

Дудик М.В.

Діхтяренко Ю.В.

ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

Навчальний посібник

для студентів вищих навчальних закладів

фізико-математичних спеціальностей

Умань 2015

УДК 537 (075.8)

ББК 22.313я73

E50

Рецензенти:

Краснобокий Ю.М., кандидат фізико-математичних наук, доцент

Побережець І.І., кандидат фізико-математичних наук, доцент

*Рекомендовано до друку Вченою радою фізико-математичного факультету
Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини
(протокол № 5 від 18.12.2014 р.)*

Укладачі: Дудик М.В., Діхтяренко Ю.В.

E50 Електродинаміка (курс лекцій): навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів фізико-математичних спеціальностей. – Умань: ПП «Жовтий», 2015. – 120 с.

© Дудик М.В., Діхтяренко Ю.В.

© СПД Жовтий, 2015

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	5
Пояснювальна записка.....	6
Структура навчальної дисципліни.....	6
Теми індивідуального навчального дослідження	6
Методи і критерії оцінювання	7
Розподіл балів, які отримують студенти.....	8
Шкала оцінювання: національна та ЄКТС	8
Рекомендована література	9
МОДУЛЬ I. ТЕОРІЯ ЕМП У ВАКУУМІ.....	10
§1. Експериментальні основи класичної електродинаміки. Основні властивості електромагнітної взаємодії.....	10
§2. Рівняння руху зарядженої частинки в ЕМП.....	11
§3. Калібровочні перетворення потенціалів.....	13
§4. Тензор електромагнітного поля.....	14
§5. Перетворення напруженостей ЕМП.....	15
§6. Інваріанти ЕМП.....	17
§7. Перша пара рівнянь Максвелла	18
§8. Густина електричного струму.....	19
§9. Дія для електромагнітного поля	21
§10. Вивід другої пари рівнянь Максвелла.....	22
§11. Тривимірна форма другої пари рівнянь Максвелла	23
§12. Системи одиниць вимірювань електричних і магнітних величин.....	24
§13. Енергія електромагнітного поля.....	25
§14. Закон збереження імпульсу в ЕМП.....	27
§15. Граничні умови для векторів ЕМП	28
§16. Єдиність розв'язку рівнянь Максвелла.....	30
§17. Рівняння для електромагнітних потенціалів	31
МОДУЛЬ II. СТАЦІОНАРНЕ ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ ...	33
§18. Постійне електричне поле у вакуумі.....	33
§19. Електростатичне поле системи точкових зарядів.....	34
§20. Потенціал на великих відстанях від системи зарядів.....	35
§21. Електростатична енергія зарядів	38
§22. Класичний радіус електрона. Перенормування	39
§23. Електроємність провідників.....	41
§24. Постійне магнітне поле у вакуумі	42
§25. Сила Ампера	44
§26. Магнітне поле системи стаціонарних струмів на великих відстанях. Магнітний момент.....	45
§27. Енергія струму в постійному магнітному полі	48
МОДУЛЬ III. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ (ЕМХ) У ВАКУУМІ	50
§28. Хвильове рівняння і його розв'язок	50
§29. Плоска монохроматична хвиля.....	51
§30. Властивості плоскої монохроматичної хвилі.....	52
§31. Потенціали, що запізнюються. Дипольне випромінювання.....	54
§32. Інтенсивність дипольного випромінювання	56
§33. Дипольний осцилятор.....	57

§34. Електромагнітне поле рухомого заряду.....	58
§35. Радіаційне тертя.....	60
§36. Ефект Вавілова-Черенкова.....	62
§37. Розсіяння ЕМХ вільними зарядами.....	63
§38. Немонохроматичні хвилі.....	65
МОДУЛЬ IV. ЕЛЕКТРОДИНАМІКА СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ.....	67
§39. Усереднення рівнянь Максвела.....	67
§40. Рівняння ЕМП у середовищі.....	68
§41. Енергія ЕМП у середовищі.....	71
§42. Поширення ЕМХ у середовищі.....	73
§43. Дисперсія і абсорбція ЕМХ.....	73
§44. Поляризація неполярних діелектриків.....	75
§45. Поляризація полярних діелектриків.....	76
§46. Класифікація магнетиків.....	77
§47. Класична теорія парамагнетизму.....	78
§48. Феромагнетизм.....	79
§49. Класична теорія електропровідності металів.....	80
§50. Труднощі класичної електронної теорії.....	81
§51. Ефект Холла.....	83
§52. Електромагнітні властивості надпровідників.....	84
§53. Теорія Лондонів.....	85
§54. Квазістаціонарні струми.....	86
§55. Змінний квазістаціонарний струм у замкнутому колі.....	88
§56. Змінний квазістаціонарний струм у незамкнутому колі.....	88
§57. Вимушені електромагнітні коливання.....	89
§58. Вільні електромагнітні коливання.....	90
§59. Скін-ефект.....	90
§60. Трансформатор.....	92
§61. Відбивання і заломлення ЕМХ.....	93
§62. Формули Френеля.....	94
§63. Коефіцієнт відбивання.....	95
§64. Екранування поля заряду в електролітах і плазмі.....	96
§65. Плазмові коливання.....	100
§66. Фазова і групова швидкості.....	101
§67. Телеграфне рівняння.....	102
§68. Швидкозмінні струми вздовж ліній.....	103
§69. Поширення електромагнітних хвиль у хвилеводах.....	105
ПИТАННЯ МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ.....	108
ПИТАННЯ ДО ЕКЗАМЕНУ З ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ.....	117

ПЕРЕДМОВА

Електродинаміка є складовою частиною курсу теоретичної фізики, що складає основу всього природознавства і відіграє в педагогічному вузі визначальну роль у завершенні підготовки майбутнього вчителя фізики, формуванні у нього в процесі навчання цілісних уявлень про сучасну фізичну картину світу.

В навчальному плані підготовки вчителя фізики курс електродинаміки стоїть після вивчення розділів „Механіка” та „Електрика і магнетизм” курсу загальної фізики, математичного аналізу, аналітичної геометрії, алгебри, методів математичної фізики та розділу „Класична механіка” курсу теоретичної фізики.

Курс електродинаміки розроблений для студентів 3-го року навчання, володіючих диференціальним та інтегральним численням і векторною алгеброю, основами векторного аналізу. Він з самого початку будується як послідовна релятивістська теорія. Це передбачає, що студенти вивчили основи спеціальної теорії відносності. Рівняння руху заряджених частинок у електромагнітному полі та друга пара рівнянь Максвела видяться з принципу найменшої дії. Відповідно до того, як прийнято в теоретичній фізиці, викладання курсу ведеться в гаусовій системі одиниць.

Даний посібник призначений для самостійної роботи студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів. Посібник розроблено відповідно до вимог кредитно-модульної системи навчання і базується на багаторічному досвіді викладання дисципліни «Електродинаміка» на фізико-математичному факультеті Уманського державного педагогічного університету. Він складений відповідно до діючого державного стандарту напряму підготовки 6.040203 Фізика* і узгоджений з навчальною програмою курсу теоретичної фізики.

Посібник містить загальну інформацію про зміст курсу класичної механіки, вимоги до знань і вмінь, які мають набути студенти по завершенню вивчення курсу, відомості про структуру залікового кредиту, теми навчально-дослідних завдань тощо.

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Мета та завдання навчальної дисципліни

Основною метою курсу електродинаміки є вияснення фізичного змісту основних понять і положень теорії електромагнітного поля. В зв'язку з цим технічним застосуванням теорії електромагнітного поля відведена допоміжна роль, і кількість прикладних питань є невеликою.

По завершенню вивчення електродинаміки студенти повинні:

знати: основні поняття і закони електродинаміки, рівняння Максвелла у вакуумі і в середовищі;

вміти: одержувати рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі і інтегрувати їх у випадках постійних та однорідних полів; записувати рівняння Максвелла у чотиривимірній формі; знаходити інтенсивність дипольного випромінювання заданої системи зарядів; розв'язувати рівняння електростатики і магнітостатики при заданих граничних умовах.

СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Модуль 1. Теорія електромагнітного поля (ЕМП) у вакуумі

Модуль 2. Стаціонарне електромагнітне поле у вакуумі

Модуль 3. Електромагнітні хвилі (ЕМХ) у вакуумі

Модуль 4. Електродинаміка суцільних середовищ

ІНДИВІДУАЛЬНЕ НАВЧАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ

Теми ІНД:

1. Електричне поле заряджених поверхонь
2. Провідники в електричному полі
3. Джерела електричного поля
4. Ємність конденсаторів
5. Подвійний електричний шар
6. Нестійкість електричних систем
7. Електричне поле в анізотропних діелектриках
8. Магнітне поле соленоїда
9. Тензор енергії-імпульса ЕМП
10. Магнітно-дипольне і квадрупольне випромінювання
11. Гамільтонова форма рівнянь електромагнітного поля
12. Електромагнітне поле довільно рухомого заряду
13. Випромінювання релятивістської зарядженої частинки
14. Випромінювання антен
15. Інтерференція ЕМХ і утворення хвильових пакетів
16. Розсіяння електромагнітних хвиль осцилятором
17. Поглинання випромінювання
18. Співвідношення Крамерса-Кронига
19. Дебаєвське екранування

20. Дисипація енергії ЕМП в дисперсних системах
21. Рівняння електродинаміки в рухомих середовищах
22. Сили, що діють на середовище в ЕМП
23. Сили, що діють на рідкі діелектрики у зовнішньому електричному полі
24. П'єзоелектрики і сегнетоелектрики
25. Електромагнітні хвилі в анізотропних середовищах
26. Електромагнітні хвилі у хвилеводах
27. Магнітогідродинамічний опис ЕМП в плазмі в магнітному полі
28. Проходження ЕМХ через гіротропні середовища
29. Поширення жорсткого випромінювання в кристалах
30. Перехідне випромінювання
31. Нелінійна поляризація
32. Класичні моделі нелінійної сприйнятливості
33. Електромагнітний момент кількості руху
34. Електромагнітні хвилі вздовж кабелю
35. Наближена теорія швидкозмінних струмів (Рівняння „телеграфіста”)
36. Гістерезис у феромагнетиках
37. Поляризація і намагнічування рухомих середовищ
38. Закон Ома і електромагнітна індукція в рухомих середовищах
39. Рух діелектрика в електромагнітному полі
40. Поширення світла в рухомих діелектриках
41. Трансформатор
42. Перетворення енергії при намагнічуванні пара- і діамагнетиків

МЕТОДИ ОЦІНЮВАННЯ: поточне оцінювання розв'язування задач на практичному занятті; модульний тестовий контроль; оцінка за ІНД (реферат); оцінка за індивідуальні домашні завдання, підсумковий контроль.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ

Модульний контроль (МК) здійснюється у вигляді аудиторних письмових робіт з кожного модулю, кожна з яких передбачає відповіді на 10 коротких теоретичних питань. Вірна відповідь на питання оцінюється у 1 бал, неточна або неповна відповідь – 0,5 бала, невірна відповідь – 0 балів.

Оцінка за кожну роботу дорівнює сумі набраних балів.

Індивідуальне навчально-дослідне завдання (ІНДЗ) полягає у домашньому розв'язанні задач з електродинаміки по варіантам та виконанні індивідуального навчального дослідження. Кожна задача оцінюється за 2-бальною системою:

2 б. – вірний розв'язок з поясненням, точними ілюстраціями, без похибок;

1,5 б. – вірний розв'язок, у якому допущені несуттєві похибки;

1 б. – вірний в цілому розв'язок, який містить грубі похибки;

0,5 б. – розв'язок невірний, але містить вірні вихідні рівняння до розв'язання.

0 б. – розв'язок невірний або відсутній.

Індивідуальне навчальне дослідження виконується за запропонованими нижче темами і стосується питань електродинаміки, які не ввійшли до лекційного курсу дисципліни. Результати дослідження подаються студентом у формі реферату і оцінюється за 10-бальною шкалою, яка враховує науковість, повноту розкриття теми, наявність посилань на першоджерела, у тому в числі в тексті, логічність і послідовність викладення матеріалу, наявність вступу і висновків, грамотність, якість оформлення.

Оцінка з ІНДЗ складається з суми балів, набраних за кожну задачу та за індивідуальне навчальне дослідження.

Підсумковий контроль проводиться у формі усного екзамену по білетам.

РОЗПОДІЛ БАЛІВ, ЯКІ ОТРИМУЮТЬ СТУДЕНТИ

Модульний контроль				ІНДЗ	Підсумк. контроль	Сума балів
Модуль 1	Модуль 2	Модуль 3	Модуль 4			
10	10	10	10	40	20	100

ШКАЛА ОЦІНЮВАННЯ: НАЦІОНАЛЬНА ТА ЄКТС

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка за національною шкалою	
	для екзамену, курсового проекту (роботи), практики	для заліку
90-100	відмінно	зараховано
82-89	добре	
75-81		
69-74		
60-68	задовільно	
35-59	незадовільно з можливістю повторного складання	не зараховано з можливістю повторного складання
1-34	незадовільно з обов'язковим повторним вивченням дисципліни	не зараховано з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Бугаєнко Г.О., Фонкич М.Є. Курс теоретичної фізики. Електродинаміка. Теорія відносності. – К.: Рад. шк., 1965. – 419 с.
2. Кушниренко А.Н. Теоретическая физика. Т.1, ч.2. – К.: Феникс, 2000. – 382 с.
3. Левич В.Г. Курс теоретической физики. Т.1. – М.: Наука, 1969. – 912 с.
4. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1989. – 504 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики. Т.2. Теория поля. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики. Т8. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 624 с.
7. Макарець М.В., Решетняк В.Ю., Романенко О.В. Задачі з класичної електродинаміки. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2005. – 151 с.
8. Мултановский В.В., Василевский А.С. Курс теоретической физики: Классическая электродинамика. – М.: Просвещение, 1990. – 270 с.
9. Алексеев А.И. Сборник задач по классической электродинамике. – М.: Наука, 1977. – 320 с.
10. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. 2-е изд. – М.: Наука, 1970. – 504 с.
11. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика. – М.: Наука, 1985. – 399 с.
12. Жирнов Н.И. Задачник-практикум по электродинамике. – М.: Просвещение, 1970. – 328 с.
13. Савельев И.В. Основы теоретической физики. Т.1. – М.: Наука, 1991. – 496 с.
14. Физика микромира. Маленькая энциклопедия. / Гл. ред. Д.В.Ширков. – М.: Советская энциклопедия, 1980. – 528 с.

МОДУЛЬ I. ТЕОРІЯ ЕМП У ВАКУУМІ

§1. Експериментальні основи класичної електродинаміки. Основні властивості електромагнітної взаємодії

В природі виявлено чотири типи фундаментальних взаємодій:

- сильна (приклад: ядерні сили між нуклонами в ядрі);
- електромагнітна;
- слабка (приклад: спричиняє β - розпад ядер, обумовлює реакції термоядерного синтезу в надрах зірок);
- гравітаційна.

Електромагнітна взаємодія (ЕМВ) – це тип фундаментальних взаємодій, який характеризується участю електромагнітного поля (ЕМП). ЕМП – особливий вид матерії, що випромінюється і поглинається при взаємодії та переносить взаємодію між тілами. Найвідомішим прикладом ЕМВ є взаємодія двох точкових зарядів, яка задовольняє закон Кулона: сила та потенціальна енергія взаємодії двох точкових зарядів q_1 та q_2 , що перебувають на відстані r один від одного, дорівнюють

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}; \quad \vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}; \quad U = k \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (1)$$

Задана в (1) залежність від відстані: $F \sim \frac{1}{r^2}$; $U \sim \frac{1}{r}$ вказує на далекодіючий характер ЕМВ, її необмежений, як і у гравітаційної взаємодії, радіус дії, на відміну від короткодійчих сильної і слабкої взаємодій. Тому вже на атомних відстанях ($\sim 10^{-10}$ м) електромагнітні сили перевищують ядерні, радіус дії яких $\sim 10^{-15}$ м.

На відміну від гравітаційної взаємодії, при якій тіла завжди тільки притягуються, ЕМВ може приводити як до притягання, так і до відштовхування між зарядженими тілами. Це відповідає існуванню двох різнойменних електричних зарядів: позитивного і негативного, причому різнойменні заряди притягуються, однойменні – відштовхуються. Вільні магнітні заряди (“магнітні монополі” або “монополі Дірака”) в природі не виявлені.

ЕМВ відповідає за існування основних “цеглин” речовини – атомів і молекул, і визначає взаємодію позитивно заряджених ядер і негативно заряджених електронів у цих мікросистемах. Тому до ЕМВ відноситься більшість сил, що проявляються в макроскопічній фізиці: сили тертя, пружності, поверхневого натягу тощо.

