – $g\,r/n$

Множення додатного раціонального числа на натуральне число можна проілюструвати на такому прикладі.

Автомобіль проходить за 1 хв. 3/5 км. Який шлях пройде автомобіль за 4 хв.?

Для одержання відповіді є два способи розв'язування:

1) $\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}$ (км),

2) $\frac{3}{5}\cdot 4=3\cdot\frac{4}{5}=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}$ (км),

які приводять до одного і того ж самого результату. Це дає змогу у загальному випадку говорити про те, що множенню додатного раціонального числа на натуральне число можна надати той же зміст, що й множенню натуральних чисел, коли добуток визначається через суму рівних доданків, чого не можна сказати про множення натурального числа на дробове додатне число. Розглянемо приклад.

Швидкість автомобіля 50 км/год. Знайти шлях, який пройде автомобіль за: 1) $\frac{1}{5}$ год.; 2) $\frac{3}{5}$ год.; 3) $1\frac{2}{5}$ год.

Очевидно, що за $\frac{1}{5}$ год. автомобіль пройде шлях 50 : 5 = 10 (км) і $50\cdot\frac{1}{5}=10$ (км).

Оскільки за $\frac{1}{5}$ год. автомобіль пройде 10 км, то за $\frac{3}{5}$ год. він пройде $10\cdot 3=30$ (км) і $50\cdot\frac{3}{5}=30$ (км).

Оскільки $1\frac{2}{5}$ год. = $\frac{7}{5}$ год., то за $\frac{7}{5}$ год. автомобіль пройде $10\cdot 7=70$ (км) і $50\cdot 1\frac{2}{5}=50\cdot\frac{7}{5}=70$ (км).

Кажуть, що множення додатного раціонального числа, зокрема натурального, на дробове число є *знаходженням "частини" від "цілого"*, навіть якщо "частина" більша одиниці.

4.1.9. Означення частки додатних раціональних чисел, її існування і єдиність. Операція ділення.

Ділення додатних раціональних чисел розглядається як операція обернена множенню.

Часткою довільних додатних раціональних чисел a і b (позначається $a : b$ або $\frac{a}{b}$) називається додатне раціональне число x таке, що $b\cdot x = a$.

Отже, $b\cdot(a : b) = a$ або $(a : b)\cdot b = a$.

Теорема 17. Частка довільних двох додатних раціональних чисел завжди існує і єдина.

На основі теореми 17 вводиться означення.

Операція на множині додатних раціональних чисел, при якій кожній парі чисел a і b ставиться у відповідність їх частка $a : b$, називається *діленням додатних раціональних чисел*.

Доведена теорема 17 дає можливість знаходити частку двох дробів, а саме:

$$\frac{m}{n}:\frac{r}{s}=\frac{m\cdot s}{n\cdot r}=\frac{m}{n}\cdot\frac{s}{r}.$$

Дріб $\frac{s}{r}$ називається *оберненим* до дробу $\frac{r}{s}$.

З теореми 17 одержується наслідок.

Наслідок 3. На множині додатних раціональних чисел для довільних чисел a і b рівняння $b\cdot x = a$ має єдиний розв'язок.

Додатне раціональне число b називається *оберненим* до додатного раціонального числа a, якщо їх добуток дорівнює 1. Число, обернене до числа a, позначається a^{-1}.

З наслідку 3 одержуємо.

Наслідок 4. Для кожного додатного раціонального числа існує єдине обернене йому число.

Очевидно, що коли число a має своїм зображенням дріб $\frac{m}{n}$, то обернене йому число матиме своїм зображенням дріб обернений даному, тобто $\frac{n}{m}$.

Приклади:

$$\frac{5}{8}:\frac{7}{9}=\frac{5}{8}\cdot\frac{9}{7}=\frac{45}{56};$$

$$5:\frac{7}{8}=5\cdot\frac{8}{7}=\frac{40}{7}=5\frac{5}{7};$$

$$\frac{7}{8}:4=\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{7}{32}.$$

Ділення натуральних чисел є частковим випадком ділення додатних раціональних чисел. Дійсно,

$$m:n=\frac{m}{1}:\frac{n}{1}=\frac{m}{1}\cdot\frac{1}{n}=\frac{m}{n}.$$

Отже, дріб можна розглядати як частку від ділення його чисельника на знаменник.

Розглянемо задачу. Автомобіль проходив a км за b год. Знайти швидкість автомобіля.

Відповідь знаходиться за допомогою ділення a на b незалежно від того, якими є числа a і b. Наприклад:

1) a = 80 км, b = 2 год., $a : b$ = 80 : 2 = 40 (км/год.),

2) $a=\frac{5}{8}$ км, $b=\frac{1}{64}$ год., $a : b = \frac{5}{8}:\frac{1}{64}=\frac{5}{8}\cdot\frac{64}{1}=5\cdot\frac{64}{8}=40$(км/год.);

3) a = 70 км, $b=1\frac{3}{4}$ год., $a : b = 70 : 1\frac{3}{4} = 70\cdot\frac{4}{7} = 40$ (км/год.).

Оскільки у таких і подібних їм задачах дуже часто число b буває меншим від одиниці, то такі задачі можна трактувати при $b < 1$ як знаходження "цілого" (швидкості за 1 год.) за його "частиною".

Говорять, що ділення на додатне дробове число є *знаходженням цілого за його частиною*, навіть коли "частина" більша 1.

Побудована множина додатних раціональних чисел Q_+ є розширенням множини натуральних чисел N. Дійсно, множина N є власною підмножиною множини Q_+. Крім того, всі операції та їх властивості збереглися для натуральних чисел як для додатних раціональних чисел. Операція ділення, яка була частковою у множині N, стала виконуваною на множині Q_+.

4.2. Десяткові дроби

4.2.1. Поняття про десятковий дріб. Поширення позиційного принципу запису до запису десяткових дробів. Властивості десяткових дробів.

Алгоритми порівняння додатних раціональних чисел і операції над ними складніші, ніж над натуральними числами, що записані у довільній позиційній системі числення. Тому природно поширити позиційний принцип запису натуральних чисел на додатні раціональні числа, вірніше, на окремі види дробів, що є їх зображеннями.

Дріб називається *систематичним* (*системним*), якщо його чисельник є натуральним числом, записаним у позиційній системі числення з основою g, а знаменник – натуральним степенем основи g. У практичній діяльності людини особливе місце посідає десяткова система, а тому із системних дробів найчастіше користуються десятковими дробами.

Дріб називається *десятковим*, якщо його чисельник є натуральним числом, записаним у десятковій системі числення, а знаменник – натуральним степенем 10. За означенням загальний вид десяткового дробу такий

$$a = \frac{\overline{c_m c_{m-1}..c_1 c_0}}{10^n} = \frac{c_m 10^m + c_{m-1} 10^{m-1} + ... + c_1 10 + c_0}{10^n}.$$

Десятковий дріб, прийнято записувати $a = \overline{a_k a_{k-1}..a_0, b_1 b_2..b_n}$, тобто без запису знаменника. Часто цей запис і називають десятковим дробом. У ньому число $\overline{a_k a_{k-1}..a_0}$ називається *цілою частиною десяткового дробу*, а дріб $\overline{0, b_1 b_2..b_n}$ його *дробовою частиною*. причому цифри b_1, b_2, ..., b_n – *десятковими знаками*, відповідно першим, другим, ... , n–тим.

Якщо десятковий дріб правильний, то його ціла частина дорівнює нулю. Ціла частина від дробової відділяється комою. Для зручності часто цілу частину десяткового дробу позначають одним знаком, наприклад b_0. Тоді десятковий дріб запишеться $\overline{b_0, b_1 b_2..b_n}$.

Для того, щоб записати десятковий дріб, поступають так: записують чисельник даного дробу і справа наліво відраховують стільки цифр, який показник степеня його знаменника (скільки нулів має знаменник дробу); після цього відділяють відраховані цифри комою; якщо цифр чисельника для підрахунку недостатньо, то зліва приписують нулі. Читається десятковий дріб за таким правилом: спочатку називається число, зображене цифрами до коми, потім вимовляється слово "цілих", далі називається число, записане цифрами після коми, наприкінці називається знаменник дробу.

Наприклад: $\frac{354}{100}$ = 3,54 (три цілих п'ятдесят чотири сотих); $\frac{36}{100}$ = 0,36 (нуль цілих тридцять шість сотих); $\frac{207}{100000}$ = 0,00207 (нуль цілих двісті сім стотисячних).

Навпаки, щоб записати десятковий дріб звичайним, потрібно відкинути кому і одержане число записати чисельником дробу, знаменником же записати число 10^n, де n – кількість цифр після коми, тобто кількість десяткових знаків.

Наприклад: $0{,}0018 = \frac{18}{10^4} = \frac{18}{10000}$; $2{,}15 = \frac{215}{10^2} = \frac{215}{100}$.

Натуральні числа також можна зображати десятковими дробами, в яких усі десяткові знаки рівні нулю.

На основі позиційного принципу запису десяткових дробів і властивостей звичайних дробів неважко встановити такі властивості десяткових дробів.

1. Дописування нулів справа до десяткового дробу не змінює його величини.

2. З двох десяткових дробів більший той, у якого більша його ціла частина, або ж, якщо цілі частини рівні, у якого раніше зустрінеться більший відповідний десятковий знак.

3. Щоб звести десяткові дроби до спільного знаменника, треба за допомогою дописування нулів справа зрівняти у них кількість десяткових знаків.

4. Щоб помножити (поділити) десятковий дріб на 10^k, де $k \in N$, треба перенести у ньому кому вправо (вліво) на k цифр.

Наприклад: з двох десяткових дробів 23,546 і 23,583 більшим буде другий дріб, бо 23 = 23, 5 = 5, а 4 < 8, отже 23,583 < 23,546.

4.2.2. Алгоритми арифметичних операцій над десятковими дробами.

Позиційний принцип запису десяткових дробів полегшує виконання арифметичних операцій над ними, причому сума, різниця (якщо вона існує) і добуток десяткових дробів є також десятковим дробом. Але частка десяткових дробів не завжди буде десятковим дробом. Не обмежуючи загальності міркувань, можна вважати, що у них однакове число десяткових знаків.

Тому потрібно при додаванні двох або більше десяткових дробів підписати їх один під одними так, щоб цілі частини і відповідні десяткові знаки знаходились один під одним. Потім потрібно виконати додавання написаних чисел як натуральних і в одержаній сумі відокремити справа стільки десяткових знаків, скільки їх має доданок з найбільшою кількістю десяткових знаків. Наприклад: 2,347 + 0,4235 + 15,624 = 18,3945

$$\begin{array}{r} 2,347 \\ +\;0,4235 \\ 15,624 \\ \hline 18,3945 \end{array}$$

При відніманні десяткових дробів, якщо різниця існує, можна поступати так, як і при відніманні натуральних чисел, при цьому немає необхідності зрівнювати кількість десяткових знаків у дробів-компонент.

Щоб знайти різницю двох десяткових дробів підписують їх один під одним так, щоб цілі частини і відповідні десяткові знаки знаходились один під одним. Потім потрібно виконати віднімання записаних чисел як натуральних і в одержаній різниці відділити справа стільки десяткових знаків, скільки їх у дробі-компоненті з найбільшою кількістю десяткових знаків. Наприклад:

$$5,243 - 2,5678 = 2,6752$$

$$\begin{array}{r} 5,243 \\ -\;2,5678 \\ \hline 2,6752 \end{array}$$

Щоб знайти добуток двох десяткових дробів потрібно перемножити їх як натуральні числа, не звертаючи уваги на коми, а потім у добутку відділити комою справа стільки десяткових знаків, скільки їх є в обох множниках разом. Наприклад:

$$3,524 \cdot 0,23 = 0,81052$$

$$\begin{array}{r} 3,524 \\ \times\;\;0,23 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
\hline
 & 1 & 0 & 5 & 7 & 2 \\
 & 7 & 0 & 4 & 8 & \\
\hline
0, & 8 & 1 & 0 & 5 & 2
\end{array}$$

На практиці ділення десяткових дробів виконується за таким правилом: ділення двох десяткових дробів зводиться до ділення десяткового дробу на натуральне число шляхом множення діленого і дільника на знаменник дільника, тобто на 10^n, де n – число десяткових знаків дільника.

Наприклад: 0,3424 : 0,08 = 4,28.

Помножимо ділене і дільник на $10^2 = 100$ і поділимо одержані числа: 0,3424 : 0,08 = 34,24 : 8 = 4,28.

4.2.3.Перетворення звичайних дробів у десяткові.

Ділення десяткових дробів вимагає відповіді на питання про те, чи завжди частка від ділення двох десяткових дробів буде десятковим дробом. Іншими словами, чи завжди у класі рівних дробів знайдеться десятковий дріб.

Знаходження десяткового дробу, що дорівнює заданому звичайному дробу, називається *перетворенням звичайного дробу у десятковий*.

Має місце теорема.

<u>Теорема 1</u>. Нескоротний дріб $\frac{m}{n}$ перетворюється у десятковий дріб тоді і тільки тоді, коли канонічний розклад знаменника дробу містить лише прості множники 2 або 5.

Щоб перетворити звичайний дріб у десятковий, достатньо, скориставшись основною властивістю дробу, даний дріб замінити рівним йому зі знаменником 10^n. Наприклад:

$$\frac{3}{20} = \frac{3}{2^2 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 5}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{15}{100} = 0{,}15.$$

Перетворення звичайного дробу у десятковий можна здійснити і по-іншому: виконати ділення чисельника на знаменник, дописуючи до чисельника нулі по одному, доки ділення не завершиться. Наприклад, дріб $\frac{7}{40}$ перетвориться у десятковий, бо він нескоротний і

$40 = 2^3 \cdot 5$. Маємо:

7			|	40				
7	0		|	0,	1	7	5	
4	0							
3	0	0						
2	8	0						
	2	0	0					
	2	0	0					
			0					

Отже, $\frac{7}{40} = 0{,}175$.

Розглянутий метод перетворення звичайних дробів у десяткові називається *методом ділення*.

4.2.4.Нескінченні періодичні десяткові дроби.

Розглянемо два приклади застосування методу ділення до звичайних дробів, які не перетворюються у десяткові дроби.

Наприклад, для дробів $\frac{9}{37}$ і $\frac{13}{22}$ матимемо:

9	| 3 7				
9 0	| 0, 2 4 3 2...				
.7 4					
1 6 0					
1 4 8					
	1 2 0				
	1 1 1				
		9 0			
		7 4			
		1 6 0			
.		. . .			

1 3	| 2 2			
1 3 0	| 0, 5 9 0 9 0 9 0...			
1 1 0				
2 0 0				
1 9 8				
	2 0 0			
	1 9 8			
		2 0 0		
		1 9 8		
			2 0 .	
			. . .	

У цих прикладах одержуємо нескінченні десяткові дроби. Якщо ділення припинити на *k*–тому кроці, то отримаємо десятковий дріб, який є наближенням з недостачею даного дробу з точністю $\frac{1}{10^к}$, а тому можемо покласти, що $\frac{9}{37}$= 0,243243243… і $\frac{13}{22}$ = 0,5909090…

Розгляд цих прикладів показує, що через скінченне число кроків одержується остача, яка або дорівнює чисельнику дробу (9), або одній з попередніх остач (20), а тому на основі теореми про єдиність частки і остачі при діленні з остачею нескінченний десятковий дріб утворюється, починаючи з деякого десяткового знаку, кортежем цифр, що повторюється. У першому прикладі це кортеж 243, а у другому – 90.

Нескінченний десятковий дріб називається *періодичним*, якщо він утворюється повторенням кортежу цифр, починаючи з деякого десяткового знаку.

Якщо повторюється кортеж цифр довжиною k, то повторюватимуться і кортежі цифр з довжиною $2k$, $3k$, $4k$, … .

Число, десятковий запис якого є кортежем найменшої довжини, що за допомогою нього утворюється періодичний дріб, називається *періодом*, а довжина кортежу – *довжиною періоду* періодичного добу.

Періодичний дріб називається:

1) *чистим*, якщо період починається зразу після коми;

2) *мішаним*, якщо між комою і періодом є десяткові знаки.

Десяткові знаки між комою і періодом утворюють доперіодичну частину.

При символічному запису періодичних дробів замість десяткових знаків, що повторюються, вказується лише період, який береться у дужки. Так періодичний дріб 0,243243243… запишеться 0,(243) (читається "нуль цілих двісті сорок три у періоді"), а дріб 0,590909090… є мішаним періодичним дробом і запишеться 0,5(90) (читається "нуль цілих п'ять десятих до періоду і дев'яносто у періоді").

Теорема 3. Кожний нескоротний звичайний дріб перетворюється у періодичний дріб, якщо канонічний розклад знаменника містить хоча б один простий множник, відмінний від 2 і 5.

Кожний десятковий дріб можна записати у вигляді періодичного дробу з різними періодами. Розглянемо це на прикладі:

$$0{,}5 = 0{,}500000\ldots = 0{,}5(0).$$

Але неважко переконатися, що $0{,}5 = 0{,}49999\ldots = 0{,}4(9)$, бо

$$0{,}4(9) = \frac{49-4}{90} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Теорема 4. Якщо знаменник n звичайного правильного нескоротного дробу $\frac{m}{n}$ взаємно простий із числом 10, то дріб перетворюється у чистий періодичний дріб із довжиною періоду k, де k – найменше натуральне число таке, що $(10^k - 1) \,\vdots\, n$.

Зауваження. З теореми 4 випливає, що найменше натуральне число k таке, що 10^k при діленні на знаменник дробу дає остачу 1 і є довжиною періоду при перетворенні у десятковий дріб звичайного нескоротного дробу із знаменником n, де 10 і n взаємно прості. Наприклад, для знаходження довжини періоду для нескоротних дробів із знаменником 7, одержуємо остачі: 10 при діленні на 7 дає остачу 3; $10^2 = 10\times10$ дає ту ж остачу, що 3×3, тобто одержується число 2; $10^3 = 10^2\times10$, дає ту ж остачу, що й 3×2, тобто одержується остача 6; $10^4 = 10^2\times10^2$, дає ту ж остачу, що й 2×2, тобто одержується остача 4; $10^5 = 10^4\times10$, дає ту ж остачу, що й 4×3, тобто 5; $10^6 = 10^2\times10^4$, дає ту ж остачу, що й 2×4, тобто 1. Тому всі звичайні дроби виду $\frac{m}{n}$, у яких чисельник m взаємно простий із числом 7, перетворюються у чистий періодичний дріб з довжиною періоду рівною 6.

Теорема 5. *Якщо знаменник* $n = 2^{\alpha}\cdot5^{\beta}\cdot n_1$ звичайного нескоротного правильного дробу $\frac{m}{n}$ такий, що числа n_1 і 10 взаємно прості, то

дріб перетворюється у мішаний періодичний дріб з довжиною періоду k, де k – найменше натуральне число таке, що $(10^k - 1) \,\vdots\, n_1$ і числом десяткових знаків у доперіодичній частині рівним γ, де γ – найбільше з чисел α і β, тобто $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$.

Задача 1. Вияснити, в який періодичний дріб перетворюється звичайний дріб $\frac{m}{140}$, де m і 140 взаємно прості.

► Даний дріб $\frac{m}{п}$, нескоротний, бо числа m і 140 взаємно прості. Знайдемо канонічний розклад знаменника дробу:

$$140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Згідно теореми 5 дріб $\frac{m}{п}$ перетворюється у мішаний періодичний дріб із числом десяткових знаків у доперіодичній частині рівним $\max\{2, 1\} = 2$ і з довжиною періоду рівному числу 6, бо 6 є найменшим натуральним числом таким, що $(10^6 - 1) \vdots 7$.

<u>Відповідь</u>: дріб $\frac{m}{140}$, де числа m і 140 взаємно прості, перетворюється у мішаний періодичний дріб, у якого доперіодична частина складається із двох десяткових знаків, а період має довжину 6. ◄

За означенням кожне додатне раціональне число є класом рівних дробів. У цьому класі виділяється єдиний нескоротний дріб, останній перетворюється або у десятковий дріб, або у періодичний десятковий дріб діленням чисельника на знаменник. За основною властивістю частки цілих невід'ємних чисел усі рівні звичайні дроби перетворюються в один і той самий десятковий дріб. А тому кожне додатне раціональне число перетворюється або у десятковий дріб, або у періодичний десятковий дріб, причому при перетворенні методом ділення такий дріб буде єдиним.

Кожний десятковий дріб можна записати у вигляді періодичного дробу з різними періодами.

<u>Теорема 6</u>. Кожне додатне раціональне число однозначно зображається періодичним десятковим дробом, якщо не користуватися періодичними дробами, період яких складається з однієї цифри 9.

4.2.5. Перетворення періодичних десяткових дробів у звичайні.

Розглянемо обернену задачу: знайти звичайний дріб, у який перетворюється заданий періодичний дріб. Не обмежуючи загальності міркувань можна вважати, що ціла частина періодичного дробу дорівнює 0, бо коли це не так, то достатньо записати періодичний дріб, як суму його цілої частини і періодичного дробу з цілою частиною рівною 0.

Щоб перетворити чистий періодичний дріб у звичайний потрібно записати цілу частину, якщо вона відмінна від 0, і до неї дописати дріб, чисельник якого є періодом дробу, а знаменник є числом, записаним стількома дев'ятками, скільки цифр у періоді.

Щоб перетворити мішаний періодичний дріб у звичайний, потрібно записати цілу частину, якщо вона відмінна від нуля, і до неї додати звичайний дріб, чисельником якого є різниця між числами, зображеними кортежами десяткових знаків між комою і другим періодом та комою і першим періодом, а знаменником є число, записане стількома дев'ятками, скільки цифр у періоді, до яких справа приписано стільки нулів, скільки десяткових знаків є у доперіодичній частині.

При виконанні операцій з періодичними десятковими дробами їх перетворюють у звичайні.

<u>Задача 2</u>. Обчислити значення виразу:

$$\frac{(6,(11)-4,1(6)):1,(7)}{(2,3(3)+2,(66))\cdot\dfrac{1}{2}}.$$

► Для знаходження значення виразу використовуємо обчислення за операціями у порядку, визначеному виразом.

