

УДК 539.375

Камінський А.О.¹, д. ф.-м. н., проф.,
Дудик М.В.², к. ф.-м. н., доц.,
Кіпніс Л.А.², д. ф.-м. н., проф.

A. O. Kaminsky¹, Full Professor, Doctor of
Sciences (Physics and Mathematics)
M. V. Dudyk², Associate Professor, Ph.D.
L. A. Kipnis², Full Professor, Doctor of Sciences
(Physics and Mathematics)

Маломасштабна контактна зона з тертям берегів біля вершини міжфазної тріщини

Small scale contact zone with the friction of the lips near the interfacial crack tip

В умовах плоскої деформації методом Вінера-Хопфа виконано розрахунок маломасштабної контактної зони біля вершини міжфазної тріщини, береги якої взаємодіють за законом сухого тертя. Досліджено вплив тертя і конфігурації навантаження на розміри зони та напружено-деформований стан в околі вершини тріщини.

The calculation of the small contact zone near the interface crack tip is executed by the Wiener – Hopf method for the plain strain conditions. The crack lips are in contact with friction. The influence of friction and loading configuration on the zone size and on the stress-strained state near the crack tip is investigated.

Ключові слова: міжфазна тріщина, контактна зона, тертя.

Key Words: interface crack, contact zone, friction.

¹ Інститут механіки ім. С.П.Тимошенко НАН України, 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3,
e-mail: fract@inmech.kiev.ua

¹ S.P. Timoshenko Institute of mechanics, 03057, Kyiv, Nesterov str., 3,
e-mail: fract@inmech.kiev.ua

² Уманський державний педагогічний університет, 20300, м. Умань, вул. Садова, 2,
e-mail: dudik_m@hotmail.com

² Uman State Pedagogical University, 20300, Uman, Sadova str., 2,
e-mail: dudik_m@hotmail.com

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Маципура В.Т.

У теорії міжфазних тріщин однією з найбільш поширених є модель Комніноу [13], що припускає наявність поблизу вершини тріщини контакту берегів. Введення області контакту обумовлене необхідністю усунення фізично некоректних просторових осциляцій переміщень біля вершини, які передбачає класична модель міжфазної тріщини, розвинена в роботах Вільямса, Ердогана, Райса, Сі і інших авторів. Дослідженням контактної зони за різних умов присвячені численні публікації [5, 8-12, 14-16, 18, 20]. Зокрема, Аткинсон методом Вінера-Хопфа знайшов аналітичний розв'язок задачі про контактну зону малих розмірів для міжфазної тріщини у кусково-однорідній площині, навантаженої на нескінченності однорідними зсувними і розтягувальними зусиллями без урахування тертя між берегами [10-11]. У даній роботі аналогічний підхід використовується для розрахунку маломасштабної контактної зони за наявності тертя бере-

гів і навантаження загального виду, заданого коефіцієнтом інтенсивності напружень.

Постановка задачі. В умовах плоскої деформації розглянемо задачу про розрахунок контактної зони біля вершини міжфазної тріщини, яка лежить на межі поділу двох однорідних ізотропних середовищ з модулями зсуву G_1 , G_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1 , ν_2 . Контактну зону моделюватимемо розрізом, береги якого взаємодіють за законом сухого тертя Кулона. На розрізі передбачається стискувальне нормальне напруження і допускається стрибок лише дотичної складової переміщення. Довжина контактної зони і контактне напруження визначаються в ході розв'язання задачі.

У даній роботі обмежимося випадком, коли довжина контактної зони s значно менше довжини тріщини, яку для зручності покладемо рівною одиниці, та всіх інших суттєвих розмірів тіла. Це дозволяє розглядати тіло як кусково-однорідну

площину з півнескінченим розрізом на межі поділу, частина берегів якого, прилегла до вершини, перебуває у контакті (Рис. 1).