ЕМВ визначає властивості речовини у різних агрегатних станах, її електричні, магнітні і оптичні властивості, хімічні перетворення. Прояви ЕМВ широко використовуються в електро- і радіотехніці, електроніці, оптиці, квантовій електроніці (лазерах), побуті.

Явища, в яких беруть участь слабкі ЕМП, енергія яких значно менша за енергію спокою взаємодіючих частинок ($E \ll mc^2$), або повільно-змінні ЕМП, які характеризуються енергією фотонів, набагато меншою за енергію спокою частинок ($E = h\nu \ll mc^2$), описуються рівняннями Максвелла, які складають

основу класичної електродинаміки. Для сильних ($E \geq mc^2$) або швидкозмінних ($h\nu \geq mc^2$) полів основними є квантові явища з участю фотонів, які описуються квантовою електродинамікою. Великою, що характеризує інтенсивність ЕМВ, є електричний заряд. Заряд є дискретною величиною, кратною елементарному заряду: $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$. Інтенсивність ЕМП в мікросвіті прийнято характеризувати безрозмірною величиною α , яка називається сталою тонкої структури: $\alpha = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 hc} \approx \frac{1}{137}$. Для замкнутих систем виконується закон збереження електричного заряду:

Повний електричний заряд замкнутої системи частинок є величиною, що зберігається у будь-яких процесах.

Той факт, що електричний заряд визначає силу взаємодії і в той же час є величиною, яка зберігається – це унікальна властивість ЕМВ. Через це ЕМВ записується однаково для тіл і частинок різної природи, для різних електромагнітних явищ і процесів, тобто залежить тільки від електричного заряду. Цю властивість називають універсальністю ЕМВ.

§2. Рівняння руху зарядженої частинки в ЕМП

Для отримання рівнянь руху зарядженої частинки в ЕМП будемо виходити із принципу найменшої дії, представивши дію для зарядженої частинки в ЕМП у вигляді суми:

$$S = S_{\text{вільн}} + S_{\text{вз}}, \quad (1)$$

де $S_{\text{вільн}}$ – дія вільної частинки; $S_{\text{вз}}$ – дія, що відповідає взаємодії частинки з ЕМП. З курсу класичної механіки релятивістський вираз для дії вільної частинки має вигляд:

$$S_{\text{вільн}} = -\int mcds = -\int_{t_1}^{t_2} mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \quad (2)$$

Що стосується $S_{\text{вз}}$, то вона повинна містити як величини, які характеризують частину (заряд e та 4-вимірний вектор переміщення dx^i : $S_{\text{вз}} \sim e \cdot dx^i$), так і величини, які характеризують ЕМП. Оскільки $S_{\text{вз}}$ має бути 4-скаляром, то величина, яка характеризує поле, має бути 4-вектором і входити в $S_{\text{вз}}$ у вигляді скалярного добутку з вектором dx^i . Тому для опису ЕМП вводиться чотиривимірний коваріантний вектор A_i , який називають 4-потенціалом ЕМП, а дію $S_{\text{вз}}$ представляють у вигляді

$$S_{\text{вз}} = -\frac{1}{c} \int e A_i dx^i. \quad (3)$$

Коваріантному вектору A_i ставиться у відповідність контраваріантний вектор A^i за допомогою співвідношень:

$$A_i \rightarrow A^i; A_0 = A^0; A_1 = -A^1; A_2 = -A^2; A_3 = -A^3.$$

Часову компоненту 4-потенціала ЕМП називають скалярним потенціалом і позначають φ : $A_0 = A^0 = \varphi$. Просторові компоненти 4-потенціала ЕМП утворюють звичайний тривимірний вектор \vec{A} з

компонентами: $A^1 = A_x$; $A^2 = A_y$; $A^3 = A_z$, який називають векторним потенціалом поля. Таким чином:

$$A^i(\varphi, \vec{A}), \quad A_i(\varphi, -\vec{A}), \quad (4)$$

причому потенціали φ та \vec{A} є функціями координат і часу.

Згідно (4) та $dx^i(cdt, d\vec{r})$ отримаємо $A_i dx^i = \varphi cdt - A_x dx - A_y dy - A_z dz = \varphi cdt - \vec{A} \cdot d\vec{r}$. Тоді (3) прийме вигляд:

$$S_{\text{вз}} = -\frac{e}{c} \int (\varphi cdt - \vec{A} d\vec{r}) = -e \int \left(\varphi - \frac{1}{c} \vec{A} \frac{d\vec{r}}{dt} \right) dt = -e \int_{t_1}^{t_2} \left(\varphi - \frac{\vec{v}}{c} \vec{A} \right) dt, \quad (5)$$

де враховано, що похідна $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ означає швидкість частинки.

Підставляючи (5) і (2) в (1), отримаємо вираз для повної дії

$$S = -\int_{t_1}^{t_2} \left(mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + e\varphi - \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (6)$$

з функцією Лагранжа зарядженої частинки в ЕМП:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\varphi + \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}. \quad (7)$$

Підставляючи (7) у рівняння Лагранжа $\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$, отримаємо

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \vec{A} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A};$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{e}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \right); \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -e\vec{\nabla} \varphi + \frac{e}{c} \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{A}).$$

Для обчислення похідної по координатам скористаємось тотожністю

$$\vec{v} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}] =$$

$= \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$, в якій враховано, що $\vec{\nabla}$ не діє на \vec{v} . Тоді

$$\vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{A}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{v} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}],$$

$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -e\vec{\nabla} \varphi + \frac{e}{c} \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{A}) = -e\vec{\nabla} \varphi + \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \frac{e}{c} \vec{v} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}]$, і остаточно рівняння

Лагранжа:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + e\vec{\nabla} \varphi - \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - \frac{e}{c} \vec{v} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}],$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e\vec{\nabla} \varphi - \frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c} \vec{v} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}]. \quad (8)$$

(8) – це і є розшукуване рівняння руху зарядженої частинки в ЕМП. В ньому

використано оператор “набла” $\vec{\nabla} \equiv \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)$ і введено поняття

градієнта скалярного поля:

$$\vec{\nabla} \varphi = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \text{grad } \varphi \quad (9)$$

та ротора векторного поля

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \text{rot } \vec{A}. \quad (10)$$

Завдяки (9) і (10) рівняння руху частинки (8) набуде вигляду:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e \text{grad } \varphi - \frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \text{rot } \vec{A} = \vec{F}_L, \quad (11)$$

де F_L - так звана сила Лоренца, яка діє на заряджену частинку з боку ЕМП. З іншого боку, ЕМП характеризується також векторами напруженостей електричного поля \vec{E} і магнітного поля \vec{H} , які входять у силу F_L згідно формули Лоренца:

$$\vec{F}_L = \vec{F}_{el} + \vec{F}_{магн} = e \cdot \vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H}. \quad (12)$$

Порівнюючи (11) і (12), знаходимо зв'язок між напруженостями і потенціалами:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (13)$$

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}. \quad (14)$$

§3. Калібровочні перетворення потенціалів

Згідно (2.13) і (2.14):

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A}. \quad (1)$$

Розглянемо наступне перетворення векторного потенціалу:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \chi, \quad (2)$$

де $\chi = \chi(\vec{r}, t)$ - довільна диференційована скалярна функція координат і часу.

Знайдемо відповідаючу потенціалу \vec{A}' напруженість магнітного поля $\vec{H}' = \text{rot } \vec{A}'$; підставивши сюди (2), отримаємо $\vec{H}' = \text{rot } \vec{A}' = \text{rot}(\vec{A} + \text{grad } \chi) = \text{rot } \vec{A} + \text{rot } \text{grad } \chi = \text{rot } \vec{A} = \vec{H}$.

Отже, перетворення (2) не змінює напруженість магнітного поля. Але, якщо зробити тільки це перетворення і не змінити φ , то зміниться напруженість електричного поля \vec{E} . Щоб вектор \vec{E} також не змінювався при перетворенні (2), необхідно перетворити і скалярний потенціал φ за формулою:

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (3)$$

Дійсно:

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= -\text{grad } \varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\text{grad} \left(\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \text{grad } \chi) = \\ &= -\text{grad } \varphi + \frac{1}{c} \text{grad } \frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \chi = \vec{E}. \end{aligned}$$

Отже, напруженості \vec{H} і \vec{E} є інваріантами відносно перетворень потенціалів (2) і (3), які називаються калібровочними або градієнтними перетвореннями. Ці перетворення можна представити у 4-вимірній формі:

$$A'_i = A_i - \frac{\partial \chi}{\partial x^i}. \quad (4)$$

Таким чином, одним і тим же напруженостям електромагнітного поля \vec{H} і \vec{E} відповідає широкий клас електромагнітних потенціалів, зв'язаних формулами (2) і (3). Ця властивість ЕМП називається калібровочною інваріантністю.

В класичній електродинаміці вимірюваними характеристиками електромагнітного поля є напруженості \vec{E} і \vec{H} , а потенціали виступають як допоміжні функції, з яких напруженості отримуються диференціюванням за формулами (2.13) і (2.14). Калібровочна інваріантність приводить до того, що електромагнітне поле однозначно визначає вектори напруженості полів, але залишає певну довільність у потенціалах. Але, незважаючи на те, що потенціали не є основними величинами в електродинаміці, вони відіграють важливу роль, тому що вони дозволяють зменшити число невідомих функцій, які описують електромагнітне поле, з шести: $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$, до чотирьох: A_x, A_y, A_z, φ .

Особливо велике значення електромагнітні потенціали набувають у квантовій механіці і при квантово-механічному описі ЕМП. Саме потенціали, а не напруженості входять в більшість рівнянь квантової механіки і квантової електродинаміки.

§4. Тензор електромагнітного поля

Враховуючи тензорні позначення

$$ct = x^0, x = x^1, y = x^2, z = x^3; \quad \varphi = A^0 = A_0, A_x = A^1 = -A_1, A_y = A^2 = -A_2, A_z = A^3 = -A_3, \quad (1)$$

представимо формули (3.1) у координатному вигляді:

$$\begin{cases} E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} = \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1}; & E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} = \frac{\partial A_2}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^2}; & E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} = \frac{\partial A_3}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^3}; \\ H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_2}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^2}; & H_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3}; & H_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_1}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^1}. \end{cases} \quad (2)$$

Вирази (2) нагадують тензор 2-го роду виду $a_i b_k - b_i a_k$, де a_i і b_k – коваріантні компоненти довільних векторів, якщо в якості b_k розглядати 4-вимірний потенціал ЕМП A_k , а в якості a_i – 4-вимірний диференціальний оператор $\frac{\partial}{\partial x^i}$ – аналог оператора “набла” (див. §2):

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right). \quad (3)$$

З урахуванням (2) і (3) введемо антисиметричний тензор другого рангу, який представимо у вигляді

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = -F_{ki}. \quad (4)$$

Його називають тензором електромагнітного поля. Порівнюючи (2) і (4), знайдемо зв'язок між компонентами напруженостей і тензора ЕМП:

$$\begin{aligned} E_x = F_{01} = -F_{10}; & & H_x = F_{32} = -F_{23}; \\ E_y = F_{02} = -F_{20}; & & H_y = F_{13} = -F_{31}; \end{aligned}$$

$$E_z = F_{03} = -F_{30};$$

$$H_z = F_{21} = -F_{12}.$$

Отже, компоненти векторів \vec{E} і \vec{H} можна трактувати як компоненти тензора електромагнітного поля F_{ik} . Якщо в F_{ik} i – номерує стрічки, а k – стовпчики, то тензор F_{ik} можна представити у вигляді матриці:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}; \quad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

В (5) наряду з коваріантним тензором ЕМП F_{ik} введено також контраваріантний тензор F^{ik} , компоненти якого визначались за правилом: підняття часового індексу (0) не змінює, а просторового (1, 2, 3) змінює знак компоненти.

В той час, коли 4-потенціал A_i визначається неоднозначно, компоненти F_{ik} виявляються однозначними. Дійсно, якщо в (4) підставити вираз калібровочного перетворення (3.4) $A'_i = A_i - \frac{\partial \chi}{\partial x^i}$, отримаємо:

$$F'_{ik} = \frac{\partial A'_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A'_i}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(A_k - \frac{\partial \chi}{\partial x^k} \right) - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(A_i - \frac{\partial \chi}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^k \partial x^i} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = F_{ik}$$

тобто $F'_{ik} = F_{ik}$, що й треба було довести.

§5. Перетворення напруженостей ЕМП

Знайдемо, як змінюються компоненти векторів напруженостей полів \vec{E} і \vec{H} при переході від однієї ІСВ (К) до іншої (К'), тобто при перетвореннях Лоренца:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

які в тензорному 4-вимірному представленні мають вигляд:

$$x^0 = \frac{x'^0 + \frac{v}{c} x'^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad x^1 = \frac{x'^1 + \frac{v}{c} x'^0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad x^2 = x'^2; \quad x^3 = x'^3. \quad (1)$$

Перетворення (1) зручно представити за допомогою матриці перетворень a_k^i :

$$x^i = a_k^i \cdot x'^k, \quad a_k^i = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & 0 \\ \alpha\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (2)$$

(Дійсно, розглянемо для прикладу перетворення часової компоненти радіус-

вектора: $x^0 = a_k^0 \cdot x^k = a_0^0 x^0 + a_1^0 x^1 + a_2^0 x^2 + a_3^0 x^3 = \alpha x^0 + \alpha \beta x^1 = \frac{x^0 + \frac{v}{c} x^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, що співпадає з

(1.)

Згідно із загальним визначенням тензор 2-го рангу F^{ik} є величиною, компоненти якої при переході від однієї ІСВ до іншої перетворюються подібно до добутку двох 4-векторів. Тому, використовуючи (2), представимо перетворення компонент тензора ЕМП у вигляді:

$$F^{ik} = a_m^i \cdot a_n^k \cdot F'^{mn}. \quad (3)$$

Враховуючи зв'язок між компонентами тензора ЕМП і векторів напруженостей (4.5), отримаємо формулу перетворення, наприклад, для компонентів поля E_x та E_y :

$$\begin{aligned} E_x = F^{10} &= a_m^1 \cdot a_n^0 \cdot F'^{mn} = a_0^1 a_n^0 F'^{0n} + a_n^1 a_0^0 F'^{n0} = a_0^1 a_1^0 F'^{01} + a_1^1 a_0^0 F'^{10} = \\ &= -\alpha^2 \beta^2 E_x' + \alpha^2 E_x' = \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2} E_x' = E_x'; \end{aligned}$$

$$E_y = F^{20} = a_m^2 \cdot a_n^0 \cdot F'^{mn} = a_2^0 a_n^0 F'^{2n} = a_0^2 F'^{20} + a_1^0 F'^{21} = \alpha E_y' + \alpha \beta H_z' = \frac{E_y' + \beta H_z'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

і т.д. Таким же способом отримуємо формули перетворень для всіх компонентів електричного і магнітного полів:

$$E_x = E_x'; \quad E_y = \frac{E_y' + \frac{v}{c} H_z'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad E_z = \frac{E_z' - \frac{v}{c} H_y'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad H_x = H_x'; \quad H_y = \frac{H_y' - \frac{v}{c} E_z'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad H_z = \frac{H_z' + \frac{v}{c} E_y'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (4)$$

Ці формули можна подати у вигляді, що не залежить від вибору осей координат:

$$E_{\parallel} = E_{\parallel}', \quad \vec{E}_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp}' - \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H}_{\perp}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad H_{\parallel} = H_{\parallel}', \quad \vec{H}_{\perp} = \frac{\vec{H}_{\perp}' + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{E}_{\perp}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (5)$$

де символами \parallel і \perp позначені компоненти полів, паралельні і перпендикулярні вектору швидкості.

Формули (4) показують, що напруженості електричного і магнітного полів, як і більшість фізичних величин, є відносними, тобто їх значення залежить від вибору системи відліку. В нерелятивістському випадку

($v \ll c, \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1$) формули (4) переходять в

$$\begin{aligned} E_x &= E_x'; \quad E_y = E_y' + \frac{v}{c} H_z'; \quad E_z = E_z' - \frac{v}{c} H_y'; \\ H_x &= H_x'; \quad H_y = H_y' - \frac{v}{c} E_z'; \quad H_z = H_z' + \frac{v}{c} E_y'. \end{aligned} \quad (6)$$

Формули (5) зручно представити у векторному вигляді:

$$\vec{E} = \vec{E}' + \frac{1}{c}[\vec{H}' \times \vec{v}]; \quad \vec{H} = \vec{H}' - \frac{1}{c}[\vec{E}' \times \vec{v}]. \quad (7)$$

Формули зворотних перетворень отримуються з (4-7) перестановкою штриха та заміною знаку при швидкості.