1) $6,(11)-4,1(6)=\left\{6,(11)=6\frac{11}{99}=6\frac{1}{9};\quad 4,1(6)=4\frac{16-1}{90}=4\frac{15}{90}=4\frac{1}{6}\right\}=$

$=6\frac{1}{9}-4\frac{1}{6}=5\frac{10}{9}-4\frac{1}{6}=1\frac{20-3}{18}=1\frac{17}{18};$

2) $1\frac{17}{18}:0,(7)=\left\{0,(7)=\frac{7}{9}\right\}=1\frac{17}{18}:\frac{7}{9}=\frac{35}{18}:\frac{7}{9}=\frac{35\cdot 9}{18\cdot 7}=\frac{5}{2}=2,5;$

3) $2,3(3)+2,(66)=\left\{2,3(3)=2\frac{33-3}{90}=2\frac{30}{90}=2\frac{1}{3};\quad 2,(66)=2\frac{66}{99}=2\frac{2}{3}\right\}=2\frac{1}{3}+2\frac{2}{3}=5;$

4) $5\cdot\frac{1}{2}=2,5$;

5) $2{,}5:2{,}5=1.$

Відповідь: значення виразу дорівнює 1. ◄

4.2.6. Проценти (відсотки).

На практиці часто доводиться користуватися десятковими дробами, знаменники яких дорівнюють числу 100, їх називають процентами або відсотками.

Процентом (*відсотком*) називається одна сота частина числа або одиниці (від латинського "*procentum*" – "від ста") і позначається 1 %. Тому пишуть 1 % = 0,01.

Розрізняють три основні види задач на відсотки (проценти):

- 1) знаходження відсотків (процентів) від числа:

щоб знайти відсоток від числа, достатньо дане число поділити на 100, тобто, знайти одну соту частину числа і помножити на кількість відсотків або кількість відсотків виразити десятковим дробом і дане число помножити на цей десятковий дріб.

Задача. У школі 200 учнів. З них 30 % – учні початкових класів.Скільки у школі навчається учнів у початкових класах?

1 спосіб. 200 : 100 · 30 = 60 (учнів).

2 спосіб. Оскільки 30 % = 0,3, то задача зводиться до знаходження 0,3 від числа 200: 200·0,3 = 60 (учнів).

- 2) знаходження числа за його відсотками (процентами):

щоб знайти число за його відсотками, достатньо поділити на ці відсотки частину числа, що на них припадає, тобто, знайти скільки припадає на 1% і помножити на 100 або: кількість відсотків виразити десятковим дробом і частину числа, яка дана в умові задачі, поділити на цей десятковий дріб (тобто знайти число за його дробом).

Задача. У початкових класах школи навчається 60 учнів, що становить 30 % числа всіх учнів школи. Скільки всього учнів у школі?

1 спосіб. 60 : 30 · 100 = 200 (учнів).

2 спосіб. Оскільки 30 % = 0,3, то задача зводиться до знаходження числа, 0,3 якого дорівнює 60, тоді саме число дорівнює:

60 : 0,3 = 200 (учнів).

- 3) знаходження відсоткового (процентного) відношення двох чисел:

щоб знайти відсоткове відношення двох чисел, достатньо одне число умови задачі, про яке йде мова у запитанні, поділити на інше число умови і знайдену частку помножити на 100 або: знайти скільки припадає на 1% відсоток, а потім скільки разів це число (що припадає на 1%) вмішується в іншому числі, яке дано в умові задачі.

Задача 3. У школі 200 учнів, з них 60 учнів навчається у початкових класах. Скільки відсотків становлять учні початкових класів від числа всіх учнів?

Враховуючи програму початкової школи з математики, цю задачу доцільно розв’язати наступним чином: знаходимо скільки учнів припадає на один відсоток:

200 : 100 = 2 (учні),

а потім – скільки разів вміщається число 2 у числі 60 (тобто, у скільки разів число 60 більше від числа 2): 60 : 2 = 30(%).

Розглянемо складнішу задачу на відсоткові обчислення.

Задача 6. Урожайність картоплі у господарстві зросла за перший рік на 15 %, за другий рік ще на 20 %, порівняно з попереднім. На скільки процентів зросла врожайність картоплі за два роки?

► Початкову врожайність картоплі приймемо за 100 %. Тоді врожайність після першого року становитиме 100 % + 15 % = 115 % у порівнянні з початковою. Врожайність за другий рік у порівнянні з початковою збільшиться на 115 · 0,2 = 23 %. Отже, за два роки врожайність картоплі збільшилася на 15 % + 23 % = 38 % у порівнянні з початковою.

Відповідь: за два роки врожайність збільшилася на 38 %. ◄

Зауваження. При розв'язуванні задач такого типу часто допускають помилку, додаючи 15 % і 20 %, забуваючи при цьому, що дані відсотки беруться від різних чисел.

4.3. Множина дійсних чисел

*4.3.1. **Нескінченні неперіодичні десяткові дроби. Множина дійсних** чисел.*

Нескінченний неперіодичний десятковий дріб називається *додатним ірраціональним числом*. Усі такі числа складають множину *додатних ірраціональних чисел*.

Множина, яка є об'єднанням множин додатних раціональних і додатних ірраціональних чисел, називається *множиною додатних дійсних чисел* (позначається R_+), а її елементи – *додатними дійсними числами*.

Говорячи про запис або зображення додатних дійсних чисел, будемо мати на увазі лише зображення їх нескінченними десятковими дробами, яке називатимемо *десятковим записом* (*зображенням*).

Часто потрібно знати не тільки числове значення величин, а й характер їх зміни. Коли величина мала значення a, а через деякий час має значення b, то при умові, що $a < b$, величина збільшиться на $b - a$; якщо $a > b$, то величина зменшиться на $a - b$; якщо ж $a = b$, то величина не зміниться. Щоб не вживати терміни "збільшиться", "зменшиться", "не зміниться", бажано було б мати таку числову множину, щоб самі її елементи містили вказівку на те, який характер носить зміна величини. Додатних дійсних чисел для цього недостатньо.

Необхідність розширення множини додатних дійсних чисел вимагають не тільки задачі практики, але й задачі самої математики. Зокрема, потрібна така числова множина, в якій рівняння $b + x = a$ при довільних додатних дійсних числах a і b мало б єдиний розв'язок, тобто, щоб завжди існувала різниця чисел a і b. Таким розширенням множини додатних дійсних чисел є множина дійсних чисел.

Кожному додатному дійсному числу a поставимо у відповідність символ $-a$, який назвемо *від'ємним дійсним числом*. Усі від'ємні дійсні числа складають *множину від'ємних дійсних чисел* (позначається R_-).

Від'ємні дійсні числа a і b називаються:

1) *рівними* (записується $a = b$), якщо вони поставлені у відповідність рівним додатним дійсним числам;

2) *нерівними* (*різними*) (записується $a \neq b$), якщо вони поставлені у відповідність нерівним додатним дійсним числам.

Множина, елементами якої є всі додатні дійсні числа, всі від'ємні дійсні числа і число нуль, називається *множиною дійсних чисел* (позначається R), а її елементи – дійсними числами: $R := R_+ \cup \{0\} \cup R_-$.

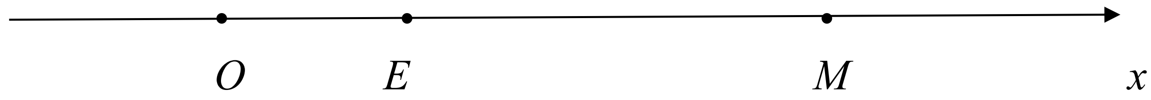
Отже, множина дійсних чисел розбивається на три класи: клас додатних дійсних чисел, клас від'ємних дійсних чисел і клас, якому належить лише єдине число нуль. При запису додатних дійсних чисел перед ними ставлять знак "+", хоч це не обов'язково, тобто можна записати + 35,8 або 35,8.

Числа, як відомо, використовуються для опису найрізноманітніших ситуацій. Зокрема, вони використовуються для визначення місця точки на промені, прямій чи якійсь іншій лінії. До створення понять "числовий промінь", "числова пряма" спонукав розгляд практичних задач, наприклад, такого змісту: "Один із поїздів знаходиться на віддалі 400 км від пункту відправлення. На якій віддалі від пункту відправлення знаходиться інший поїзд, якщо віддаль між поїздами 800 км і вони рухаються в одному напрямку?" На математичній мові ця задача може бути сформульована так: "На прямій вибрано деяку точку і потрібно визначити положення однієї з двох інших відносно неї, якщо відоме положення однієї з них відносно вибраної точки та їх положення відносно одна одної".

4.3.2. Взаємнооднозначна відповідність між множиною дійсних чисел і точок координатної прямої. Протилежні числа.

Пряма, на якій задано точки O та E, вказано напрям від O до E, називається *координатною прямою*, при цьому точка O називається *початком відліку* (*початком координат*), а відрізок OE приймається за одиничний відрізок.

Промінь *OE* називається *додатним променем*, а промінь, що доповнює його до прямої – *від'ємним* (мал. 1).



Мал. 1.

Встановимо відношення між точками координатної прямої і дійсними числами. Нехай задано координатну пряму і на ній довільну точку *M* (див. мал. 1). Можливі три випадки:

1) точка *M* належить додатному променю, тоді їй ставиться у відповідність додатне дійсне число, яке дорівнює мірі відрізка *OM*;

2) точка *M* належить від'ємному променю, тоді їй ставиться у відповідність від'ємне дійсне число, яке одержується, коли перед мірою відрізка *OM* ставиться знак "–";

3) точка *M* збігається з точкою *O*, тоді їй ставиться у відповідність число нуль.

Оскільки кожний відрізок *OM* має єдину міру при вибраному одиничному відрізу *OE*, яка є додатним числом, то при так означеному відношенні кожній точці координатної прямої ставиться у відповідність єдине дійсне число. Навпаки, кожному дійсному числу при цьому відношенні ставиться у відповідність єдина точка координатної прямої. Дійсно, для довільного дійсного числа x можливі три випадки:

1) число x є додатним, тоді йому ставиться у відповідність точка *M* координатної прямої, яка є кінцем відрізка *OM*, мірою якого є число x при одиничному відрізку *OE* і відрізок *OM* відкладений на додатному промені;

2) число x є від'ємним, тоді йому ставиться у відповідність точка *M* координатної прямої, яка є кінцем відрізка *OM*, мірою якого є додатне дійсне число, якому поставлене у відповідність від'ємне число x, при одиничному відрізку *OE* і відрізок *OM* відкладений на від'ємному промені;

3) число x дорівнює нулю, тоді йому ставиться у відповідність точка *O*, яка є початком відліку на координатній прямій.

Оскільки для кожного додатного дійсного числа можна побудувати єдиний відрізок (з точністю до рівності), що має його своєю мірою при заданому одиничному відрізку, то при так визначеному відношенні кожному дійсному числу ставиться у відповідність єдина точка на координатній прямій.

Отже, так побудоване відношення між множинами точок координатної прямої і дійсних чисел є бієктивним відображенням, тобто взаємно однозначною відповідністю. Таких бієктивних відображень можна встановити безліч, бо на прямій початок відліку O та одиничний відрізок OE вибираються довільно.

Дійсне число x, яке ставиться у відповідність точці M координатної прямої, називається *координатою точки* M і записується $M(x)$.

Як уже раніше неодноразово зазначалось, у математиці часто множини, між елементами яких встановлено взаємно однозначну відповідність, ототожнюються, тобто можна користуватись однією з них. Тому на координатній прямій у більшості випадків відмічають не точки, а їх координати, а саму координатну пряму називають *числовою прямою*.

Дійсні числа a і b називаються *протилежними*, якщо вони є координатами точок, що симетричні відносно початку координат. Число протилежне числу a позначають $-a$. Очевидно, що для кожного дійсного числа існує єдине протилежне йому число і що число протилежне до додатного числа є від'ємним числом, а протилежне до від'ємного – додатним числом. Крім того, $-(-a) = a$. Протилежним числом до нуля є воно саме.

Модулем (*абсолютною величиною*) дійсного числа x (позначається $|x|$) називається:

1) саме це число, якщо воно додатне;
2) протилежне йому число, якщо воно від'ємне;
3) нуль, якщо воно рівне нулю.

Отже,

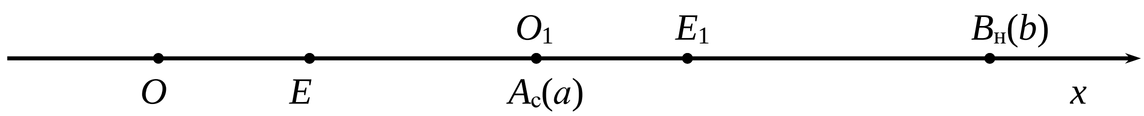
$$\forall\, x \in R: \ |\, x \,| := \begin{cases} x, & \text{якщо} \quad x \in R_+, \\ -x, & \text{якщо} \quad x \in R_-, \\ 0, & \text{якщо} \quad x = 0. \end{cases}$$

З означення модуля дійсного числа випливає, що він є або нулем, або додатним дійсним числом. Іншими словами, модуль довільного дійсного числа є завжди невід'ємним дійсним числом. Геометрично модуль дійсного числа виражає віддаль на координатній прямій від точки *M*, яка має своєю координатою це число, до початку координат. Кожне дійсне число, відмінне від нуля, однозначно визначається своїм модулем і знаком.

4.3.3. Додавання дійсних чисел.

Як відомо, сума двох додатних дійсних чисел означається як міра суми двох відрізків, для яких дані числа є мірами при одному і тому ж одиничному відрізку.

Проілюструємо суму двох додатних дійсних чисел a і b на координатній прямій. Для цього введемо на прямій дві системи координат, в яких рівні одиничні відрізки, однакові напрямки і початок нової системи координат збігається з точкою A, що має своєю координатою число a у старій системі координат, а точка B має координатою число b у новій системі координат (мал. 2).



Мал. 2.

З мал. 2 видно, що сумі чисел a і b відповідає відрізок $OB = OA + AB = OA + O_1B$, міра якого рівна координаті точки B у старій системі координат, тобто число $a + b$ можна розглядати як координату точки B у старій системі координат.

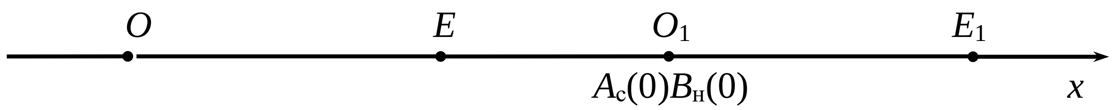
Одержаний результат дає можливість поширити наведені міркування на випадок довільних дійсних чисел.

Зауваження. Для спрощення викладу будемо вважати, що у даному пункті стара і нова система координат відрізнятимуться тільки початком відліку.

Нехай a і b – довільні дійсні числа. Можливі такі випадки:

1) Принаймні одне з чисел дорівнює 0, наприклад, $b = 0$. Тоді з мал. 3

$A_с(a)$, $B_н(0)$ та $A = B$.



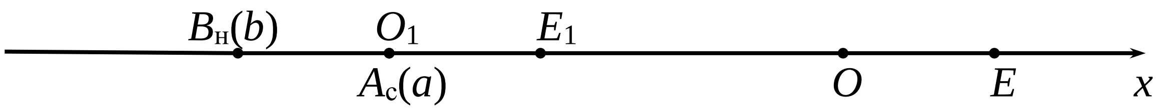
Мал. 3.

Звідси $OB = OA$ і $B_c(a) = A_с(a)$

2) Числа мають однакові знаки. Якщо a і b є додатними числами, то, як вище було встановлено, $B_с(a + b)$ або, що те саме, $B_с(|a| +|b|)$.

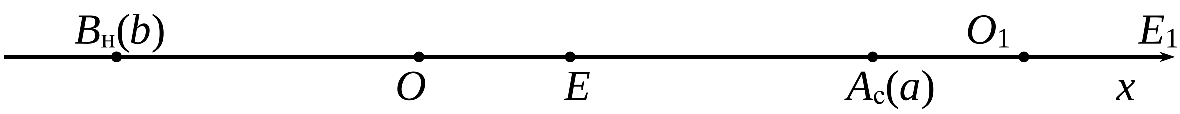
Нехай тепер числа a і b є від'ємними числами. Тоді $A_с(a)$, $B_н(b)$ і $OB = OA + AB = OA + O_1B$ (мал. 4).

Звідси $|OB| = |OA| + |O_1B| = |a| + |b|$ і $B_с(-(|a| + |b|))$.



Мал. 4.

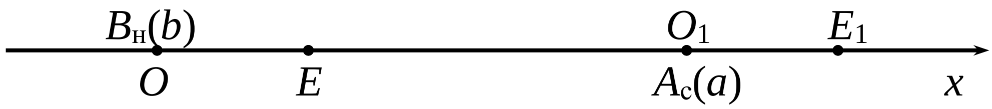
3) Числа мають різні знаки. Нехай, наприклад, a є додатним, а b – від'ємним числами, причому $|b| > |a|$. Тоді, $A_с(a)$, $B_н(b)$ і $BO + OA = AB$ (мал. 5).



Мал. 5.

Звідси $|OB| = |AB| - |OA| = |b| - |a|$ і $B_c(-(|b| - |a|))$.

Якщо $|b| = |a|$, то $A_c(a)$, $B_н(b)$ і $OA = O_1B$. Отже, $B_с(0)$ (мал. 6).



Мал. 6.

Якщо ж $|b| < |a|$, то не важко встановити, що $B_c(|a| – |b|)$.

Аналогічно міркуючи, робимо висновок, що у випадку, коли a є від'ємним, а b – додатним числами, то $B_c(|b| – |a|)$, якщо $|b| > |a|$; $B_c(-(|a| - |b|))$, якщо $|b| < |a|$; $B_c(0)$, якщо $|b| = |a|$.

На основі проведених міркувань приходимо до такого означення суми двох довільних дійсних чисел.

Сумою довільних дійсних чисел a і b (позначається $a + b$) називається дійсне число, яке дорівнює:

1) одному з них, якщо друге дорівнює нулю;

2) нулю, коли ці числа протилежні;

3) числу, модуль якого дорівнює сумі модулів даних чисел, якщо ці числа мають однакові знаки, перед якими стоїть їх спільний знак;

4) числу, модуль якого дорівнює різниці більшого і меншого модулів даних чисел, якщо вони мають різні знаки, перед яким поставлено знак того числа, яке має більший модуль.

Аналіз означення суми двох дійсних чисел та властивості операцій над додатними дійсними числами приводять до теореми.

Теорема 1. Сума довільних двох дійсних чисел завжди існує та єдина.

На основі теореми 1 вводимо означення.

Операція на множині дійсних чисел, при якій кожній парі чисел a і b ставиться у відповідність їх сума $a + b$, називається *додаванням дійсних чисел*.

Із властивостей додавання і віднімання додатних дійсних чисел та означення суми дійсних чисел одержується наступна теорема, яка виражає властивості додавання дійсних чисел.

Теорема 2. Для довільних дійсних чисел мають місце:

1) властивість нуля при додаванні: $\forall\, a \in R$: $a + 0 = 0 + a = a$;

2) комутативний закон: $\forall\, a, b \in R$: $a + b = b + a$;

3) асоціативний закон: $\forall\, a, b, c \in R$: $(a + b) + c = a + (b + c)$;

4) закон монотонності відносно відношення рівності:

$\forall\ a, b, c \in R$: $a = b \to a + c = b + c$;

5) правило скорочення відносно відношення рівності:

$\forall\ a, b, c \in R$: $a + c = b + c \to a = b$.

4.3.4. Віднімання дійсних чисел.

Віднімання дійсних чисел розглядається як операція обернена до додавання.

Різницею довільних дійсних чисел a і b (позначається $a - b$) називається дійсне число x таке, що $b + x = a$.

Отже, за означенням різниці $b + (a - b) = a$ або $(a - b) + b = a$.

Теорема 3. Різниця довільних дійсних чисел a і b завжди існує і єдина.

Наслідок 1. Щоб знайти різницю довільних дійсних чисел a і b потрібно до числа a додати число, протилежне числу b:

$\forall\ a, b \in R$: $a - b = a + (-b)$.

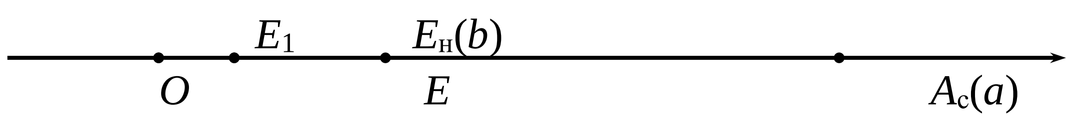
Наслідок 2. Для довільних дійсних чисел a і b рівняння $b + x = a$ має єдиний розв'язок.

Теорема 3 є основою для такого означення.

Операція на множині дійсних чисел, при якій кожній парі дійсних чисел a і b ставиться у відповідність їх різниця $a - b$, називається *відніманням дійсних чисел*.

4.3.5. Множення дійсних чисел.

Як відомо, добуток двох додатних дійсних чисел означався на основі переходу від одного одиничного відрізка до іншого. Розглянемо, як можна добуток додатних дійсних чисел $a \cdot b$ проілюструвати на координатній прямій. Для цього введемо на прямій дві системи координат OE та OE_1, в яких однакові напрямки і число a є координатою точки A у старій системі координат, а число b є координатою точки E у новій системі координат (мал. 7).



Мал. 7.

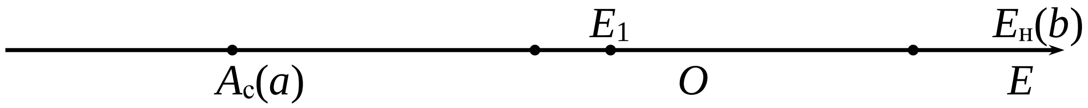
За означенням добутку додатних дійсних чисел число $a \cdot b$ є мірою відрізка OA у новій системі координат, тобто число $a \cdot b$ можна розглядати як координату точка A у новій системі координат.

Одержаний результат наводить на думку поширити проведені міркування на випадок довільних дійсних чисел, які відмінні від нуля. Нехай a і b – довільні дійсні числа, відмінні від нуля. Задамо на прямій системи координат OE та OE_1 такі, що $A_с(a)$, $E_н(b)$. Неважко встановити, що $|OA| = |a| \cdot |b|$ при одиничному відрізку OE_1. Отже, для знаходження координати точки A у новій системі координат потрібно вміти визначати положення точки A на координатній прямій або, що те саме, вміти встановлювати знак числа, яке є координатою точки A. Можливі такі випадки:

1) Числа мають однакові знаки.

