

РОЗВ’ЯЗОК ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ПРО КОГЕЗІЙНУ ПЛАСТИЧНУ ЗОНУ В КІНЦІ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ

SOLUTION OF THE PLANE PROBLEM ABOUT COHESIVE PLASTIC ZONE AT THE END OF THE INTERFACIAL CRACK

Михайло ДУДИК

*Уманський державний педагогічний університет ім. Павла Тичини; Умань, Україна.
E-mail: dudik_m@hotmail.com.*

В умовах плоскої деформації отримано аналітичний розв’язок задачі про розрахунок пластичної зони у з’єднувальному матеріалі в кінці міжфазної тріщини у пружній площині, складеній з двох різних однорідних ізотропних матеріалів. Зона моделюється лінією розриву переміщення, на якій, згідно з когезійною моделлю, напруження задовольняють квадратичній умові пластичності. За допомогою інтегрального перетворення Мелліна задача зведена до матричного рівняння Вінера–Хопфа, яке розв’язане шляхом факторизації коефіцієнта рівняння за методом Храпкова. Із знайденого розв’язку отримані система трансцендентних рівнянь для визначення довжини когезійної зони і фазового кута змішування мод навантаження в зоні та формули для обчислення розкриття тріщини в її вершині. Виконано числове дослідження параметрів зони.

Поширення тріщини по межі поділу з’єднаних матеріалів є однією з найімовірніших причин руйнування композитів. Цьому процесу передують утворення у з’єднувальному матеріалі біля вершини міжфазної тріщини пластичної зони, в якій матеріал внаслідок підвищеного рівня напружень виходить за межу текучості. Відсутність симетрії у полі напружень біля вершини тріщини вимагає врахування при моделюванні зони стрибків як відривних, так і зсувних деформацій. Такі ефекти покладено в основу когезійної моделі міжфазної тріщини, що розвивається впродовж останніх двох десятиліть [1–2]. В даній роботі в умовах плоскої деформації виконано аналітичний розрахунок міжфазної пластичної зони в рамках моделі Леонова–Панасюка–Дагдейла, згідно з якою зона моделюється лінією розриву переміщення, на якій у відповідності з когезійною моделлю нормальне і дотичне напруження задовольняють квадратичну умову пластичності [2]

$$(\sigma_{\theta} / \sigma_0)^2 + (\tau_{r\theta} / \tau_0)^2 = 1, \quad (1)$$

де σ_0, τ_0 – межі текучості з’єднувального матеріалу при розтягу і зсуві.

На початку розвитку довжина зони l значно менша від довжини тріщини L та всіх інших розмірів тіла, і оскільки напружено-деформований стан до-

сліджується в околі зони, то вихідна задача зводиться до задачі про лінію розриву скінченної довжини, що поширюється з вершини півнескінченної міжфазної тріщини по межі поділу двох пружних півплощин (рис. 1). На нескінченності формулюється умова можливості зшивання на відстанях $l \ll r \ll L$ шуканого розв'язку з розв'язком аналогічної задачі теорії пружності без лінії розриву [3].

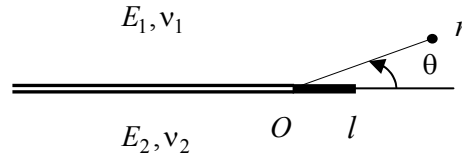


Рис. 1. Розрахункова схема задачі.

Враховуючи умову (1) та вважаючи береги тріщини вільними від напружень, проходимо до статичної крайової задачі теорії пружності з граничними умовами

$$\theta = -\pi \cup \pi: \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0; \quad (2)$$

$$\theta = 0: \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0; \quad (3)$$

$$\theta = 0, \quad r < l: \quad \sigma_\theta = \sigma_0 \cos \psi(r), \quad \tau_{r\theta} = \tau_0 \sin \psi(r);$$

$$\theta = 0, \quad r > l: \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0; \quad (4)$$