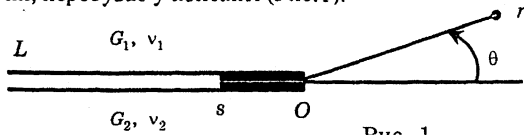


Рис. 1.

На нескінченності реалізується асимптотика, яка є розв'язком аналогічної задачі без контактної зони. Цей розв'язок має осцилюючу поведінку при наближенні до вершини тріщини, що відповідає двом комплексно спряженим кореням $\lambda_0 = -0,5 \pm i\omega$ рівняння $D_0(-1-x)=0$ [17, 21, 22], де

$$D_0(p) = (e + \kappa_1)^2 + (1 + e\kappa_2)^2 + 2(e + \kappa_1)(1 + e\kappa_2) \cos 2p\pi,$$

$$e = G_1 / G_2, \kappa_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)}, \omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 - \beta}{1 + \beta},$$

$$\beta = \frac{(1 + e\kappa_2) - (e + \kappa_1)}{(1 + e\kappa_2) + (e + \kappa_1)} - \text{параметр Дундурса.}$$

Вважаючи, що поза контактною зоною береги тріщини вільні від навантаження, з урахуванням контакту берегів у зоні за законом сухого тертя приходимо до статичної задачі теорії пружності з крайовими умовами:

$$\theta = 0: \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \langle u_r \rangle = \langle u_\theta \rangle = 0;$$

$$\theta = \pm\pi: \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \tau_{r\theta} = -\mu\sigma_\theta; \quad (1)$$

$$\theta = \pm\pi, r < s: \langle u_\theta \rangle = 0;$$

$$\theta = \pm\pi, r > s: \sigma_\theta = 0; \quad (2)$$

$$\theta = \pm\pi, r \rightarrow \infty: \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle =$$

$$= \frac{4(1 - \nu_1)}{G_1} \operatorname{Re}(Ar^{-0,5+i\omega}) + o(1/r), \quad (3)$$

де $\langle f \rangle$ - стрибок величини f , μ - коефіцієнт тертя,

$$A = -\frac{a}{4(1 + \kappa_1)} \frac{K}{\sqrt{2\pi}}, \quad a = e + \kappa_1 + 1 + e\kappa_2,$$

$K = K_1 + iK_2$ - комплексний коефіцієнт інтенсивності напружень, що характеризує величину і конфігурацію зовнішнього навантаження. Надалі K вважатимемо заданим за умовою задачі і таким, що забезпечує стискувальні напруження на берегах контактної зони ($\sigma_\theta(r, \pm\pi) < 0$ при $r < s$).

Розв'язок сформульованої крайової задачі шукаємо у вигляді суми розв'язків наступних двох задач. Перша задача відрізняється від початкової тим, що замість першої з умов (2) використовуємо умову

$$\theta = \pm\pi, r < s: \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle =$$

$$= -\frac{4(1 - \nu_1)}{G_1} \operatorname{Re}(Ar^{-0,5+i\omega}), \quad (4)$$

а на нескінченності $\left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \sim o(1/r)$. Друга задача

- аналогічна задачі без контактної зони, розв'язок якої відомий [17, 21, 22], тому достатньо знайти розв'язок першої задачі.

Розв'язання рівняння Вінера - Хопфа. Застосувавши до рівнянь рівноваги, умов сумісності деформацій, закону Гука і граничних умов (1) інтегральне перетворення Мелліна [7] і використовуючи умови (2) і (4), приходимо до функціонального рівняння Вінера - Хопфа першої задачі у смузі $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - достатньо малі позитивні числа):

$$\Phi^+(p) - \frac{As^{-0,5+i\omega}}{p + 0,5 + i\omega} - \frac{\bar{A}s^{-0,5-i\omega}}{p + 0,5 - i\omega} =$$

$$= -\frac{2a(e + \kappa_1)(1 + e\kappa_2) \sin p\pi D(p)}{(1 + \kappa_1)D_0(p)} \Phi^-(p), \quad (5)$$