З формул (7) випливає ряд цікавих наслідків:

1) Якщо в ІСВ K' магнітне поле відсутнє, тобто $\vec{H}' = 0$, то з (7) випливає, що в ІСВ K існує наступний зв'язок між магнітним і електричним полем:

$$\vec{H} = -\frac{1}{c}[\vec{E} \times \vec{v}] = \frac{1}{c}[\vec{v} \times \vec{E}]. \quad (8)$$

2) Аналогічно, якщо в ІСВ K' електричне поле відсутнє: $\vec{E}' = 0$, то в ІСВ K маємо

$$\vec{E} = \frac{1}{c}[\vec{H} \times \vec{v}]. \quad (9)$$

Отже, в обох випадках електричне і магнітне поля є взаємно ортогональними. Ці твердження мають також і зворотну силу: якщо в деякій ІСВ K поля \vec{E} і \vec{H} взаємно перпендикулярні (але не рівні за величиною), то існує така ІСВ K' , в якій електромагнітне поле чисто електричне або чисто магнітне, причому швидкість \vec{v} системи K' по відношенню до системи K перпендикулярна до \vec{E} і \vec{H} .

§6. Інваріанти ЕМП

З векторів напруженості електричного і магнітного полів можна скласти інваріантні величини, тобто величини, які залишаються незмінними при переході від однієї ІСВ до іншої. Розглянемо вираз:

$\vec{H}^2 - \vec{E}^2 = (H_x^2 + H_y^2 + H_z^2) - (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) =$ [замінімо компоненти векторів \vec{H} і \vec{E} штрихованими компонентами, скориставшись формулами (5.4)]=

$$\begin{aligned} &= H_x'^2 + \frac{\left(H_y' - \frac{v}{c}E_z'\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{\left(H_z' + \frac{v}{c}E_y'\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - E_x'^2 - \frac{\left(E_y'^2 + \frac{v}{c}H_z'\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\left(E_z' - \frac{v}{c}H_y'\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \\ &= H_x'^2 - E_x'^2 + \frac{H_y'^2 + \frac{v^2}{c^2}E_z'^2 + H_z'^2 + \frac{v^2}{c^2}E_y'^2 - E_y'^2 - \frac{v^2}{c^2}H_z'^2 - E_z'^2 - \frac{v^2}{c^2}H_y'^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \\ &= H_x'^2 - E_x'^2 + H_y'^2 - E_y'^2 + H_z'^2 - E_z'^2 = \vec{H}'^2 - \vec{E}'^2. \end{aligned}$$

Отже, величина $\vec{H}^2 - \vec{E}^2$ має однакове значення в усіх ІСВ, тобто є інваріантом:

$$\vec{H}^2 - \vec{E}^2 = Inv. \quad (1)$$

Аналогічно доказується, що $\vec{E} \cdot \vec{H} = E_x H_x + E_y H_y + E_z H_z = \vec{E}' \cdot \vec{H}'$, тобто, скалярний добуток векторів \vec{H} і \vec{E} є інваріантом:

$$\vec{E} \cdot \vec{H} = Inv. \quad (2)$$

Інваріанти (1) і (2) пов'язані з тензором ЕМП. Так, наприклад:

$$\begin{aligned} F_{ik} \cdot F^{ik} &= F_{00}F^{00} + F_{01}F^{01} + \dots + F_{32}F^{32} + F_{33}F^{33} = -E_x^2 - E_y^2 - \dots + H_x^2 = \\ &= 2(H_x^2 + H_y^2 + H_z^2) - 2(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) = 2(\vec{H}^2 - \vec{E}^2) = Inv. \end{aligned} \quad (3)$$

Введемо абсолютно антисиметричний тензор ε^{iklm} , у якого компоненти дорівнюють ± 1 в залежності від того, парним чи непарним числом перестановок може бути отримана дана послідовність індексів i, k, l, m із послідовності 0, 1, 2, 3:

$$\varepsilon^{0123} = 1; \varepsilon^{1023} = -1; \varepsilon^{1032} = 1; \dots$$

Обчислимо вираз:

$$\varepsilon^{iklm} F_{ik} F_{lm} = \varepsilon^{0123} F_{01} F_{23} + \dots = -E_x H_x - \dots = -8(E_x \cdot H_x + E_y \cdot H_y + E_z \cdot H_z) = -8\vec{E} \cdot \vec{H};$$

отже

$$\varepsilon^{iklm} F_{ik} F_{lm} = -8(\vec{E} \cdot \vec{H}) = Inv. \quad (4)$$

Із інваріантів (1) і (2) випливає ряд цікавих наслідків:

1. Якщо в деякій ІСВ $\vec{E} \perp \vec{H}$, то згідно (2) $\vec{E} \cdot \vec{H} = 0 = \vec{E}' \cdot \vec{H}'$, тобто вектори $\vec{E} \perp \vec{H}$ в усіх ІСВ.
2. Якщо $E = H$ в деякій ІСВ, то з (1) випливає, що $\vec{E}^2 - \vec{H}^2 = 0 = Inv$, тому $E = H$ в усіх ІСВ. Якщо обидва інваріанти дорівнюють нулю, то в усіх ІСВ електричне і магнітне поля будуть взаємно перпендикулярні і рівними за величиною.
3. Якщо $\vec{E} \cdot \vec{H} = 0$, то можна знайти таку ІСВ, в якій дорівнює нулю одне з полів в залежності від знаку виразу $\vec{E}^2 - \vec{H}^2$. Навпаки, якщо в деякій ІСВ або \vec{E} , або \vec{H} дорівнюють нулю, то в будь-якій іншій ІСВ поля будуть ортогональними.
4. Якщо $H > E$, $H^2 - E^2 > 0$, то це співвідношення зберігається в усіх ІСВ.

§7. Перша пара рівнянь Максвела

Візьмемо вираз (2.13): $\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ і застосуємо до нього операцію

rot :

$$\text{rot } \vec{E} = -\text{rot grad } \varphi - \frac{1}{c} \text{rot } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Отже, ми отримали
$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (1)$$

Застосуємо до виразу $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$ (2.14) операцію дивергенції :

$$\text{div } \vec{H} = \text{div rot } \vec{A} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{H} = 0. \quad (2)$$

Рівняння (1) і (2) утворюють першу пару рівнянь Максвела в диференціальній формі. Проте ці 2 рівняння ще не визначають повністю і однозначно властивості ЕМП. Це видно вже з того, що вони визначають зміну з часом магнітного поля завдяки наявності похідної $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$, але не визначають похідну $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

Рівняння (1) і (2) можна написати в інтегральній формі. Проінтегруємо рівняння (2) по довільному об'єму, і застосуємо до нього теорему Остроградського-Гауса:

$$\int_V \text{div } \vec{H} dV = \oint_S \vec{H} d\vec{S} = 0.$$

Отже, потік магнітного поля через довільну замкнену поверхню дорівнює нулю:

$$\oint_s \vec{H} d\vec{S} = 0. \quad (3)$$

Якщо ввести поняття силових ліній магнітного поля як ліній, дотичні до яких співпадають з напрямком напруженості магнітного поля, то рівність (3) означає, що скільки силових ліній входить в область, обмежену замкнутою поверхнею, стільки ж із неї і виходить. Це можливо, тільки якщо силові лінії магнітного поля є замкнутими. Такі поля називають соленоїдальними. Для магнітного поля це є наслідком відсутності магнітних зарядів - монополів.

Проінтегруємо рівняння (1) по довільній поверхні:

$$\int_s \text{rot} \vec{E} d\vec{S} = -\frac{1}{c} \int_s \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} d\vec{S} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_s \vec{H} d\vec{S}. \quad (4)$$

Застосуємо до інтеграла зліва теорему Стокса:

$$\int_s \text{rot} \vec{E} d\vec{S} = \oint_l \vec{E} d\vec{l}. \quad (5)$$

Введемо поняття електрорушійної сили в заданому контурі l :

$$\mathcal{E} = \oint_l \vec{E} d\vec{l}, \quad (6)$$

і магнітного потоку:

$$\Phi = \int_s \vec{H} d\vec{S}. \quad (7)$$

Підставляючи отримані вирази в (4), отримаємо

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \int_s \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} d\vec{S}, \quad (8)$$

або

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (9)$$

Отримані формули (8) та (9) виражають закон електромагнітної індукції Фарадея:

ЕРС в деякому контурі дорівнює взятій із знаком "–" і поділеній на швидкість світла у вакуумі похідній по часу від потоку магнітного поля через поверхню, обмежену цим контуром.

(3) і (8) утворюють першу пару рівнянь Максвелла в інтегральній формі.

Рівняння Максвелла (1) і (2) можна записати також у коваріантній 4-вимірній формі. Дійсно, із визначення тензора ЕМП $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ легко показати, що

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0, \quad (10)$$

а підстановка в (10) виразів F_{ik} через компоненти векторів \vec{E} і \vec{H} приводить до рівнянь (1) і (2).

§8. Густина електричного струму

Оскільки навіть у малих макрооб'єктах міститься дуже велике число елементарних заряджених частинок, можна ввести поняття про неперервно розподілений в об'ємі заряд, розуміючи під густиною заряду в деякій "точці" простору відношення

$$\rho = \frac{\Delta q}{\Delta V}, \quad (1)$$

де ΔV – макроскопічно малий об’єм, Δq – повний електричний заряд в ньому. Під “макроскопічно малим”, або “фізично нескінчено малим” об’ємом розуміють такий об’єм, в якому міститься велике число елементарних зарядів, але лінійний розмір якого малий порівняно з відстанями, які являють інтерес в конкретній задачі. Внаслідок дискретності структури електричного заряду перехід у виразі (1) до межі $\Delta V \rightarrow 0$ позбавлений фізичного змісту. Проте, якщо знехтувати дискретністю електричного заряду, формулу (1) можна умовно переписати у вигляді:

$$\rho = \frac{dq}{dV}. \quad (2)$$

Тоді інтегрування (2) по деякому об’єму V визначає заряд в цьому об’ємі:

$$q = \int_V \rho(\vec{r}, t) dV. \quad (3)$$

Рух зарядів породжує перенесення заряду. Явище переносу заряду називають електричним струмом. Кількісною характеристикою електричного струму є вектор густини електричного струму

$$\vec{j} = \rho \vec{v}. \quad (4)$$

Вектор густини струму \vec{j} визначає у кожній точці напрям і кількість перенесеного заряду за одиницю часу через одиничну поверхню, перпендикулярну до напрямку швидкості.

Знайдемо швидкість зміни заряду з часом у деякому об’ємі V :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV. \quad (5)$$

З іншого боку, зміна заряду за одиницю часу визначається кількістю заряду, який виходить за цей час із даного об’єму назовні, або, навпаки, входить всередину об’єму. Кількість заряду, яка проходить за одиницю часу через елемент $d\vec{S}$ поверхні, що обмежує даний об’єм, дорівнює $\rho \vec{v} d\vec{S} = \vec{j} d\vec{S}$, де \vec{v} – швидкість заряду в тій точці простору, де знаходиться елемент поверхні $d\vec{S}$. Повна кількість заряду, що виходить за одиницю часу з даного об’єму, дорівнює

$$\frac{dq}{dt} = - \oint_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (6)$$

Знак “-” в (6) враховує зменшення повного заряду в об’ємі V , якщо заряд виходить із об’єму. Прирівнюючи (5) і (6), отримуємо:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \oint_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (7)$$

Формула (7) виражає закон збереження електричного заряду в інтегральній формі.

Застосовуючи теорему Остроградського-Гауса до поверхневого інтегралу у правій частині рівності (7), знайдемо:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV; \quad \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right) dV = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (8)$$

Формула (8) виражає закон збереження електричного заряду в диференціальній формі.

Якщо ввести 4-вимірний вектор густини електричного струму

$$j^i = \rho u^i = (c\rho, \rho\vec{v}), \quad (9)$$

то рівняння (8) можна переписати у релятивістськи інваріантному вигляді:

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0. \quad (10)$$

За допомогою перетворень Лоренца для 4-вектора j^i можна показати, що густина заряду залежить від його швидкості:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (11)$$

де ρ_0 – густина заряду відносно ІСВ, в якій цей заряд нерухомий. Проте, повний заряд в певному об'ємі V зберігається незмінним внаслідок

зменшення об'єму при русі $\left(V = V_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$:

$$\Delta q = \rho \cdot \Delta V = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot V_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \rho_0 \cdot V_0 = \Delta q_0,$$

тобто величина заряду не залежить від руху ІСВ і є інваріантом.

§9. Дія для електромагнітного поля (НСО)

Представимо дію системи заряджених частинок і ЕМП у вигляді:

$$S = S_{\text{част}} + S_{\text{ез}} + S_{\text{ЕМП}}; \quad (1)$$

$$S_{\text{част}} = -\sum_a m_a c \int ds_a; \quad S_{\text{ез}} = -\sum_a \frac{e_a}{c} \int A_i^{(a)} \frac{dx_{(a)}^i}{dt} dt = -\sum_a \frac{e_a}{c} \int A_i^{(a)} u_{(a)}^i dt, \quad (2)$$

де $u_{(a)}^i$ позначає 4-вимірну швидкість a -тої зарядженої частинки.

Представимо сукупність точкових зарядів e_a як заряд, розподілений у просторі з деякою густиною ρ . Тоді в (2) слід виконати заміну:

$$e_a \rightarrow de = \rho dV; \quad \sum_a e_a \rightarrow \int de = \int \rho dV.$$

Ця заміна дозволяє записати $S_{\text{ез}}$ у вигляді

$$S_{\text{ез}} = -\frac{1}{c} \int \rho dV \int A_i u^i dt = -\frac{1}{c} \int \rho A_i u^i dV dt. \quad (3)$$

Скориставшись визначенням 4-вимірного вектора густини струму (8.9) [$j^i = \rho u^i = (\rho c, \vec{j})$], представимо $S_{\text{ез}}$ у вигляді:

$$S_{\text{ез}} = -\frac{1}{c} \int A_i j^i dV dt = -\frac{1}{c^2} \int A_i j^i d\Omega, \quad (4)$$

де введено інваріантний 4-об'єм $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c dt dx dy dz = c dt dV = Inv$.

Щоб знайти $S_{\text{ЕМП}}$, врахуємо той дослідний факт, що ЕМП задовольняє **принципу суперпозиції**, згідно з яким у кожній точці простору загальне поле системи зарядів дорівнює сумі полів, створених кожним зарядом окремо. Тому рівняння поля повинні бути лінійними диференціальними рівняннями. А це буде тоді, коли в дії під знаком інтегралу стоятиме вираз, квадратичний по полю. Крім того, дія має бути інваріантом перетворень Лоренца. Найбільш підходящим квадратичним інваріантом, який можна утворити з

характеристик поля, є $F_{ik}F^{ik} = 2(\vec{H}^2 - \vec{E}^2)$. Ми відкидаємо інший скалярний інваріант $A_i A^i$, який визначається неоднозначно. Отже, під знаком інтегралу дії $S_{EMП}$ має стояти $F_{ik}F^{ik}$, а для інваріантності дії інтегрування повинно проводитись по 4-об'єму $d\Omega = c dt dV$. Таким чином, ми приходимо до виразу

$$S_{EMП} = \alpha \int F_{ik}F^{ik} d\Omega,$$

де α - деяка стала. Інтегрування по координатам тут здійснюється по всьому 3-вимірному простору, а по часу – між двома заданими моментами t_1 і t_2 . Щоб отримати за допомогою знайденого виразу для дії $S_{EMП}$ правильні рівняння поля, слід покласти $\alpha = -\frac{1}{16\pi c}$;

тоді
$$S_{EMП} = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{ik}F^{ik} d\Omega = -\frac{1}{16\pi} \int F_{ik}F^{ik} dt dV. \quad (5)$$

§10. Вивід другої пари рівнянь Максвелла (НСО)

Виведемо другу пару рівнянь, виходячи з принципу найменшої дії. Дію для ЕМП, з урахуванням результатів попереднього параграфу, запишемо так:

$$S = S_{EMП} + S_{ez} = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{ik}F^{ik} d\Omega - \frac{1}{c^2} \int A_i j^i d\Omega. \quad (1)$$

Принцип найменшої дії вимагає, щоб при варіюванні потенціалу ЕМП дія залишалася незмінною:

$$\delta S = 0 = -\frac{1}{16\pi c} \int \delta(F_{ik}F^{ik}) d\Omega - \frac{1}{c} \int j_i \delta A_i d\Omega. \quad (2)$$

Знайдемо варіацію

$$\begin{aligned} \delta(F_{ik}F^{ik}) &= \delta F_{ik}F^{ik} + F_{ik}\delta F^{ik} = 2F^{ik}\delta F_{ik} = 2F^{ik}\delta\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right) = 2F^{ik}\delta\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - 2F^{ik}\delta\frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \\ &= \left[\begin{array}{l} \text{врахуємо, що } F^{ki} = -F^{ik}, \\ \text{і в 1-му доданку зробимо} \\ \text{заміну індексів } i \leftrightarrow k \end{array} \right] = -4F^{ik}\delta\frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \left[\begin{array}{l} (u \cdot v)' = u'v + uv' \\ u'v = (uv)' - v'u \end{array} \right] = -4\frac{\partial}{\partial x^k}(F^{ik}\delta A_i) + 4\delta A_i \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

Отже, замість (2) отримаємо:

$$\delta S = -\frac{1}{16\pi c} \int \left\{ -4\frac{\partial}{\partial x^k}(F^{ik}\delta A_i) + 4\delta A_i \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \right\} d\Omega - \frac{1}{c^2} \int j^i \delta A_i d\Omega = 0. \quad (3)$$

У тримірному просторі в тензорних позначеннях $\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial a^k}{\partial x^k}$,

а теорема Остроградського-Гауса :

$$\int_V \text{div } \vec{a} dV = \int_V \frac{\partial a^k}{\partial x^k} dV = \oint_S \vec{a} d\vec{S} = \oint_S a^k dS_k.$$

Використовуючи аналогію з цим виразом у 4-вимірному просторі, отримаємо для першого інтеграла в (3):

$$\int \frac{\partial}{\partial x^k}(F^{ik}\delta A_i) d\Omega = \oint_S F^{ik}\delta A_i dS_k = 0,$$

де dS_k – елемент 3-вимірної “гіперповерхні”. Але на границі досліджуваного 4-об'єму варіація $\delta A_i = 0$, тому останній інтеграл обертається в 0. Відповідно варіація дії (3) дорівнюватиме

$$\delta S = -\frac{1}{4\pi c} \int \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \delta A_i d\Omega - \frac{1}{c^2} \int j^i \delta A_i d\Omega = -\frac{1}{c} \int \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} + \frac{1}{c} j^i \right) \delta A_i d\Omega = 0,$$

звідки, в силу довільності варіацій δA_i , варіація дії обертається в нуль, якщо в нуль обертається підінтегральний вираз: $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} + \frac{1}{c} j^i = 0$, або

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i \quad (i=0, 1, 2, 3). \quad (4)$$

Це рівняння являє собою другу пару рівнянь Максвелла у 4-вимірному інваріантному представленні.