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow \infty: \quad \sigma_\theta \sim C_1 r^{-0,5+i\omega} + \bar{C}_1 r^{-0,5-i\omega}, \quad \tau_{r\theta} \sim C_2 r^{-0,5+i\omega} + \bar{C}_2 r^{-0,5-i\omega}; \quad (5)$$

$$C_1 = e' K L^{-i\omega}, \quad C_2 = -i C_1, \quad K = K_I + i K_{II};$$

$$e' = \frac{1}{\sqrt{8\pi \cdot (1-\beta^2)}}, \quad \omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1-\beta}{1+\beta}, \quad \beta = \frac{(1+e\kappa_2) - (e+\kappa_1)}{(1+e\kappa_2) + (e+\kappa_1)};$$

$$e = \frac{E_1}{E_2} \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}, \quad \kappa_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)};$$

$\langle f \rangle$ – стрибок величини f ; $\psi(r)$ – фазовий кут напруження у пластичній зоні, який в подальшому через малість її розмірів вважатимемо сталим і рівним його середньому значенню ψ ; риска над C_1 і C_2 означає комплексне спряження; K – комплексний коефіцієнт інтенсивності напружень [3].

За допомогою інтегрального перетворення Мелліна сформульована крайова задача (2–5) зводиться до матричного рівняння Вінера–Хопфа у смугі $-\varepsilon_1 < \text{Re } p < \varepsilon_2$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – достатньо малі додатні числа), що містить уявну вісь:

$$\Phi^+(p) + \mathbf{F}(p) = -A \text{tg } p\pi G(p) \mathbf{Q}(p) \Phi^-(p), \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_1^+(p) \\ \Phi_2^+(p) \end{pmatrix} = \int_1^\infty \begin{pmatrix} \sigma_\theta(\rho l, 0) \\ \tau_{r\theta}(\rho l, 0) \end{pmatrix} \rho^p d\rho, \quad \begin{pmatrix} \Phi_1^-(p) \\ \Phi_2^-(p) \end{pmatrix} = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} u_\theta \\ u_r \end{pmatrix} \Big|_{r=\rho l} \rho^p d\rho,$$

$$\mathbf{F}(p) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_0 \cos \psi}{p+1} - \frac{C_1 r^{-0,5+i\omega}}{p+0,5+i\omega} - \frac{\bar{C}_1 r^{-0,5-i\omega}}{p+0,5-i\omega} \\ \frac{\tau_0 \sin \psi}{p+1} - \frac{C_2 r^{-0,5+i\omega}}{p+0,5+i\omega} - \frac{\bar{C}_2 r^{-0,5-i\omega}}{p+0,5-i\omega} \end{pmatrix}, \quad A = \frac{(1+\kappa_1)(e+\kappa_1+1+e\kappa_2)}{2(e+\kappa_1)(1+e\kappa_2)},$$

$$G(p) = \frac{4(e+\kappa_1)(1+e\kappa_2)\cos^2 p\pi}{(e+\kappa_1)^2 + (1+e\kappa_2)^2 + 2(e+\kappa_1)(1+e\kappa_2)\cos 2p\pi}, \quad \mathbf{Q}(p) = \mathbf{I} + g(p)\mathbf{J},$$

\mathbf{I} – одинична матриця, $g(p) = i\beta \operatorname{tg} p\pi$, $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Матричний коефіцієнт рівняння (6) відноситься до типу Храпкова [4] і може бути факторизований за формулами:

$$\mathbf{Q}(p) = \mathbf{Q}^+(p)\mathbf{Q}^-(p) \quad (\operatorname{Re} p = 0), \quad \mathbf{Q}^\pm(p) = r^\pm(p) \left[\operatorname{ch} \theta^\pm(p)\mathbf{I} + \operatorname{sh} \theta^\pm(p)\mathbf{J} \right],$$

$$r^\pm(p) = (1-\beta^2)^{1/4} \exp \left[\pm \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln H_1(t)}{t+ip} dt \right], \quad H_1(t) = \frac{1-\beta^2 \operatorname{th}^2 \pi t}{1-\beta^2},$$

$$\theta^\pm(p) = \frac{\pm p}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln H_2(t)}{t+ip} dt, \quad H_2(t) = \frac{\operatorname{arth}(\beta \cdot \operatorname{th} \pi t)}{t}.$$

