РОЗГАЛУЖЕННЯ ТРІЩИНИ НОРМАЛЬНОГО ВІДРИВУ У КУТОВІЙ ТОЧЦІ ЛАМАНОЇ МЕЖІ ПОДІЛУ СЕРЕДОВИЩ

BRANCHING OF A MODE I CRACK AT AN ANGULAR POINT OF A BROKEN INTERFACE

Юлія ДІХТЯРЕНКО[1], Михайло ДУДИК[1], Валерій ДЯКОН[2]

[1]*Уманський державний педагогічний університет; Умань, Україна.*
E-mail: dikhtiarenko_iu@mail.ru, dudik_m@hotmail.com
[2]*Уманський відокремлений підрозділ Європейського університету; Умань, Україна.*
E-mail: valera_doc@pochta.ru

Методом Вінера–Хопфа в умовах плоскої деформації знайдено розв’язок симетричної задачі про початкову зону передруйнування в околі кутової точки межі поділу двох різних пружних середовищ, з якої виходить тріщина нормального відриву. Отриманий розв’язок використано для передбачення напрямку подальшого поширення тріщини. Виявлена можливість розгалуження тріщини в кутовій точці межі поділу.

Для тріщини, яка виходить на межу поділу середовищ, при збільшенні зовнішнього навантаження можливі різні варіанти її подальшого поширення: ковзання вздовж межі поділу, розгалуження в одному з матеріалів або перетин межі поділу без розгалуження. Поряд із дослідженнями задач про тріщину, яка виходить на плоску межу поділу середовищ [1–5], важливими також є задачі про тріщину з вершиною у кутовій точці негладкої межі поділу, яка є концентратором напружень зі степеневою особливістю і приводить до утворення зони передруйнування в її околі. Проте аналітичне розв’язання відповідної задачі механіки руйнування є досить складною математичною проблемою, тому для розрахунку зон передруйнування використовуються різноманітні їх моделі. Однією з таких моделей є модель Леонова–Панасюка–Дагдейла [6], яка подає зону лінією розриву переміщення, на якій в залежності від властивостей матеріалу задані певні умови його переходу у передруйнівний стан.

У роботі [7, 8] був здійснений аналіз умов, за яких тріщина нормального відриву, що виходить на межу поділу двох пружних середовищ у її кутовій точці, перетинає її або ж, поширюватиметься далі вздовж межі поділу. Проте, недослідженим залишився випадок, коли тріщина поширюється в одному з матеріалів з’єднання.

В умовах плоскої деформації для кусково-однорідного ізотропного тіла з негладкою межею поділу середовищ розглянемо задачу про розрахунок початкової зони передруйнування, яка утворюються в кінці тріщини нормального відриву, що виходить з кутової точки межі поділу в матеріал з модулем

Юнґа E_1 і коефіцієнтом Пуассона ν_1. Розрізнятимемо випадки утворення зони у матеріалі з пружними сталими E_1 і ν_1 (рис. 1*а*) та у матеріалі з пружними сталими E_2 і ν_2 (рис. 1*б*). У відповідності з гіпотезою локалізації [6] початкова зона зосереджена у тонкому шарі матеріалу, тому моделюватимемо її двома нахиленими під кутом β_i до продовження тріщини відрізками розриву нормального переміщення, на яких нормальне напруження дорівнює опору відриву матеріалу i-го матеріалу σ_i. Тут і нижче індексом i ($i = 1,2$) будемо позначати величини, які відносяться до утворення зони передруйнування в першому або другому матеріалі.