де \bar{A} - величина, комплексно спряжена A ;

$$\Phi^+(p) = \frac{G_1}{2(1 - \nu_1)} \int_1^\infty \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \Big|_{\theta=\pm\pi} \rho^p d\rho,$$

$$\Phi^-(p) = \int_0^1 \sigma_\theta(\rho s, \pi) \rho^p d\rho,$$

$$D(p) = \cos p\pi - \mu\beta \sin p\pi.$$

Використовуючи подання

$$\cos p\pi - \mu\beta \sin p\pi = \frac{D_1(p)}{2\sqrt{1 + \mu^2\beta^2} \sin(p - \lambda)\pi},$$

$$D_1(p) = (1 - \mu^2\beta^2) + (1 + \mu^2\beta^2) \cos 2p\pi,$$

де λ - єдиний на інтервалі $(-1, 0)$ корінь рівняння $D(-1-x)=0$, приведемо рівняння (5) до вигляду:

$$\Phi^+(p) - \frac{As^{-0,5+i\omega}}{p + 0,5 + i\omega} - \frac{\bar{A}s^{-0,5-i\omega}}{p + 0,5 - i\omega} =$$

$$= -B \frac{\sin p\pi}{\sin(p - \lambda)\pi} G(p) \Phi^-(p), \quad (6)$$

$$B = \frac{a\sqrt{1 + \mu^2\beta^2}}{2(1 + \kappa_1)},$$

$$G(p) = \frac{2(e + \kappa_1)(1 + e\kappa_2)D_1(p)}{(1 + \mu^2\beta^2)D_0(p)}.$$

Функція $G(it)$ є дійсною додатною парною функцією, яка прямує до 1 при $t \rightarrow \pm\infty$, тому можлива факторизація $G(p)$ за формулою [3]:

$$G(p) = \frac{G^+(p)}{G^-(p)}, \quad \text{Re } p = 0,$$

$$\exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p), & \text{Re } p < 0, \\ G^-(p), & \text{Re } p > 0. \end{cases}$$

За допомогою формул симетрії гамма-функцій [1] отримуємо подання

$$\frac{\sin p\pi}{\sin(p-\lambda)\pi} = \frac{p}{p-\lambda} Q^+(p) Q^-(p),$$

$$\frac{\Phi^+(p)}{pQ^+(p)G^+(p)} - \frac{As^{-0.5+i\omega}}{p+0.5+i\omega} \left[\frac{1}{pQ^+(p)G^+(p)} + \frac{1}{(0.5+i\omega)Q^+(-0.5-i\omega)G^+(0.5-i\omega)} \right] -$$

$$- \frac{\bar{A}s^{-0.5-i\omega}}{p+0.5-i\omega} \left[\frac{1}{pQ^+(p)G^+(p)} + \frac{1}{(0.5-i\omega)Q^+(-0.5+i\omega)G^+(-0.5+i\omega)} \right] =$$

$$= - \frac{BQ^-(p)\Phi^-(p)}{(p-\lambda)G^-(p)} - \frac{As^{-0.5+i\omega}}{(p+0.5+i\omega)(0.5+i\omega)Q^+(-0.5-i\omega)G^+(-0.5-i\omega)} -$$

$$- \frac{\bar{A}s^{-0.5-i\omega}}{(p+0.5-i\omega)(0.5-i\omega)Q^+(-0.5+i\omega)G^+(-0.5+i\omega)}, \quad \text{Re } p = 0. \quad (7)$$

У такому поданні ліва частина рівняння (7) є аналітичною функцією у півплощині $\text{Re } p < 0$, а права – у півплощині $\text{Re } p > 0$. Тоді відповідно до принципу аналітичного продовження повинна існувати єдина функція, яка є аналітичною у всій комплексній площині і дорівнює лівій і правій частинам цього рівняння у відповідних півплощинах. Для її знаходження дослідимо асимптотичну поведінку функцій, що входять в рівняння (7), в околі нескінченно віддаленої точки.