Якщо a і b є додатними числами, то, як було встановлено вище, $A_н(a \cdot b) = A_н(|a| \cdot |b|)$.

Якщо ж числа a і b є від'ємними, то з того, що a і b від'ємні числа випливає, що точка O лежить між точками A та E, а також між точками E_1 та E (мал. 8).

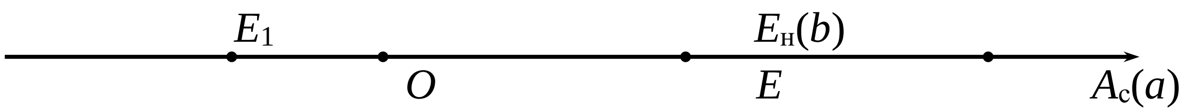


Мал. 8.

Звідси одержуємо, що точки A та E_1 знаходяться по один бік від точки O. Отже, координата точки A у новій системі координат OE_1 є додатним числом, тобто $A_н(|a| \cdot |b|)$.

2) Числа мають різні знаки.

Нехай a – додатне, а b – від'ємне число. З того, що число a додатне випливає, що точки E та A лежать по один бік від точки O. З того ж, що число b від'ємне, одержується, що точка O лежить між точками E та E_1 (мал. 9).



Мал. 9.

Тому точка O лежить між точками E_1 та A. Звідси маємо, що координата точки A у новій системі координат OE_1 є від'ємним числом, тобто $A(-|a|\cdot|b|)$.

Аналогічний результат одержується у випадку, коли a – від'ємне, а b – додатне числа.

Залишається розглянути випадок, коли хоч одне з чисел a і b дорівнює нулю. Оскільки множина A цілих невід'ємних чисел є підмножиною множини дійсних чисел і

$$\forall\ a \in N_0\colon a\cdot 0 = 0\cdot a = 0,$$

то потрібно, щоб ця умова виконувалася і для довільних дійсних чисел.

Наведені міркування є основою для такого означення добутку двох чисел.

Добутком довільних двох дійсних чисел a і b (позначається $a\cdot b$) називається дійсне число, яке дорівнює:

1) нулю, коли хоч одне з них дорівнює нулю;

2) числу, модуль якого дорівнює добутку модулів даних чисел і взяте зі знаком "+", коли числа мають однакові знаки, і знаком "–" коли числа мають різні знаки.

Теорема 4. Добуток довільних двох дійсних чисел завжди існує та єдиний.

Дана теорема є безпосереднім висновком із означення добутку та властивостей добутку додатних дійсних чисел.

На основі теореми 4 вводиться означення.

Операція на множині дійсних чисел, при якій кожній парі чисел a і b ставиться у відповідність їх добуток $a\cdot b$, називається *множенням дійсних чисел*.

Із означення добутку дійсних чисел та властивостей множення додатних дійсних чисел одержується наступна теорема, яка виражає властивості множення дійсних чисел.

Теорема 5. Для множення дійсних чисел мають місце:

1) властивість нуля: $\forall\ a \in R\colon a\cdot 0 = 0\cdot a = 0$;

2) властивість одиниці: $\forall\ a \in R$: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;

3) комутативний закон: $\forall\ a, b \in R$: $a \cdot b = b \cdot a$;

4) асоціативний закон: $\forall\ a, b, c \in R$: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

5) дистрибутивний закон множення відносно додавання: $\forall\ a, b, c \in R$: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;

6) закон монотонності відносно відношення рівності: $\forall\ a, b, c \in R$: $a = b \to a \cdot c = b \cdot c$.

4.3.6. Ділення дійсних чисел.

Операція ділення дійсних чисел розглядається як обернена до операції множення. Як відомо, частка довільних додатних дійсних чисел завжди існує та єдина, що забезпечується наявністю у множині додатних дійсних чисел числа оберненого йому. Розглянемо аналог цього твердження у множині дійсних чисел.

Теорема 6. Для кожного дійсного числа b, відмінного від нуля, існує єдине обернене йому число, тобто існує єдине таке дійсне число y, що $b \cdot y = 1$.

Дійсне число, обернене до числа b, позначається $\frac{1}{b}$ або b^{-1}.

Часткою довільних дійсних чисел a і $b \neq 0$ називається дійсне число x таке, що $b \cdot x = a$.

Отже, $b \cdot (a : b) = a$ або $(a : b) \cdot b = a$.

Має місце теорема.

Теорема 7. Частка довільних дійсних чисел a і $b \neq 0$ завжди існує та єдина.

Наслідок 3. Для довільних дійсних чисел a і $b \neq 0$ рівняння $b \cdot x = a$ має єдиний розв'язок.

Операція у множині дійсних чисел, при якій кожній парі чисел a і $b \neq 0$ ставиться у відповідність їх частка $a : b$, називається *діленням дійсних чисел*.

Операція ділення дійсних чисел є частковою операцією, оскільки вона не визначена для дільника рівного нулю.

Властивості ділення дійсних чисел залишаються такими ж як і для додатних дійсних чисел.

Наступна теорема виражає правило скорочення множення відносно відношення рівності.

Теорема 8. $\forall\ a, b, c \in R$: $(c \neq 0) \wedge (a \cdot c = b \cdot c) \rightarrow (a = b)$.

4.3.7. Властивості дійсних чисел: упорядкованість і неперервність.

Розглянуті вище числові множини були лінійно впорядковані. Для кожної з них, а саме множини натуральних чисел, множини додатних раціональних чисел і множини додатних дійсних чисел відношення "більше" тісно пов'язане з існуванням різниці: якщо числа a і b належать одній із вказаних множин, то різниця $a - b$ існує тоді і тільки тоді, коли $a > b$. Це твердження покладено в основу означення відношення "більше" для дійсних чисел. Для довільних дійсних чисел a і b число a називається *більшим* числа b (позначається $a > b$), якщо різниця $a - b$ є числом додатним:

$$\forall\ a, b \in R: a > b :\Leftrightarrow a - b \in R_{+}.$$

Теорема 9. Відношення "більше" на множині дійсних чисел транзитивне:

$$\forall\ a, b \in R: (a > b) \wedge (b > c) \rightarrow (b > c).$$

Теорема 10. Для довільних дійсних чисел a і b має місце одне і тільки одне із відношень або $a = b$, або $a > b$, або $a < b$.

Наслідок 4. Відношення "більше" на множині дійсних чисел є відношенням строгого лінійного порядку.

Відношення "менше" на множині дійсних чисел визначається як обернене до відношення "більше", а тому воно є також відношенням строгого лінійного порядку.

Відношення "більше або рівне" визначається як об'єднання відношень "більше" і "рівне". А відношення "менше або рівне" може бути означене або як відношення обернене до відношення "більше або рівне", або як об'єднання відношень "менше" і "рівне".

Теорема 11. Для довільного дійсного числа $a \neq 0$

1) число a є додатним тоді і тільки тоді, коли $a > 0$;

2) число a є від'ємним тоді і тільки тоді, коли $a < 0$.

Розглянуті чотири відношення лінійного порядку на множині дійсних чисел часто називають *відношеннями природного порядку на ній*. Говорячи про відношення порядку на множині дійсних чисел завжди мають на увазі одне з них.

Теорема 12 (законі монотонності додавання відносно відношень порядку). Операція додавання дійсних чисел монотонна відносно відношень порядку, зокрема:

$\forall\ a, b, c \in R$: $a > b \rightarrow a + c > b + c$.

Теорема 13 (правило скорочення додавання дійсних чисел відносно відношень порядку). Для операції додавання дійсних чисел має місце правило скорочення відносно відношення порядку, зокрема:

$\forall\ a, b, c \in R$: $a + c > b + c \rightarrow a > b$.

Закони монотонності і правила скорочення для множення відносно відношень порядку істотно відрізняються від відповідних законів для раніше розглянутих числових множин. Сформулюємо цей закон і правило лише для відношення "більше".

Теорема 14.

1) $\forall\ a, b, c \in R$: $(a > b) \wedge (c > 0) \rightarrow (a{\cdot}c > b{\cdot}c)$;

2) $\forall\ a, b, c \in R$: $(a > b) \wedge (c < 0) \rightarrow (a{\cdot}c < b{\cdot}c)$.

Теорема 15.

1) $\forall\ a, b, c \in R$: $(a{\cdot}c > b{\cdot}c) \wedge (c > 0) \rightarrow (a > b)$;

2) $\forall\ a, b, c \in R$: $(a{\cdot}c > b{\cdot}c) \wedge (c < 0) \rightarrow (a < b)$.

Теорема 16 (неперервність множини дійсних чисел). Для будь-яких двох дійсних чисел a і $в$ існує дійсне число c , що знаходиться між ними.

Побудована множина дійсних чисел R є розширенням множини додатних дійсних чисел R_+. Дійсно, множина R_+ є власною підмножиною множини R. Крім того, неважко переконатися, що всі операції та властивості додатних дійсних чисел зберігаються для них як для дійсних чисел. У множині дійсних чисел завжди існує різниця чисел, що не завжди мало місце у множині додатних дійсних чисел.

Множину дійсних чисел можна прийняти за універсальну множину для всіх числових множин, що розглядаються у шкільному курсі математики. Зокрема, множини цілих чисел і раціональних чисел є її підмножинами, тому їх побудова у нашому курсі не розглядалася. Як було встановлено, множина дійсних чисел містить результати всіх арифметичних операцій, за винятком ділення на нуль, що не завжди правильно для її підмножин.

З означення модуля дійсного числа випливає, що він є або нулем, або додатним дійсним числом. Іншими словами, модуль довільного дійсного числа є завжди невід'ємним дійсним числом. Геометрично модуль дійсного числа виражає віддаль на координатній прямій від точки M, яка має своєю координатою це число, до початку координат. Кожне дійсне число, відмінне від нуля, однозначно визначається своїм модулем і знаком.

Іноді на одній і тій же прямій доводиться розглядати дві системи координат. У цьому випадку одну з них називають старою, а іншу – новою системами координат. Якщо на прямій введено дві системи координат, то позначення того, що точка M прямої має своєю координатою x у старій і число y у новій системах координат записується $M_с(x)$ і $M_н(y)$.

Тлумачення дійсних чисел, як координат точок, дозволяє проілюструвати на числовій прямій додавання і множення додатних дійсних чисел, що дає можливість узагальнити результати для довільних дійсних чисел.

РОЗДІЛ 5. РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

5.1. Вирази. Числові рівності та нерівності

5.1.1. Числові вирази та їх значення.

Під *числовим виразом* розуміють запис чисел та операцій над ними, в якому за попередньою домовленістю відомий порядок виконання операцій над ними. Кожне число є також числовим виразом. Числа виразу називаються його *компонентами.*

Порядок операцій у числовому виразі регулюється круглими дужками: спочатку операції виконуються у найглибших дужках, потім у наступних і т.д., зовнішні дужки опускаються. Якщо ж дужки в числовому виразі відсутні, то порядок виконання арифметичних операцій такий: множення або ділення, потім додавання або віднімання в порядку їх запису.

Говорячи про числові вирази, мають на увазі, що результати зазначених у них операцій існують, тобто операції виконувані. Але якщо в числовому виразі є, наприклад, операція ділення з дільником рівним нулю, то її результат не існує. В цьому випадку говорять, що числовий вираз не має змісту. Зокрема, числовий вираз (4 + 5) : (6 – 2 · 3) не має змісту, бо при виконанні зазначених операцій у ньому з'являється необхідність ділення на нуль.

Якщо в числовому виразі виконати всі зазначені операції, то одержане число називається його *значенням.* Якщо числовий вираз є числом, то це число і називається його значенням. Залежно від значень числові вирази поділяються на додатні, від'ємні і нульові, записується це так: $A > 0$, $A < 0$, $A = 0$. Числові вирази не завжди мають значення в тій числовій множині, з якої беруть їх компоненти. Наприклад, числовий вираз 15 : (4 – 7) не має значення у множині натуральних чисел, бо різниця чисел 4 і 7 не має значення у множині натуральних чисел. Хоча компоненти і значення виразів (3 – 8) + (14 – 3) і $((1 + 8) : 18) \cdot 6$ є натуральними числами, але їх не можна розглядати над множиною натуральних чисел, бо результати проміжних операцій 3 – 8 = – 5 і $(1 + 8) : 18 = \frac{1}{2}$ не є натуральними числами. Це пояснюється тим, що не всі операції є виконуваними над певними числовими множинами. При розгляді числових виразів у всіх випадках, коли не вказано, з яких числових множин беруться їх компоненти, мають на увазі множину дійсних чисел.

Числовим виразам при потребі дають назви за останніми в них операціями. Наприклад, вираз 4 + 36 : 9 називають сумою числа 4 і частки чисел 36 і 9.

Числові не є висловленнями, бо про них не можна сказати істинні вони чи хибні. Домовимося позначати числові вирази великими латинськими буквами, а множину всіх виразів – W.

<u>Задача 1.</u> Розв'язати задачу і скласти числовий вираз для її

розв'язування.

На виготовлення 32 столових і 60 чайних ложок пішло 3 кг 400 г срібла. Маса однієї столової ложки на 20 г більша від маси однієї чайної ложки. Яка маса всіх столових ложок?

►Аналіз задачі. Потрібно знайти масу всіх столових ложок. Число столових ложок рівне 32. Отже, треба знати масу однієї столової ложки. Відомо, що виготовили 32 столових і 60 чайних ложок. Можна знайти число всіх виготовлених ложок. Якби всі вони були одного виду, наприклад столові, то, знаючи їх масу, можна знайти масу однієї ложки. Столова ложка має масу на 20 г більшу, ніж чайна, і якщо замінити чайні ложки столовими, то маса всіх ложок збільшиться, причому можна знайти на скільки збільшиться. Значить, можна знайти і масу всіх ложок, якби вони були столовими. Після цього легко взнати масу однієї столової ложки і дати відповідь на питання задачі.

2. Розв'язування задачі.

1) Скільки всього виготовлено ложок?

$32 + 60 = 92$ (лож.)

2) На скільки маса 60 столових ложок більша, ніж маса 60 чайних ложок?

$20 \cdot 60 = 1200$ (г)

3) Яка маса 92 столових ложок?

$3400 + 1200 = 4600$ (г)

4) Яка маса однієї столової ложки?

$4600 : 92 = 50$ (г)

5) Яка маса 32 столових ложок?

$50 \cdot 32 = 1600$ (г) = 1 кг 600 г.

3. Складання числового виразу.

При складанні числового виразу, за допомогою якого знаходиться розв’язок задачі, потрібно, піднімаючись вгору по діях її питань, послідовно заміняти компоненти дій до тих пір, поки не будуть використані всі дані задачі.

Для задачі, що розглядається, вираз можна скласти так:

$1600 = 50 \cdot 32 = (4600 : 92) \cdot 32 = ((3400 + 1200) : (32 + 60) \cdot 32 =$

((3400 + +20 · 60) : (32 + 60)) · 32.

Отже, вираз для розв'язування задачі має вигляд:

((3400 + 20 · 60) : (32 + 60)) · 32.

Відповідь: маса столових ложок 1 кг 600 г.◄

Тому що числові вирази мають не більше одного значення, то за допомогою них можна розв’язувати лише ті задачі, в яких потрібно знайти тільки одне число. Наприклад, якби в задачі, що розглядалася вище, потрібно було б знайти масу столових і чайних ложок окремо, то виразу для її розв’язування не можна скласти.

Задача 2. У магазині є 40 ящиків картоплі та 10 ящиків моркви. Маса одного ящика картоплі – 30 кг, маса одного ящика моркви – 20 кг.

До даної умови задачі сформулювати питання так, щоб розв’язок задачі знаходився за допомогою виразу:

1) 30 • 40 + 20 • 10; 2) 30 • 40 - 20 • 10; 3)(30 • 40) : (20 • 10);

4) (30 • 40 + 20 • 10) : (40 + 10); 5) 30 • 40 + 200.

►1. Вираз 30 • 40 + 20 • 10 є сумою. Перший доданок є добутком чисел 30 і 40 і означає масу картоплі в магазині. Другий доданок є добутком чисел 20 і 10 і означає масу моркви в магазині. А тому питання до умови задачі, розв’язок якої знаходиться за допомогою даного виразу, може бути сформульовано так: Скільки всього кілограмів картоплі і моркви є в магазині?

2. Вираз 30 • 40 – 20 • 10 є різницею добутків чисел 30 і 40 та 20 і 10. А тому питання до умови задачі, щоб розв’язок її знаходився за допомогою даного виразу, можна сформулювати так: На скільки кілограмів більше в магазині картоплі, ніж моркви?

3. Вираз (30 • 40) : (20 • 10) є часткою добутків чисел 30 і 40 та 20 і 10. А тому питання в цьому випадку можна сформулювати так: У скільки разів більше в магазині картоплі, ніж моркви?

4. Вираз (30 • 40 + 20 • 10) : (40 + 10) є часткою сум чисел. У цьому випадку питання може бути поставлене так: Яка в середньому маса одного ящика картоплі чи моркви?

5. Вираз 30 • 40 + 200 містить число 200, якого немає серед умов задачі. Тому не можна поставити питання до умови задачі, щоб

розв'язок задачі можна було б знайти за допомогою даного виразу. ◄

5.1.2. Числові рівності і їх властивості.

Два числові вирази називаються *рівними,* якщо рівні їх числові значення. Відношення рівності на множині числових виразів є відношенням еквівалентності, бо таким воно є для числових множин, а тому визначає розбиття на класи рівних між собою виразів. Це дає змогу в усіх випадках, коли цікавляться значенням виразу, а не його структурою, заміняти один вираз на рівний йому. Наприклад, вираз 4 + 4 + 4 + 4 + 4 можна замінити виразом 4 • 5 або 20.

Два довільних числові вирази A і B, з'єднані між собою знаком рівності " = ", утворюють *числову рівність* (записується $A = B$). Числові вирази A і B називаються *частинами числової рівності: A – лівою, B – правою.*

З точки зору математичної логіки числова рівність є висловленням, яке істинне тоді і тільки тоді, коли значення лівої частини дорівнює значенню правої частини. Істинне висловлення, що визначається числовою рівністю часто називають *істинною* (*правильною*) числовою рівністю. Над числовими рівностями, як над висловленнями, можна виконувати всі операції логіки висловлень, зокрема, кон'юнкцію і диз'юнкцію.

Істинні числові рівності мають властивості, що базуються на властивостях дійсних чисел.

1. Якщо до обох частин числової рівності додати (відняти) один і той же числовий вираз, то знову одержиться числова рівність

$$\forall A, B, C \in \mathrm{W} : A = B \rightarrow A + C = B + C;$$

$$\forall A, B, C \in \mathrm{W} : A = B \rightarrow A - C = B - C .$$

<u>Наслідок 1.</u> Якщо одна із частин числової рівності є алгебраїчною сумою, то будь-який її доданок можна з однієї частини перенести в іншу частину, але при цьому його знак змінити на протилежкий, зокрема

$$\forall A, B, C \in W : A + C = B \rightarrow A = B - C;$$

$$\forall A, B, C \in W : A = B \rightarrow A - B = 0$$

Наслідок 2. Якщо в обох частинах числової рівності є рівні доданки, то їх можна опустити і знову одержаться числова рівність, зокрема

$\forall A, B, C \in W: A + C = B + C \rightarrow A = B.$

2. Числові рівності можна почленно додавати (віднімати) і знову одержиться числова рівність, зокрема

$\forall A, B, C, F \in W : (A = B) \wedge (C = F) \rightarrow (A + C = B + F).$

3. Якщо обидві частини числової рівності помножити на один і той же числовий вираз, то знову одержиться числова рівність:

$\forall A, B, C \in W: A = B \rightarrow AC = BC.$

4. Якщо обидві частини числової рівності поділити на один і той же числовий вираз, значення якого відмінне від нуля, то знову одержиться числова рівність:

$\forall A, B, C \in W: (AC = BC) \wedge (C \neq 0) \rightarrow (A = B).$

5. Числові рівності можна почленно перемножати і знову одержиться числова рівність, зокрема:

$\forall A, B, C, F \in W: (A = B) \wedge (C = F) \rightarrow (A \cdot C = B \cdot F).$

6. Обидві частини числової рівності можна почленно підносити до степеня з натуральним показником і знову одержиться числова рівність:

$\forall\ n \in N\ \forall\ A, B \in W: A = B \rightarrow A^n = B^n.$

7. Якщо числові вирази, відмінні від нуля, рівні між собою, то рівними будуть і обернені їм вирази:

$\forall A, B \in W : (A = B) \wedge (A \neq 0) \wedge B \neq 0) \rightarrow (\frac{1}{A} = \frac{1}{B})$

5.1.3. Числові нерівності та їх властивості.

З двох числових виразів *більшим* називається той, значення якого більше, позначається знаком **“ > “:**

$\forall A, B \in \mathrm{W}: A > B :\Leftrightarrow a > b,$

де a і b є відповідно значеннями виразів A і B.

Відношення "менше" (позначається " < ") означається як обернене до відношення "більше", а тому воно також є відношенням строгого лінійного порядку.

Відношення "більше або рівне" (позначається **“ ≥ “**) на множині числових виразів означається як об'єднання двох відношень "рівне" і "більше". Відношення ж "менше або рівне"(позначається “ ≤ “) може бути означене або як об’єднання відношень “рівне” і “менше”, або ж як відношення обернене до відношення “більше або рівне”. Останні два відношення є відношеннями нестрогого лінійного порядку на множині числових виразів.

Два довільних числових вирази A і B, між якими поставлено один із знаків “ < “, “ > “, “ ≤ “, “ ≥ “ утворюють *числову нерівність* (записується $A < B$, $A > B$, $A \le B$, $A \ge B$). Числові вирази A і B називаються *частинами числової нерівності, A – лівою, B – правою*.

Числова нерівність є також висловленням, яке істинне тоді і тільки тоді, коли значення лівої частини знаходиться із значенням правої частини в тому відношенні, що визначається знаком нерівності. Істинне висловлення, що задається числовою нерівністю, називається *істинною числовою нерівністю.*

До числових нерівностей, як і до числових рівностей, застосовуються операції логіки висловлень, зокрема кон’юнкція і диз’юнкція. Наприклад, для числових нерівностей $3 < 5$ і $7 \ge 10$ їх кон’юнкція має вид $(3 < 5) \wedge (7 \ge 10)$ записується

$$\begin{cases} 3 < 5, \\ 7 \ge 10, \end{cases}$$

а диз’юнкція $(3 < 5) \vee (7 \ge 10)$ записується

$$\left[\begin{array}{l} 3 < 5, \\ 7 \ge 10. \end{array}\right.$$

Логічне значення кон’юнкції “0”, а диз’юнкції – “1”, бо складові висловлення мають різні логічні значення: “$3 < 5$” – “1”, а “$7 \ge 10$” – “0”.