Елементи матриць $\mathbf{Q}^+(p)$ і $\mathbf{Q}^-(p)$ аналітичні у півплощинах $\operatorname{Re} p < 0$ і $\operatorname{Re} p > 0$ відповідно. Скалярні коефіцієнти рівняння (6) факторизуються за формулами:

$$G(p) = \frac{G^+(p)}{G^-(p)} \quad (\operatorname{Re} p = 0), \quad \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p), & \operatorname{Re} p < 0, \\ G^-(p), & \operatorname{Re} p > 0; \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} p\pi = \frac{p}{K^+(p)K^-(p)}, \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(0,5 \mp p)}.$$

Розв'язок рівняння (6), отриманий з урахуванням особливостей поведінки напружень і переміщень біля вершини міжфазної лінії розриву переміщень та з використанням принципу аналітичного продовження, теорем абелевого типу і Ліувілля, має вигляд:

$$\Phi^+(p) = -\frac{pG^+(p)}{K^+(p)}\mathbf{Q}^+(p)\tilde{\mathbf{F}}^+(p), \quad \Phi^-(p) = \frac{K^-(p)G^-(p)}{A}\tilde{\mathbf{Q}}^-(p)\tilde{\mathbf{F}}^-(p), \quad (7)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}^+(p) = \frac{1}{p+1} \left[\frac{K^+(p)\tilde{\mathbf{Q}}^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-1)\tilde{\mathbf{Q}}^+(-1)}{G^+(-1)} \right] \begin{pmatrix} \sigma_0 \cos \psi \\ \tau_0 \sin \psi \end{pmatrix} -$$

$$-\frac{l^{-0,5+i\omega}}{p+0,5+i\omega} \left[\frac{K^+(p)\tilde{\mathbf{Q}}^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-0,5-i\omega)\tilde{\mathbf{Q}}^+(-0,5-i\omega)}{(0,5+i\omega)G^+(-0,5-i\omega)} \right] \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{l^{-0,5-i\omega}}{p+0,5-i\omega} \left[\frac{K^+(p)\tilde{\mathbf{Q}}^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-0,5-i\omega)\tilde{\mathbf{Q}}^+(-0,5-i\omega)}{(0,5-i\omega)G^+(-0,5-i\omega)} \right] \begin{pmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \end{pmatrix}, \\
\tilde{\mathbf{F}}^-(p) &= \frac{1}{p+1} \frac{K^+(-1)\tilde{\mathbf{Q}}^+(-1)}{G^+(-1)} \begin{pmatrix} \sigma_0 \cos \psi \\ \tau_0 \sin \psi \end{pmatrix} - \\
& -\frac{l^{-0,5+i\omega}}{p+0,5+i\omega} \frac{K^+(-0,5-i\omega)\tilde{\mathbf{Q}}^+(-0,5-i\omega)}{(0,5+i\omega)G^+(-0,5-i\omega)} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} - \\
& -\frac{l^{-0,5-i\omega}}{p+0,5-i\omega} \frac{K^+(-0,5-i\omega)\tilde{\mathbf{Q}}^+(-0,5-i\omega)}{(0,5-i\omega)G^+(-0,5-i\omega)} \begin{pmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{Q}}^\pm(p) = [\mathbf{Q}^\pm(p)]^{-1}.
\end{aligned}$$

Дослідження асимптотик розв'язку (7) при $p \rightarrow \infty$ дозволяє визначити коефіцієнти інтенсивності напружень в кінці лінії розриву, прирівнюючи які до нуля, приходимо до трансцендентних рівнянь для визначення відносної довжини $x = l/L$, фазового кута когезійного напруження ψ і компонентів розкриття тріщини в її вершині як стрибків відповідних переміщень:

$$x = C\sigma^2 \left\{ \frac{\cos^2(\omega \ln x + \varphi + \xi + \zeta)}{n^2} + \sin^2(\omega \ln x + \varphi + \xi + \zeta) \right\},$$

$$\operatorname{tg} \psi = n \cdot \operatorname{tg}(\omega \ln x + \varphi + \xi + \zeta),$$

$$\delta u_\theta(0,0) = -\frac{4(1-\nu_1^2)L}{E_1} \frac{2e'|N| \cdot |\tilde{q}|}{A\sqrt{\pi(1-\beta^2)}} \sigma\sqrt{x} \cos(\omega \ln x + \varphi + \xi + \zeta_1 - 2\eta),$$