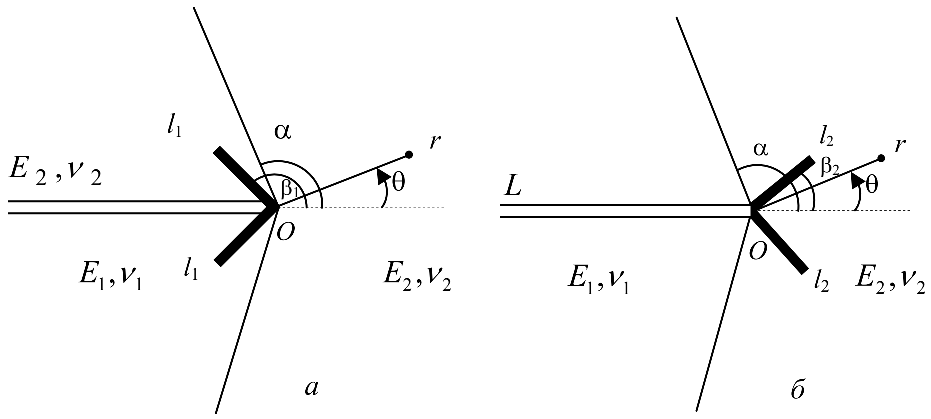

Рис. 1. Розрахункова схема.

На початковому етапі розвитку розміри зони передруйнування значно менші від довжини L тріщини і всіх інших суттєвих розмірів тіла, тому тіло будемо вважати кусково-однорідною площиною з межею поділу середовищ у формі сторін кута, з вершини якого вздовж бісектриси виходить півнескінченна прямолінійна тріщина, а під кутом β_i дві лінії розриву нормального переміщення.

Граничні умови даних крайових задач теорії пружності мають вигляд:

$$\theta = \pi : \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0; \quad \theta = 0 : \tau_{r\theta} = 0, u_\theta = 0;$$

$$\theta = \alpha : \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \langle u_r \rangle = \langle u_\theta \rangle = 0;$$

$$\theta = \beta_i : \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \langle u_r \rangle = 0; \tag{1}$$

$$\theta = \beta_i, r < l_i : \sigma_\theta = \sigma_i; \; \theta = \beta_i, r > l_i : \langle u_\theta \rangle = 0; \tag{2}$$

$$\theta = \beta_i, r \to \infty, \sigma_\theta = CF_i(\beta_i) r^\lambda + o(1/r); \tag{3}$$

де $0 \le 2\alpha \le 2\pi$ – кут розхилу межі поділу середовищ; $\langle f \rangle$ – стрибок величини f; C – стала, яка характеризує інтенсивність зовнішнього силового поля і вважається заданою за умовою задачі; $F_i(\theta)$ – відомі функції; λ – єдиний на інтервалі $(-1,0)$ корінь характеристичного рівняння аналогічної задачі без зони передруйнування [9].

В кінці лінії розриву мають місце асимптотики:

$$\theta=\beta_i, r\to l_i+0: \sigma_\theta=\frac{K_i}{\sqrt{2\pi(r-l_i)}}; \tag{4}$$

$$\theta=\beta_i, r\to l_i-0: \left\langle\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right\rangle=-\frac{4(1-\nu_i^2)}{E_i}\frac{K_i}{\sqrt{2\pi(l_i-r)}};$$

де K_i – коефіцієнт інтенсивності напружень в кінці зони, який повинен бути знайденим в ході розв’язання задачі.

Розв’язок задачі будемо шукати у вигляді суми розв’язків двох наступних задач. Перша задача відрізняється від вихідної тим, що замість першої з умов (2) використовується умова:

$$\theta=\beta_i, r\le l_i: \sigma_\theta=\sigma_i-CF_i(\theta)r^\lambda, \tag{5}$$

а на нескінченності напруження спадають швидше, ніж $1/r$. Друга задача – аналогічна задача без зони передруйнування. Оскільки розв’язок другої задачі відомий [9], достатньо розв’язати першу задачу.