Дві або більше числові нерівності називаються *нерівностями одного (однакового) смислу*, якщо у всіх них ліві і праві частини знаходяться в одному і тому ж самому відношенні порядку. Дві числові нерівності називаються <u>нерівностями протилежного смис</u>лу, якщо відношення, в якому знаходяться ліва і права частина однієї з них, є оберненим до відношення порядку, що пов'язує ліву і праву частини другої нерівності.

Наприклад, числові нерівності $A_1 > B_1$, $A_2 > B_2$, $A_3 > B_3$ є нерівностями однакового смислу, а числові нерівності $C \le F$ і $C \ge F$ є нерівностями протилежного смислу.

Істинні числові нерівності мають ряд властивостей, що базуються на їх означеннях та властивостях дійсних чисел.

$$1. \forall A, B \in W: A > B \leftrightarrow B < A,$$

$$2.\ 1)\ \forall A, B \in W: A > B \leftrightarrow A - B > 0,$$

$$2)\ \forall A, B \in W: A < B \leftrightarrow A - B < 0.$$

3. Якщо до обох частин числової нерівності додати (відняти) один і той же числовий вираз, то знову одержиться нерівність того ж смислу, що й задана, зокрема

$$1) \forall A, B, C \in W: A > B \rightarrow A + C > B + C,$$

$$2) \forall A, B, C \in W: A > B \rightarrow A - C > B - C.$$

Наслідок 1. Якщо хоч одна із частин числової нерівності є алгебраїчною сумою числових виразів, то будь-який доданок можна перенести з однієї частини в іншу, змінивши знак перед ним на протилежний, зокрема

$$\forall A, B, C \in W: A > B + C \rightarrow A - C > B.$$

Наслідок 2. Якщо в обох частинах числової нерівності є рівні доданки, то їх можна опустити і одержиться нерівність того ж самого смислу, зокрема

$$\forall A, B, C \in W: A + C > B + C \rightarrow A > B.$$

4. Числові нерівності одного і того ж самого смислу можна почленно додавати і знову одержиться нерівність того ж смислу, що й дані, зокрема

$$\forall A, B, C, F \in W: (A > B) \land (C > F) \rightarrow (A + C > B + F).$$

5. Числові нерівності протилежних смислів можна почленно віднімати і одержиться нерівність того ж смислу, що й нерівність, від якої віднімають, зокрема

$$\forall A, B, C, F \in W: (A > B) \land (C < F) \rightarrow (A - C > B - F).$$

При розгляді наступних властивостей числових нерівностей слід звернути увагу на те, що знаки одержуваних нерівностей суттєво залежать від того, на додатний чи від'ємний числові вирази множаться вихідні нерівності.

6. Якщо обидві частини числової нерівності помножити (поділити) на один і той же числовий вираз, значення якого додатне, то знову одержиться нерівність того ж смислу, що й дана, зокрема

$$\forall A, B, C \in \mathrm{W}: (A > B) \wedge (C > 0) \rightarrow (AC > BC).$$

$$\forall A, B, C \in \mathrm{W}: (AC > BC) \wedge (C > 0) \rightarrow (A > B).$$

7. Якщо обидві частини числової нерівності помножити (поділити) на один і той же числовий вираз, значення якого від'ємне, то одержиться нерівність протилежного смислу до даної, зокрема

$$\forall A, B, C \in W: (A > B) \wedge (C < 0) \rightarrow (AC < BC),$$

$$\forall A, B, C \in W: (A\,C > BC) \wedge (C < 0) \rightarrow (A < B).$$

8. Числові нерівності одного і того ж самого смислу з додатними частинами можна почленно множити і знову одержиться нерівність, того ж смислу, що й задані, зокрема

$$\forall A, B, C, F \in W: (A > B > 0) \wedge (C > F > 0) \rightarrow (AC > BF).$$

Наслідок 3. Обидві частини числової нерівності з додатними частинами можна підносити до степеня з натуральним показником і знову одержиться нерівність того ж самого смислу, що й задана, зокрема

$$\forall n \in N \quad \forall A, B \in W: A > B > 0 \rightarrow A^n > B^n .$$

9. Дві числові нерівності одного і того ж самого смислу з від'ємними частинами можна почленно перемножати і знову одержиться нерівність протилежного смислу до даних нерівностей, зокрема

$$\forall A, B, C, F \in W: (A < B < 0) \wedge (C < F < 0) \rightarrow (AC > BF).$$

10. Відношення порядку, що пов'язують два додатних (від'ємних) числових вирази, і вирази, які є обернені до них, є оберненими між собою, зокрема

$$\forall A, B \in \mathrm{W}: (A > B) \wedge (AB > 0) \rightarrow (\tfrac{1}{A} < \tfrac{1}{B}).$$

5.1.4. Вирази із замінимим та їх основні характеристики.

Під *змінними* розуміють знаки, що відіграють роль порожніх місць у математичному тексті, які дозволяється заповнювати іменами елементів із деяких множин, що складають *область значень* цих *змінних.*

В початковому курсі математики, перш ніж вводити букви для позначення змінних, використовують “порожні місця”, наприклад 4 + ... = 9 (учням задають питання: яке число потрібно записати замість крапок, щоб одержати правильну рівність?), або місця, на які підставляється одне і те ж саме число, позначаються “порожніми віконечками” однакової форми, наприклад,

$\square + \triangle \ \triangle = \ + \square$ − запис комутативного (переставного) закону додавання на мові з порожніми віконечками. Перехід від запису

$\square + \triangle = \triangle + \square$

до запису $x + y = y + x$ вже не складає труднощів і підказує роль букв-змінних x і y в останньому. Від запису $x + y = y + x$, де x і y – змінні для натуральних чисел, а "+" є знаком операції додавання, можна перейти до загальнішого запису

$$\forall x, y \in M : x * y = y * x, \qquad (1)$$

де x і y – змінні для елементів деякої множини M, а $*$ − змінна для операції у множині M. Запис (1) є символічним записом комутативного закону бінарної операції. Зокрема, якщо:

1) M – числова множина, то x і y будуть числовими змінними;

2) M – множина висловлень, то x і y – пропозиційні змінні,

Елементи, які можна підставляти замість змінної, називаються її *значеннями,* а всі вони складають *область визначення змінної.* У всіх випадках, коли мова йде про змінну, обов’язково вказується або область визначення змінної, або її легко встановити з контексту. Змінні, значеннями яких є числа, називаються *числовими змінними.*

Якщо в числовому виразі одне або декілька чисел замінити змінними, то одержимо *вираз із змінними* або *числову форму.*

Підставивши в числову форму замість кожної змінної на всіх місцях її входження конкретні числа, одержимо числовий вираз, значення якого називається *значенням числової форми на заданому наборі значень змінних.* Тут і далі, говорячи про "змінну" мають на увазі "числову змінну".

Кожна числова форма характеризується кількістю числових змінних, що входять у неї, і областю визначення. *Областю визначення числової форми* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ (позначається Df або D $f(x_1, x_2, ..., x_n)$) називається множина тих наборів значень змінних, при яких числова форма має значення. Числова форма вважається заданою, якщо вказано її область визначення. Якщо ж область визначення числової форми не вказано, то її слід встановити.

Числові вирази і числові форми часто називають *виразами.* Якщо вони містять лише арифметичні операції та операції піднесення до раціонального степеня, то їх прийнято називати *алгебраїчними.*

Алгебраїчний вираз називається *раціональним,* якщо він не містить операції добування коренів із виразів, що містять змінні. Раціональний вираз називається *цілим раціональним виразом* або *многочленом,* якщо він не містить операції ділення на вирази, що містять змінні. Раціональний вираз називається *дробовим,* якщо він містить операції ділення на вирази, що містять змінні.

Задача 3. Встановити область визначення виразу

$$f(x)=\frac{3x-5}{x^2-5x+6}.$$

► Даний вираз містить операцію ділення на вираз $x^2 - 5x + 6$, що містить змінну. Область визначення виразу $f(x)$ складатимуть ті дійсні числа, при яких вираз $x^2 - 5x + 6$ не дорівнює нулю. Такими числами є всі дійсні числа, крім $x = 2$ або $x = 3$. Отже, областю визначення виразу

$$f(x)=\frac{3x-5}{x^2-5x+6}$$

буде множина $]-\infty ; 2 [\cup] 2; 3 [\cup] 3; +\infty [$.

Відповідь: $x \in R/\{2 ; 3\}$ або $x \in]-\infty ; 2 [\cup] 2; 3 [\cup] 3; +\infty [$.
◄

5.1.5. Відношення тотожності та тотожні перетворення на множині виразів. Тотожності.

Два вирази із спільною областю визначення називаються *тотожно рівними на ній,* якщо рівні їх значення при будь-яких значеннях змінних із області визначення. Тотожна рівність виразів істотно залежить від їх області визначення: зміна області визначення може привести до порушення тотожної рівності. Наприклад, вирази x і $|x|$ є тотожно рівними на множині невід'ємних дійсних чисел і не є тотожно рівними на множині дійсних чисел, бо при $x = -2$

$$-2 \neq 2.$$

Відношення тотожної рівності виразів є відношенням еквівалентності на множині всіх виразів. Це дозволяє вирази з одного класу еквівалентності не відрізняти один від одного, якщо тільки не цікавляться їх структурою.

Два тотожно рівні на множині M вирази $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, з'єднані між собою знаком рівності, називаються тотожністю (позначається $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$). Прикладами тотожностей є формули скороченого множення; формули, що виражають закони арифметичних операцій тощо.

Заміна одного виразу тотожно рівним йому виразом називається *тотожним перетворенням виразу.* Тотожними перетвореннями виразів широко користуються , коли не цікавляться їх структурою, зокрема при:

1) спрощенні виразів;
2) наданні виразу спеціального вигляду;
3) розв'язування рівнянь і нерівностей;
4) доведенні тотожностей.

5.2. Рівняння та нерівності з однією змінною

5.2.1. Рівняння з однією зміною як предикат та його основні характеристики.

Нехай на множині M задано два вирази $f(x)$ і $q(x)$ з однією змінною x. Предикат виду $f(x) = q(x)$, $x \in M$, для якого потрібно знайти область істинності, називається *рівнянням з однією змінною.* Вирази $f(x)$ і $q(x)$ називаються *частинами рівняння,* $f(x)$ – *лівою,* $q(x)$ – *правою.* У випадку, коли хоч одна із частин рівняння є алгебраїчною сумою, то доданки суми називаються *членами рівняння.* Множина M називається *областю визначення рівняння.*

Множина істинності предиката, що задає рівняння, називається *множиною розв'язків рівняння* (*множиною коренів рівняння*), а кожне число, яке належить цій множині, називається *розв'язком* (*коренем*) *даного рівняння. Розв'язати дане рівняння* – значить знайти множину його розв'язків.

Часто область визначення рівняння не вказується, в цьому випадку її потрібно встановити: вона є перерізом областей визначення кожного з виразів $f(x)$ і $q(x)$ рівняння (кожної з частин рівняння). В залежності від області визначення рівняння може мати різні множини розв'язків. Наприклад, рівняння

$$(x-1)(x+2)(x^2-3)(x^2+1)=0$$

на множині натуральних чисел має один розв'язок, бо тільки при $x = 1$ добуток множників дорівнює нулю, на множині цілих чисел – два розв'язки $\{-2; 1\}$, а на множині дійсних чисел – чотири розв'язки $\{-2; -\sqrt{3}; 1, \sqrt{3}\}$.

Прийнято також не вказувати область визначення рівняння в тих випадках, коли вона рівна найширшій числовій множині, яка відома тому, хто його розв'язує. Зокрема, по мірі ознайомлення учнів з числовими множнами, такою множиною для молодших школярів є множина цілих невід'ємних чисел, а для учнів середньої школи – множина дійсних чисел.

5.2.2. Рівносильні рівняння. Теореми про рівносильність рівнянь та наслідки з них.

Два рівняння з однією змінною, визначені на множині M, називаються *рівносильними на ній,* якщо їх множини розв'язків збігаються. Два рівняння, визначені на множині M, є рівносильними на ній і тоді, коли на цій множині вони розв'язків не мають.

З означення випливає, що рівносильність рівнянь істотно залежить від їх області визначення: зміна її може привести до порушення рівносильності. Наприклад, рівняння

$$(x-1)(x+3)=0 \quad \text{і} \ (x-1)(x+2)=0$$

рівносильні на множині натуральних чисел, бо вони мають на ній своїм розв'язком лише число 1, і нерівносильні на множні цілих чисел, бо на ній, крім одиниці, перше рівняння має розв'язком число – 3, а друге – число –2.

Відношення рівносильності рівнянь є відношенням еквівалентності і задає на множинні рівнянь розбиття на класи рівносильних між собою рівнянь. Це дає змогу при розв'язуванні рівнянь заміняти їх на рівносильні, розв'язки яких легше знайти.

В процесі розв'язування над рівняннями здійснюються різні перетворення. Однак не всі з них приводять до одержання рівносильних рівнянь. Наприклад, заміна рівняння

$$(x-1)(x-3)=x-3 \tag{1}$$

рівнянням

$$x-1=1 \tag{2}$$

неправильна, бо рівняння нерівносильні на множині дійсних чисел. Справді, рівняння (1) має множину розв'язків $\{2,\ 3\}$, а (2) – $\{\ 2\ \}$. Рівняння (2) одержане з рівняння (1) діленням обох частин на вираз $x-3$, який дорівнює нулю при $x=3$ і при цьому втратили розв'язок $x=3$ першого рівняння.

Якщо ж рівняння

$$x-1=2 \tag{3}$$

замінити рівнянням

$$(x-1)^2=4, \tag{4}$$

то також одержиться нерівносильне йому рівняння, бо рівняння (3) має множину розв'язків $\{\ 3\ \}$, а рівняння (4) – $\{\ -1;\ 3\ \}$, Отже, множини розв'язків не рівні, а тому, за означенням, рівняння нерівносильні на множині дійсних чисел. Розв'язок $x=-1$ буде стороннім для рівняння (3). З точки зору математичної логіки рівняння (4) є лише логічним наслідком рівняная (3).

Користуючись поняттями математичної логіки можна дати означення рівносильності рівнянь з однією змінною по-іншому.

Два рівняння з однією змінною, визначені на множині *M*, називаються *рівносильними на ній,* якщо кожне з них є логічним наслідком іншого.

Теорема 1. Якщо до обох частин рівняння з однією змінною, визначеного на множині *M*, додати вираз, визначений на цій же множині, то одержиться рівняння, рівносильне заданому на множині *M*.

Нехай

$$f(x) = q(x), \quad x \in M, \qquad (1)$$

дане рівняння і $\phi(x)$, $x \in M$, – вираз, який додаємо до обох частин рівняння (1). Тоді

$$f(x) + \phi(x) = q(x) + \phi(x), \qquad (2)$$

є одержаним рівнянням.

Наслідок 1. До обох частин рівняння з однією змінною можна додати (відняти) одне і те ж число, і одержиться рівняння рівносильне даному.

Наслідок 2. Члени рівняння з однією змінною можна переносити з однієї частини рівняння в іншу з протилежним знаком, при цьому одержиться рівняння рівносильне даному.

Наслідок 3. При потребі всі члени рівняння з однією змінною можна перенести в одну з частин рівняння, а інша буде рівна нулю, і одержиться рівняння рівносильне даному.

Теорема 2. Якщо обидві частини рівняння з однією змінною, визначеного на множині *M*, помножити на вираз, визначений на цій же множині і відмінний від нуля, то одержиться рівняння, рівносильне даному на множині *M* .

Наслідок 4. Обидві частини рівняння з однією змінною можна помножити (поділити) на одне і те ж число, яке відмінне від нуля, і при цьому одержиться рівняння рівносильне даному.

Наслідок 5, Рівняння $\frac{f(x)}{q(x)} = 0, x \in M,$ рівносильне рівнянню $f(x) = 0$, $x \in M$.

Задача 3. Не розв'язуючи рівнянь

$$x - 4 = 3 \text{ і } x^2 - 16 = 3(x + 4),$$

вказати, на яких множинах і на основі яких тверджень вони рівносильні.

► Рівняння

$$x - 4 = 3 \text{ і } x^2 - 16 = 3(x + 4)$$

визначені на множині дійсних чисел R, тобто їх область визначення $M = R$. Якщо ліву частину $x^2 - 16$ другого рівняння записати $(x - 4)(x + 4)$, то воно набере вигляду

$$(x - 4)(x + 4) = 3(x + 4).$$

Тепер неважко встановити, що друге рівняння одержане з першого рівняння шляхом множення обох його частин на вираз $x + 4$, який не дорівнює нулю на множині $M_1 =]-\infty, -4[\cup]-4, +\infty[$, а не на множині R . Тому за теоремою 2 про рівносильність рівнянь приходимо до висновку, що дані рівняння будуть рівносильними на множині

$$M_1 =]-\infty, -4[\cup]-4, +\infty[= R \setminus \{-4\}$$

і нерівносильними на множині дійсних чисел R. ◄

При користуванні теоремами 1 і 2 та наслідками з них завжди потрібно пам’ятати, що рівняння рівносильні лише на області визначення вихідного рівняння. Одержане ж рівняння в більшості випадків має більш широку область визначення, значить може мати і більше розв’язків. Серед них розв’язками вихідного рівняння є тільки ті, що належать його області визначення.

Задача 4. Розв’язати рівняння

$$4x - 1 + \frac{1}{x-4} = 19 - x + \frac{1}{x-4}.$$

► Спочатку встановимо область визначення даного рівняння. Нею буде множина всіх дійсних чисел, за винятком числа 4, бо вираз $\frac{1}{x-4}$ при $x = 4$ не має смислу. Отже, $M = R \setminus \{4\}$. На основі наслідку 3 з теореми 1 перенесемо всі члени даного рівняння в ліву частину, тоді матимемо

$$4x - 1 + \frac{1}{x-4} - 19 + x - \frac{1}{x-4} = 0.$$

Звівши подібні члени, дістанемо рівняння

$$5x - 20 = 0$$

областю визначення якого є вже множина дійсних чисел. Одержане рівняння має розв'язок $x = 4$**,** який не є розв'язком даного рівняння, бо $4 \notin M$. Отже, дане рівняння розв'язків не має. Поява стороннього розв'язку для нього пояснюється тим, що внаслідок рівності нулю суми

$$\frac{1}{x-4} + (-\ \frac{1}{x-4})$$

область визначення одержаного рівняння розширилась і число 4 ввійшло в неї,

<u>Відповідь:</u> $x \in \emptyset$.◀

Оскільки рівняння з однією змінною є предикатами, то над ними можна виконувати всі операції логіки висловлень, зокрема диз'юнкцію і кон'юнкцію.

Диз'юнкція рівнянь називається *сукупністю рівнянь* (позначається квадратною дужкою зліва), а кон'юнкція рівнянь – *системою рівнянь* (позначається фігурною дужкою зліва).

<u>Теорема 3.</u> Рівняння

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = 0,\ x \in M,$$

рівносильне сукупності рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) = 0, \quad x \in M. \end{array}\right.$$

Тому рівняння

$$(x + 3)(x - 5)(x - 8) = 0$$

можна розглядати як диз'юнкцію рівнянь

$$(x + 3) = 0,\ \ (x - 5) = 0,\ (x - 8) = 0,$$

розв'язки яких легко знайти: – 3, 5, 8. Отже, множина розв'язків вихідного рівняння є об'єднанням множин розв'язків кожного з одержаних рівнянь, а саме $\{-3, 5, 8\}$.

Програма початкової школи передбачає лише ознайомлення з поняттям рівняння з однією змінною та розв'язування окремих із них способом підбору або на основі залежності між компонентами і результатами арифметичних операцій.

Задача 7. Розв’язати рівняння

$$14 – (5x + 10) : 3 = 4 \qquad (1)$$

на основі залежності між компонентами і результатами арифметичних операцій.

► 1. Із зазначених у лівій частині рівняння (1) операцій останньою є віднімання. Змінна міститься у невідомому від’ємнику, який одержиться, коли від зменшуваного відняти різницю: 14 – 4 = 10. Отже,

$$(5x + 10) : 3 = 10. \qquad (2)$$

2. Останньою операцією у виразі лівої частини рівняння (2) є ділення. Змінна знаходиться в невідомому діленому, яке дорівнює добутку частки і дільника: 10 · 3 = 3. Значить,

$$5x + 10 = 30. \qquad (3)$$

3. Останньою операцією у виразі лівої частини рівняння (3) є додавання. Змінна міститься у невідомому доданку, який дорівнює різниці суми і відомого доданка: 30 – 10 = 20, а тому маємо

$$5x = 20. \qquad (4)$$

4. У лівій частині рівняння (4) невідомим є один із множників, який дорівнює частці від ділення добутку на відомий множник:

$$x = 20 : 5 = 4.$$

Отже, $x = 4$.

Всі рівняння (2) – (4), які отримувалась при здійсненні перетворень, рівносильні даному на основі теорем 1 і 2, а тому знайдений розв’язок $x = 4$ останнього рівняння буде і розв’язком рівняння (1).

Відповідь: $x \in \{4\}$. ◄

Рівняння вигляду

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c, x \in R, a \neq 0,$$

(1)

називається *квадратним.* Якщо $a = 1$, то воно називається *зведеним.* Якщо хоч один з коефіцієнтів b або c дорівнює нулю, то рівняння називається *неповним.*

Щоб знайти розв'язки квадратного рівняння, здійснимо тотожні перетворення

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}) = 0. \qquad (2)$$

З одержаного рівняння видно, що його розв'язки залежать від виразу

$$b^2 - 4ac = D,$$

який називається <u>дискримінантом квадратного рівняння.</u>

1. Якщо $D > 0$, то з нього можна добути квадратний корінь і рівняння(2) запишеться

$$(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{D}}{4a^2})^2 = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a})\ (x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}) = 0,$$

яке рівносильне сукупності рівнянь $\left[\begin{array}{l} x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} = 0 \\ x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} = 0 \end{array}\right.$

Її розв'язками будуть числа

$$x_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \quad \text{і} \quad x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \qquad (3)$$

які і будуть розв'язками квадратного рівняння (1).