Згідно з загальними положеннями про поведінку напружень і переміщень біля концентраторів [2, 6] в кінці контактної зони мають місце сингулярності виду

$$\sigma_\theta(r, \pm\pi) \sim M_1(s-r)^{-1-\lambda} \quad (r \rightarrow s-0), \quad (8)$$

$$\frac{G_1}{2(1-\nu_1)} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \Big|_{\theta=\pm\pi} \sim M_2(r-s)^{-1-\lambda} \quad (r \rightarrow s+0),$$

$$\Phi^+(p) = pQ^+(p)G^+(p) \left\{ \frac{As^{-0.5+i\omega}}{p+0.5+i\omega} \left[\frac{1}{pQ^+(p)G^+(p)} + \frac{1}{(0.5+i\omega)Q^+(-0.5-i\omega)G^+(-0.5-i\omega)} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{A}s^{-0.5-i\omega}}{p+0.5-i\omega} \left[\frac{1}{pQ^+(p)G^+(p)} + \frac{1}{(0.5-i\omega)Q^+(-0.5+i\omega)G^+(-0.5+i\omega)} \right] \right\}, \quad \text{Re } p < 0;$$

$$\Phi^-(p) = - \frac{(p-\lambda)G^-(p)}{BQ^-(p)} \left\{ \frac{As^{-0.5+i\omega}}{(p+0.5+i\omega)(0.5+i\omega)Q^+(-0.5-i\omega)G^+(-0.5-i\omega)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{A}s^{-0.5-i\omega}}{(p+0.5-i\omega)(0.5-i\omega)Q^+(-0.5+i\omega)G^+(-0.5+i\omega)} \right\}, \quad \text{Re } p > 0. \quad (10)$$

$$Q^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \pm \lambda \mp p)}{\Gamma(1 \mp p)}.$$

При цьому функція $Q^+(p)$ аналітична і не має нулів у півплощині $\text{Re } p < 1 + \lambda$, а $Q^-(p)$ – у півплощині $\text{Re } p > -1$. В результаті нескладних перетворень рівняння (6) приведемо до вигляду:

де M_1, M_2 - деякі сталі. Тоді за теоремою абелева типу [4] знаходимо, що

$$\Phi^-(p) \sim M_1 \Gamma(-\lambda) s^{-1-\lambda} p^\lambda,$$

$$\Phi^+(p) \sim M_2 \Gamma(-\lambda) s^{-1-\lambda} (-p)^\lambda \quad (p \rightarrow \infty). \quad (9)$$

Формула Стірлінга [1] приводить до асимптотик $Q^\pm(p) \sim (\mp p)^{\pm\lambda} \quad (p \rightarrow \infty)$. З визначення $G^\pm(p)$ також випливає, що $G^\pm(\infty) = 1$. Підставляючи знайдені вище асимптотики в (7), отримуємо, що ліва і права частини рівняння (7) на нескінченності обертаються в нуль. Отже, за теоремою Ліувіля єдина аналітична функція тотожно дорівнює нулю у всій комплексній площині. Прирівнюючи обидві частини рівняння (7) до нуля, отримуємо його точний розв'язок:

Розрахунок параметрів контактної зони. 3
(10) при $p \rightarrow \infty$ впливає асимптотика

$$\Phi^-(p) \sim \frac{p^\lambda}{B} \operatorname{Re} \left[\frac{A(1+2i\omega)^{-1} s^{-0,5+i\omega}}{Q^*(-0,5-i\omega)G^*(-0,5-i\omega)} \right].$$

Порівнюючи цей вираз з (9), отримаємо

$$M_1 = \frac{s^{\lambda+1}}{B\Gamma(-\lambda)} \operatorname{Re} \left[\frac{A(1+2i\omega)^{-1} s^{-0,5+i\omega}}{Q^*(-0,5-i\omega)G^*(-0,5-i\omega)} \right].$$