§11. Тривимірна форма другої пари рівнянь Максвелла

Знайдемо вигляд другої пари рівнянь Максвелла у стандартних тривимірних позначеннях, використовуючи явний вигляд тензора ЕМП (4.5) та 4-вектора густини струму (8.9).

При $i = 0$ рівняння (10.4) набудуть вигляду:

$$\frac{\partial F^{0k}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^0 = -\frac{4\pi}{c} \rho c = -4\pi\rho,$$

$$\frac{\partial F^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^3} = -\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\operatorname{div} \vec{E} = -4\pi\rho$$

або

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho. \quad (1)$$

Для $i = 1, 2, 3$ аналогічним чином отримаємо

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2)$$

Рівняння (1) і (2) утворюють другу пару рівнянь Максвелла у диференціальній формі. Вивівши рівняння (2), Максвелл передбачив існування струму зміщення, густина струму якого дорівнює

$$\vec{j}_{zm} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (3)$$

На відміну від струму провідності I , обумовленого рухом заряджених частинок, струм зміщення обумовлений наявністю змінного в часі електричного поля. Відповідно до (3), рівняння (2) набуває вигляду:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_{zi}). \quad (4)$$

Проінтегруємо (1) по довільному об'єму і скористаємось теоремою Остроградського-Гауса:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = 4\pi \int_V \rho dV, \text{ або}$$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi \int_V \rho dV = 4\pi q. \quad (5)$$

Отже, *потік електричного поля через замкнуту поверхню дорівнює помноженому на 4π повному заряду q , який знаходиться в об'ємі, обмеженому цією поверхнею.*

Проінтегруємо (4) по довільній незамкненій поверхні і скористаємось теоремою Стокса

$$\int_S \text{rot } \vec{H} d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} \int_S (\vec{j} + \vec{j}_{zm}) d\vec{S}; \quad \int_S \text{rot } \vec{H} d\vec{S} = \oint_l \vec{H} d\vec{l}.$$

Тут $I = \int_S \vec{j} d\vec{S}$ та $I_{zm} = \int_S \vec{j}_{zm} d\vec{S} = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S}$ (6)

– сили струму провідності і струм зміщення. Отже,

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} (I + I_{zm}), \quad (7)$$

тобто: **циркуляція магнітного поля по деякому контуру дорівнює помноженій на $4\pi/c$ сумі струмів провідності та зміщення.**

Рівняння (5) і (7) утворюють другу пару рівнянь Максвелла в інтегральній формі.

§12. Системи одиниць вимірювань електричних і магнітних величин

Досі ми користувалися гаусовою системою одиниць, яка більш зручна для теоретичних досліджень. Її основні одиниці: сантиметр, грам, секунда. Заряд, потенціал тощо вимірюються в гаусовій системі в абсолютних одиницях заряду, потенціалу і т.п.

Але в останні десятиліття для практичних цілей, пов'язаних з електротехнікою, широко впроваджується міжнародна система одиниць СІ. В ній ЕМП описується чотирма векторами $(\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B})$, де \vec{E} і \vec{H} – напруженості електричного і магнітного полів відповідно, \vec{D} і \vec{B} – їх індукції.

Порівняємо рівняння Максвелла в Гаусовій системі одиниць (1) і системі СІ (2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{H} = 0 \\ \text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho \end{array} \right. \quad (1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{D} = \rho \end{array} \right. \quad (2)$$

На перший погляд система рівнянь Максвелла в СІ (2) виглядає ніби симетричніше і простіше. Але є декілька недоліків, які ускладнюють її використання в теоретичних дослідженнях.

По-перше, в системі СІ для опису ЕМП у вакуумі вимагається не 2, а 4 вектора, які зв'язані між собою додатковими співвідношеннями:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (3)$$

де

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \frac{\Phi}{\text{м}}; \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_H}{\text{м}} \quad (4)$$

- так звані електрична і магнітна сталі.

По-друге, в рівняннях (2)-(4) використовуються сталі ε_0 і μ_0 , які не мають жодного фізичного змісту, тоді як в системі (1) використовується стала c - швидкість світла, причому $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$.

По-третє, всі чотири вектори ($\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$) у системі СІ мають різні розмірності $\left(\frac{B}{m}, \frac{B \cdot \Phi}{m^2}, \frac{A}{m}, T_L = \frac{\Gamma_H \cdot A}{m^2}\right)$, що ускладнює порівняння напруженостей полів. А в гаусовій системі вектори \vec{E} і \vec{H} мають однакові розмірності, і це дозволяє порівнювати їх безпосередньо.

По-четверте, крім трьох основних одиниць: довжини, часу і маси, в СІ вводиться четверта основна одиниця – А (ампер).

Вказані недоліки ускладнюють використання системи СІ для формулювання фундаментальних законів теорії електромагнітного поля. Тому в теоретичній електродинаміці частіше використовують Гаусову систему одиниць. Але для інженерних цілей СІ виявляється досить зручною, і її використання більш поширене.

Для прикладу приведемо вигляд закону Кулона в гаусовій та міжнародній системі одиниць:

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2} \text{ (Гаус)}, \quad F = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \text{ (СІ)}.$$

§13. Енергія електромагнітного поля

Виконаємо наступні перетворення рівнянь Максвелла:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} \vec{H} \\ \vec{E} \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \\ \vec{H} \text{ rot} \vec{E} - \vec{E} \text{ rot} \vec{H} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \vec{E} - \frac{1}{c} \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \frac{1}{c} \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \frac{1}{c} \left(\vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \vec{E} - (\vec{H} \text{ rot} \vec{E} - \vec{E} \text{ rot} \vec{H}). \end{aligned} \quad (1)$$

Врахуємо, що $\vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2)$, а з рівності $\text{div}[\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{b} \text{ rot} \vec{a} - \vec{a} \text{ rot} \vec{b}$ випливає $\vec{H} \text{ rot} \vec{E} - \vec{E} \text{ rot} \vec{H} = \text{div}[\vec{E} \times \vec{H}]$. Тоді рівність (1) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + H^2) &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \vec{E} - \text{div}[\vec{E} \times \vec{H}] \cdot \frac{c}{4\pi}, \text{ або} \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + H^2}{8\pi} &= -\vec{j} \vec{E} - \text{div} \left(\frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}] \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Введемо так званий вектор Пойтінга:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}], \quad (3)$$

тоді замість (2) можна записати: $\frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + H^2}{8\pi} = -\vec{j} \vec{E} - \text{div} \vec{S}$. (2')

Вияснимо фізичний зміст рівності (2'). Проінтегруємо (2') по довільному об'єму V і використаємо формулу Остроградського-Гауса:

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV = - \int_V \vec{j} \vec{E} dV - \int_V \operatorname{div} \vec{S} dV = - \int_V \vec{j} \vec{E} dV - \oint_{\Sigma} \vec{S} d\vec{\Sigma}. \quad (4)$$

Тут Σ – поверхня, що обмежує об'єм V , $d\vec{\Sigma}$ - елемент цієї поверхні.

Розглянемо випадок, коли інтегрування в (4) відбувається по всьому простору; тоді інтеграл по поверхні обертається в 0, тому що поле на нескінченості дорівнює нулю:

$$\oint_{\Sigma} \vec{S} d\vec{\Sigma} = \frac{c}{4\pi} \iint_{\Sigma} [\vec{E} \times \vec{H}] d\vec{\Sigma} = 0. \quad (5)$$

Інший випадок обернення поверхневого інтегралу (5) в нуль – якщо система замкнута, і на межі замкнутої системи електромагнітне поле обертається в 0.

В цих випадках (4) приймає вигляд:

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV + \int_V \vec{j} \vec{E} dV = 0. \quad (6)$$

$$\text{Але } \vec{j} \vec{E} dV = [\vec{j} = \rho \vec{v}] = \rho \vec{v} \vec{E} dV = [\rho dV = dq] = \vec{v} dq \cdot \vec{E} = \vec{v} \cdot dq \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H} \right) = \vec{v} \cdot d\vec{F} =$$

$$= \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{F} = \frac{dA}{dt} = \left[\begin{array}{l} \text{потужність ЕМП} \\ \text{в об'ємі } dV \end{array} \right] = \frac{d\mathcal{E}_{\text{кин}}}{dt},$$

де $d\mathcal{E}_{\text{кин}}$ – кінетична енергія частинок в об'ємі dV . Підставляючи отриманий результат в (6), отримуємо

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV + \frac{d}{dt} \sum \mathcal{E}_{\text{е\textit{л}}}, \quad \frac{d}{dt} \left(\int_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV + \sum \mathcal{E}_{\text{кин}} \right) = 0;$$

$$\int_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV + \sum \mathcal{E}_{\text{кин}} = \text{const}. \quad (7)$$

Таким чином, для замкнутої системи, що складається з ЕМП разом із зарядженими частинками, зберігається величина (7), яка являє собою суму кінетичної енергії всіх частинок в об'ємі V та ще одного доданку, який слід розглядати як енергію ЕМП в об'ємі V :

$$W = \int_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV, \quad (8)$$

а величина, що стоїть у (8) під знаком інтегралу, тобто

$$w = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \quad (9)$$

представляє густину енергії ЕМП – енергію поля в одиниці об'єму.

Припустимо тепер, що система незамкнута. Тоді умова (5) не виконується, і замість рівняння (6) ми прийдемо до співвідношення:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV + \sum \mathcal{E}_{\text{кин}} \right) = - \oint_{\Sigma} \vec{S} d\vec{\Sigma}. \quad (10)$$

Оскільки вираз зліва в (10) визначає зміну енергії системи в об'ємі за одиницю часу, то вираз справа $\int_{\Sigma} \vec{S} d\vec{\Sigma}$ визначає потік енергії електромагнітного

поля за одиницю часу через поверхню, що обмежує даний об'єм. Тоді вектор Пойтінга \vec{S} є густиною потоку енергії і дорівнює кількості енергії поля, яка протікає за одиницю часу через одиницю поверхні. Отже рівняння (2) і

рівняння (4) виражають закон збереження повної енергії системи частинок і ЕМП відповідно в диференціальній та інтегральній формах.

§14. Закон збереження імпульсу в ЕМП

Знайдемо зміну імпульсу частинок в об'ємі V . Для цього запишемо їх рівняння руху:

$$\frac{d\vec{P}_{\text{част}}}{dt} = \vec{F} = \int_V \vec{f} dV, \quad \text{де } \vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV} \quad (1)$$

– густина сили Лоренца, тобто сила Лоренца, що припадає на одиницю об'єму. Цю густину сили Лоренца можна представити у вигляді:

$$\vec{f} = \frac{1}{dV} dq \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] \right) = \rho \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] \right) = [\rho \vec{v} = \vec{j}] = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{H}],$$

так що рівняння (1) набуде вигляду:

$$\frac{d\vec{P}_{\text{част}}}{dt} = \int_V \left(\rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{H} \right) dV. \quad (2)$$

Використовуючи другу пару рівнянь Максвелла, знайдемо вирази для густин заряду і струму:

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho \Rightarrow \rho = \frac{1}{4\pi} \text{div } \vec{E};$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \vec{H} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t};$$

підставивши їх в (2), отримаємо:

$$\frac{d\vec{P}_{\text{част}}}{dt} = \int_V \left\{ \frac{1}{4\pi} \vec{E} \text{div } \vec{E} + \frac{1}{4\pi} \text{rot } \vec{H} \times \vec{H} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{H} \right\} dV. \quad (3)$$

Симетризуємо праву частину (3), додавши до неї рівний 0 в силу рівнянь Максвелла вираз:

$$\int_V \left\{ \frac{1}{4\pi} \vec{H} \text{div } \vec{H} + \frac{1}{4\pi} \left(\text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) \times \vec{E} \right\} dV = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{P}_{\text{част}}}{dt} = \int_V \left\{ -\frac{1}{4\pi c} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{H} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) + \left[\frac{1}{4\pi} (\vec{E} \text{div } \vec{E} + \vec{H} \text{div } \vec{H}) + \frac{1}{4\pi} (\text{rot } \vec{H} \times \vec{H} + \text{rot } \vec{E} \times \vec{E}) \right] \right\} dV =$$

$$= -\frac{1}{4\pi c} \frac{d}{dt} \int_V [\vec{E} \times \vec{H}] dV + \int_V \left\{ \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \text{div } \vec{E} + \vec{H} \text{div } \vec{H}) + \frac{1}{4\pi} (\text{rot } \vec{H} \times \vec{H} + \text{rot } \vec{E} \times \vec{E}) \right\} dV. \quad (4)$$

Другий інтеграл в (4) (від виразу у фігурних дужках) можна перетворити у поверхневий, причому він міститиме вектори поля в другій степені. Тому він буде наближатись до 0 при необмеженому зростанні поверхні, якщо тільки вектори спадають швидше, ніж функція $1/r$. Тоді, переходячи до нескінченно великого об'єму, прийдемо до виразу:

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{P}_{\text{част}} + \frac{1}{4\pi c} \int_V [\vec{E} \times \vec{H}] dV \right) = 0,$$

звідки

$$\vec{P}_{\text{част}} + \frac{1}{4\pi c} \int_V [\vec{E} \times \vec{H}] dV = \text{const}. \quad (5)$$

Формула (5) показує, що повний імпульс замкнутої системи, яка складається з ЕМП і частинок, зберігається. Тому величину

$$\vec{P}_{EMП} = \frac{1}{4\pi c} \int_V [\vec{E} \times \vec{H}] dV \quad (6)$$

слід вважати імпульсом ЕМП, а величину

$$\vec{p}_{EMП} = \frac{1}{4\pi c} [\vec{E} \times \vec{H}] = \frac{\vec{S}}{c^2} \quad (7)$$

– густиною імпульсу. Отже, при взаємодії поля і частинок поруч із законом збереження повної енергії має місце закон збереження повного імпульсу. Втрата імпульсу частинками (наприклад, при випромінюванні) приводить до збільшення імпульсу поля, і навпаки, передача імпульсу частинкам супроводжується зменшенням імпульсу поля.

Якщо інтегрування в (4) здійснюється по скінченному об'єму, то другий інтеграл означатиме потік імпульсу через поверхню, що обмежує виділений об'єм. Тому зміна повного імпульсу ЕМП в деякому об'ємі $\int_V \vec{p}_{EMП} dV$ дорівнюватиме зміні імпульсу частинок, які містяться в цьому об'ємі, і потоку імпульсу через поверхню.

Предбачення теорії про існування імпульсу поля вперше було підтвержене експериментально П.М.Лебедевим у 1901 р. у вигляді світлового тиску. Імпульс ЕМП у звичайних умовах малий і часто лежить за межами похибок вимірювань. Але у області атомних явищ імпульс ЕМП зрівнюється із імпульсом частинок і відіграє важливу роль в усіх процесах взаємодії випромінювання з речовиною. Крім атомних явищ, тиск випромінювання відіграє важливу роль в процесах, що відбуваються у внутрішніх частинах зірок і у зоряних атмосферах та других явищах астрономічного масштабу, зокрема, визначає напрямки хвостів комет від Сонця внаслідок тиску сонячного світла.