2. Якщо $D < 0$, то $-D > 0$ і рівняння (2) можна переписати так:

$$(x + \frac{b}{2a})^2 + (\frac{-D}{(2a)^2})^2 = 0 \qquad (4)$$

в якому ліва частина при будь-якому числі x завжди буде додатним числом. Отже, рівняння (4), а значить, і рівносильне йому рівняння (1) розв'язків не мають.

З проведених міркувань випливає теорема.

<u>Теорема 4.</u> Квадратне рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c, x \in R, a \neq 0$$

має:

1) два дійсних корені, якщо $D > 0$,
2) один дійсний корінь, ящо $D = 0$,
3) не має дійсних коренів, якщо $D < 0$.

Корені рівняння (1) можна знайти за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad . \tag{5}$$

При $D = 0$ $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$, тобто корені рівні, тому і прийнято говорити, що в цьому разі квадратне рівняння має один корінь.

5.2.3. Нерівності з однією змінною як предикат та їх основні характеристики.

Нехай на множині M задано два вирази з однією змінною x: $f(x)$ і $q(x)$. Предикати виду

$$f(x) < q(x), \quad f(x) > q(x),$$
$$f(x) \leq q(x), \quad f(x) \geq q(x),$$

для яких потрібно знайти їх області істинності називаються *нерівностями з однією змінною.* Множина M називається *областю визначення нерівності з однією змінною,* а вирази $f(x)$ і $q(x)$ – її *частинами,* $q(x)$ – *правою,* $f(x)$ – *лівою*. Якщо для нерівності з однією змінною не вказано область визначення, то її потрібно встановити. Вона є перерізом областей визначення виразів $f(x)$ і $q(x)$.

Область істинності предиката, що задає нерівність, називається *множиною розв'язків нерівності з однією змінною,* а кожне число, яке належить множині розв'язків, – *розв'язком нерівності. Розв'язати нерівність* з однією змінною – це значить знайти її множину розв'язків.

5.2.4. Рівносильні нерівності. Теорема про рівносильність нерівностей та наслідки з них.

Дві нерівності з однією змінною, визначені на множині M, називаються *рівносильними на ній,* якщо їх множини розв'язків збігаються. Тобто, якщо кожна з них є логічним наслідком іншої. Якщо нерівності не мають розв'язків, то вони також рівносильні. З означення випливає, що рівносильність нерівностей залежить від їх області визначення. Зміна її може привести до порушення рівносильності. Наприклад, нерівності

$$(x-2)(x+3) > 0 \text{ і } x^2 - 4 > 0$$

рівносильні на множині додатних дійсних чисел і нерівносильні на множині дійсних чисел, бо на множині R_+ їх множина розв'язків рівна $]2;+\infty[$, а на множині R перша нерівність має множиною розв'язків множину $]-\infty;-3[\cup]2;+\infty[$, а друга – $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$.

Теорема 1. *Якщо до обох частин нерівності з однією змінною, визначеної на множині M, додати вираз, визначений на цій же множині, то одержиться нерівність того ж смислу рівносильна заданій на множині M.*

Нехай

$$f(x) < q(x),\ x \in M, \qquad (1)$$

дана нерівність, $\varphi(x)$ – вираз, який додаємо до обох частин нерівності (1). Тоді

$$f(x) + \varphi(x) < q(x) + \varphi(x),\ x \in M \qquad (2)$$

є одержаною нерівністю, рівносильною нерівності (1).

Наслідок 1. До обох частий нерівності з однією змінною можна додати (відняти) одне і те ж саме число і при цьому одержиться рівносильна їй нерівність того ж самого смислу.

Наслідок 2. Члени нерівності з однією змінною можна переносити з однієї частини в іншу з протилежним знаком, при цьому одержиться нерівність рівносильна заданій того самого смислу.

Теорема 2. *Якщо обидві частини нерівності з однією змінною, визначеної на множині M, помножити на вираз, який додатний для всіх чисел із множини M, то одержиться нерівність того ж самого смислу, рівносильна заданій на множині M.*

Наслідок 3. Обидві частини нерівності з однією змінною можна помножити (поділити) на одне і те ж додатне число, при цьому одержиться нерівність того к самого смислу, рівносильна заданій.

Теорема 3. Якщо обидві частини нерівності з однією змінною, визначеної на множині M, помножити на вираз, який від'ємний для всіх чисел із множини M, і знак нерівності змінити на обернений, то одержиться нерівність, рівносильна заданій на множині M .

Наслідок 4. Обидві частини нерівності з однією змінною можна помножити (поділити) на одне і теж від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на обернений, при цьому одержиться нерівність рівносильна заданій.

Задача 1. Не розв'язуючи нерівностей

$3x + 2 > 5$ і $3x + 2 + \quad > 5 + \frac{1}{x-6}$,

вказати, на яких множинах і на основі яких тверджень вони рівносильні .

► Нерівність $3x + 2 > 5$ визначена на множині $M_1 =]-\infty\,;\ +\infty[$. Нерівність $3x + 2 + \quad > 5 + \frac{1}{x-6}$, визначена всюди, де $x - 6 \neq 0$, тобто, коли $x \neq 6$. Отже, область її визначення є множина $M_2 =]-\infty;\ 6\,[\cup]\ 6;\ +\ \infty\ [$. . Оскільки $M_2 \subset M_1$, то перша нерівність буде також визначена на множині M_2. Друга нерівність одержана з першої додаванням до обох її частин виразу $\frac{1}{x-6}$, який визначений на множині M_2. За теоремою 1 про рівносильність нерівностей одержуємо, що дані нерівності будуть рівносильними на множині $M_2 =]-\infty; 6\,[\cup]\ 6;+\infty\,[$.◄

5.2.5. Лінійні нерівності з однією змінною та їх розв'язування (з аналізом використаної теорії).

Нерівність виду

$$a_1 x + b_1 > a_2 x + b_2, \qquad a_1, a_2, b_1, b_2, x \in R\,, \tag{1}$$

називається *лінійною нерівністю з однією змінною.* Замість знака " > " можна взяти один із знаків " < ", "≥", " ≤".

Для знаходження розв'язків лінійної нерівності з однією змінною скористаємося наслідками теореми 1 і перенесемо члени, що містять змінну, в ліву частину нерівності, а вільні члени – в праву частину та зведемо подібні члени. Дістанемо нерівність виду

$$ax > b, \tag{2}$$

яка рівносильна нерівності (1).

Якщо $a \neq 0$, то лінійна нерівність (2) називається *нерівністю першого степеня*.

При розв'язуванні нерівності (2) можливі випадки:

1) $a > 0$, тоді, за наслідком 3 з теореми 2, нерівність (2) буде рівносильною нерівності

$$x > \frac{b}{a},$$

розв'язком якої, а отже, і заданої нерівності, будуть числа проміжку

$$]\ \frac{b}{a};\ +\infty\ [;$$

2) $a < 0$, тоді, за наслідком 4 з теореми 3, нерівність (2) буде рівносильна нерівності

$$x < \frac{b}{a},$$

розв'язками якої, а значить, і заданої нерівності, будуть числа проміжку

$$]\ -\infty;\ \frac{b}{a}\ [;$$

3) $a = 0$ і $b < 0$, тоді нерівність (2) матиме вид

$$0 \cdot x > b,$$

яку задовольняє будь-яке дійсне число, бо добуток нуля і довільного дійсного числа дорівнює нулю, який більший за будь-яке від'ємне число. Отже, в цьому випадку нерівність має своєю множиною розв'язків множину дійсних чисел R.

4) $a = 0$ і $b \geq 0$, тоді нерівність (2) матиме вид

$$0 \cdot x > b,$$

яка не матиме розв'язків, бо добуток нуля і довільного дійсного числа дорівнює нулю, який не є більшим за будь-яке невід'ємне дійсне число. Значить нерівність (2) в цьому випадку розв'язків не має.

Задача 2. Розв'язати нерівність

$$3x + 4 - 6x + 5 > 8x - 3 - 4x + 5.$$

► Користуючись наслідками з теорем про рівносильність нерівностей, будемо мати

$$3x - 6x - 8x + 4x > -3 + 5 - 4 - 5 \Leftrightarrow -7x > -7 \Leftrightarrow x < \frac{-7}{-7}$$

$\Leftrightarrow x < 1.$

Відповідь: $x \in \,]-\infty; 1[$.◄

Програма початкової школи передбачає лише ознайомлення з поняттям нерівності з однією змінною, розв'язують їх шляхом підбору.

Задача 3. Знайти цілі невід'ємні розв'язки нерівності

$$2x < 7.$$

► Для знаходження розв'язків даної нерівності скористаємося тим, що її ліву частину можна розглядати як добуток чисел 2 і x. Отже, потрібно знайти цілі невід'ємні числа, добуток яких з числом 2 менший 7. Такими числами є 0, 1, 2 і 3. Таким чином дана нерівність у множині цілих невід'ємних чисел має чотири розв'язки: 0, 1, 2. 3.

Відповідь: $x \in \{0. 1, 2, 3\}$. ◄

РОЗДІЛ 6. ЕЛЕМЕНТИ ГЕОМЕТРІЇ

6.1. Основні поняття геометрії

6.1.1. Короткі історичні відомості про виникнення геометрії.

Геометрія є частиною математики. Вона вивчає просторові форми та відношення між геометричними фігурами, абстрагуючись від їх властивостей (щільність, маса, колір тощо). Своєрідність геометрії в тому, що вона поєднує просторову уяву зі строгою логікою. Слово "геометрія" походить від грецьких слів "гео" – Земля і "метріо" – міряти. На нашу мову його можна перекласти як "землевимірювання"; цей термін так і зберігся, хоча вже Арістотель (384-322 рр до н.е.) для землевимірювання ввів термін "геодезія".

Виникла геометрія глибокої давнини у зв'язку з практичними потребами людини, а саме: вимірювання відстаней, площ земельних ділянок, об'ємів тіл тощо. Простіші геометричні відомості нагромаджувалися поступово. Так, із Стародавнього Єгипту дійшов твір, який називається папірусом Ахмеса (за ім’ям переписувача), в якому знаходяться задачі (близько 84) на обчислення площ прямокутника, трикутника, трапеції. Геометричні твердження формулювались тоді у вигляді правил, логічні доведення яких або були відсутні зовсім, або досить примітивними. Від 7 ст. до нової ери й до першого століття нової ери розвиток геометрії, про який відомо сучасній науці, проходив в основному в Стародавній Греції. Тут встановлюються основні відомості про метричні відношення в трикутнику, вимірювання площ і об’ємів, пропорції та подібні фігури, задачі на побудову. В цей час з’являються вже порівняно строгі доведення геометричних тверджень, намагання систематизувати одержані відомості. Саме поняття про доведення було сформульоване в працях старогрецького філософа Арістотеля.

У 3 ст. до н.е. роботу старогрецьких математиків систематизував Евклід у своїй відомій праці "Начала". В ній були введені основні поняття геометрії та сформульовані основні положення (аксіоми або постулати) про них, із яких за допомогою логічних міркувань встановлюються властивості геометричних фігур. Цей твір започаткував аксіоматичний метод у математиці.

Після Стародавньої Греції лише епоха Відродження поклала початок нового етапу в розвитку культури і науки, в тому числі геометрії. Для потреб зображення просторвих фігур розвивається теорія перспективи, створюються нові геометрії, зокрема нарисна і проективна. Новий підхід до розв'язування геометричних задач на основі використання методів алгебри і аналізу був запропонований французьким вченим Р. Декартом (1590 – 1650), що сприяло появі аналітичної та диференціальної геометрій.

В історії розвитку геометрії, як і математики в цілому, можна виділити кілька етапів. Свої перші кроки геометрія робила як фізична наука, її положення описували результати різних спостережень відношень між фігурами та вимірювання геометричних величин. Потім, до другої половини 19 ст., предметом геометрії стають відношення і форми тіл простору, властивості яких описуються аксіомами, сформульованими Евклідом, тобто тієї геометрії, яку називають *евклідовою* і вивчають у школі. Евклідова геометрія настільки добре відображає властивості фізичних спостережень, що до 19 ст. вона ототожнювалася з реальним простором. В 1826 році російський математик М. І. Лобачевський (1792-1856) побудував геометричну теорію, яка дістала назву *геометрії Лобачевського.* Аксіоматики Евкліда і Лобачевського відрізняються лише аксіомами паралельності, що формулюються в них відповідно:

1) на площині через точку, яка не належать прямій, проходить не більше як одна пряма, що не перетинає дану пряму;

2) на площині через точку, яка не належить прямій, проходять принаймні дві прямі, що не перетинають дану пряму.

Геометрія Лобачевського логічно несуперечлива і істотно відмінна від геометрії Евкліда. Робота Лобачевського поклала початок створенню так званих неевклідових геометрій.

З розвитком геометрії предметом її вивчення стають все нові й нові відношення та форми дійсності. В сучасному розумінні геометрія вивчає будь-які відношення і форми, що виникають при розгляді однорідних об'єктів, які виявляються подібними із звичайними просторовими формами та відношеннями.

6.1.2. Система геометричних понять шкільного курсу геометрії.

Систематичний курс геометрії розпочинається за традицією з *планіметрії* (термін походить від латинського слова “площина” і грецького “міряти”), тобто з розділу, в якому вивчаються властивості фігур, що розміщені в одній площині. Потім переходять до вивчення властивостей фігур в просторі – *стереометрії* (термін походить від грецьких слів “простір” і “міряти”).

В геометрії, як і в кожному розділі математики, є неозначувані (первісні) поняття. В підручнику сучасної школи виділено такі первісні поняття:

1) точка, пряма, площина, довжина відрізка та градусна міра кута;

2) належати (бінарне відношення), лежати між (тернарне або трійкове) відношення.

Неявними означеннями цих понять є система аксіом, які в підручнику спочатку називаються основними властивостями. Аксіоми розбито на дві групи:

1) аксіоми планіметрії (плоскої геометрії);

2) аксіоми стереометрії.

Аксіоми планіметрії поділяються на 5 груп.

1. Аксіоми належності точок і прямих:

1.1. Яка б не була пряма, існують точки, що належать їй, і точки, що не належать їй.

1.2. Через будь-які дві різні точки проходить пряма і тільки одна.

2. Аксіоми взаємного розміщення точок на прямій і на площині:

2.1. З трьох різних точок прямої одна, і тільки одна, лежить між двома іншими.

2.2**.** Пряма розбиває множину точок площини що їй не належать, на дві підмножини, які називаються *півплощинами,* так, що відрізок, який з'єднує точки однієї півплощини, не перетинається з прямою, а відрізок, який з'єднує точки різних півплощин, перетинається з нею.

3. Аксіоми вимірювання відрізків і кутів:

3.1. Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин відрізків, на які він розбивається будь-якою своєю внутрішньою точкою.

3.2. Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

4. Аксіоми відкладання відрізків і кутів:

4.1. На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок даної довжини, і тільки один.

4.2**.** Від будь-якої півпрямої в даній півплощині можна відкласти кут із даною градусною мірою, меншою 180°, і тільки один.

4.3. Який не був би трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому в заданому розміщенні відносно даної прямої.

5. Аксіома паралельності:

На площині через точку, що не належить прямій, проходить не більше як одна пряма, яка не перетинає дану пряму.

Аксіоми стереометрії.

1. Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, що їй не належать.

2. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій.

3. Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них проходить площина, і до того ж тільки одна.

6.1.3. Поняття про геометричну фігуру. Ламана та її основні характеристики.

Довільна непорожня множина точок називається *геометричною фігурою.*

Фігура називається *плоскою,* якщо всі її точки належать деякій площині (точка, пряма, відрізок, кут, площина).

Фігура називається *просторовою*, якщо не існує площини, якій би належали всі точки даної фігури. Найпростішою просторовою фігурою є фігура, що містить чотири точки, які не лежать в одній площині.

Надалі будемо вважати, що нам відомі такі фігури як відрізок, півпряма, кут, а також деякі їх властивості.

Серед простіших геометричних фігур чільне місце посідає ламана. *Ламаною лінією (ламаною)* називається фігура, яка є об'єднанням не менше як двох відрізків A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$ (позначається $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$), кінці яких A_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) задовольняють умові: кожні три послідовні з них A_k, A_{k+1}, A_{k+2} ($k = 1, 2, \ldots, n-2$) не лежать на одній прямій. В ламаній $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$ називають:

1) точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – *вершинами:*

2) вершини A_1 і A_n – *кінцями*

3) вершини A_k, A_{k+1} ($k = 1, 2, \ldots, n-1$) – *суміжними:*

4) відрізки $A_k A_{k+1}$ – *ланками* ($k = 1, 2, \ldots, n-1$);

ланки A_k, A_{k+1}, $A_{k+1}A_{k+2}$ ($k = 1, 2, \ldots, n-2$) – *суміжними.*

На мал. 1 ламаними будуть фігури а), г) і д), фігури ж б) і в) ламаними не будуть.

Ламана називається:

1) *простою,* якщо її несуміжні ланки не мають спільних точок;

2) *замкненою,* якщо її кінці збігаються.

Ламана називається *опуклою,* якщо всі ланки розміщені по один бік від прямої, що містить будь-яку з них.

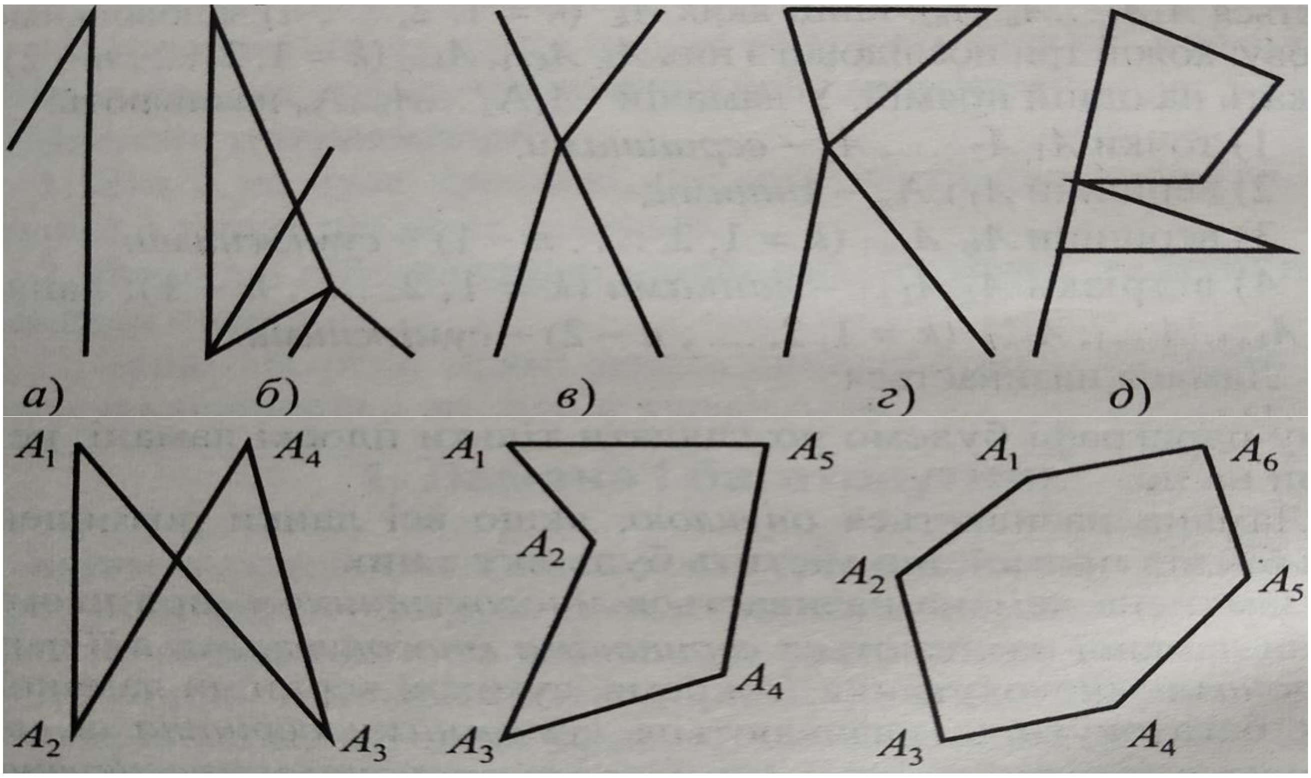
6.1.4. Многокутник.

Замкнена ламана називається *многокутником,* при цьому вершини ламаної називаються *вершинами многокутника,* а її ланки – *сторонами* многокутника. Зокрема, суміжні вершини ламаної, що задає многокутник, називаються *суміжними вершинами многокутника,* а суміжні ланки – *суміжними сторонами многокутника.*

Якщо ламана $A_1A_2\ldots A_nA_{n+1}$ задає многокутник, тобто A_1 і A_{n+1} збігаються, то він позначається $A_1A_2\ldots A_n$.

Многокутник називається *простим,* якщо ламана проста; *опуклим,* якщо ламана опукла. Очевидно, що кожний опуклий многокутник є простим, але обернене твердження хибне. Так, наприклад, на мал. 2 із зображених трьох видів многокутників, многокутник б) є простим, але *неопуклим.*

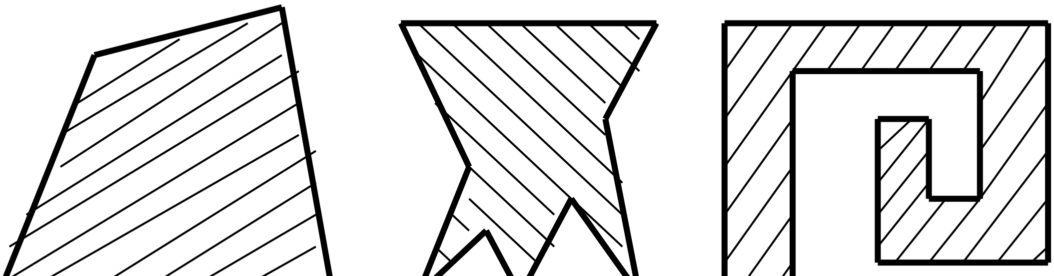
У кожному многокутнику число вершин дорівнює числу його сторін. Найменше можливе число вершин многокутника – три. Многокутник із трьома вершинами називається *трикутником,* із чотирма – *чотирикутником* і т.д., взагалі многокутник із n вершинами – *енкутником* (позначається n-кутник).