Оскільки в кінці контактної зони нормальне напруження обертається в нуль ($\sigma_\theta(s, \pm\pi) = 0$) і концентрація напружень відсутня, це приводить до умови $M_1=0$, з якої впливає вираз для довжини зони:

$$s = \exp \left[-\frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} + \psi - \gamma - \delta - \xi \right) \right], \quad (11)$$

$$\text{де } \psi = \operatorname{arctg} \frac{K_{II}}{K_I}, \quad \gamma = \arg J \left(-\frac{1}{2} + i\omega \right),$$

$$\delta = \arg Q^* \left(-\frac{1}{2} - i\omega \right), \quad \xi = \operatorname{arctg} 2\omega,$$

$$J(x) \equiv G^*(-1-x) = \exp \left[\frac{1+x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln G(it)}{t^2 + (1+x)^2} dt \right].$$

Застосовуючи до трансформанти нормально-го напруження зворотнє перетворення Мелліна і використовуючи знайдений розв'язок (10), теорему про лишки, явний вигляд функцій $D(p)$ і $D_0(p)$, подання множника A через коефіцієнт інтенсивності напружень, знайдемо розв'язання контактного напруження по степеням r :

$$\tau_{r\theta}(r,0) = -\frac{(1+\kappa_1)a\beta(1+\mu^2)}{\pi\sqrt{s}(e+\kappa_1)(1+\epsilon\kappa_2)\sqrt{1+\mu^2\beta^2}} \frac{4D_0(-1)Q^*(-1)J(0)}{D_0(-1-\lambda)(1+4\omega^2)} \operatorname{Re} \left[\frac{As^{i\omega}}{Q^*(-0,5-i\omega)J(-0,5+i\omega)} \right] \left(\frac{r}{s} \right)^\lambda. \quad (13)$$

Порівнюючи цей вираз з відомою асимптотичною поведінкою дотичного напруження на продовженні міжфазної контактної зони [19]

$$k_{II} = \frac{|K|}{\sqrt{2\pi s}} \frac{2a^4\beta(1+\mu^2)s^{-\lambda}}{(2\pi)^{1-\lambda}(e+\kappa_1)(1+\epsilon\kappa_2)(1+4\omega^2)\sqrt{1+\mu^2\beta^2}} \frac{\Gamma(2+\lambda)J(0)\cos(\omega \ln s + \psi - \delta - \gamma)}{D_0(-1-\lambda)|Q^*(-0,5-i\omega)| \cdot |J(-0,5+i\omega)|}.$$

Аналіз результатів і висновки. Згідно (11), довжина контактної зони не залежить від величини зовнішнього навантаження, заданого модулем КІН, проте суттєво залежить від його конфігурації (співвідношення розтягувальних і зсувних зусиль), пов'язаної з фазовим кутом навантаження ψ . На рис. 2 суцільними лініями представлена залежність відносної довжини зони s/L від фазо-

$$\sigma_\theta(r,\pi) = \frac{-|K|}{\sqrt{2\pi s} B_1} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ C_{1k} \cos(\omega \ln s + \delta_{1k}) \left(\frac{r}{s} \right)^{\lambda_k} - C_{2k} \cos(\omega \ln s + \delta_{2k}) \left(\frac{r}{s} \right)^{k-1} \right\} \quad (0 \leq r \leq s), \quad (12)$$

$$B_1 = 4\pi(e+\kappa_1)(1+\epsilon\kappa_2) \times |Q^*(-0,5-i\omega)| \cdot |J(-0,5+i\omega)|,$$