Поруч з вектором густини імпульсу поля можна ввести в розгляд густину моменту імпульсу ЕМП:

$$\vec{m}_{EMП} = \vec{r} \times \vec{p}_{EMП} = \frac{1}{4\pi c} [\vec{r} \times [\vec{E} \times \vec{H}]] = \frac{\vec{r} \times \vec{S}}{c^2}. \quad (8)$$

Момент імпульсу поля в об'ємі V дорівнює:

$$\vec{M}_{EMП} = \frac{1}{4\pi c} \int_V [\vec{r} \times [\vec{E} \times \vec{H}]] dV = \int_V \frac{\vec{r} \times \vec{S}}{c^2} dV. \quad (9)$$

Можна показати, що для моменту імпульсу ЕМП, як і для його енергії і імпульсу, має місце закон збереження. Момент імпульсу ЕМП відіграє важливу роль у процесах атомного масштабу, проте в явищах макроскопічного масштабу він є не суттєвим.

§15. Граничні умови для векторів ЕМП

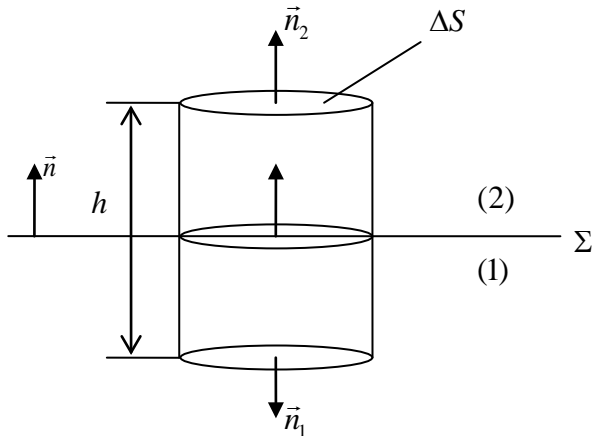
Розглянемо поверхні, на яких величини ρ і \vec{j} мають особливості, тобто зазнають стрибків, або обертаються в нескінченність. На особливих поверхнях рівняння Максвелла стають недійсними, тому що на них похідні від \vec{E} і \vec{H} можуть втратити зміст. Тому диференціальні рівняння замінюють

деякими умовами зшивання компонентів поля, які виводять з інтегральної форми рівнянь Максвелла.

1. Розглянемо рівняння (12.5):

$$\oint_S E_n dS = 4\pi \int_V \rho dV. \quad (1)$$

Виберемо об'єм у формі циліндра малого радіуса і висоти h з основами ΔS паралельними особливій поверхні Σ .



Представимо ліву частину рівняння (1) наближено у вигляді

$$\oint_S E_n dS \approx E_{n_1} \cdot \Delta S + E_{n_2} \Delta S + N_{\text{біч}},$$

$$E_{n_1} = -E_{1n}; \quad E_{n_2} = E_{2n};$$

$$\int_S E_n dS = (E_{2n} - E_{1n}) \Delta S + N_{\text{біч}};$$

а праву частину: $\int_V \rho dV = \rho \cdot \Delta S \cdot h$. Тоді

рівняння (1) прийме вигляд:

$$(E_{2n} - E_{1n}) \Delta S + N_{\text{біч}} \approx \rho \cdot \Delta S \cdot h \cdot 4\pi. \quad (2)$$

Перейдемо у (2) до границі $h \rightarrow 0$ так, щоб основи циліндра сумістились з поверхнею Σ . Оскільки при цьому бічна поверхня циліндра наближається до 0, а поле E залишається обмеженим, тому $N_{\text{біч}} \rightarrow 0$. Позначимо

$$\lim_{h \rightarrow 0} \rho h = \sigma. \quad (3)$$

Величина σ називається поверхневою густиною заряду. $\sigma \neq 0$, якщо об'ємна густина ρ має особливість на поверхні Σ так, що в тонкому поверхневому шарі знаходиться скінчений заряд. Враховуючи це, отримуємо замість (2):

$$(E_{2n} - E_{1n}) \Delta S = 4\pi \sigma \cdot \Delta S;$$

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi \sigma. \quad (4)$$

Ця умова виконується для будь-якої поверхні. (4) визначає скачок нормальних компонентів електричного поля на особливій поверхні. На регулярній поверхні $\sigma=0$ і тому E_n – величина неперервна.

2. Приведене в п. 1 виведення повністю зберігає силу і для рівняння (7.3):

$$\oint_S \vec{H} d\vec{S} = 0. \quad (5)$$

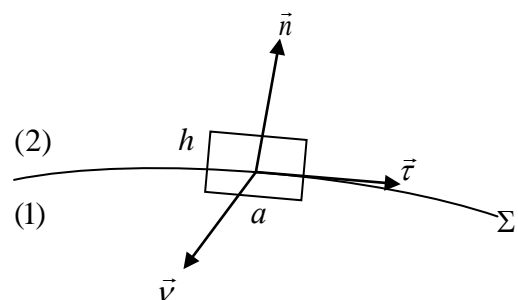
Але оскільки права частина в (5) всюди $=0$, то нормальна компонента вектора \vec{H} на будь-якій поверхні неперервна:

$$H_{2n} = H_{1n}. \quad (6)$$

3. Знайдемо тепер умови для тангенціальних (дотичних) компонентів. Будемо виходити з рівняння (12.7):

$$\oint_l H_l dl = \frac{4\pi}{c} (I + I_{\text{зм}}) = \frac{4\pi}{c} \int_S j_n dS + \frac{1}{c} \int_S \frac{\partial E_n}{\partial t} dS. \quad (7)$$

Виберемо замкнутий контур l у вигляді малого прямокутника, площина якого перпендикулярна поверхні Σ .



Вектори \vec{n} , $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ утворюють трійку взаємно перпендикулярних ортів. Маємо:

$$\oint_l H_i dl = H_{2\tau} a - H_{1\tau} a + \gamma_h,$$

де γ_h – інтеграл по бічних ділянках контуру. Далі:

$$\int_s j_n dS \approx j_v h a; \quad \int_s \frac{dE_n}{dt} dS \approx \frac{\partial E_v}{\partial t} h a,$$

$$(H_{2\tau} - H_{1\tau}) a + \gamma_h \approx \frac{4\pi}{c} j_v h a + \frac{1}{c} \frac{\partial E_v}{\partial t} h a.$$

Спрямовуючи $h \rightarrow 0$, так що контур стягується до поверхні Σ , отримаємо $\gamma_h \rightarrow 0$. Позначимо

$$\lim_{h \rightarrow 0} (j_v h) = i_v. \quad (8)$$

Величина (8) являє собою проекцію на напрямок $\vec{\nu}$ густини поверхневого струму. Тоді:

$$(H_{2\tau} - H_{1\tau}) a = \frac{4\pi}{c} i_v a, \text{ звідки} \quad H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_v. \quad (9)$$

(9) визначає граничну умову для дотичних складових напруженості магнітного поля. Останню умову неважко переписати і у векторному вигляді:

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{i}. \quad (10)$$

4. З рівняння (7.8) $\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_s \vec{H} d\vec{S}$ аналогічно виводиться гранична

умова для дотичних компонент вектора \vec{E} . В зв'язку з обмеженістю величини \vec{H} в правій частині відповідної рівності буде стояти 0. Тому ми отримуємо:

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}, \quad (11)$$

тобто дотична складова електричного поля до поверхні неперервна на будь-якій поверхні.

§16. Єдиність розв'язку рівнянь Максвелла (НСО)

Сформулюємо умови, при яких розв'язок рівнянь Максвелла є єдиним. Нехай 1) задано в певному об'ємі V розподіл густини зарядів і струмів $\rho(\vec{r}, t)$, $\vec{j}(\vec{r}, t)$ і 2) відомі початкові значення напруженостей поля $\vec{E}(\vec{r}, 0)$, $\vec{H}(\vec{r}, 0)$, а також 3) задані дотичні компоненти одного з векторів поля E_τ і H_τ в усі моменти часу. Покажемо, що при цих умовах розв'язок рівнянь Максвелла всередині даного об'єму єдиний.

Доказ виконаємо від супротивного, тобто припустимо існування двох розв'язків \vec{E}_1 , \vec{H}_1 і \vec{E}_2 , \vec{H}_2 , які задовольняють рівняння Максвелла:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E}_{1(2)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}_{1(2)}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{H}_{1(2)} = 0 \\ \text{rot } \vec{H}_{1(2)} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_{1(2)}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{E}_{1(2)} = 4\pi\rho \end{cases} \quad (1)$$

Складемо різниці

$$\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E}_1 - \vec{E}_2 \\ \vec{H}' = \vec{H}_1 - \vec{H}_2 \end{cases} \quad (2)$$

Віднімаючи рівняння Максвелла (1) для полів \vec{E}_1 , \vec{H}_1 і \vec{E}_2 , \vec{H}_2 і враховуючи (2), отримаємо

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}'}{\partial t}, & \text{div } \vec{H}' = 0; \\ \text{rot } \vec{H}' = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t}, & \text{div } \vec{E}' = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Помноживши скалярно перше рівняння в (3) на вектор \vec{H}' , а друге – на \vec{E}' , і віднімаючи отримані рівняння одне від одного, отримаємо:

$$\vec{H}' \text{ rot } \vec{E}' - \vec{E}' \text{ rot } \vec{H}' = -\frac{1}{c} \left(\vec{H}' \frac{\partial \vec{H}'}{\partial t} + \vec{E}' \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t} \right), \text{ або } \text{div} [\vec{E}' \times \vec{H}'] = -\frac{1}{2c} \frac{d}{dt} (\vec{E}'^2 + \vec{H}'^2).$$

Проінтегрувавши це рівняння по об'єму і скориставшись теоремою Остроградського-Гауса, отримаємо:

$$\frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int_V (\vec{E}'^2 + \vec{H}'^2) dV = - \int_V \text{div} [\vec{E}' \times \vec{H}'] dV = - \oint_S [\vec{E}' \times \vec{H}'] d\vec{S} = - \oint_S [\vec{E}' \times \vec{H}']_n dS. \quad (4)$$

Але нормальна складова векторного добутку $[\vec{E}' \times \vec{H}']_n$ виражається через дотичні компоненти E'_τ і H'_τ на поверхні S , одна з яких в силу прийнятих умов (3), наприклад, E'_τ , дорівнює 0: $E'_\tau = E_{1\tau} - E_{2\tau} = E_\tau - E_\tau = 0$. Тому з (4) отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V (\vec{E}'^2 + \vec{H}'^2) dV = 0 & \Rightarrow \int_V (\vec{E}'^2 + \vec{H}'^2) dV = \text{const} \Rightarrow \\ \int_V (\vec{E}'^2(\vec{r}, t) + \vec{H}'^2(\vec{r}, t)) dV &= \int_V (\vec{E}'^2(\vec{r}, 0) + \vec{H}'^2(\vec{r}, 0)) dV = [\vec{E}'(\vec{r}, 0) = \vec{H}'(\vec{r}, 0) = 0] = 0; \end{aligned}$$

Але тоді $\vec{E}'(\vec{r}, t) = 0, \vec{H}'(\vec{r}, t) = 0; \Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2; \vec{H}_1 = \vec{H}_2$, що й треба було довести.

Відмітимо, що якщо $\oint_S [\vec{E}' \times \vec{H}'] d\vec{S} \rightarrow 0$ при $S \rightarrow \infty$, що має місце при достатньо швидкому спаданні \vec{E}' і \vec{H}' з відстанню, то граничні умови 3) стають лишніми для доказу єдиності розв'язку.

§17. Рівняння для електромагнітних потенціалів

В 4-вимірній формі друга пара рівнянь Максвелла має вигляд (10.4):

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i,$$

де тензор ЕМП виражається через 4-потенціали $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$, $F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k}$.

Підставляючи F^{ik} в рівняння Максвелла, отримаємо:

$$\frac{\partial^2 A^k}{\partial x^k \partial x_i} - \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x_k} = -\frac{4\pi}{c} j^i. \quad (1)$$

Введемо 4-вимірний аналог оператора набла:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right), \quad \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right). \quad (2)$$

Тоді оператор:
$$-\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x^k} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x^k} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 = \square \quad (3)$$

називають оператором Даламбера, який є інваріантним відносно перетворень Лоренца аналогом оператора Лапласа.

Скориставшись визначенням оператора Даламбера, перепишемо (1) у вигляді:

$$\square A^i + \frac{\partial^2 A^k}{\partial x_i \partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i. \quad (4)$$

(1) або (4) є загальним виразом рівнянь, яким задовольняє 4-потенціал ЕМП. Але ці рівняння можна спростити, якщо скористатися неоднозначністю визначення 4-потенціалу, пов'язаною з калібровочною інваріантністю магнітного поля (§3). Вона дозволяє накласти на 4-потенціал додаткову умову:

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0, \quad \text{або} \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \vec{A} = 0. \quad (5)$$

(7) називають умовою Лоренца. При врахуванні (5) рівняння (4) набуває вигляду:

$$\square A^i = -\frac{4\pi}{c} j^i \quad (6)$$

або в тривимірних позначеннях $(A^i(\varphi, \vec{A}), j^i(c\rho, \vec{j}))$:

$$i = 0: \quad \Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \quad (7)$$

$$i = 1, 2, 3: \quad \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (8)$$

(7) і (8) складають систему рівнянь, яким задовольняють скалярний і векторний потенціали.

Замість умови Лоренца (5) часто використовують умову Кулона:

$$\text{div } \vec{A} = 0, \quad (9)$$

яку також називають кулонівською калібровкою. За цієї калібровки отримуємо замість (6) і (7):

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho; \quad (10)$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad}\varphi. \quad (11)$$

Якщо розглядати ЕМП при відсутності зарядів і струмів ($\rho = 0, \vec{j} = 0$), то можна використати калібровку, при якій

$$\varphi = 0 \quad \text{і} \quad \text{div } \vec{A} = 0 \quad (12)$$

так що рівняння (10) виконується тотожно, а рівняння (11) приймає вигляд

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (13)$$

(13) є хвильовим рівнянням для векторного потенціалу, яке ще інакше називають рівнянням Даламбера.

МОДУЛЬ II. СТАЦІОНАРНЕ ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ

§18. Постійне електричне поле у вакуумі

Розглянемо статичні поля, які не змінюються з часом. Такі поля визначаються умовами: $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0$. В цьому випадку система рівнянь Максвела розпадеться на 2 пари незалежних рівнянь, що містять тільки електричні або тільки магнітні вектори:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho; & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{div } \vec{H} = 0. & (4) \end{cases}$$

Будемо розглядати в наступних параграфах електростатичні поля, які описуються системою рівнянь (1-2). Рівняння (1) вказує на безвихровий (інакше – потенціальний) характер поля. Це означає, що воно може бути представлене у вигляді

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi(\vec{r}), \quad (5)$$

де φ – так званий електростатичний потенціал. Вираз (5) є наслідком формули (2.13) і умови стаціонарності: $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$.

Вияснимо фізичний зміст φ . Щоб це зробити, знайдемо роботу електричних сил по переміщенню заряду q вздовж деякої кривої l з точки 1 у точку 2:

$$\begin{aligned} A &= \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}_e d\vec{r} = \int_{(1)}^{(2)} q\vec{E}d\vec{r} = -q \int_{(1)}^{(2)} \text{grad } \varphi d\vec{r} = -q \int_{(1)}^{(2)} \left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) (\vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}z) = \\ &= -q \int_{(1)}^{(2)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = -q \int_{(1)}^{(2)} d\varphi = -q\varphi|_{(1)}^{(2)} = -q(\varphi_2 - \varphi_1) = q(\varphi_1 - \varphi_2); \\ &A = q(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Отже, згідно (6) робота поля по переміщенню заряду дорівнює добутку заряду на різницю потенціалів початкової і кінцевої точок. Звідси видно, що фізичний зміст має різниця потенціалів поля:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A}{q}, \quad (7)$$

яка чисельно дорівнює роботі сил електростатичного поля по переміщенню одиничного позитивного заряду.