Мал. 2

Відрізок, що з'єднує дві несуміжні вершини многокутника, називається його *діагоналлю.* Очевидно, що в трикутнику діагоналей немає. В опуклому многокутнику кут, утворений двома його суміжними сторонами, називається *кутом многокутника.*

У геометрії доводиться, що кожний простий многокутник розбиває множину точок площини, які не належать цьому многокутнику, на дві підмножини так, що дві точки належать одній і тій же підмножині тоді і тільки тоді, коли їх можна з'єднати ламаною, яка не перетне сторін даного многокутника. Одна з утворених підмножин характеризується тим, що вона містить деяку пряму, і цю підмножину називають *зовнішньою областю многокутника.* Друга підмножина називається *внутрішньою областю многокутника.* Названа властивість простого многокутника є частинним випадком так званої теореми Жордана. На мал. 3 внутрішні області многокутників заштриховано.



Мал.3

Відміна між цими двома поняттями полягає в тому, що в першому випадку многокутник розглядається як лінія, а в другому – як частина площини, і тоді його іноді називають *плоским многокутником.*

Опуклий многокутник називається *правильним*, якщо в нього всі кути та всі сторони рівні між собою.

6.2. Просторові геометричні фігури

6.2.1. Просторові геометричні фігури. Поняття про геометричне тіло.

Фігура називається *просторовою,* якщо не існує площини, якій би належали всі точки цієї фігури. Серед просторових геометричних фігур виділяють так звані геометричні тіла (або просто тіла). На інтуїтивному рівні геометричне тіло – це реальне фізичне тіло, яке розглядається, абстрагуючись від усіх його властивостей, крім просторової протяжності. Можна сказати ще й так: під геометричним тілом розуміють частину простору, яку займає фізичне тіло. Варто пам’ятати, що хоч у геометрії розглядаються порівняно прості тіла, але більшість реальних тіл, яку б складну форму вони не мали, можна розглядати (у відповідній абстракції і, звичайно, наближено) як геометричні. Щоб дати означення геометричного тіла, введемо деякі поняття.

Тіло називається *обмеженим,* якщо існує додатне число таке, що відстань між довільними двома точками тіла менша від цього числа.

Многогранником називається обмежене тіло, поверхня якого складається зі скінченного числа многокутників, які називаються його *гранями.* Сторони граней називаються *ребрами многогранника,* вершини граней – *вершинами* многогранника. Многогранник називається *опуклим*, якщо він лежить по один бік від площини, якій належить будь-яка його грань.

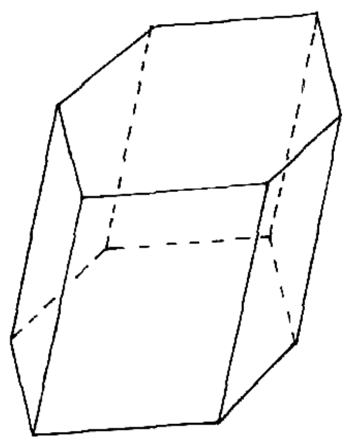
Розглянемо окремі види многогранників.

Призмою називається многогранник, у якого дві грані, що називаються *основами призми,* рівні між собою многокутники, у яких відповідні сторони паралельні, а інші грані – паралелограми, в кожного з яких дві сторони є відповідними сторонами основ (мал. 2). Грані призми, що не є основами, називаються *бічними,* а ребра, які не належать основам призми – *бічними ребрами.*

Теорема 1. Основи призми лежать у паралельних площинах.

Перпендикуляр, опущений з однієї основи призми на другу, а також довжина цього перпендикуляра називаються *висотою* призми.

Призма, основою якої є *n*-кутник, називається *n-кутною.* Призма, бічні ребра якої перпендикулярні до основ, називається *прямою.* Висота прямої призми є або довжиною бічного ребра або самим ребром.



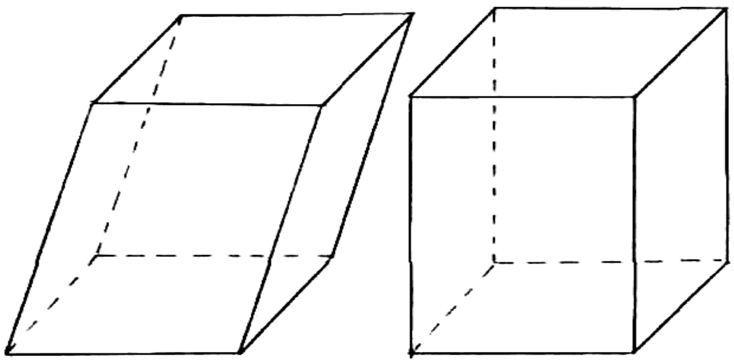
Мал. 2

Призма називається *правильною,* якщо вона пряма і в основі її лежить правильний *n*-кутник.

Призма, в основі якої лежить паралелограм, називається *паралелепіпедом.*

Паралелепіпед називається *прямим*, якщо його бічні ребра перпендикулярні до площини основи. В прямому паралелепіпеді всі бічні грані є прямокутниками, а основи – паралелограмами. Прямий паралелепіпед, в основі якого лежить прямокутник, називається *прямокутним*. У прямокутному паралелепіпеді всі грані є прямокутниками. Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, що виходять з однієї з його вершин, називаються *лінійними його розмірами* (*вимірами*).

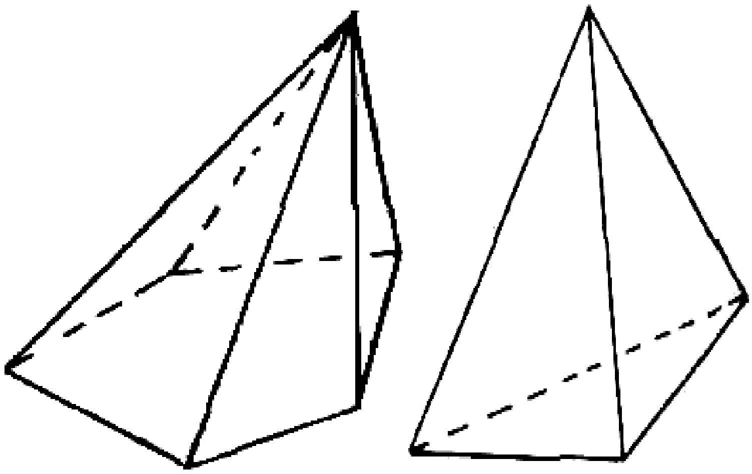
Прямокутний паралелепіпед, у якого всі бічні ребра рівні між собою, називається *кубом*.



Мал. 3

Пірамідою називається многогранник, у якого однією гранню, що називається основою, є довільний многокутник, а всі інші грані є трикутниками, що мають спільну вершину. Спільна вершина всіх трикутників називається *вершиною піраміди.* Ребра піраміди, які з'єднують основу піраміди та її вершину, називаються *бічними ребрами.* Перпендикуляр, опущений із вершини піраміди на площину її основи, а також довжина цього перпендикуляра називаються *висотою піраміди*.

Піраміда, в основі якої лежить *n*-кутник, називається *n-кутною.* Піраміда називається *правильною,* якщо в її основі лежить правильний многокутник і висота піраміди падає в центр многокутника.

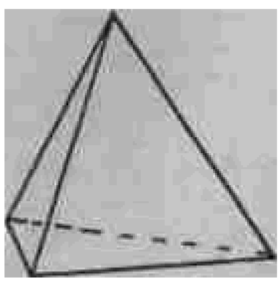


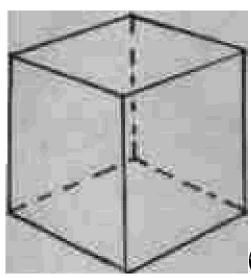
Мал.4

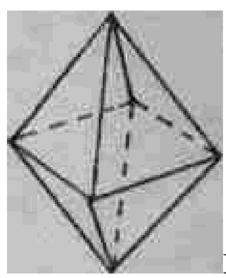
Опуклий многогранник називається правильним, якщо всі його грані є правильними рівними між собою n-кутниками і в кожній вершині сходиться однакове число ребер. Встановлено, що існує тільки п'ять видів правильних многогранників, їх називають також тілами Платона.

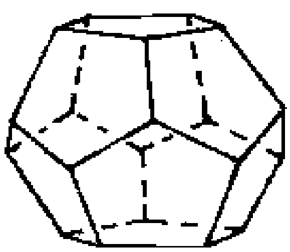
Правильний чотиригранник (правильний тетраедр): всі грані є правильними рівними між собою трикутниками і в кожній вершині сходиться три ребра, мал. 5а).

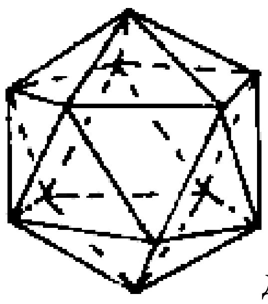
Правильний шестигранник (правильний гексаедр, куб): всі грані є рівними між собою квадратами і в кожній вершині сходиться три ребра, мал. 5б).


а)


б)


в)


г)


д)

Мал. 5

Правильний восьмигранник (правильний октаедр): всі грані є правильними рівними між собою трикутниками і в кожній вершині сходяться чотири ребра, мал. 5в).

Правильний дванадцятигранник (правильний додекаедр): всі грані є правильними рівними між собою п'ятикутниками і в кожній вершині сходяться три ребра, мал. 5г).

Правильний двадцятигранник (правильній ікосаедр): всі грані є правильними рівними між собою трикутниками і в кожній вершині сходяться п'ять ребер, мал. 5д).

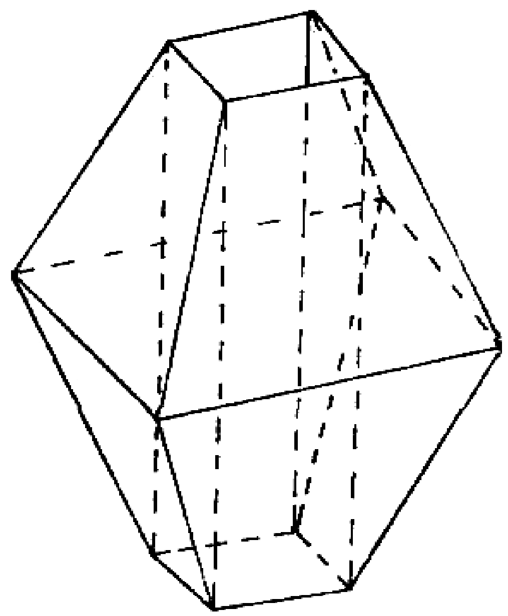
У плоскому многокутнику основними його елементами є вершини і сторони, причому у многокутнику завжди число вершин дорівнює числу його сторін. У просторі аналоґом многокутника є многогранник, основними елементами якого є вершини, ребра і грані. Виникає питання про залежність між числом вершин, ребер і граней многогранника. Виявляється, що для деяких видів многогранників таку залежність можна встановити. Позначимо В – число вершин, Р – число ребер і Г – число граней многогранника. Леонардом Ейлером (I708 – 1783) було доведено, що для будь-якого опуклого многогранника має місце рівність

$$В – Р + Г = 2.$$

Сформульоване твердження називається *теоремою Ейлера для многогранників.* Вона має місце не тільки для опуклих многогранників, але й для довільних многогранників, які без розривів і склеювань можна деформувати в кулю.

Многогранники, для яких справедлива теорема Ейлера, називаються *простими.*

Прикладами многогранників, для яких не має місця теорема Ейлера,



Мал. 6

є ті, що одержуються з опуклих многогранників вирізуванням у них многогранних отворів. На мал.6 зображено один із них.

Безпосередньо перевіркою для нього маємо: В = 12, Р = 24, Г = 12. Тому В – Р + Г = 12 – 24 + 12 = 0.

6.2.2. Тіла обертання.

Серед геометричних тіл виділяють тіла обертання. Геометричне тіло, утворене внаслідок обертання плоскої геометричної фігури навколо прямої, яка лежить у тій самій площині, що й дана фігура, називається *тілом обертання.*_Пряма, навколо якої обертається фігура, називається *віссю обертання.* Іноді замість прямої обертання розглядається півпряма або відрізок.

Циліндром (прямим круговим циліндром) називається тіло, яке утворюється при обертанні прямокутника навколо однієї із його сторін.

Круги, що входять до складу поверхні циліндра, називаються його *основами,* решта поверхні – *бічною поверхнею.* Перпендикуляр, опущений із однієї основи циліндра на другу, а також довжина цього перпендикуляра називаються *висотою* циліндра.

Перпендикуляр між основами, який належить його бічній поверхні називається *твірною циліндра. Радіусом циліндра* називається радіус його основи.

Щоб одержати малюнок циліндра на площині, потрібно спочатку зобразити одну з основ у вигляді еліпса, а потім здійснити його паралельне перенесення на відстань, що дорівнює висоті циліндра, мал. 7.

Конусом (прямим круговим конусом) називається тіло, яке утворюється при обертанні прямокутного трикутника навколо одного із його катетів.

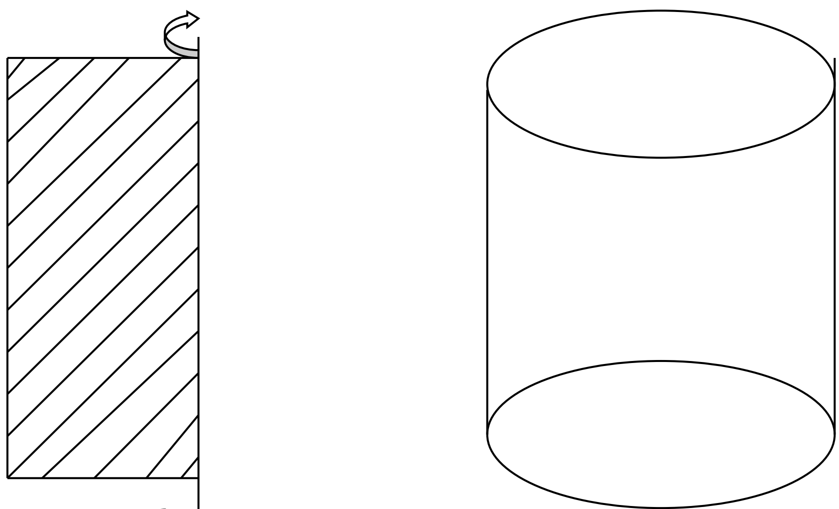
Круг, що входить до складу поверхні конуса, називається його *основою,* решта поверхні – *бічною поверхнею.*

Кінець катета, навколо якого здійснюється обертання і який не належить основі, називається *вершиною конуса*, а сам катет а також його довжина – *висотою конуса.*

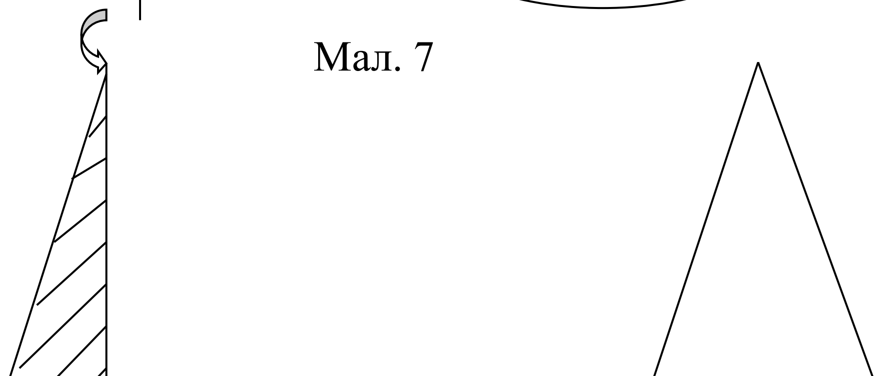
Відрізок, що лежить на бічній поверхні конуса і з'єднує його вершину з основою, називається *твірною конуса.*

Щоб одержати малюнок конуса на площині, слід спочатку зобразити його основу у вигляді еліпса і вершину, а потім із неї провести два відрізки до двох точок еліпса, відстань між якими найбільша, мал. 8.

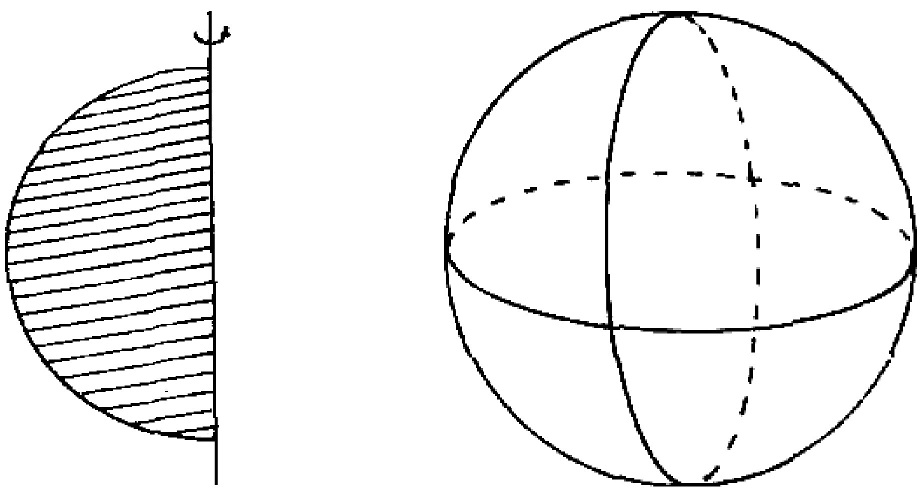
Кулею називається тіло, яке утворюється при обертанні півкруга навколо його діаметра (мал.. 9).



Мал. 7



Мал.8



Мал. 9

Центр, радіус і *діаметр кулі* збігаються з центром, радіусом і діаметром півкруга, який обертається. *Сферою* називається поверхня кулі. При зображенні кулі на площині треба пам'ятати, що її проекцією на площину є круг.

РОЗДІЛ 7. ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ВИМІРЮВАННЯ

7.1. Додатні адитивно-скалярні величини та їх вимірювання

7.1.1. Поняття про величину.

Поняття величини є складовою змісту багатьох наук:

математики, фізики, хімії, біології та ін. Без поняття величини вивчення дійсного світу обмежувалося б лише спостереженнями і залишалось би на описовому рівні. Наприклад, при нагріванні тіла розширюються. Це явище було відоме з давніх часів. Введення таких величин як довжина, об'єм і температура, встановлення залежності між ними дозволило не тільки значно збагатити знання про світ та інші явища природи, а враховувати їх при розв'язуванні конкретних задач, що пов'язані з практичною діяльністю людини. Умови для введення тієї чи іншої величини визрівають у процесі розвитку даної галузі науки.

Кожний об'єкт має багато різних властивостей, які відображаються у відповідних величинах. Наприклад, властивості просторової протяжності відповідає величина, що називається довжиною, властивості інертності тіла – маса, властивості провідника перешкоджати проходженню електричного струму – опір провідника і т. ін.

Величини, які виражають одну і ту ж властивість деякої сукупності об'єктів, називають *однорідними*, різні властивості – *неоднорідними*. Так, довжина і площа є неоднорідними величинами.

Величини не існують самі по собі, як деякі субстанції, що відірвані від матеріальних об'єктів і їх властивостей. В самій природі немає швидкостей, імпульсів, сил і т. ін. З другого боку величини певною мірою ідеалізують властивості об'єктів. У процесі абстракції завжди відбувається деяке спрощення дійсності, відволікання від ряду обставин. Тому величина – не сама дійсність, а лише її відображення свідомістю людини. Проте практика підтверджує, що величини правильно відображають властивості навколишньої дійсності.

Поняття величини тісно пов'язане з поняттям вимірювання, яке є одним із шляхів пізнання природи людиною, що об'єднує теорію з практичною діяльністю. В процесі розвитку природничих і технічних наук роль і значення вимірювання невпинно зростає, бо зростає число і якість вимірювання різних величин.

Під вимірюванням величини розуміють відображення об'єктів, які володіють властивістю, або у множину дійсних чисел, або ж у множину за певним правилом побудованих числових сукупностей. Числа або числові сукупності, що ставляться у відповідність об'єктам, називають їх *мірами*, а самі об'єкти – *об'єктами вимірювання*.

Відомо, що не кожну властивість можна виміряти, бо не завжди знайдеться механізм порівняння об'єктів за даною властивістю з одним із вибраних об'єктів, який називається *еталоном* (*одиничним елементом*) вимірювання. Приклади таких властивостей часто зустрічаються в психології, педагогіці, біології, економіці (розум, воля, сміливість, наполегливість і ін.). такі властивості називають *латентними* (*прихованими*) *величинами*.

Порівняння латентних величин можливе лише на інтуїтивному рівні. Так, якщо одна людина більш наполеглива, ніж інша, то про ступінь якості "наполегливість" судять тільки по системі вчинків, поведінці людини. В таких випадках говорять про умовні значення величин або про умовні міри. Оцінювання латентних величин числами є досить проблематичним. У зв'язку з математизацією наук останнім часом іде інтенсивний пошук, особливо в гуманітарних науках, можливості вимірювання латентних величин.

Розрізняють три види величин за способом їх вимірювання:

1) *скалярні величини*, мірами яких є дійсні числа;
2) *векторні величини*, мірами яких є кортежі дійсних чисел;
3) *тензорні величини*, мірами яких є таблиці (матриці) дійсних чисел.

Поняття величини вперше виникло в філософії і пов'язувалось з дійсним числом. Арістотель писав, що та чи інша кількість є множиною, якщо її можна перелічити, і є величиною, якщо її можна виміряти. В книзі Евкліда "Начала" немає поняття величини, але в ній перераховуються аксіоми, які описують загальні властивості величин. Протягом довгого часу вчені намагалися дати означення величини:

за Героном Александрійським (мабуть, 1 ст. н. е.) величиною є все те, що може бути збільшене, чи зменшене необмежено;

за Ейлером величиною є те, що може збільшуватися і зменшуватися;

за Грасманом (1809 – 1877) величиною є певна річ, яка може бути визначена рівною чи нерівною другій речі;

за О. Д. Александровим (1912 – 1994) величиною є така властивість об'єктів, яка в певному відношенні може бути більшою або меншою, причому існує можливість її точного порівняння.

У сучасній математиці існують різні точки зору на місце і значення величин у ній. Одні математики вважають це поняття неістотним для математики, інші ж, навпаки, вважають його одним із основних її понять.

7.1.2. Додатні адитивно-скалярні величини.