$$C_{1k} = \frac{a_1(1+\lambda_k)Q^*(-1-\lambda_k)J(\lambda_k)}{|c_k|},$$

$$C_{2k} = \frac{ka^2Q^*(-k)J(k-1)}{|b_k|},$$

$$a_1 = a^2 - \frac{4(e+\kappa_1)(1+\epsilon\kappa_2)}{1+\mu^2\beta^2},$$

$$b_k = (k-0,5-i\omega)(0,5+i\omega),$$

$$c_k = (0,5+\lambda_k-i\omega)(0,5+i\omega),$$

$$\delta_{1k} = \psi - \gamma - \delta - \epsilon_k, \quad \delta_{2k} = \psi - \gamma - \delta - \zeta_k,$$

$$\zeta_k = \arg b_k, \quad \epsilon_k = \arg c_k,$$

$$\lambda_k = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \mu\beta + k \quad (k=0,1,2,\dots)$$

(λ_k – сукупність коренів рівняння $D(-1-x)=0$, що задовольняють умову $\lambda_k > -1$; $\lambda_0 = \lambda$).

Аналогічно визначенню $\sigma_\theta(r,\pm\pi)$, обмежуючись лише сингулярним доданком, знайдемо дотичне напруження на межі поділу середовищ біля вершини тріщини:

$$\tau_{r\theta}(r,0) = \frac{k_{II}}{(2\pi)^\lambda} r^\lambda \quad (r \rightarrow 0),$$

знаходимо коефіцієнт інтенсивності напружень у вершині тріщини:

вого кута ψ при коефіцієнті тертя $\mu = -0,5$ і відношеннях модулів зсуву з'єднаних матеріалів: 1) $G_1/G_2 = 0,1$; 2) $G_1/G_2 = 0,3$; 3) $G_1/G_2 = 0,5$ (тут і нижче $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$). Тут же пунктирними лініями показана оцінка розмірів контактної зони за умовою обернення в нуль стрибка переміщення берегів тріщини $\langle u_\theta(r,\theta) \rangle_{\theta=\pm\pi}$ з використанням

осцилюючого розв'язку в рамках класичної моделі відкритої тріщини [17, 21, 22]. Як видно з рисунку, у використовуваному інтервалі параметрів довжина зони експоненціально спадає зі збільшенням фазового кута, причому тим швидше, чим ближче відношення модулів зсуву до одиниці. Значення довжини зони близькі до оціночних.

При переважанні розтягувальних навантажень розміри зони виявляються екстремально малими (менше міжатомних відстаней), так що модель контактної зони в рамках континуальної теорії пружності стає фізично некоректною. Навпаки, зусилля, що призводять до зсуву берега тріщини в менш жорсткому матеріалі відносно протилежного берега в напрямку від вершини, зумовлюють розміри зони, зрівнянні за порядком величини з довжиною тріщини, проте в цьому випадку порушується прийнята в даній роботі умова маломасштабності зони, і для великих її розмірів отриманий розв'язок стає необґрунтованим.

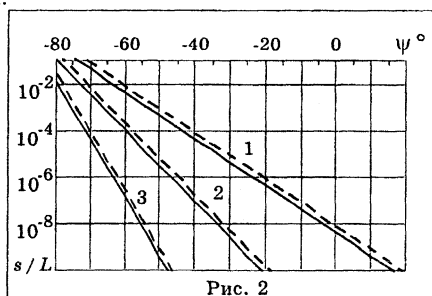


Рис. 2

Залежність розміру контактної зони від тертя виявляється менш вираженою. Представлені в табл. 1 розрахунки при фазовому куті навантаження $\psi = -60^\circ$ показують, що її довжина повільно зростає зі збільшенням тертя, що узгоджується з висновками [5, 9, 20]. При $\mu = 0$ довжина зони точно співпадає зі значеннями, знайденими згідно [11].