Знайдемо рівняння, якому задовольняє електростатичний потенціал φ . Для цього підставимо (5) в (2):

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= -\text{div } \text{grad } \varphi = -\Delta\varphi = 4\pi\rho \Rightarrow \\ \Delta\varphi &= -4\pi\rho. \end{aligned} \quad (8)$$

Рівняння (8) називається рівняння Пуассона. Зокрема, якщо в досліджуваній області відсутні електричні заряди, то (8) зводиться до рівняння Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0. \quad (9)$$

Граничні умови для електростатичного потенціалу можна отримати з граничних умов для нормальної і дотичної складових вектора \vec{E} (15.4) і (15.11):

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma, \quad E_{2\tau} = E_{1\tau}, \quad (10)$$

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi \Rightarrow E_n = -\text{grad}_n\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}; \quad E_\tau = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}. \quad (11)$$

Тоді з формул (10) і (11) випливають граничні умови для скалярного потенціалу на особливих поверхнях:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma; \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau}. \quad (12)$$

Другу умову в (12) можна замінити умовою неперервності потенціалу на поверхні:

$$\varphi_2|_\Sigma = \varphi_1|_\Sigma. \quad (13)$$

§19. Електростатичне поле системи точкових зарядів

Рівняння (18.8) можуть бути використані не тільки для неперервного розподілу зарядів $\rho(\vec{r})$, але і при наявності точкових зарядів. Для цього об'ємну густину заряду визначають через функцію Дірака:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_a q_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a). \quad (1)$$

Функція Дірака визначається так:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_a) = \begin{cases} 0, & \vec{r} \neq \vec{r}_a \\ \infty, & \vec{r} = \vec{r}_a \end{cases}, \quad (2)$$

причому
$$\int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) dV = 1, \int_V f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) dV = f(\vec{r}_a). \quad (3)$$

Умова (3) задає нормування функції Дірака.

Враховуючи (1-3), знайдемо повний електричний заряд системи точкових зарядів в об'ємі V :

$$q = \int_V \rho(\vec{r}) dV = \int_V \sum_a q_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) dV = \sum_a q_a \int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) dV = \sum_a q_a.$$

Застосуємо даний опис до єдиного точкового заряду, який знаходиться в початку координат O . Густина заряду в цьому випадку дорівнює:

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r}), \quad (4)$$

а рівняння Пуассона (18.8) набуває вигляду:

$$\Delta\varphi = -4\pi q\delta(\vec{r}). \quad (5)$$

Проінтегруємо (5) по об'єму кулі радіуса r з центром в т.О:
Інтеграл зліва дорівнює

$$\begin{aligned} \int_V \Delta\varphi dV &= \int_V \text{div}(\text{grad}\varphi) dV = \oint_S \text{grad}\varphi dS = \oint_S \text{grad}_n\varphi dS = \oint_S \frac{\partial\varphi}{\partial r} dS = \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} \int_S dS = \frac{\partial\varphi}{\partial r} S = 4\pi r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r}; \end{aligned}$$

а інтеграл справа: $-4\pi q \int_V \delta(\vec{r}) dV = -4\pi q.$

Отже, інтегрування рівняння (5) приводить до наступного диференціального рівняння:

$$4\pi r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -4\pi q.$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо: $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{q}{r^2}$; $\varphi = -\int \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{r} + C$. Сталу C визначимо з умови, щоб при $r \rightarrow \infty$ потенціал $\varphi \rightarrow 0$; звідси $C = 0$ і, отже,

$$\varphi(r) = \frac{q}{r}. \quad (6)$$

Враховуючи вираз для потенціалу точкового заряду (6) і зв'язок між напруженістю та потенціалом (18.5), знайдемо напруженість точкового заряду:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi(r) = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \text{grad } r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (7)$$

Ця формула виражає закон Кулона. Дійсно, сила, яка діє на точковий заряд Q , поміщений в електричне поле точкового заряду q , прямо пропорційна добутку зарядів і обернено пропорційна квадрату відстані між ними:

$$\vec{F} = Q\vec{E} = \frac{Qq}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}; \quad F = \frac{Qq}{r^2}. \quad (8)$$

У випадку системи точкових зарядів, створене ними поле, згідно з **принципом суперпозиції**, дорівнює сумі полів, створюваних кожним із зарядів окремо. Зокрема, потенціал системи дорівнює сумі потенціалів, створених кожним із зарядів:

$$\varphi = \sum_a \varphi_a = \sum_a \frac{q_a}{R_a}, \quad (9)$$

де $R_a = |\vec{r} - \vec{r}_a|$ - відстань від точки, положення якої визначається радіус-вектором \vec{r} і в якій визначається результуючий потенціал поля, а \vec{r}_a - радіус-вектор a -ї зарядженої частинки. Таким чином:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_a \frac{q_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}. \quad (10)$$

Якщо ввести неперервний розподіл заряду з густиною $\rho(\vec{r}')$, то в (10) треба q_a замінити на $\rho(\vec{r}')dV'$, а суму – інтегралом, так що

$$\varphi(\vec{r}) = \int_v \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \int_v \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{R}, \quad (11)$$

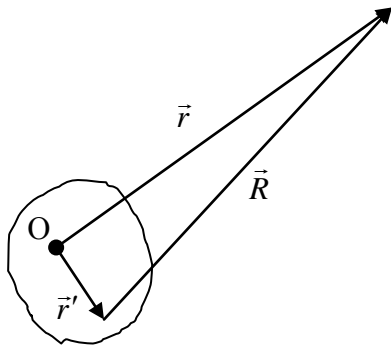
де R – відстань від елемента об'єму dV' до точки спостереження поля.

§20. Потенціал на великих відстанях від системи зарядів

Потенціал електростатичного поля при відомому розподілі зарядів у просторі визначається формулою (19.11)

$$\varphi(\vec{r}) = \int_v \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \int_v \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{R}. \quad (1)$$

Цей інтеграл аналітично обчислюється лише в окремих випадках при простих видах функції $\rho(\vec{r}')$. З хорошою точністю потенціал можна обчислити також на великих відстанях від обмеженої системи зарядів.



Нехай заряди займають об'єм з характерним розміром l . Вибравши початок відліку в середині системи, знайдемо потенціал на відстанях $r \gg l \sim r'$. Для цього розкладемо величину:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\vec{r}\vec{r}' + r'^2}} = \frac{1}{r\sqrt{1 - \frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}} =$$

$$= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{-1/2} = \left[\frac{r'}{r} \ll 1 \right] \approx$$

$$\approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} \right)^2 + \dots \right) =$$

$$\approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^3} + \frac{3}{2} \frac{(\vec{r}\cdot\vec{r}')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{2r^3} + \dots \quad (2)$$

Підставляючи (2) в (1), отримаємо:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{r} dV' + \int_V \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^3} \rho(\vec{r}') dV' + \int_V \left[\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{r}')^2}{2r^5} - \frac{r'^2}{2r^3} \right] \rho dV' + \dots = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots \quad (3)$$

Визначимо зміст кожного з доданків у (3). Перший доданок:

$$\varphi_1 = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{r} dV' = \frac{1}{r} \int_V \rho(\vec{r}') dV' = \frac{q}{r}; \quad (4)$$

тут q – повний електричний заряд системи. Цей доданок обернено пропорційний відстані і спадає з відстанню повільніше, ніж другий, третій і всі наступні, тобто, він є головним у розкладанні (3). Фізичний зміст першого доданку полягає в тому, що на великій відстані деталі розподілу заряду несуттєві і система діє як точковий заряд, розташований у початку координат. Але якщо система електронейтральна ($q = 0$), повний заряд дорівнює 0, то першим незникаючим членом розкладання виявляється потенціал

$$\varphi_2 = \int_V \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^3} \rho(\vec{r}') dV' = \frac{\vec{r}}{r^3} \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV'.$$

Введемо поняття дипольного моменту системи:

$$\vec{p} = \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV'. \quad (5)$$

Тоді

$$\varphi_2 = \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} \sim \frac{1}{r^2} \quad (6)$$

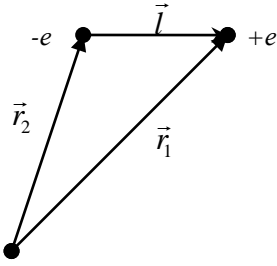
Потенціал φ_2 називається потенціалом диполя. Такі системи з відмінним від 0 дипольним моментом зустрічаються в багатьох задачах електродинаміки (молекули, диполь Герца).

У електрично нейтральних систем дипольний момент не залежить від вибору початку відліку. Дійсно, змістимо початок координат O на відстань \vec{a} , тобто використаємо перетворення $\vec{r}'' = \vec{r}' + \vec{a}$. Тоді в новій системі координат дипольний момент \vec{p}'' дорівнює:

$$\vec{p}'' = \int_V \vec{r}'' \rho(\vec{r}') dV' = \int_V (\vec{r}' + \vec{a}) \rho(\vec{r}') dV' = \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' + \int_V \vec{a} \rho(\vec{r}') dV' = \vec{p} + \vec{a}q = \vec{p}.$$

Формулу (5) для системи точкових зарядів можна записати у вигляді:

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i. \quad (7)$$



Елементарним електричним диполем називають систему, що складається з двох однакових по величині і протилежних за знаком зарядів. Його дипольний момент дорівнює:

$$\vec{p} = +e\vec{r}_1 - e\vec{r}_2 = e(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = e\vec{l} \quad (8)$$

Знайдемо напруженість електричного поля диполя:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{dip}} &= -\text{grad } \varphi_2 = -\text{grad } \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3} = -(\vec{r} \cdot \vec{p}) \text{grad } r^{-3} - \frac{1}{r^3} \text{grad}(\vec{r} \cdot \vec{p}) = \\ &= \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{p})}{r^4} \text{grad } r - \frac{1}{r^3} \text{grad}(xp_x + yp_y + zp_z) = \frac{3\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{p})}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}. \end{aligned}$$

Отже,
$$\vec{E}_{\text{dip}} = \frac{3\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{p})}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}. \quad (9)$$

Розглянемо тепер наступний член у розкладанні (3):

$$\varphi_3 = \int_V \frac{1}{2r^5} [3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r^2 r'^2] \rho(\vec{r}') dV'. \quad (10)$$

Перепишемо вираз у квадратних дужках в (10) через тензорні позначення:

$$3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r^2 r'^2 = 3(x_\alpha x'_\alpha)(x_\beta x'_\beta) - r^2 x'_\alpha x'_\alpha \delta_{\alpha\beta} = x_\alpha x_\beta [3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta}].$$

Тоді:

$$\varphi_3 = \frac{x_\alpha x_\beta}{2r^5} \int_V (3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta}) \rho(\vec{r}') dV' = \frac{Q_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta}{2r^5}, \quad (11)$$

де

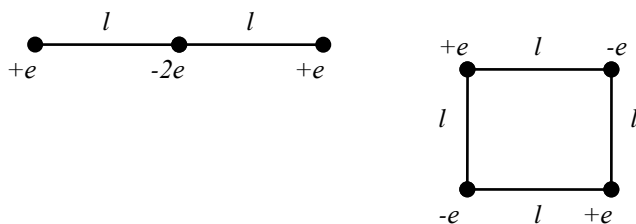
$$Q_{\alpha\beta} = \int_V (3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta}) \rho(\vec{r}') dV' \quad (12)$$

- так званий квадрупольний момент системи. Якщо ввести одиничний вектор у напрямку точки вимірювання потенціалу: $\vec{n} = \vec{r}/r$ з компонентами $n_\alpha = \frac{x_\alpha}{r}$, то (12) прийме вигляд:

$$\varphi_3 = \frac{Q_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{2r^3}. \quad (13)$$

З цих виразів видно, що $\varphi_3 \sim \frac{1}{r^3}$; $\varphi_3 \ll \varphi_2$. Найчастіше квадрупольний член

виступає як поправочний до потенціалу точкового заряду або диполя. Але при достатньо симетричному розташуванні (як на малюнках нижче) зарядів він може виявитись головним у розкладанні потенціалу.



§21. Електростатична енергія зарядів

При відсутності магнітного поля густина енергії електростатичного

поля дорівнює:

$$w = \frac{\vec{E}^2}{8\pi}. \quad (1)$$

Обчислимо повну енергію обмеженої системи нерухомих зарядів:

$$W = \int_V w dV = \frac{1}{8\pi} \int_V \vec{E}^2 dV, \quad (2)$$

де інтегрування необхідно виконувати по всьому простору. Для постійного електричного поля $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$, тому

$$\vec{E}^2 = \vec{E} \cdot \vec{E} = -\text{grad } \varphi \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla}(\varphi \vec{E}) + \varphi \cdot \vec{\nabla} \vec{E} = -\text{div}(\varphi \vec{E}) + \varphi \cdot \text{div } \vec{E};$$

але $\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$, $\Rightarrow \vec{E}^2 = -\text{div}(\varphi \vec{E}) + 4\pi\rho\varphi \Rightarrow$

$$W = -\frac{1}{8\pi} \int_V \text{div}(\varphi \vec{E}) dV + \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi dV. \quad (3)$$

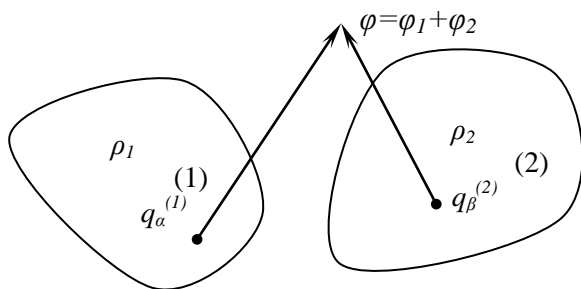
Перший інтеграл для обмеженої системи обертається в 0. Дійсно, використовуючи теорему Остроградського-Гауса і поведінку полів на нескінченності, отримаємо:

$$\int_V \text{div}(\varphi \vec{E}) dV = \oint_{S_\infty} \varphi \vec{E} d\vec{S}; \text{ але при } V \rightarrow \infty \quad S \rightarrow S_\infty \sim 4\pi R^2, \quad \varphi \sim \frac{1}{R}, \quad E \sim \frac{1}{R^2}, \text{ тому}$$

$$\varphi ES \sim \frac{1}{R} \rightarrow 0.$$

Таким чином, у випадку обмеженої електростатичної системи маємо 2 різних вирази для повної енергії: (2) і

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi dV. \quad (4)$$



Розглянемо дві обмежені системи зарядів (Рис.). Позначимо через $\varphi_1(\vec{r})$ і $\varphi_2(\vec{r})$ електростатичні потенціали, які створюються в заданій точці зарядами 1-ї і 2-ї систем. Скористаємось принципом суперпозиції і підставимо в (4) $\rho = \rho_1 + \rho_2$ і $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, отримаємо:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi dV = \frac{1}{2} \int_V (\rho_1 + \rho_2)(\varphi_1 + \varphi_2) dV = \frac{1}{2} \int_V \rho_1\varphi_1 dV + \frac{1}{2} \int_V \rho_2\varphi_2 dV + \frac{1}{2} \int_V (\rho_1\varphi_2 + \rho_2\varphi_1) dV = W_{11} + W_{22} + W_{12}, \quad (5)$$

де $W_{11} = \frac{1}{2} \int_V \rho_1\varphi_1 dV; \quad W_{22} = \frac{1}{2} \int_V \rho_2\varphi_2 dV; \quad W_{12} = \frac{1}{2} \int_V (\rho_1\varphi_2 + \rho_2\varphi_1) dV. \quad (6)$

Інтегрування у формулах (4-6) можна здійснювати по всьому простору, тому що області, в яких густина заряду $\rho = 0$, не дають вкладу.

Розкладання (5) має простий фізичний зміст. Величини W_{11} і W_{22} являють собою власну енергію систем 1 і 2 окремо, а W_{12} – це енергія їх взаємодії (потенціальна). Вона залежить від взаємного розташування систем, тобто від їх узагальнених координат $q_\alpha^{(1)}$, $q_\beta^{(2)}$ цих систем і в механіці

називається потенціальною енергією. Тоді за загальними правилами механіки можна визначити силу взаємодії систем:

$$F_{\alpha}^{(1)} = -\frac{\partial W_{12}}{\partial q_{\alpha}^{(1)}}; \quad F_{\beta}^{(2)} = -\frac{\partial W_{12}}{\partial q_{\beta}^{(2)}}. \quad (7)$$

Енергію взаємодії можна переписати у більш компактному вигляді, якщо скористатись формулою (19.11) $\varphi_{1(2)}(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho_{1(2)}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \frac{1}{2} \int_V (\rho_1 \varphi_2 + \rho_2 \varphi_1) dV = \frac{1}{2} \int_V \rho_1(\vec{r}) \int_V \frac{\rho_2(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV' + \frac{1}{2} \int_V \rho_2(\vec{r}) \int_V \frac{\rho_1(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV' = \\ &= \iint \frac{\rho_1(\vec{r}) \rho_2(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV' = W_{21}. \end{aligned} \quad (8)$$

З цього запису також випливає, що енергію взаємодії можна представити також у формах:

$$W_{12} = \int_V \rho_1 \varphi_2 dV = \int_V \rho_2 \varphi_1 dV. \quad (9)$$

Аналогічно можна записати енергію окремої системи зарядів через подвійний інтеграл типу (8):

$$W_{11} = \frac{1}{2} \iint \frac{\rho_1(\vec{r}) \rho_1(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV'. \quad (10)$$

Розглянемо тепер систему точкових зарядів e_1, e_2, \dots, e_n , які знаходяться у точках простору з радіус-вектором $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$. Для такої системи густина заряду, згідно (19.1), виражається через δ -функції Дірака:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{a=1}^n e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a). \quad (11)$$

Підставляючи (11) в (10), отримуємо:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b=1 \\ a \neq b}}^n \frac{e_a e_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^n \frac{e_a^2}{|\vec{r}_a - \vec{r}_a|} = W_{\text{вз}} + W_{\text{вл}}. \quad (12)$$

Тут перша сума, в якій $a \neq b$, є енергією взаємодії точкових зарядів. Її можна записати без множника $1/2$, враховуючи кожен доданок в сумі по одному разу:

$$W_{\text{вз}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b=1 \\ a \neq b}}^n \frac{e_a e_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} = \sum_{\substack{a,b=1 \\ a > b}}^n \frac{e_a e_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|}. \quad (13)$$

Друга сума в (12) описує суму власних енергій точкових зарядів. Кожен доданок в ній розходиться: $W_{\text{вл}} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^n \frac{e_a^2}{|\vec{r}_a - \vec{r}_a|} = \infty$. Це означає, що класична електродинаміка стає неточною на малих відстанях. Ця проблема для точкового заряду є фундаментальною і проявляється також у фізиці елементарних частинок, про що мова йтиме у наступному параграфі.