Деякі скалярні величини мають так звану *адитивну властивість*, яка полягає в тому, що величина допускає необмежене "подріблення", тобто її можна скласти з частин, що попарно не перетинаються і є теж величинами. Так, час-проміжок має адитивну властивість, а час-дата – ні. Величини, які мають адитивну властивість, називаються *адитивно-скалярними величинами*.

Прикладами таких величин є довжина, площа, об'єм, маса, проміжки часу тощо. Для них можна визначити операцію додавання, яка дозволяє замінити дві однорідні величини їх сумою. Аналіз адитивно-скалярних величин приводить до такого їх аксіоматичного означення.

Властивість P елементів множини M називається *додатною адитивно-скалярною величиною* (надалі *величиною*), якщо:

1) на множні M визначене відношення еквівалентності, яке позначається символом "~";

2) на множині M задане тернарне відношення "складається з", за допомогою якого вводиться в множині M бінарна операція, можливо часткова, що називається додаванням і позначається символом "+";

3) у множині *M* виділено деякий елемент ε, який називається еталоном (одиничним елементом) і існує відображення f множини *M* у множину додатних чисел R_+, що має такі властивості

а) еталону вимірювання ε ставиться у відповідність число 1 :

$f(\varepsilon) = 1$;

б) будь-яким еквівалентним елементам ставляться у відповідність рівні числа:

$\forall\ \alpha, \beta \in M$: $\alpha \sim \beta \rightarrow f(\alpha) = f(\beta)$;

в) для будь-яких двох елементів, якщо існує їх сума, то у відповідність їй ставиться число, яке дорівнює сумі чисел, які ставляться у відповідність кожному з цих двох елементів окремо:

$\forall\ \alpha, \beta \in M$: $\exists\ \alpha+\beta \in \mathrm{M} \rightarrow f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$;

4) якщо в множині *M* за одиничний елемент вибрано новий еталон вимірювання ε_1 і g відображення множини *M* у множину R_+, яке має властивості а) – в), то у відповідність кожному елементу α з множини *M* при цьому відображенні ставиться число, яке дорівнює добутку числа, яке відповідає елементу α при старому еталону вимірювання ε і числа, яке ставиться у відповідність старому еталону вимірювання ε при вибраному еталоні ε_1.

$\forall\ \alpha \in M$: $g(\alpha) = g(\varepsilon)\, f(\alpha)$.

Множина *M* називається *областю визначення величини*, відображення f: $M \rightarrow R_+$ – *вимірюванням величини*, а елементи множини *M* – *об'єктами вимірювання*. Число f (α) називається *мірою об'єкта* α (*значення величини*) при еталоні ε.

Перераховані чотири властивості відображення виражають властивості величини (міри), кожна з яких має свою назву: 3а) – *нормованість*; 3б) – *інваріантність*; 3в) – *адитивність*; 4) – *мультиплікативність*.

Міра об'єкта залежить від еталона, що може бути вибраний довільно. Щоб кожного разу, коли мова йде про міри об'єктів, не вказувати еталони вимірювання, поступають так:

1) мірам еталонів вимірювання, тобто числу одиниця, приписують імена еталонів, і одиницю з найменуванням називають *одиницею вимірювання*;

2) міру довільного об’єкта записують як добуток додатного числа і одиниці вимірювання.

Наприклад, запис 3 відра рівносильний запису 3×1 відро означає, що мірою деякого об’єкта є додатне число 3 при еталоні вимірювання “відро”.

На основі аксіоматичного означення для встановлення того, що властивість Р елементів множини M є величиною, потрібно:

1) ввести на множині M відношення еквівалентності;

2) визначити на множині M тернарне відношення “складається з” і пов’язати з ним операцію додавання ;

3) серед елементів множини M вибрати еталон (одиничний елемент);

4) побудувати відображення f: $M \to R_+$, яке задовольняє умовам 3) і 4) означення величини.

З означення величини випливає, що для довільних елементів α і β з множини М відношення їх мір не залежить від вибору еталона.

Елементи α і β множини М, які мають рівні міри, тобто $f(\alpha) = f(\beta)$ називають *рівновеликими*.

Відношення рівновеликості для елементів множини М є відношенням еквівалентності, а тому за допомогою нього множину М можна розбити на класи рівновеликих елементів, в літературі іноді ці класи і називають величиною.

Величина, визначена на множині М, називається *простою*, якщо

$$\forall\ \alpha, \beta \in M\colon f(\alpha) = f(\beta) \to \alpha \sim \beta.$$

При вимірюванні величин важлива роль вибору одиниць вимірювання. Навіть для вимірювання однієї величини не можна обійтися однією одиницею вимірювання. Наприклад, щоб виміряти довжини зернини пшениці, будинку або залізниці від Києва до Харкова зручніше користуватися міліметром, метром і кілометром відповідно. В різних народів і в різні часи одиниці вимірювання були різними.

Спершу за одиниці вимірювання вибиралися довжини руки, ноги, пальця людини, або предметів, що найчастіше оточували людину. На Україні здавна урожай рахували “копами” (копа 60 снопів) та “возами” або “хурами” (кількість снопів, яка вміщалася на возі). Рідину – воду, молоко тощо міряли “квартами” (2 пляшки), “гранцями” (4 кварти), “відрами” (10–12 літрів). У ткацькій справі використовувалися одиниці загальнослов’янського походження – “чисниця” (три нитки), “пасмо” (10 чисниць), “моток” (30 пасом). Селянами використовувалися оригінальні одиниці площі землі: “день” (площа, яку можна виорати за день волами), “опруг”, “гона”, “волока”, “лан” та ін. З розвитком торгівлі, обміну товарами та іншими потребами людей виникла необхідність у введенні однакових для всіх країн одиниць вимірювання.

Сукупність одиниць вимірювання різних величин, що ввійшли до вжитку, називається *системою одиниць* (*системою мір*).

Питаннями вимірювання величин займається метрологія – наука про вимірювання, способи досягнення їх одноманітності та необхідної точності. Найбільш розробленою з стародавніх метрологій була вавілонська, яка значно вплинула на метрології інших народів. До цього часу користуються одиницями часу, запозиченими з неї: доба – 24 години, година – 60 хвилин, хвилина – 60 секунд. Стародавні метрології включали одиниці вимірювання довжин, площ, об’ємів, мас, часу і монетні системи, які часто пов’язувалися із вимірюванням маси.

До кінця 19 ст. більшість європейських держав мали свої системи одиниць. Серед них виділилася метрична системи одиниць, яка була запроваджена в кінці 18 ст. у Франції. Її особливість полягає в тому, що відношення між кратними і частинами більшості одиниць вимірювання виражається через цілі степені числа 10.

В 1877 на кошти 20 держав – учасниць “Конференції метра” було створено Міжнародне бюро мір і ваги, в обв’язок якого ввійшло збереження еталонів і виготовлення їх зразків. З розвитком науки і техніки старі означення еталонів не забезпечували належної точності вимірювань і відтворення еталонів. В 1960 році Генеральна конференція по мірам і вагам прийняла міжнародну систему одиниць (СІ) як універсальну систему для всіх галузей науки і техніки. На даний час вона включає:

1) сім основних одиниць: метр (м) – для довжини; кілограм (кг) – для маси; секунда (с) – для часу; моль (моль) – для кількості речовини; кельвін (К) – для термодинамічної температури; кандела (кд) – для сили світла; ампер (А) – для сили електричного струму;

2) дві додаткових одиниці: радіан (рад) – для плоского кута; стерадіан (ср) – для тілесного кута;

3) похідні одиниці, серед яких, наприклад, квадратний метр ($м^2$) – для площі, кубічний метр ($м^3$) – для об'єму.

Похідні одиниці утворюються з основних та додаткових. Їх називають, як правило, через основні, додаткові або похідні одиниці; деякі одиниці мають свої спеціальні назви.

Від одиниць Міжнародної системи можна утворювати десяткові кратні і частинні одиниць множенням вихідних одиниць на 10^n або 10^{-n}, де $n = 1, 2, 3, 6, 9, 12, 15, 18$. Назви таких одиниць утворюються приєднанням до назви вихідної одиниці відповідної десяткової компоненти:

10^1 дека (да)	10^{-1} деци (д)
10^2 гекто (г)	10^{-2} санті (с)
10^3 кіло (к)	10^{-3} мілі (м)
10^6 мега (М)	10^{-6} мікро (мк)
10^9 гіга (Г)	10^{-9} нано (н)
10^{12} тера (Т)	10^{-12} піко (п)
10^{15} пета (П)	10^{-15} фемто (ф)
10^{18} екза (Е)	10^{-18} ато (а)

7.2. Довжина відрізка та її вимірювання

Одну з побудов множини натуральних чисел було здійснено на основі понять відрізка та його вимірювання (§13). Ці поняття також були суттєво використані при побудові множин додатних раціональних і дійсних чисел (§§ 18, 20). Всі вищезгадані побудови числових множин фактично базувалися на використанні властивості відрізків, яку називають *довжиною відрізка*. Покажемо, що довжина відрізка є величиною.

Якщо M – множина відрізків, які позначаються малими грецькими буквами, то в ній:

1) відношення рівності є відношенням еквівалентності;

2) є тернарне відношення "складається з" (відрізок розбито на два відрізки"), за допомогою якого означається бінарна операція додавання відрізків;

3) за допомогою вибраного відрізка ε, який називається *еталоном* (*одиничним відрізком*), можна побудувати відображення

$f\colon M \to R_+$

і при цьому будуть виконуватися умови:

а) f (ε) = 1 – мірою еталона вимірювання є число 1 (нормованість довжини);

б) $\forall\ \alpha, \beta \in M\colon \alpha=\beta \to f(\alpha) = f(\beta)$ – міри будь-яких двох рівних відрізків рівні (інваріантність довжини);

в) $\forall\ \alpha, \beta \in M\colon \exists\ \alpha+\beta \in M \to f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ – для будь-яких двох відрізків, якщо існує їх сума, то міра цієї суми дорівнює сумі мір цих відрізків (адитивність довжини);

4) якщо ε_1 – інший одиничний відрізок, для якого побудовано відображення $g\colon M \to R_+$,що задовольняє умовам а), б), в), то

$\forall\ \alpha \in M\colon g(\alpha) = g(\varepsilon)\, f(\alpha)$, – тобто, щоб перейти до міри відрізка α при новому еталоні вимірювання, достатньо його міру при старому еталоні вимірювання помножити на міру старого еталона при новому еталоні вимірювання (мультиплікативність довжини).

Отже, виконуються всі умови означення додатних адитивно-скалярних величин і довжина відрізка є величиною. Число f(α) називається *мірою відрізка* α при заданому одиничному відрізку.

Якщо одиничний відрізок фіксовано, то, допускаючи деяку вільність мови, число f(α) називають також *довжиною відрізка*, хоча, взагалі кажучи, потрібно розрізняти такі поняття, як довжина відрізка і значення довжини відрізка. Через те, що

$$\forall\ \alpha, \beta \in M\text{: } f(\alpha) = f(\beta) \rightarrow \alpha = \beta,$$

то довжина відрізка є простою величиною, тобто відрізок цілком визначається своєю довжиою.

У практичній діяльності люди на різних етапах розвитку користувалися різними одиницями довжини. Ще з часів Київської Русі в Україні користувалися, наприклад, такими одиницями довжини як “п’ядь”, “лікоть”, “ступінь”, “сажень”. З 17 ст. стала поширюватися така одиниця як “аршин”, а з 18 ст. – “верста”. З розвитком суспільства різноманітність одиниць довжини створювала незручності при спілкуванні людей. Постало питання про створення єдиного еталона довжини, який порівняно легко можна було б відтворювати. В метричній системі мір за еталон прийнято метр. Вперше його було запроваджено у Франції в кінці 18 ст. За метр було прийнято 10^{-7} частини чверті паризького меридіана. Таке визначення метра відповідало прагненню мати “природну” одиницю довжини. Було виготовлено із тривкого сплаву платини і іридію кілька еталонів метра і поміщено в підвали Міжнародного бюро мір і ваги. В 1872 році Міжнародна метрична комісія, враховуючи те, що запропонований “природний” еталон неможливо точно відтворити, прийняла рішення перейти до одиниці, яка відтворюється за тим еталоном, що зберігається у Франції.

До середини 20 ст. створений еталон забезпечував необхідну точність вимірювання, проте у зв’язку з розвитком науки і техніки стали потрібними досконаліші еталони. Генеральна конференція мір і ваги 1983 року прийняла нове визначення метра, еталона довжини: метр – це шлях, який проходить світло у вакуумі за 299792458^{-1} с.

Сучасний розвиток техніки дозволяє відтворити метр з точністю $1 \cdot 10^{8}$ м. Зараз у Міжнародній системі одиниць за основну одиницю прийнято метр.

Практичне вимірювання довжини невеликих відрізків здійснюється за допомогою лінійки. Ідея лінійки полягає в тому, що на півпрямій її початок позначають 0. Потім від 0 наносять поділки в 1 дм, далі кожну з них ділять на 10 рівних частин, одержуються поділки в 1 см, кожну з яких знову ділять на 10 однакових частин, отримують поділки в 1 мм. Приклавши таку лінійку до відрізка так, щоб точка 0 збігалася з одним із кінців відрізка, а друга точка попала в середину лінійки, можна з точністю до одного міліметра встановити довжину відрізка. Ідею лінійки, відповідно видозмінену, можна використати для введення площ і об’ємів.

Задача 1. Точки A, B, C і D розміщені так, що відрізки AB, BC і CD мають своїми довжинами числа 2; 0,5 і 3 відповідно при одиничному відрізку сантиметр. Знайти довжини відрізків AB, BC і CD, якщо за одиничний відрізок вибрати: 1) відрізок AB; 2) відрізок BC.

► Для знаходження довжин відрізків при нових одиничних відрізках потрібно скористуватися залежністю між довжиною одного і того ж відрізка при різних одиничних відрізках (вимога 4) означення додатних адитивно-скалярних величин), тобто, якщо f – відображення при одиничному відрізку ε, а g – відображення при одиничному відрізку ε_1, то для довільного відрізка α

$$g(\alpha) = g(\varepsilon) \times f(\alpha)$$

Отже, потрібно знати довжину старого еталона вимірювання ε при новому еталоні ε_1.

1) Якщо за еталон вимірювання вибрати відрізок AB, то довжина відрізка сантиметр при еталоні AB буде рівна 1 : 2 = 0,5, а довжини відрізків AB, BC і CD рівні відповідно числам

$0{,}5 \times 2 = 1$, $0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$, $0{,}5 \times 3 = 1{,}5$ при еталоні AB.

2) Якщо ж за еталон вимірювання взяти відрізок BC, то довжина відрізка сантиметр при еталоні BC буде рівна 1 : 0,5 = 2 і довжини відрізків AB, BC і CD рівні відповідно $2 \times 2 = 4$, $2 \times 0{,}5 = 1$, $2 \times 3 = 6$ при еталоні BC.

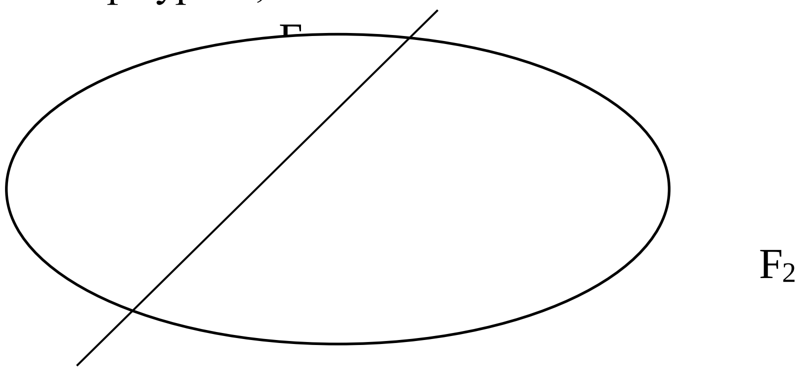
Відповідь: 1) 1; 0,25; 1,5 при еталоні AB,
2) 4; 1; 6 при еталоні BC. ◄

7.3. Площа фігури та способи вимірювання площ

Уявлення про площу фігури має кожна людина, бо задача вимірювання площ відноситься до одних з найдавніших задач, що породжені практичними потребами людини. Здавна людині потрібно було знати площі земельних ділянок, що відводились для обробітку, площі різноманітних будівель, що споруджувалися, тощо. Такі практичні знання про площі використовуються при їх означенні в геометрії, де говорять про площі фігур. Геометричні фігури є різні, тому розглядають особливий клас фігур.

Якщо Ф – множина фігур, то в ній можна ввести відношення рівності. Фігури F_1 і F_2 називають *рівними*, якщо їх можна накласти одну на другу так, що всі їх точки збіжаться (записується $F_1 = F_2$). Неважко встановити, що так означене відношення рівності фігур на множині Ф є відношенням еквівалентності.

Тернарне відношення "складається з", за допомогою якого означається бінарна операція додавання фігур, можна означити так: фігура F складається з фігур F_1 і F_2 (записується $F = F_1 +$), якщо $F = F_1 \cup F_2$ і перерізом фігур F_1 та F_2 є лінія, що проходить через внутрішні точки фігури F, мал. 2.



При вибраному еталоні (квадраті) E існує відображення S: $\Phi \to R_+$., що воно має такі властивості:

1) S (E) = 1 – еталону вимірювання ставиться у відповідність число 1, що є його мірою (нормованість площі);

2) $\forall F_1, F_2 \in \Phi : F_1 = F_2 \to S(F_1) = S(F_2)$ –при одному і тому ж еталоні вимірювання рівним фігурам ставляться у відповідність рівні площі (інваріантність площі);

3) $\forall F_1, F_2 \in \Phi : \exists F_1 + F_2 \in \Phi \to S(F_1 + F_2) = S(F_1) + S(F_2)$ – якщо існує сума двох довільних фігур, то міра цієї суми дорівнює сумі мір даних фігур при одному і тому ж еталоні вимірювання (адитивність площі). Цю властивість можна сформулювати ще й таким чином: площа фігури дорівнює сумі площ фігур на які вона розбивається довільною лінією.

4) якщо E_1 – інший одиничний квадрат і відображення

$S_1: \Phi \to R_+$.

Задовольняє умовам 1) – 3), то

$\forall F \in \Phi : S_1(F) = S_1(E)\, S(F)$ – тобто, щоб знайти площу фігури F при новому еталоні вимірювання E_1, достатньо її площу при старому еталоні вимірювання помножити на міру старого еталона при новому (мультиплікативність площі).

Таким чином, виконуються всі умови означення величини і площа фігури, є додатною адитивно-скалярною величиною.

Знаходити площу фігури за її означенням досить складний процес. Для полегшення використовуються деякі непрямі способи вимірювання, в основу яких покладено вираження площ певних класів фігур через міри їх лінійних елементів. Зокрема, для прямокутника має місце теорема.

<u>Теорема 1</u>. Площа прямокутника дорівнює добутку довжин його сторін, що виходять з однієї вершини.

Фігури називаються *рівновеликими,* якщо їх площі рівні.

Очевидно, що рівні фігури є рівновеликими, але обернене твердження хибне. Дійсно, прямокутники зі сторонами 8 см і 3 см та 6 см і 4 см рівновеликі, але не рівні. Розглянутий приклад дозволяє стверджувати, що площа фігури, на відміну від довжини відрізка, не є простою величиною.

Фігури називаються *рівноскладеними*, якщо їх можна розбити лініями на скінченне число попарно рівних між собою фігур. Часто, особливо для многокутників, лініями розбиття є тільки прямі.

<u>Теорема 2</u>. Якщо фігури рівноскладені, то вони рівновеликі.

<u>Теорема 3</u>. Якщо многокутники рівновеликі, то вони рівноскладені.

Теореми 2 і 3 показують, що для многокутників поняття рівноскладеності та рівновеликості є тотожними поняттями.

У Міжнародній системі одиниць основною одиницею площі є квадратний метр ($м^2$) – площа квадрата, довжина сторони якого дорівнює 1 м. Користуються й іншими одиницями, зокрема: квадратний дециметр ($дм^2$); квадратний сантиметр ($см^2$); квадратний міліметр ($мм^2$). Співвідношення між ними таке:

$1м^2 = 100\ дм^2 = 10000\ см^2 = 1000000\ мм^2$.

Для вимірювання площ земельних ділянок часто користуються такими одиницями як гектар (га) (1 га = 10000 $м^2$) і сотка (або ар) (1 сотка = 100 $м^2$).

7.4. Поняття про об’єм тіла та його вимірювання

Про об’єми тіл, як і про площі фігур, люди мають уявлення з давніх часів у зв’язку з господарською діяльністю.

Просторові фігури є різними, тому виділяють множину W обмежених тіл, які надалі називатимемо тілами. Покажемо, що клас таких тіл має властивість, яку називають об’ємом, і об’єм є величиною.

Дійсно, на множині тіл можна ввести відношення рівності: два тіла називаються *рівними*, якщо їх можна вкласти одне в одне так, що всі їхні точки збіжаться.

Аналогічно як для площі, неважко переконатися, що для об’єму виконуються всі умови означення величини і об’єм тіла, введений за допомогою просторової вимірювальної сітки, є додатною адитивно-скалярною величиною.

Як і у випадку вимірювання площі, знаходити об’єм тіла за його означенням досить складно. Тому об’єми певних класів тіл виражають через міри їх лінійних елементів. Зокрема, для прямокутного паралелепіпеда має місце теорема.

Теорема 4. Об’єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку трьох його вимірів.

Для тіл також можна ввести поняття рівновеликості і рівноскладеності. Як відомо, для многокутників поняття рівновеликості і рівноскладеності є рівносильними поняттями, а для многогранників ці поняття не є рівносильними.

Основною одиницею об’єму є кубічний метр (м^3) – об’єм куба, ребро якого дорівнює 1 м. Похідні одиниці: кубічний дециметр (дм^3), кубічний сантиметр (см^3), кубічний міліметр (мм^3). Співвідношення між ними таке:

1 м^3 = 1000 дм^3 = 1000000 см^3 = 1000000000 мм^3.

Для обчислення об’єму рідин користуються літрами: 1 л = 1 дм^3, та його похідними.

Учні початкової школи вчаться обчислювати об’єми прямокутного паралелепіпеда, зокрема куба, та розв’язують задачі на обчислення об’ємів рідин.