Розв’язок сформульованої задачі знайдено методом Вінера–Хопфа з використанням інтегрального перетворення Мелліна подібно розв’язкам аналогічних задач [6, 7]. Він приводить до виразу для визначення довжини зони передруйнування:

$$l_i=\left(\frac{|C|}{\sigma_i}\right)^{-\frac{1}{\lambda}}R_i(\beta_i), \tag{6}$$

$$R_i(\theta)=\left[\frac{\sqrt{\pi}\left|F_i(\theta)\Gamma(\lambda+1)I_i(0,\theta)\right|}{2\Gamma(1,5+\lambda)I_i(\lambda,\theta)}\right]^{-\frac{1}{\lambda}},$$

$$I_i(x,\theta)=\exp\left[\frac{x+1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\ln G_i(it,\theta)}{t^2+(x+1)^2}dt\right],\; G_i(p,\theta)=\frac{D_i(p,\theta)\cos p\pi}{D_0(p)\sin p\pi},$$

$$D_1(p,\theta)=4(e-1)(\Delta_1\Delta_4-\Delta_2\Delta_5)[(e-1)\Delta_6-e(1+\kappa_2)\sin 2p\alpha]-$$
$$-4(e-1)(1+\kappa_1)\Delta_6[\sin 2p(\theta-\alpha)\Delta_1-\sin^2 p(\theta-\alpha)\Delta_5]-$$
$$-e(1+\kappa_1)(1+\kappa_2)[4\cos(p-1)\theta\cos(p+1)\theta\Delta_1+(\Delta_6-\Delta_3)\Delta_5]+$$
$$+(1+\kappa_1)^2\Delta_5\Delta_6,$$

$$D_2(p,\theta)=e(1+\kappa_1)(1+\kappa_2)[\Delta_3(\Delta_5-\Delta_4)-4\cos(p-1)\theta\cos(p+1)\theta\times$$
$$\times(\Delta_1-\Delta_2-\Delta_7)]-[4\cos(p-1)\theta\cos(p+1)\theta\Delta_2-\Delta_3\Delta_4]\{(1+\kappa_1)^2+$$

$$+4(e-1)(1+\kappa_1)\sin^2 p(\pi-\alpha)-4(e-1)^2\Delta_7\}-4e^2(1+\kappa_2)^2\times$$
$$\times\cos(p-1)\theta\cos(p+1)\theta\Delta_7+4(e-1)e(1+\kappa_2)\Delta_7\Delta_8,$$
$$\Delta_1=p^2\sin^2\theta-\sin^2 p(\pi-\theta),\;\; \Delta_2=p^2\sin^2(\theta-\alpha)-\sin^2 p(\theta-\alpha),$$
$$\Delta_3=p\sin 2\theta+\sin 2p\theta,\;\; \Delta_4=p\sin 2(\theta-\alpha)-\sin 2p(\theta-\alpha),$$
$$\Delta_5=p\sin 2\theta+\sin 2p(\pi-\theta),\;\; \Delta_6=p\sin 2\alpha+\sin 2p\alpha,$$
$$\Delta_7=p^2\sin^2\alpha-\sin^2 p(\pi-\alpha),$$
$$\Delta_8=p\sin 2\beta\sin 2p(\alpha-\theta)+2\sin^2 p(\alpha-\theta)\cos 2\theta+$$
$$+2\sin p(\alpha+\theta)\sin p(\alpha-\theta),$$
$$e=\frac{E_1}{E_2}\frac{1+\nu_2}{1+\nu_1},\;\kappa_i=3-4\nu_i,$$

$\Gamma(p)$ – гамма-функція Ейлера.

Згідно з формулою (6) довжина зони передруйнування нелінійно зростає зі збільшенням зовнішнього навантаження, яке входить у рівняння для довжини через множник *C*. Крім того, довжина зони передруйнування тим більша, чим менший опір відриву матеріалу σ_i.