§22. Класичний радіус електрона. Перенормування

Як було показано у попередньому параграфі, класична електродинаміка приводить до нескінчених (розбіжних) значень енергії електростатичного поля системи точкових частинок, які дають нескінченні власні енергії, що не залежать від їх взаємного розташування:

$$W_{\text{en}} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^n \frac{e_a^2}{|\vec{r}_a - \vec{r}_a|} = \infty. \quad (1)$$

Це проблема класичної електродинаміки і проявляється вона у фізиці елементарних частинок. Щоб уникнути цих нескінченостей, треба припустити, що елементарна частинка не є точковою, тобто має певні розміри. Але це означає наявність у неї внутрішньої структури, тобто неелементарність. Якщо ж припустити, що елементарна частинка є безструктурною, то вона повинна мати властивості абсолютно твердого тіла, і ми приходимо до протиріччя з СТВ, тому що в абсолютно твердому тілі сигнал або сила передається миттєво з нескінченною швидкістю. Отже, елементарна частинка не може бути протяжною, а лише точковою, а це приводить до нескінченної енергії її електростатичного поля.

Таким чином, класична електродинаміка стає внутрішньо суперечливою на малих відстанях. Оцінити цю відстань, на якій проявляються суперечності, можна прирівнявши власну електростатичну енергію електрона, що має радіус R_0 , до його енергії спокою:

$$\frac{1}{2} \frac{e^2}{R_0} = mc^2, \quad (2)$$

звідки $R_0 = \frac{e^2}{2mc^2} \approx 2,8 \cdot 10^{-13}$ см – так званий класичний радіус електрона.

Насправді ж неточності починають проявлятися завдяки квантовим ефектам вже на відстані

$$r \sim \lambda_c = \frac{h}{2\pi mc} \approx 3,9 \cdot 10^{-11} \text{ см} = 137 R_0, \quad (3)$$

де λ_c - так звана комптонівська довжина хвилі електрона.

Для уникнення нескінченостей в електродинаміці використовують метод перенормування, який полягає в наступному. Візьмемо замість (21.12) вираз для енергії:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \frac{e_a e_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b + \vec{\varepsilon}_a|} \quad (4)$$

Додавши до (4) вираз

$$\sum_a m_a c^2 - \frac{1}{2} \sum_a \frac{e_a^2}{|\vec{\varepsilon}_a|} = 0, \quad (5)$$

звідки

$$|\vec{\varepsilon}_a| = \frac{e_a^2}{2m_a c^2} = R_a, \quad (6)$$

отримаємо:

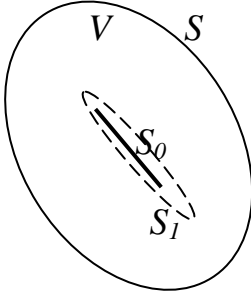
$$W = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \frac{e_a e_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b + \vec{\varepsilon}_a|} + \sum_a m_a c^2 - \frac{1}{2} \sum_a \frac{e_a^2}{|\vec{\varepsilon}_a|}. \quad (7)$$

Цей вираз при $a = b$ вже не буде розбіжним, оскільки 1-й і 3-й доданки скорочуються. По аналогічній схемі виконують усунення нескінченостей – перенормування – в квантовій електродинаміці.

§23. Електроємність провідників

У §21 при обчисленні енергій зарядів в електростатичному полі у формулі (21.3) $W = -\frac{1}{8\pi} \int_V \operatorname{div}(\varphi \vec{E}) dV + \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV$ нами була використана теорема

$$\text{Остроградського-Гауса } \int_V \operatorname{div}(\varphi \vec{E}) dV = \oint_S \varphi \vec{E} d\vec{S}. \quad (1)$$



Але слід мати на увазі, що вона справедлива в області, в середині якої підінтегральна функція $\varphi \vec{E}$ неперервна. Якщо ж всередині області інтегрування V підінтегральна функція $\varphi \vec{E}$ знає скачка, то місця скачка функції необхідно виключити з області V , обмеживши їх замкнутою поверхнею S_0 . Тому у формулі (1) поверхневий інтеграл слід брати по зовнішній поверхні S , що обмежує об'єм V , і по поверхні S_0 , яка виключає з об'єму V місця розриву підінтегральної функції $\varphi \vec{E}$:

$$\int_V \operatorname{div}(\varphi \vec{E}) dV = \oint_S \varphi \vec{E} d\vec{S} + \lim_{S_1 \rightarrow S_0} \oint_{S_1} \varphi \vec{E} d\vec{S}. \quad (2)$$

Для зарядів, зосереджених у скінченій області простору, на нескінченості $\varphi(r) \sim 1/r$, $E \sim 1/r^2$, тому в цьому випадку перший поверхневий інтеграл в (2) на нескінченно віддаленій поверхні S дорівнює 0. Інтегрування по замкнутій поверхні S_1 , яка обмежує поверхню скачка S_0 , при стягуванні поверхні S_1 до поверхні S_0 , з урахуванням граничних умов для нормальних компонент напруженості електричного поля на особливих поверхнях ($E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma$, де σ – поверхнева густина заряду), дає

$$\lim_{S_1 \rightarrow S_0} \oint_{S_1} \varphi \vec{E} d\vec{S} = \oint_{S_0} \varphi (E_{1n} - E_{2n}) dS = -4\pi \oint_{S_0} \varphi \sigma dS. \quad (3)$$

Підставляючи (3) в (21.3), дістанемо:

$$W = \frac{1}{2} \oint_{S_0} \varphi \sigma dS + \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV. \quad (4)$$

Якщо електричні заряди розподілені по поверхні провідників, то слід врахувати, що густина заряду всередині провідника $\rho = 0$, а електростатичний потенціал на поверхні любого провідника має постійне значення: $\varphi_i = \text{const}$. Враховуючи також, що у випадку кількох особливих поверхонь $S_0 = \sum_i S_i$, отримаємо з (4):

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \oint_{S_i} \varphi_i \sigma_i dS = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i \oint_{S_i} \sigma_i dS = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i. \quad (5)$$

Формула (5) визначає енергію системи поверхневих зарядів. Для одиничного провідника ця формула приймає вигляд

$$W = \frac{1}{2} \varphi q, \quad (6)$$

а для двох ізольованих провідників:

$$W = \frac{1}{2} (\varphi_1 q_1 + \varphi_2 q_2). \quad (7)$$

Оскільки рівняння поля в пустоті лінійні і однорідні, то зв'язок між зарядами і потенціалами провідників повинен бути лінійним, тобто

$$\varphi_k = \sum_i \gamma_{ki} q_i, \quad \gamma_{ki} = \gamma_{ik}, \quad (8)$$

де q_i – заряд i -го провідника. Для одиничного провідника формула (8) приймає вигляд

$$\varphi_1 = \gamma_{11} q_1 = \frac{q_1}{C_{11}}, \quad C_{11} = \frac{1}{\gamma_{11}} \quad (9)$$

Величина C_{11} називається ємністю одиничного провідника. Підставивши (9) в (6), отримуємо енергію одиничного провідника

$$W = \frac{1}{2} \varphi_1 q_1 = \frac{q_1^2}{2C_{11}}. \quad (10)$$

Назвемо конденсатором систему двох провідників, заряджених однаковими по величині і протилежними по знакам зарядами: $q_1 = -q_2 \equiv q$. Тоді згідно (8): $\varphi_1 = \gamma_{11} q_1 + \gamma_{12} q_2 = \gamma_{11} q - \gamma_{12} q = (\gamma_{11} - \gamma_{12}) q$, $\varphi_2 = \gamma_{21} q_1 + \gamma_{22} q_2 = (\gamma_{21} - \gamma_{22}) q$. Віднімаючи від 1-го рівняння 2-ге, знайдемо напругу на обкладинках конденсатора:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = (\gamma_{11} - 2\gamma_{12} + \gamma_{22}) q = \frac{q}{C_{12}}, \quad (11)$$

де $C_{12} = \frac{1}{(\gamma_{11} - 2\gamma_{12} + \gamma_{22})}$ – ємність конденсатора, яка залежить від геометричних розмірів провідників і їх взаємного розташування. Підстановка (11) в (7) дозволяє отримати енергію конденсатора:

$$W = \frac{1}{2} (\varphi_1 q - \varphi_2 q) = \frac{q}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C_{12}}. \quad (12)$$

§24. Постійне магнітне поле у вакуумі

Незалежне від часу магнітне поле задовольняє системі рівнянь (18.3-4):

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \text{div } \vec{H} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \text{div } \vec{H} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Оскільки $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, то з рівняння неперервності (8.8) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$ випливає умова стаціонарності струмів:

$$\text{div } \vec{j} = 0. \quad (3)$$

Проте, для існування відмінного від нуля струму ($\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}) \neq 0$) необхідно, щоб заряди рухались. Тому магнітне поле може створюватись стаціонарною, але не статичною системою зарядів.

Проінтегруємо рівняння (1) по деякій поверхні S і скористаємось формулою Стокса:

$$\int_S \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} d\vec{S} \Rightarrow \oint_l \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} I. \quad (4)$$

Тут l – контур, на який спирається поверхня S , $I = \int_S \vec{j} d\vec{S} = \frac{dq}{dt}$ – сила струму, що протікає через цю поверхню і яка чисельно дорівнює заряду, що

переноситься через площу за одиницю часу. Формула (4) носить назву закону Ерстеда.

Із рівняння (2) можна зробити висновок про вихровий (соленоїдальний) характер магнітного поля, тобто, силові лінії магнітного поля є замкненими. Під силовими лініями векторного поля розуміють криві, дотичні до яких співпадають з напрямком вектора поля в даній точці.

В силу (2) напруженість магнітного поля \vec{H} можна представити у вигляді ротора деякого вектора $\vec{A}(\vec{r})$ - векторного потенціалу:

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}. \quad (5)$$

Щоб знайти рівняння, якому задовольняє векторний потенціал, підставимо (5) в (1):

$$\text{rot } \vec{H} = \text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (6)$$

Накладемо на векторне поле \vec{A} додаткову умову (17.9): $\text{div } \vec{A} = 0$, (7) яка носить назву кулонівської калі бровки Кулона. В результаті (6) набирає вигляду:

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (8)$$

Рівняння (8) подібне до рівняння Пуассона (18.8): $\Delta \varphi = -4\pi\rho$, яке, згідно (19.11), має загальний розв'язок $\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$. По аналогії з ним запишемо

розв'язок рівняння (8) для векторного потенціалу:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} dV', \quad (9)$$

де $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ - відстань від елемента об'ємного струму в точці \vec{r}' до точки визначення потенціалу \vec{A} . Щоб знайти за отриманим виразом для векторного потенціалу напруженість магнітного поля, застосуємо, згідно (5), операцію ротора до (9):

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} dV' = \frac{1}{c} \int_V \vec{\nabla}_r \times \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} dV' = \frac{1}{c} \int_V \left(\vec{\nabla}_r \frac{1}{R} \right) \times \vec{j}(\vec{r}') dV';$$

але $\vec{\nabla}_r R = -\frac{1}{R^2} \cdot \frac{\vec{R}}{R} = -\frac{\vec{R}}{R^3}$, отже:

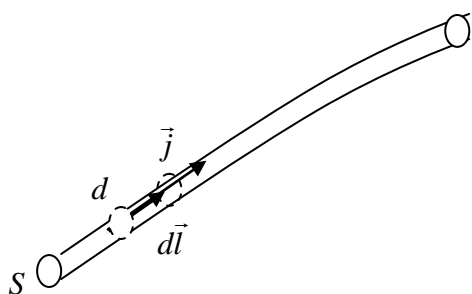
$$\vec{H}(\vec{r}) = -\frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{R} \times \vec{j}(\vec{r}')}{R^3} dV' = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} dV' - \quad (10)$$

розшукувана напруженість об'ємних струмів. Підінтегральний вираз в (10) визначає напруженість, створену елементом об'ємного струму:

$$d\vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} dV'. \quad (11)$$

Формули (10-11) носять назву закону Біо-Савара-Лапласа для об'ємних струмів.

Якщо поле створюється квазілінійним струмом (струмом, що протікає по тонкому провіднику, поперечні розміри якого набагато менші за повздовжні), то у формулах (10) і (11) можна від інтегрування по об'єму перейти до інтегрування вздовж контуру провідника, використовуючи заміну:



$$\vec{j}dV' \rightarrow Id\vec{l} . \quad (12)$$

Дійсно, згідно рис., $\vec{j}dV' = \vec{j}Sdl = jSd\vec{l} = Id\vec{l}$.

Таким чином, закон Біо-Савар-Лапласа для квазілінійних струмів приймає вигляд:

$$d\vec{H} = \frac{I}{c} \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} , \quad (13)$$

$$\vec{H} = \frac{I}{c} \int \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} . \quad (14)$$

Із формул (13) і (14) випливає правило правого гвинта, яке визначає напрям магнітного поля: *Якщо гвинт обертати так, щоб напрямок його поступального руху співпав з напрямком струму, то його обертання вказуватиме напрям силових ліній магнітного поля.*

§25. Сила Ампера

Знайдемо вираз для сили, що діє на провідник зі струмом в стаціонарному магнітному полі. Ця сила носить назву сили Ампера. Її будемо визначати як результат сумарної дії сили Лоренца на всі заряджені частинки, які обумовлюють електричний струм. Як відомо, на рухому заряджену частинку в магнітному полі діє сила Лоренца

$$\vec{f}_n = \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H} . \quad (1)$$

У провіднику в об'ємі dV міститься $dN = ndV$ заряджених частинок, де n – їхня концентрація, тому сумарна сила, що діє на всі заряджені частинки в даному об'ємі, дорівнює

$$d\vec{F} = \vec{f}_n \cdot dN = \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H} ndV . \quad (2)$$

Враховуючи визначення густини струму $\vec{j} = \rho\vec{v} = en\vec{v}$, (3) перепишемо формулу (2) у вигляді:

$$d\vec{F} = \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{H} dV . \quad (4)$$

Звідси, зокрема, сила, що діє на об'ємний струм в одиниці об'єму, дорівнює:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV} = \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{H} , \quad (5)$$

а повна сила, що діє на електричний струм в скінченному об'ємі V , дорівнює:

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int_V \vec{j} \times \vec{H} dV . \quad (6)$$

У випадку квазілінійного струму у формулах (4)-(6) потрібно зробити заміну (24.12) $\vec{j}dV \rightarrow Id\vec{l}$, в результаті отримуємо для сили Ампера, що діє на елемент квазілінійного провідника і на провідник скінченної довжини зі струмом відповідно:

$$d\vec{F} = \frac{I}{c} d\vec{l} \times \vec{H} , \quad \vec{F} = \frac{I}{c} \int d\vec{l} \times \vec{H} . \quad (7)$$

Враховуючи правила векторного множення, з формул (7) можна визначити напрямок сили Ампера, який узгоджується з відомим правилом лівої руки.

§26. Магнітне поле системи стаціонарних струмів на великих відстанях.