7.5. Маса тіла

Практичний досвід переконує людину в тому, що кожне фізичне тіло має властивість зберігати стан спокою або рівномірного прямолінійного руху, коли сили, що на нього діють, відсутні або взаємно врівноважені. Властивість називається *інертністю тіла* і є однією із найважливіших, бо від неї залежить, як буде рухатись тіло в результаті взаємодії. Як і кожна властивість тіла, інертність пов’язана з величиною, яку називають *масою тіла*. Саме масою виражається інертність тіла так, що більш інертне тіло – це тіло з більшою масою.

З математичної точки зору маса – додатна адитивно-скалярна величина. Дійсно, при розгляді фізичних тіл на землі їх порівнюють між собою за допомогою важільних рівноплечних терезів. Говорять, що два тіла мають *рівні* (*однакові*) *маси*, якщо при покладенні їх на шальки терези врівноважуються. Цим самим на множині фізичних тіл вводиться відношення еквівалентності.

Вважається, що кожне фізичне тіло можна деяким способом розділити на два або більше фізичних тіл. Таким чином, у множині фізичних тіл W можна ввести терарне відношення “складається з”, за допомогою якого означається операція додавання.

Взявши фізичне тіло за еталон, можна побудувати відображення:

$f: W \to R_+$,

що задовольнятиме умови 1 – 4 означення величини. Значить, маса тіла є додатною адитивно-скалярною величиною

У Міжнародній системі одиниць за основну одиницю маси прийнято кілограм (кг) – маса, яка дорівнює міжнародному прототипу кілограма (маса гирі у вигляді циліндра з платиново-іридієвого сплаву діаметром і висотою 39 мм), що зберігається у Міжнародному бюро мір і ваги у Севрі (Франція).

Одиниця маси кілограм вперше була запроваджена в кінці 18 ст. у Франції і означалася, як маса 1 дм^3 чистої води при температурі танення льоду і нормальному атмосферному тиску.

Крім кілограма користуються й іншими одиницями маси, які є частинами кілограма або кратними йому:

1 кг = 1000 г = 1000000 мг, 1 т = 1000 кг, 1 ц = 100 кг.

Задача 5. Для врівноважених терезів, на шальки яких поклали по рибині, використали важок масою 1 кг. Знайти масу кожної рибини, якщо маса однієї з них становить ¾ маси другої.

► Щоб знайти масу кожної з рибин потрібно масу однієї з них, зручніше тієї, що має більшу масу, прийняти за 1. Тоді маса другої рибини становитиме ¾ від 1. Різниця мас буде рівна 1 – ¾ = ¼ частині вибраної одиниці, а за умовою задачі це становить 1 кг. Тепер, на основі знаходження цілого за величиною його частини, маса важчої риби рівна 1 : ¼ = 4 (кг), а маса легшої риби 4 – 1 = = 3 (кг).

Відповідь: 4 кг, 3 кг. ◄

Ще в ранньому віці діти, граючись різними іграшками, учаться розрізняти предмети за їх розмірами і масою. На власному досвіді вони переконуються, що розміри тіл не завжди залежать від маси і навпаки, маса не завжди залежить від розмірів тіл. В початковій школі учні ознайомлюються не тільки з поняттям маси, а й з різними одиницями її вимірювання та співвідношеннями між ними. Глибшому розумінню маси сприяє розв’язування різноманітних практичних задач.

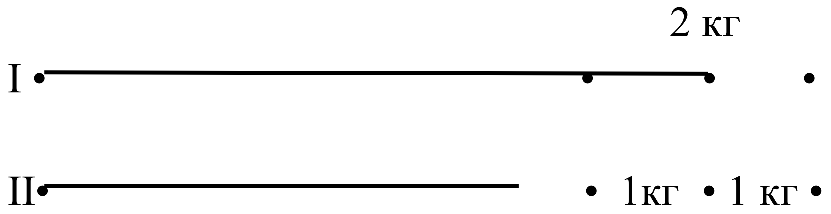
Задача 6. У першій корзині на 2 кг яблук більше ніж в другій, причому у другій корзині не менше одного кілограма яблук.

1) Скільки кілограмів яблук потрібно перекласти із першої корзини в другу, щоб яблук в обох корзинах стало порівну?

2) Скільки кілограмів яблук потрібно перекласти з другої корзини в першу, щоб у першій корзині яблук стало на 4 кг більше, ніж у другій?

3) Скільки кілограмів яблук потрібно перекласти з першої корзини в другу, щоб у першій корзині яблук стало на 4 кг менше, ніж у другій?

► Для знаходження розв’язку задачі маси яблук у корзинах зручно зобразити відрізками, мал. 14.



Мал. 14

З малюнка видно, що коли довжину одного з двох рівних відрізків збільшити на число a, а другого зменшити на те ж число a, то різниця одержаних відрізків буде рівна числу $2a$. Значить:

1) З першої корзини в другу потрібно перекласти 2 : 2 = 1 (кг).

2) З другої корзини потрібно перекласти в першу 1 кг яблук.

3) З першої корзини потрібно перекласти в другу 3 кг яблук. ◄

7.6. Час і проміжки часу

Час – одна з основних, нарівні з простором, форм існування матерії, що виражає тривалість і послідовність матеріальних процесів. Простір і час невіддільні від матерії, нерозривно пов’язані з її рухом. Кількісно і якісно вони нескінченні. Універсальними властивостями часу є тривалість, неповторність і необоротність.

У повсякденному житті під часом найчастіше розуміють проміжки часу, тобто те, що відділяє одну подію від іншої. В такому розумінні час є величиною, бо задовольняє всім вимогам її означення.

Дійсно, на множині проміжків часу можна ввести відношення рівності, яке буде відношенням еквівалентності. Можливість порівнювання проміжків часу випливає з того, що тривалість періодично повторюваних дій однакова.

Тривалість подій, що не перетинаються в часі, рівна сумі тривалостей кожної з них, що дозволяє ввести терарне відношення “складається з” на множині проміжків часу, за допомогою якого можна означити бінарну операцію додавання проміжків часу.

Труднощі виникають при побудові відображення множини проміжків часу в множину додатних дійсних чисел, бо кожний проміжок часу може бути використаний лише один раз внаслідок необоротності часу. Як було зазначено вище, тривалість подій, що повторюються періодично, однакова. Тому за еталони вимірювання часу і вибирають саме такі проміжки часу, найчастіше серед природних явищ. Насамперед людина спостерігала схід і захід Сонця. Проміжок часу між сходом і заходом Сонця назвали *днем*, а між заходом і сходом – *ніччю*. Спочатку день і ніч здавалися людям чимось протилежним, тому і лічили окремо дні і ночі, і лише пізніше день і ніч об’єднали в одне ціле – *добу*. *Доба* – проміжок часу, протягом якого земна куля обертається навколо своєї осі. На початку доба і була основним еталоном вимірювання часу. Астрономічні спостереження привели ще до одного еталону – року. *Рік* – проміжок часу, протягом якого Земля робить один оберт навколо Сонця.

Іншим джерелом при пошуках еталонів часу стали спостереження за фазами Місяця, яких є чотири. Кожна фаза Місяця триває приблизно 7 діб. Проміжок часу між двома однойменними фазами Місяця дістав назву *місяця*.

Отже, вибравши еталон, можна побудувати відображення множини проміжків часу в множину додатних дійсних чисел, що задовольняють умовам 1 – 4 означення величини, тобто час є додатною адитивно-скалярною величиною.

За одиниці часу вибирали спочатку такі як доба. Тиждень, місяць, рік, година розглядалися спочатку як її кратні або частини. Для наукових потреб було введено, як основну одиницю часу, *секунду* (с), що дорівнювала частині доби. Через те, що доба не залишається незмінною, потреби науки вимагали більш точного означення секунди.

У Міжнародній системі одиниць за основну одиницю часу прийнято секунду – 9192631770 періодів випромінювання, що відповідають переходу між двома надтонкими рівнями основного стану атома цезію-133. Всі інші одиниці часу є похідними:

1 хвилина = 60 секунд, 1 година = 60 хвилин, 1 доба = 24 години,

1 місяць = 30 діб, 1 рік = 365 діб.

Створено спеціальні прилади для точного вимірювання часу, серед них так звані квантові годинники, точність добового ходу яких становить від кількох сотих до тисячних часток мікросекунди.

<u>Задачу 7</u>. Потрібно розпиляти колоду на 6 частин. Скільки потрібно часу на роботу, якщо кожний розпил триває 1 хв 30 с?

► Кожний розпил ділить колоду на дві частини. Значить, щоб одержати 6, частин потрібно зробити 5 розпилів, а тому на виконання роботи затратиться:

1хв 30 с × 5 = 1,5 × 5 = 7,5 хв.

<u>Відповідь:</u> 7,5 хв. ◄

З розвитком суспільства виникла необхідність обліковувати великі проміжки часу, що привело до створення спеціальної науки, яка називається *хронологією* або *літочисленням*. Перш за все постало питання про те, який факт, або подію взяти за початок відліку часу. Більшість народів брали за основу релігійні або певні події власної історії такі, як: народження Ісуса Христа (у християн); рік хіджри (переселення) Магомета і його пророків із Мекки в Медіну (в мусульман); біблейське створення світу.

Літочислення тісно пов’язане з календарем. *Календарем* називається лічба великих проміжків часу, яка базується на періодичності руху небесних світил.

У зв’язку з тим, що багато країн не погоджувалися на зміни, пов’язані з узгодженням календарного числення з відлічуванням часу в інших країнах, то вдосконалення календаря виявилося складною не тільки математичною, а й політичною проблемою. Над її розв'язанням працювали вчені стародавніх часів і середньовіччя. Вона й досі до кінця не розв'язана.

В Європі відомо два календарі (календарні стилі), основи яких були закладені в Римській імперії: юліанський (старий стиль) і григоріанський (новий стиль).

Наведемо деякі факти з історії календаря. Рік триває 365 діб 5 годин 48 хвилин 46 секунд ≈ 365 ¼ доби. В житті людини рік не може складатися з дробового числа діб. Тому кожного четвертого року, який називається *високосним*, додають одну добу, і тривалість року стає 366 діб. Такий календар було введено за наказом римського імператора Юлія Цезаря 45 року до н. е. та названо пізніше юліанським.

З часом люди стали помічати розбіжності між вимірюванням часу за юліанським календарем і за Сонцем. Наприклад, 21 березня – день весняного рівнодення – в XVI ст. припадав на 11 березня. Різниця нагромадилася, оскільки рік за юліанським календарем на 11 хвилин і 14 секунд більший за сонячний. Внаслідок цього за кожних 128 років набігала одна зайва доба.

Для усунення розходжень у 1582 році за ініціативою папи римського Григорія XIII було запроваджено новий календар, який дістав назву григоріанського. За юліанським календарем високосними були роки, число яких ділилося на 4. За григоріанським календарем не всі такі роки є високосними. За григоріанським календарем роки 1600, 2000, 2400, … – високосні, 1700, 1800, 1900, 2100, 2200, … – прості. Між юліанським і григоріанським календарями в час реформи різниця становила 10 діб, а з 29 лютого 1900 року досягла вже 13 діб. Поступово григоріанський календар був прийнятий у більшості країн світу. На території колишнього СРСР його запровадили лише після 1917 року.

Учні початкової школи в достатній мірі ознайомлюються з поняттям часу та одиницями його вимірювання. Програмою також передбачено розв'язування задач на обчислення часу.

Задача 8. Сонце зійшло о 6 год 20 хв ранку, а зайшло о 7 год 15 хв вечора. Знайти тривалість дня.

► Від початку доби до заходу Сонця минуло 12 год + 7 год. 15 хв = 19 год 15 хв. Отже, тривалість дня за умовою задачі дорівнює:

19 год 15 хв – 6 год 20 хв = 12 год 55 хв.

Відповідь: 12 год 55 хв. ◄

Задача 9. Учень вперше переступив поріг школи 1 вересня 1986 року, а атестат зрілості отримав 16 червня 1996 року. Скільки часу тривало навчання учня?

► Для розв'язування такого типу задач підраховують скільки повних років, місяців і днів минуло від початку нової ери до початку та кінця події і від другого числа віднімають перше:

1995 р. 5 м. 15 діб – 1985 р. 8 м. 0 діб = 9 р. 9 м. 15 діб.

Відповідь: 9 р. 9 м. 15 діб. ◄

7.7. Шлях і швидкість

Кожне фізичне тіло під дією сил може змінювати своє місце у просторі, тобто воно може перебувати у русі. В багатьох задачах розмірами тіла можна знехтувати і замість нього розглядати точку. Тіло при русі описує деяку лінію, яка називається *траєкторією руху тіла*. Довжина траєкторії між двома точками на ній називається *шляхом*, що пройшло тіло. Якщо в деякий момент часу тіло знаходиться в точці А, мал. 15, а через час t – в точці В, і шлях від А до В дорівнює s, то величину $s/t = v_{ср}$ називають *середньою швидкістю руху тіла*.

Шлях можна виміряти в метрах чи кілометрах, а час в секундах чи годинах, тому швидкість можна виміряти в метрах за секунду (м/с) чи кілометрах за годину (км/год).

1м/с – швидкість, при якій тіло за 1 с приходить шлях в 1 м.

1 км/год – швидкість, при якій тіло за 1 год проходить шлях в 1 км.

1 км/год = 1000 м/3600 с = 5/18 м/с.

Серед різних видів руху виділяється прямолінійний рівномірний рух. Рух тіла називається *прямолінійним рівномірним*, якщо траєкторією руху є пряма і за будь-які рівні проміжки часу воно проходить однакові шляхи.

З означення прямолінійного рівномірного руху випливає, що швидкість тіла при ньому є сталою. Навпаки, якщо траєкторія руху тіла є пряма і швидкість його руху є сталою, то рух буде прямолінійним рівномірним.

При прямолінійному рівномірному русі

$$v = s/t, \tag{1}$$

звідки

$$s = vt \tag{2}$$

Отже, при прямолінійному рівномірному русі шлях прямо пропорційний часу (2), а з (1) випливає, що коли шлях не змінюється, то залежність між швидкістю і часом обернено пропорційна.

Зазначимо, що при розв’язуванні задач на рух у більшості випадків рух розглядається як прямолінійний і рівномірний, хоча в дійсності він не є таким, а швидкість, взагалі кажучи, не є скалярною, а векторною величиною.

<u>Задача 10</u>. З міста A до міста B виїхав вантажний автомобіль. Одночасно з ним із міста B до міста A виїхав легковий автомобіль. Через годину автомобілі зустрілися, а ще через 1.5 год вантажний автомобіль прибув до міста B. Скільки годин витратив легковий автомобіль на шлях від A до B?

► Позначимо через C пункт зустрічі автомобілів, мал. 16. Тоді відстань CB вантажний автомобіль пройшов за 1.5 год, а легковий – 1 год, бо до зустрічі обидва автомобілі були в дорозі однакове число годин, а саме одну годину.

Мал. 16

Звідси, відношення між часами руху на відрізку CB буде рівне 1 : 1,5 = = 2/3. Таке ж відношення між часами руху тіла буде і на відрізку AC. Час руху вантажного автомобіля на відрізку AC, за умовою задачі дорівнює 1 год, тоді час руху легкового автомобіля на відрізку АС – $1 \times 2/3 = 2/3$ (год). Значить, на весь шлях АВ легковий автомобіль затратить $1 + 2/3 = 1\,2/3$ (год) = 1 год 40 хв.

Відповідь: 1 год 40 хв. ◄

7.8. Товар, його кількість, вартість і ціна

Серед інших величин, що зустрічаються в шкільному курсі математики, є величини, які пов'язані з поняттям товару, а саме: кількість товару, його вартість і ціна. Перелічені величини досить складні для розуміння і належать до основних понять науки, яка називається політичною економією.

Щоб жити, людині потрібно задовольняти свої фізичні і духовні потреби. Вона не завжди може, та в цьому і немає необхідності, все виготовляти сама. Тому протягом всього життя людина спілкується з іншими людьми через обмін і купівлю різних товарів.

Товаром називається продукт праці людини, який задовольняє певні її потреби і виготовлений не лише для власного споживання, а й для обміну через купівлю – продаж.

При виробництві товару його мірою є *кількість товару*, яка вимірюється вибраними для даного товару одиницями. Наприклад, кількість виробленої тканини вимірюється метрами, зібраного урожаю – тоннами і т. ін.

Кожний товар має дві властивості: споживну та мінову вартості.

Споживна вартість товару – його здатність задовольняти певні потреби людини. Вона цікавить виробника лише постільки, оскільки пов'язана із здатністю товару обмінюватися на інші товари. Остання властивість товару одержала назву його мінової вартості.

Мінова вартість товару, або просто *вартість,* – це втілена й уречевлена праця, яка виражає суспільно-виробничі відносини товаровиробників.

Вартість товару, на відміну від його споживної вартості, робить всі товари порівнюваними, тому що всі вони – продукт праці людини взагалі, тобто витрат енергії людини, її мозку, м'язів, нервів і т. ін.

Величина вартості товару виражається кількістю суспільно необхідної праці, потрібної для його виготовлення за середніх суспільно-нормальних умов і середнього в даному суспільстві рівня вміння та інтенсивності праці виробників. Чим більше витрачається суспільно-необхідної праці, тим вища вартість і навпаки, чим менше витрачається суспільно-необхідної праці, тим нижча вартість. Вона залежить також від продуктивності праці: чим вища продуктивність, тим менше робочого часу витрачається на виготовлення товару, тим нижча його вартість.

Вартість одного товару проявляє себе при обміні на інший товар. На перший погляд товари при обміну відіграють однакову роль. Насправді ж їх ролі різні. Один товар виявляє свою вартість відносно іншого товару. Другий же товар, за допомогою якого перший виявляє свою вартість, виступає в ролі еквівалента, являє собою еквівалентну форму вартості.

Якщо товаровиробник за свій товар отримав еквівалент, то це означає, що даний товар необхідний суспільству, є втіленням суспільної праці. В той же час еквівалент підтверджує сам факт створення вартості, є її проявом. Історично в ролі еквівалента виступали різні продукти, причому з розвитком суспільного розподілу праці їх кількість в обміні збільшувалася. З часом із усього товарного світу почав виділятися товар, на який все частіше стали обмінювати інші товари. Він означав появу загальної форми вартості. Товар, якому притаманна здатність безпосередньо обмінюватися на будь-який інший товар, дістав назву *загального еквівалента*. В різних народів і на різних етапах історії одного і того ж народу в ролі загального еквівалента виступали різні продукти (худоба, хутро і шкури, слонові кістки і т. ін.). з часом ця роль майже повсюди закріпилася за сріблом і золотом, що й привело до утвердження грошової форма вартості.

Отже, *гроші* – це особливий товар, що виконує роль загального еквівалента, в якому виражається вартість усіх інших товарів. У зв’язку з поняттям грошей, як особливого виду товару, виникає поняття ціни.

Ціною товару називається грошовий вираз вартості товару. Щоб вимірювати вартість товарів, необхідно деяку кількість грошового матеріалу прийняти за одиницю. Така одиниця називається *масштабом цін*. Гроші також виконують і функцію засобу обігу, тобто служать посередником при обміні товарами.

Так розглядають поняття товару, його вартості й ціни в політичній економії. У повсякденному житті поняття товару залишається таким самим, як і в політичній економії, але поняття вартості і ціни зазнають деяких змін. Вартість одиниці товару, виражена в грошах, називається *ціною товару,* а вартість у грошах певної кількості товару, називається *вартістю товару*. Такими поняттями ціни та вартості товару користуються при розв'язуванні задач.

Потрібно відмітити, що ціна товару в суспільстві істотно залежить не тільки від собівартості, але і від попиту на нього і пропозиції.

Між вартістю товару, його кількістю і ціною існує така ж залежність, як і між пройденим шляхом, часом і швидкістю при прямолінійному рівномірному русі, що дає можливість розв'язувати текстові задачі різними способами.

Задача 11. Ціна 1 кг яблук 8,6 грн., а моркви у 2 рази менша. Купили 8 кг моркви. Скільки яблук можна купити на ті самі гроші, які заплатили за моркву?

► В задачі мова йде про три величини: вартість товару, його кількість і ціну. Дві з них, ціна і кількість, набувають різних значень, третя ж величина – вартість товару – стала. Залежність між ціною, кількістю і вартістю може бути виражена формулою:

$В = Ц \times К$,

де В – вартість товару, Ц – ціна товару, К – кількість товару.

1 спосіб розв'язування задач зводиться до знаходження В, тобто вартості товару. Знаючи її та ціну одного кілограма яблук, можна знайти і кількість яблук.

Знайдемо спочатку ціну одного кілограма моркви:

$8,6 : 2 = 4,3$ (грн.),

а потім вартість моркви:

$4{,}3 \times 8 = 34{,}4$ (грн.),

і, нарешті, кількість яблук, які можна купити на 34,4 грн.:

$34{,}4 : 8{,}6 = 4$ (кг).

2 спосіб розв’язування задачі базується на властивості оберненої пропорційності: тому що ціна яблук у два рази більша від ціни моркви, то на гроші, заплачені за 8 кг моркви можна купити у 2 рази менше яблук, тобто

$8 : 2 = 4$ (кг).

Відповідь: 4 кг. ◄

Література

1. Боровик Н. В., Зайченко І. В, Рудник А. В. Математика. Практикум у 7-ми ч.: Навчальний посібник. Чернігів, 2003–2004.
2. Бородін О. І. Історія розвитку поняття про число і системи числення. 3-тє.вид.Київ: Радянська школа, 1975.
3. Завало С. Т., Костарчук В. М., Хоцет Б. І. Алгебра і теорія чисел. Частина І. –Київ: Вища школа. Головне видавництво, 1975.
4. Зуб О. М, Коберник Г. І. , Нещадим А. Ф. Математика: посібник для студентів пед. факультетів. Київ: Наук.світ, 2000. 417 с.
5. Ігнатьєв В. А., Ігнатьєв А. М., Шор Я. О. Збірник задач і вправ з арифметики для педагогічних училищ. Вид. 3-є. Київ: Рад. школа, 1964.
6. Ковальчук В. Баб’як-Білецька Л., Силюта Л., Стасів Н. Математика у 8-ми модулях.: Навчальний посібник для педагогічних вузів спец. “Початкове навчання”. Дрогобич, 2001–2003.
7. Курс математики / В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк та ін. Київ: Вища школа, 1995. 392 с.
8. Кухар В. М., Білий Б. М. Теоретичні основи початкового курсу математики. Вид. 2-ге. Київ.: Вища школа. Головне видавництво, 1987.