$$\delta u_r(0,0) = -\frac{4(1-\nu_1^2)L}{E_1} \frac{2e'|N| \cdot |\tilde{q}|}{A\sqrt{\pi(1-\beta^2)}} \sigma\sqrt{x} \sin(\omega \ln x + \varphi + \xi + \zeta - 2\eta);$$

$$C = \pi \left[2e'|N| \cdot |q'| G^+(-1)/q \right]^2, \quad q = q_0^2 + q_1^2, \quad q' = (q_0\tilde{q}_0 + q_1\tilde{q}_1) + i(q_1\tilde{q}_0 + q_0\tilde{q}_1),$$

$$q_0 = \tilde{Q}_{11}^+(-1), \quad q_1 = \tilde{Q}_{12}^+(-1), \quad \tilde{q}_0 = \tilde{Q}_{11}^+(-0,5-i\omega), \quad \tilde{q}_1 = \tilde{Q}_{12}^+(-0,5-i\omega);$$

$$N = \frac{K^+(-0,5-i\omega)}{(0,5+i\omega)G^+(-0,5-i\omega)}, \quad \sigma = \frac{|K_I + iK_{II}|}{\tau_0\sqrt{L}} - \text{безрозмірний параметр зовніш-}$$

нього навантаження, $\varphi = \operatorname{arctg}(K_{II}/K_I)$ – його фазовий кут; $n = \sigma_0/\tau_0$, $\xi = \arg N$, $\zeta = \arg q'$, $\tilde{q} = \tilde{q}_0 + i\tilde{q}_1$, $\tilde{\zeta} = \arg \tilde{q}$, $\eta = \operatorname{arctg} 2\omega$.

Визначення стрибків нормального і дотичного переміщень у вершині тріщини може бути використано для пошуку граничного навантаження за прийнятою в моделі когезійної зони умовою [1, 2] $(\delta u_\theta/\delta_n)^2 + (\delta u_r/\delta_\tau)^2 = 1$, де δ_n , δ_τ – їх критичні значення, досягнення яких приводить до зрушення тріщини при суто відривному або зсувному характері деформацій у пластичній зоні.

Окремі результати числових розрахунків параметрів пластичної зони наведено на рис. 2–4. Всі обчислення виконано при $E_1 / E_2 = 0,25$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$.

Згідно з розрахунками, довжина пластичної зони нелінійно зростає зі збільшенням зовнішнього навантаження, заданого безрозмірним параметром σ (рис. 2a). Залежність фазового кута навантаження у зоні від σ менш виражена, проте також спостерігається його повільне зростання зі збільшенням навантаження (рис. 2b).

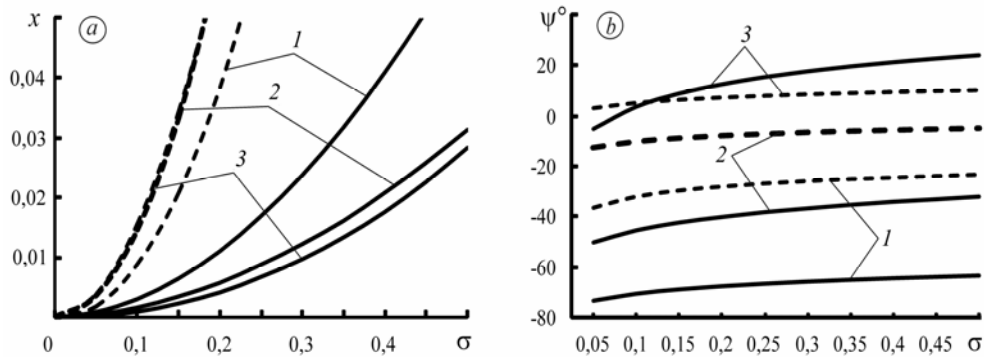


Рис. 2. Залежність параметрів пластичної зони від безрозмірного параметра навантаження σ . Штрихові лінії – $n = 0,5$; суцільні лінії – $n = 2$. Фазовий кут зовнішнього навантаження: 1 – $\varphi = -30^\circ$; 2 – $\varphi = 0^\circ$; 3 – $\varphi = 30^\circ$.