Таблиця 1

Залежність розмірів контактної зони від коефіцієнта тертя

G_1	μ				
	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4
G_2					
0,1	$4,005 \cdot 10^{-3}$	$4,054 \cdot 10^{-3}$	$4,130 \cdot 10^{-3}$	$4,183 \cdot 10^{-3}$	$4,237 \cdot 10^{-3}$
0,3	$9,895 \cdot 10^{-5}$	$9,975 \cdot 10^{-5}$	$1,006 \cdot 10^{-4}$	$1,014 \cdot 10^{-4}$	$1,022 \cdot 10^{-4}$
0,5	$1,330 \cdot 10^{-7}$	$1,336 \cdot 10^{-7}$	$1,343 \cdot 10^{-7}$	$1,350 \cdot 10^{-7}$	$1,357 \cdot 10^{-7}$

Розміри зони істотно залежать від співвідношення пружних параметрів з'єднаних матеріалів, причому чим ці параметри ближчі, тим менші розміри зони (див. рис. 3: $\psi = -60^\circ$, 1) $\mu = 0$; 2) $\mu = -0,2$; 3) $\mu = -0,4$).

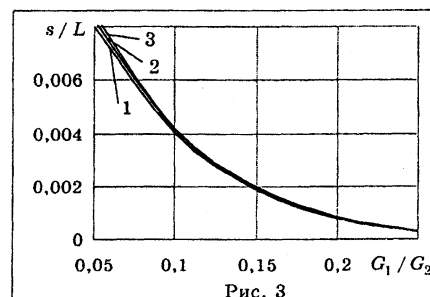


Рис. 3

Згідно (12) і (13), напруження біля вершини тріщини мають степеневу особливість з дійсним показником сингулярності $-1 < \lambda < 0$, що задовольняє рівняння $D(-1-x)=0$. Таким чином, контактна зона усуває просторові осциляції, характерні для класичної моделі міжфазної тріщини. Цей висновок також ілюструє мал. 4, на якому представлена залежність контактного напруження від відстані до вершини тріщини, розташованої на плоскій межі поділу матеріалів кусково-однорідної площини, навантаженої на нескінченності розтягувальним напруженням $p_\infty = 1,0G_1$ і зсувним напруженням $q_\infty = -4,0G_1$ при відношеннях модулів зсуву $G_1/G_2 = 0,1$ (криві 1), $G_1/G_2 = 0,3$ (криві 2). Пунктирним лініям відповідає $\mu = 0$, суцільним - $\mu = -0,5$. Коефіцієнт інтенсивності при даній конфігурації тіла κ і навантаження $K = \frac{\sqrt{\pi L/2}}{\text{ch } \pi \omega} (q_\infty + ip_\infty)(1 + 2i\omega)$ [21, 22]. Виявляється, тертя берегів дещо зменшує контактне напруження біля вершини і збільшує його біля кінця контактної зони.

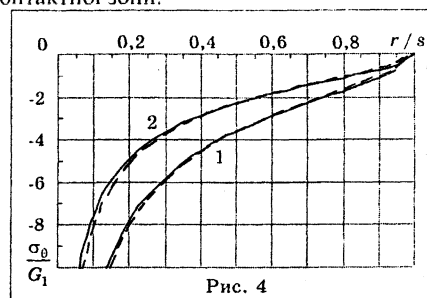


Рис. 4

За аналогічних умов ($G_1/G_2 = 0,3$; $p_\infty = 1,0G_1$) виконано також розрахунок коефіцієнта інтенсивності напружень біля вершини тріщини. Значення k_{II}/G_1 для різних коефіцієнтів тертя і дотичних напружень наведені в табл. 2.

Таблиця 2
Залежність коефіцієнта інтенсивності напружень від зсувного навантаження та тертя

q_{∞}/G_1	μ			
	0	-0,2	-0,4	-0,6
0	-0,12863	-0,18104	-0,25484	-0,35849
-1	-0,18190	-0,21910	-0,26399	-0,31808
-2	-0,28762	-0,32501	-0,36744	-0,41550
-3	-0,40675	-0,44688	-0,49122	-0,54014
-4	-0,53034	-0,57385	-0,62128	-0,67288
-5	-0,65587	-0,70302	-0,75398	-0,80897

З табл. 2 випливає, що тертя між берегами міжфазної тріщини істотноше впливає на коефіцієнт інтенсивності напружень, ніж на розміри контактної зони, збільшуючи його у порівнянні з безфрикційним контактом. Коефіцієнт інтенсивності також зростає зі збільшенням зовнішнього дотичного напруження.