В якості критерію вибору напрямку поширення зони передруйнування використано умову максимуму інтенсивності вивільнення пружної енергії. Вираз для потенціальної енергії, накопиченої у зоні, має вигляд:

$$W_i=-\frac{4\sigma_i^2(1-\nu_i^2)\lambda}{\pi E_i(2+\lambda)}\left(\frac{|C|\sqrt{\pi}\Gamma(1+\lambda)}{2\sigma_i\Gamma(1,5+\lambda)}\right)^{-\frac{2}{\lambda}}w_i(\beta_i), \tag{7}$$

$$w_i(\theta)=\left[\frac{|F_i(\theta)|I_i(0,\theta)^{1+\lambda}}{I_i(\lambda,\theta)}\right]^{-\frac{2}{\lambda}}.$$

З (7) випливає наступна умова визначення очікуваного напрямку поширення зони передруйнування:

$$w_i(\beta_i)=\max. \tag{8}$$

Порівняємо значення накопиченої у зонах потенціальної енергії у кожному з матеріалів з'єднання. Відношення цих потенціальних енергій, а також довжин зон передруйнування дорівнюють:

$$\frac{W_1}{W_2}=\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^{-2(\lambda+1)/\lambda}Z,\quad \frac{l_1}{l_2}=\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^{-1/\lambda}X, \tag{9}$$

$$Z=\frac{1-\nu_1}{e(1-\nu_2)}\left[\frac{|F_1(\lambda,\beta_1)|I_1(0,\beta_1)^{1+\lambda}I_2(\lambda,\beta_2)}{|F_2(\lambda,\beta_2)|I_2(0,\beta_2)^{1+\lambda}I_1(\lambda,\beta_1)}\right]^{-\frac{2}{\lambda}},$$

$$X = \left[\frac{\left|F_1(\lambda,\beta_1)\right| I_1(0,\beta_1) I_2(\lambda,\beta_2)}{\left|F_2(\lambda,\beta_2)\right| I_2(0,\beta_2) I_1(\lambda,\beta_1)} \right]^{-\frac{1}{\lambda}}.$$

В таблиці представлені результати числових розрахунків залежності від кута розхилу межі поділу середовищ 2α кутів нахилу зон передруйнування в кожному з матеріалів та множників X і Z, які визначають відношення довжин і накопичених в зонах енергій. Розрахунки виконані при відношеннях модулів Юнґа середовищ $E_1/E_2 = 0,2$ (ліва частина таблиці) та $E_1/E_2 = 5$ (права частина таблиці) і однакових значеннях їхніх коефіцієнтів Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0,25$.

Параметри зони передруйнування

$2\alpha°$	β_1	$\beta_2°$	X	Z	β_1	$\beta_2°$	X	Z
20	38	10	0,979	1,425	10	0	0,972	0,971
40	53,7	20	1,142	2,031	20	0	0,893	0,893
60	59,2	30	1,116	1,838	30	0	0,795	0,778
80	60,2	40	1,002	1,354	40	0	0,684	0,634
100	60,6	50	0,945	1,090	50	0	0,560	0,469
120	62	60	0,966	1,002	60	0	0,424	0,293
140	70	49,8	0,730	0,870	70	0	0,281	0,137
160	80	25,1	0,368	0,450	80	0	0,145	$3,781 \cdot 10^{-2}$
180	90	2,4	0,125	$9,011 \cdot 10^{-2}$	131	0	0,103	$1,838 \cdot 10^{-2}$
200	100	0	$3,273 \cdot 10^{-2}$	$7,498 \cdot 10^{-3}$	133,3	0	$9,770 \cdot 10^{-2}$	$1,691 \cdot 10^{-2}$
220	110	0	$7,922 \cdot 10^{-3}$	$5,374 \cdot 10^{-4}$	137,4	0	$7,253 \cdot 10^{-2}$	$1,018 \cdot 10^{-2}$
240	120	0	$2,286 \cdot 10^{-3}$	$5,654 \cdot 10^{-5}$	142,9	0	$3,915 \cdot 10^{-2}$	$3,520 \cdot 10^{-3}$
260	130	0	$6,807 \cdot 10^{-4}$	$6,675 \cdot 10^{-6}$	149,9	0	$1,353 \cdot 10^{-2}$	$5,600 \cdot 10^{-4}$
280	140	0	$1,704 \cdot 10^{-4}$	$6,130 \cdot 10^{-7}$	157,9	3,5	$2,386 \cdot 10^{-3}$	$2,859 \cdot 10^{-5}$
300	150	0	$2,964 \cdot 10^{-5}$	$3,184 \cdot 10^{-8}$	150	4,5	$8,564 \cdot 10^{-4}$	$2,841 \cdot 10^{-6}$
320	160	0	$2,596 \cdot 10^{-6}$	$5,763 \cdot 10^{-10}$	160	3,2	$3,730 \cdot 10^{-4}$	$1,106 \cdot 10^{-6}$
340	170	0	$4,274 \cdot 10^{-8}$	$8,323 \cdot 10^{-13}$	170	0,8	$1,666 \cdot 10^{-5}$	$9,598 \cdot 10^{-9}$