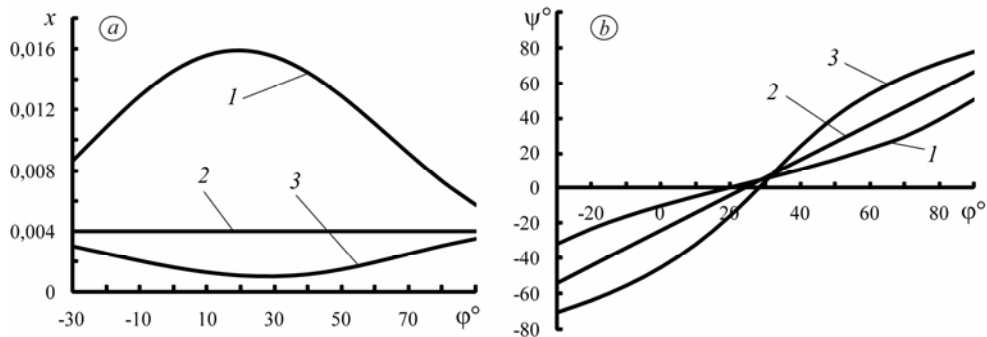


Рис. 3. Залежність параметрів пластичної зони від фазового кута φ зовнішнього навантаження для $\sigma = 0,1$; 1 – $n = 0,5$; 2 – $n = 1$; 3 – $n = 2$.

На рис. 3 подано залежність параметрів пластичної зони від фазового кута зовнішнього навантаження φ . Згідно рис. 3a, довжина зони у цій залежності має мінімум у випадку більш пластичного ($n > 1$) і максимум – у випадку більш крихкого ($n < 1$) з'єднувального матеріалу. Фазовий кут напружень ψ у зоні зростає синхронно з ростом фазового кута зовнішнього навантаження φ , залишаючись, проте, меншим від нього (рис. 3b).

На параметри пластичної зони суттєво впливає відношення $n = \sigma_0 / \tau_0$ меж текучості з'єднувального матеріалу при розтягу і зсуві. Як видно з рис. 4а, зі збільшенням n при сталому параметрі навантаження довжина зони зменшується. Фазовий кут навантаження при $\varphi \leq 0$ є від'ємним і швидко спадає з ростом n , тоді як при $\varphi > 0$ він додатний і слабо залежить від n (рис. 4б).

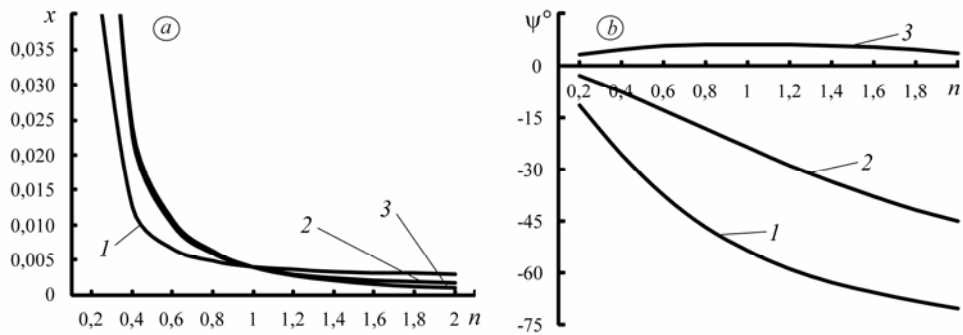


Рис. 4. Залежність параметрів зони від відношення n меж текучості з'єднувального матеріалу при розтягу і зсуві для $\sigma = 0,1$; 1 – $\varphi = -30^\circ$; 2 – $\varphi = 0^\circ$; 3 – $\varphi = 30^\circ$.

1. *Tvergaard V., Hutchinson J.H* On the toughness of ductile adhesive joints // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1996. – **44**, № 5. – P. 789–800.
2. *Determination of cohesive parameters for a mixed-mode cohesive zone model* / M.Y. Lee, T.M. Cho, W.S. Kim, B.C. Lee, J.J. Lee // *Int. J. of Adhesion & Adhesives.* – 2010. – **30**. – P. 322–328.
3. *Rice J.R.* Elastic Fracture Mechanics Concepts for Interfacial Cracks // *J. of Applied Mechanics.* – 1988. – **55**. – P. 98–103.
4. *Khrapkov A.A.* Wiener-Hopf method in mixed elasticity theory problems. – SPb.: B.E. Vedeneev VNIIG Publishing House, 2001. – 144 p.