Список використаних джерел

1. *Abramovitz M., Stegun I. A.* Handbook of Mathematical Function. – New York: Dover Publications, 1965. – 1046 p.
2. *Cherepanov G. P.* Mechanics of Brittle Fracture. – New York: McGraw-Hill, 1979. – 939 p.
3. *Gakhov F. D.* Boundary Value Problems. – Oxford: Pergamon Press, 1966. – 564 p.
4. *Noble B.* Methods Based on the Wiener-Hopf Technique, 2nd ed. – New York: Chelsea, 1988. – 246 p.
5. *Ostrik V. I., Ulitko A. F.* Wiener-Hopf Method in Contact Problems of the Theory of Elasticity. – Kiev: Naukova Dumka, 2006. – 328 p. (in Russian).
6. *Parton V. Z., Perlin P. I.* Mathematical Methods of the Theory of Elasticity. – Moscow: Nauka, 1981. – 688 p. (in Russian).
7. *Uflyand Ya. S.* Survey of Articles on the Application of Integral Transforms in the Theory of Elasticity. – North Carolina State University, 1965. – 402 p.
8. *Anderson P.* Small Scale Contact Conditions for the Linear-Elastic Interface Crack // J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E. – 1988. – 55. – P. 814-817.
9. *Antipov Y. A.* An interface crack between elastic materials when there is dry friction //

- J. Appl. Math. Mech. (PMM). – 1995. – 59, P. 273-287.
10. *Atkinson C.* The interface crack with a contact zone (an analytical treatment) // Int. Journ. of Fracture. – 1982. – 18. – P. 161-177.
11. *Atkinson C.* The interface crack with a contact zone (the crack of finite length) // Int. Journ. of Fracture. – 1982. – 19. – P. 131-138.
12. *Comninou M.* Interface crack with friction in the contact zone // J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E. – 1977. – 44. – P. 780-781.
13. *Comninou M.* The Interface crack // J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E. – 1977. – 44. – P. 631-636.
14. *Comninou M., Dundurs J.* Effect of friction on the interface crack loaded in shear // J. of Elasticity. – 1980. – 10, No.2. – P. 203-212.
15. *Comninou M., Schmueser D.* The Interface Crack in a Combined Tension-Compression and Shear Field // J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E. – 1979. – 46. – P. 780-781.
16. *Dundurs J., Comninou M.* A review and prospects of the investigation of an interface crack // Mechanics of Composite Materials. – 1979. – No.3. – P. 378-396 [in Russian].
17. *Erdogan F.* Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials with Cracks // J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E. – 1965. – 32. – P. 403-410.
18. *Gautesen A.K., Dundurs J.* The Interface Crack Under Combined Loading // J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E. – 1988. – 55. – P. 580-586.
19. *Leblond J. B., Frelat J.* Crack kinking from an initially closed, ordinary on interface crack, in the presence of friction // Eng. Fract. Mech. – 2004. – 71. – P. 289-307.
20. *Ostrik V. I.* Friction Contact of the Edges of an Interface Crack under the Conditions of Tension and Shear // Materials Science. – 2003. – 39, No. 2. – P. 214-224.
21. *Rice J., Sih G. C.* Plane Problems of Crack in Dissimilar Media // J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E. – 1965. – 32. – P. 418-423.
22. *Rice J.R.* Elastic Fracture Mechanics Concepts for Interfacial Cracks // J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E. – 1988. – 55. – P. 98-103.

Надійшла до редколегії 06.11.2013