Аналіз приведених в таблиці результатів розрахунків показує, що при рівності опорів відриву з'єднаних матеріалів ($\sigma_1 = \sigma_2$) у випадку $E_1 < E_2$ і кутах розхилу межі поділу середовищ $2\alpha \le 120°$ маємо $W_1 > W_2$, що у відповідності з прийнятим енергетичним критерієм припускає утворення двох симетричних бічних зон передруйнування в першому матеріалі, тоді як при кутах розхилу $120° < 2\alpha < 180°$ перевагу слід надати утворенню двох бічних зон у другому матеріалі під кутом β_2.

При кутах розхилу $2\alpha > 180°$ тріщина після перетину межі поділу буде поширюватись в початковому напрямку по бісектрисі кута розхилу середовищ ($\beta_2 = 0°$). Такий же висновок випливає з правої частини таблиці у випадку, коли $E_1 > E_2$ і має великий опір відриву ($\sigma_1 > \sigma_2$), в той же час при $\sigma_1 < \sigma_2$ і невеликих кутах розхилу межі поділу середовищ існує можливість поширення тріщини вздовж межі поділу середовищ зі сторони першого матеріалу ($\beta_1 = \alpha$) або відхилення в перший матеріал ($\beta_1 > \alpha$), якщо тільки буде виконуватись умова $W_1 > W_2$.

1. *Zak A.R.*, *Williams M.L.* Crack point stress singularities at bi-material interface // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. – 1963. – **30**, № 1. – P. 142–143.
2. *Боджи*. Плоская статическая задача о нагруженной трещине, заканчивающейся на границе раздела двух материалов // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика. – 1965. – **32**, № 2. – С. 186–192.
3. *Кулиев В.Д., Работнов Ю.Н., Черепанов Г.П.* О торможении трещины на границе раздела различных упругих сред // Изв. АН СССР, Механика тв. тела. – 1978. – № 4. – С. 120–128.
4. *Chen S.*, *Wang T., Kao-Walter S.* Finite boundary effects in problem of a crack perpendicular to and terminating at a bimaterial interface // Acta Mech. Sinica. – 2005. – **21**. – P. 56–64.
5. *Zhang Z.*, *Suo Z.* Split singularities and the competition between crack penetration and debond at a bimaterial interface // Int. J. of Solids and Structures. – 2007. – **44**. – P. 4559–4573.
6. *Панасюк В.В., Саврук М.П.* Модель смуг пластичності в пружно-пластичних задачах механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – **28**, № 1. – С. 49–68.
7. *Каминский А.А., Кипнис Л.А., Колмакова В.А., Дудик М.В.* О зоне предразрушения в конце трещины, выходящей на границу раздела упругих сред // Доповіді НАН України. – 2006. – № 7. – С. 43–46.
8. *Камінський А. О., Кіпніс Л. А., Дудик М. В., Діхтяренко Ю. В.* Дослідження зони передруйнування у кінці тріщини нормального відриву, що виходить на негладку межу розділу пружних середовищ // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 4. – С. 111–119.
9. *Каминский А.А., Дудик М.В., Дякон В.Н.* О поведении напряжений вблизи конца трещины, выходящей на границу раздела различных сред // Теор. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 32. – С. 103–108.