Магнітний момент

Знайдемо магнітне поле на великих відстанях від обмеженої системи стаціонарних струмів. Використовуючи загальний розв'язок рівняння

Пуассона для векторного потенціалу (24.9) $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$, підставимо в

цю формулу розкладання (20.2) для величини оберненої відстані між елементом об'ємного струму $\vec{j}(\vec{r}') dV'$ і точкою спостереження

$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \dots$. Отримаємо:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{r} dV' + \frac{1}{c} \int_V \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}')}{r^3} \vec{j}(\vec{r}') dV' = \frac{1}{cr} \int_V \vec{j}(\vec{r}') dV' + \frac{1}{cr^3} \int_V (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') dV'. \quad (1)$$

Покажемо, що $\int_V \vec{j}(\vec{r}') dV' = 0$. Розглянемо для цього дивергенцію по

координатам вектора \vec{r}' векторного поля $(\vec{a} \cdot \vec{r}') \cdot \vec{j}(\vec{r}')$, де \vec{a} - деякий сталий вектор. Отже,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}'((\vec{a} \cdot \vec{r}') \cdot \vec{j}(\vec{r}')) &= \vec{\nabla}'((\vec{a} \cdot \vec{r}') \cdot \vec{j}(\vec{r}')) = \vec{\nabla}'(\vec{a} \cdot \vec{r}') \cdot \vec{j}(\vec{r}') + (\vec{a} \cdot \vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \vec{j}(\vec{r}') = \\ &= \operatorname{grad}'(\vec{a} \cdot \vec{r}') \cdot \vec{j}(\vec{r}') + (\vec{a} \cdot \vec{r}') \cdot \operatorname{div}' \vec{j}(\vec{r}'). \end{aligned} \quad (2)$$

Але в силу рівняння неперервності для стаціонарних струмів виконується умова (24.3): $\operatorname{div}' \vec{j}(\vec{r}') = 0$; врахуємо також наступне:

$$\operatorname{grad}'(\vec{a} \cdot \vec{r}') = \vec{\nabla}'(a_x x' + a_y y' + a_z z') = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x'} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y'} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z'} \right) (a_x x' + a_y y' + a_z z') = \vec{i} a_x + \vec{j} a_y + \vec{k} a_z = \vec{a}. \quad (3)$$

Тоді (2) прийме вигляд:

$$\operatorname{div}'((\vec{a} \cdot \vec{r}') \cdot \vec{j}(\vec{r}')) = \vec{a} \cdot \vec{j}(\vec{r}'). \quad (4)$$

Проінтегруємо цей вираз по довільному об'єму і скористаємось теоремою Остроградського – Гауса:

$$\int_V \vec{a} \cdot \vec{j}(\vec{r}') dV' = \vec{a} \cdot \int_V \vec{j}(\vec{r}') dV' = \int_V \operatorname{div}'((\vec{a} \cdot \vec{r}') \cdot \vec{j}(\vec{r}')) dV' = \oint_S (\vec{a} \cdot \vec{r}') \cdot \vec{j}(\vec{r}') d\vec{S} = 0,$$

а оскільки вектор \vec{a} - довільний, то звідси випливає, що $\int_V \vec{j}(\vec{r}') dV' = 0$, що й вимагалось довести.

Таким чином, в (1) залишається лише другий доданок. Перетворимо його, використовуючи тотожність:

$$\vec{r} \times [\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{r}'] = \vec{j}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} \cdot \vec{r}') - \vec{r}' \cdot (\vec{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}')), \quad (5)$$

яка є наслідком відомої формули $\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}] = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$. В останньому доданку зробимо заміну $\operatorname{div}'((\vec{r} \cdot \vec{r}') \cdot \vec{j}(\vec{r}')) = \vec{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}')$, яка випливає з (4), якщо замість \vec{a} взяти \vec{r} , який є сталим по відношенню до змінних компонент вектора \vec{r}' . Помножимо рівність (5) на довільний сталий вектор \vec{a} і проінтегруємо по всьому простору:

$$\vec{a} \cdot \left\{ \int_V \vec{r} \times [\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{r}'] dV' \right\} = \vec{a} \cdot \int_V \{ \vec{j}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} \cdot \vec{r}') - \vec{r}' \cdot \operatorname{div}'(\vec{j}(\vec{r}')(\vec{r} \cdot \vec{r}')) \} dV' =$$

$$= \vec{a} \cdot \int_V \vec{j}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} \cdot \vec{r}') dV' - \int_V (\vec{a} \cdot \vec{r}') \cdot \text{div}'(\vec{j}(\vec{r}')(\vec{r} \cdot \vec{r}')) dV'.$$

Перетворимо останній інтеграл з урахуванням (3) за допомогою тотожності:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \cdot \vec{r}') \cdot \text{div}'(\vec{j}(\vec{r}')(\vec{r} \cdot \vec{r}')) &= \text{div}'((\vec{a} \cdot \vec{r}') \cdot \vec{j}(\vec{r}')(\vec{r} \cdot \vec{r}')) - \vec{j}(\vec{r}')(\vec{r} \cdot \vec{r}') \cdot \text{grad}'(\vec{a} \cdot \vec{r}') = \\ &= \text{div}'\{\vec{j}(\vec{r}')(\vec{a} \cdot \vec{r}')(\vec{r} \cdot \vec{r}')\} - (\vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{a})(\vec{r} \cdot \vec{r}') \end{aligned}$$

Після інтегрування по всьому простору і застосування теореми Остроградського-Гауса доданок з дивергенцією обертається в 0, так що отримуємо:

$$\vec{a} \cdot \left\{ \int_V \vec{r} \times [\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{r}'] dV' \right\} = 2\vec{a} \cdot \int_V \vec{j}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} \cdot \vec{r}') dV'.$$

Завдяки довільності вектора \vec{a} звідси випливає

$$\vec{r} \times \int_V [\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{r}'] dV' = 2 \int_V \vec{j}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} \cdot \vec{r}') dV'. \quad (6)$$

Підставляючи результат (6) в (1), отримуємо

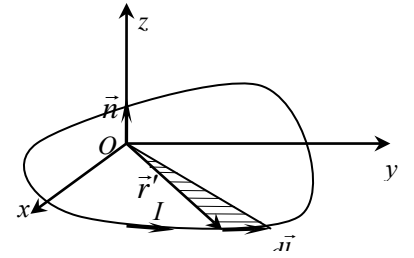
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{cr^3} \int_V (\vec{r} \cdot \vec{r}') \cdot \vec{j}(\vec{r}') dV' = \frac{\vec{r}}{2cr^3} \times \int_V [\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{r}'] dV' = \frac{\vec{M} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (7)$$

де
$$\vec{M} = \frac{1}{2c} \int_V [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] dV'. \quad (8)$$

– так званий магнітний дипольний момент системи (об'ємних струмів). Отже, формули (7), (8) дають векторний потенціал далеко від системи стаціонарних струмів.

Для прикладу обчислимо магнітний момент плоского контуру з постійним струмом I , який лежить у площині $ХОУ$ (див. малюнок). Зробивши заміну $\vec{j}dV' = Id\vec{l}$, запишемо

$$\vec{M} = \frac{I}{2c} \oint_l [\vec{r}' \times d\vec{l}]. \quad (9)$$



Але $\frac{1}{2}[\vec{r}' \times d\vec{l}] = d\vec{S}$ – по величині це площа заштрихованого трикутника, а по

напрямку співпадає з нормаллю \vec{n} до площини контуру. Тому $\frac{1}{2} \oint_l [\vec{r}' \times d\vec{l}] = S\vec{n}$,

де S – площа фігури, обмеженої контуром зі струмом. Отже, магнітний момент плоского контуру зі струмом дорівнює

$$\vec{M} = \frac{I}{c} S\vec{n}. \quad (10)$$

Обчислимо магнітний момент системи заряджених частинок. Враховуючи представлення густини заряду для системи точкових зарядів (19.1), запишемо для густини їхнього струму вираз:

$$\vec{j} = \sum_a e_a \vec{v}_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a), \quad (11)$$

де e_a , \vec{v}_a , \vec{r}_a – заряд, швидкість і радіус-вектор a -ої частинки. Підставляючи (11) у (8) і враховуючи властивості δ -функції Дірака (19.3), отримуємо магнітний момент для системи точкових зарядів:

$$\vec{M} = \sum_a \frac{e_a}{2c} [\vec{r}_a \times \vec{v}_a] = \sum_a \frac{e_a}{2m_a c} [\vec{r}_a \times \vec{p}_a] = \sum_a \frac{e_a}{2m_a c} \cdot \vec{l}_a, \quad (12)$$

де $[\vec{r}_a \times \vec{p}_a] = \vec{l}_a$ – момент імпульсу a -тої частинки.

Якщо система складається з частинок одного сорту ($e_a \equiv e$, $m_a \equiv m$), то (12) набуде вигляду:

$$\vec{M} = \frac{e}{2mc} \sum_a \vec{l}_a = \frac{e}{2mc} \vec{L}, \quad (13)$$

де \vec{L} – повний момент імпульсу системи. Зокрема, формула (13) справедлива завжди для окремої зарядженої частинки. Коефіцієнт пропорційності між магнітним і механічним моментом

$$\frac{M}{L} = \frac{e}{2mc} = \eta \quad (14)$$

називається гіромагнітним відношенням і визначається відношенням заряду частинки до її маси. Ці моменти обумовлені рухом заряджених частинок у просторі. Але багатьом частинкам, як зарядженим, так і нейтральним, притаманний також внутрішній – спіновий магнітний момент, який визначається їх внутрішньою структурою. Між спіновим магнітним \vec{M}_s і механічним \vec{L}_s моментами виконується співвідношення типу (13):

$$\vec{M}_s = \eta_s \cdot \vec{L}_s, \quad (15)$$

але коефіцієнт пропорційності η_s не співпадає з (14) і різний для різних частинок. Спіновий магнітний момент є квантовим явищем, яке в класичній механіці і електродинаміці не має пояснення.

Повернемося до формули (7) і обчислимо напруженість магнітного поля далеко від системи струмів. Маємо:

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} = \text{rot } \frac{\vec{M} \times \vec{r}}{r^3} = \vec{\nabla} \times \frac{\vec{M} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3} \vec{\nabla} \times [\vec{M} \times \vec{r}] - [\vec{M} \times \vec{r}] \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r^3} \right). \quad (16)$$

Але $\vec{\nabla} \times [\vec{M} \times \vec{r}] = \vec{M} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) - (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} = 3\vec{M} - \vec{M} = 2\vec{M}$, де враховано, що:

$$1) \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \text{div } \vec{r} = 3; \quad 2) (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} = \left(M_x \frac{\partial}{\partial x} + M_y \frac{\partial}{\partial y} + M_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{r} = \vec{M}.$$

У другому доданку формули (16) отримаємо: $\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r^3} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^3} \right) \vec{\nabla} r = -3 \frac{1}{r^4} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{3\vec{r}}{r^5}$.

Таким чином, (16) набуде вигляду:

$$\vec{H} = \frac{2\vec{M}}{r^3} + \frac{3[\vec{M} \times \vec{r}] \times \vec{r}}{r^5}.$$

Далі, останній доданок в цій формулі перетворимо, використовуючи формулу:

$$[\vec{M} \times \vec{r}] \times \vec{r} = -\vec{r} \times [\vec{M} \times \vec{r}] = \vec{r} \times [\vec{r} \times \vec{M}] = \vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{M}) - r^2 \vec{M}.$$

Тоді остаточно напруженість магнітного поля на відстанях, далеких від системи визначатиметься формулою:

$$\vec{H} = \frac{2\vec{M}}{r^3} + \frac{3\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{M})}{r^5} - \frac{3r^2 \vec{M}}{r^5} = \frac{3\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{M})}{r^5} - \frac{\vec{M}}{r^3}. \quad (17)$$

Відмітимо, що формула (17) з точністю до позначень співпадає з формулою для напруженості поля електричного диполя (20.9).

§27. Енергія струму в постійному магнітному полі

Обчислимо повну магнітну енергію обмеженої системи стаціонарних струмів. Густина магнітної енергії ($\vec{E} = 0$) дорівнює $w = \frac{\vec{H}^2}{8\pi}$. (1)

З допомогою тотожності $\text{div}[\vec{H} \times \vec{A}] = \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{A}$ та формули $\vec{H} = \text{rot} \vec{A}$ знаходимо: $\text{div}[\vec{H} \times \vec{A}] = \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{H} - \vec{H}^2 \Rightarrow \vec{H}^2 = \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{H} - \text{div}[\vec{H} \times \vec{A}]$, звідки густина енергії:

$$w = \frac{\vec{A} \cdot \text{rot} \vec{H}}{8\pi} - \frac{\text{div}[\vec{H} \times \vec{A}]}{8\pi}. \quad (2)$$

Повна енергія магнітного поля є інтеграл від (2) по всьому об'єму. Але об'ємний інтеграл від другого доданку в (2) за теоремою Остроградського-Гауса перетворюється в інтеграл по нескінченно віддаленій поверхні і обертається в 0 завдяки швидкому спаданню добутку $[\vec{H} \times \vec{A}] \sim \frac{1}{r^3} \cdot \frac{1}{r^2}$ на великих відстанях від системи (див. §26). Тому, скориставшись рівнянням Максвела $\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$, отримаємо для повної енергії вираз:

$$W = \int_V w dV = \frac{1}{8\pi} \int_V \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{H} dV = \frac{1}{2c} \int_V \vec{j} \cdot \vec{A} dV. \quad (3)$$

Якщо в системі є декілька провідників зі струмом, то густина струму і повний векторний потенціал за принципом суперпозиції дорівнюватимуть сумі струмів і створюваних ними потенціалів: $\vec{j} = \sum_a \vec{j}_a$, $\vec{A} = \sum_a \vec{A}_a$; підставляючи ці вирази в (3), знайдемо: $W = \sum_a W_{aa} + \sum_{a>b} W_{ab}$, (4)

де $W_{aa} = \frac{1}{2c} \int \vec{j}_a \cdot \vec{A}_a dV$ - власна магнітна енергія a -го провідника; (5)

$$W_{ab} = \frac{1}{2c} \int \vec{j}_a \cdot \vec{A}_b dV_a + \frac{1}{2c} \int \vec{j}_b \cdot \vec{A}_a dV_b \quad (6)$$

- енергія магнітної взаємодії провідників a і b . Інтегрування в (5) і (6) здійснюється по об'ємам провідників. Якщо скористатись формулою (24.9)

$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$, то можна показати, що обидва доданки в (6) рівні:

$$\frac{1}{2c} \int \vec{j}_a \cdot \vec{A}_b dV_a = \frac{1}{2c} \int \vec{j}_a(\vec{r}) \left(\frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}_b(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV_b \right) dV_a = \frac{1}{2c^2} \iint \frac{\vec{j}_a \cdot \vec{j}_b}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV_a dV_b = \frac{1}{2c} \int \vec{j}_b \cdot \vec{A}_a dV_b.$$

Отже, (6) можна представити у вигляді: $W_{ab} = \frac{1}{c^2} \iint \frac{\vec{j}_a \cdot \vec{j}_b}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV_a dV_b$. (7)

Густина струму в провідниках і створюване ними поле пропорційні силі струму ($j_a \sim I_a$; $A_a \sim I_a$). Тому власну і взаємну енергії провідників можна представити у вигляді:

$$W_{aa} = \frac{I_a^2}{2c^2} L_{aa}, \quad W_{ab} = \frac{I_a I_b}{c^2} L_{ab}, \quad (8)$$

де L_{aa} і $L_{ab} = L_{ba}$ - коефіцієнти, які не залежать від сили струму, але залежать від форми і розмірів провідників, їх взаємного розташування та від розподілу

струму по їх перерізам. Вони називаються відповідно L_{aa} – коефіцієнтами самоіндукції, та L_{ba} – коефіцієнтами взаємної індукції.

У квазілінійних провідників, товщина яких мала порівняно з їх довжиною, можна в (7) зробити заміну $\vec{j}dV = Id\vec{l}$; порівнявши отриманий результат з (7), знайдемо вираз для коефіцієнтів взаємної індукції у вигляді подвійного контурного інтегралу:

$$L_{ab} = \oint \frac{d\vec{l}_a d\vec{l}_b}{R_{ab}}, \quad R_{ab} = |\vec{r} - \vec{r}'|. \quad (9)$$

З (9) видно, що L_{ab} має розмірність довжини і по порядку величини

$$L_{ab} \approx \frac{l_a l_b}{R_{ab}}, \quad \text{де } l_a, l_b \text{ – довжини провідників, } R_{ab} \text{ – середня відстань між ними.}$$

Але наближення нескінченно тонкого провідника непридатне при обчисленні коефіцієнта самоіндукції, тому що відповідний інтеграл буде розходитись. Тому коефіцієнт самоіндукції слід обчислювати з (8) через магнітну енергію:

$$L_{aa} = \frac{2c^2 W_{aa}}{I_a^2}. \quad (10)$$

Встановимо зв'язок коефіцієнта індуктивності з магнітними потоками для системи квазілінійних провідників. Замінивши в (5) $\vec{j}_a dV_a = I_a d\vec{l}_a$, отримаємо:

$$W_{aa} = \frac{1}{2c} \int_V \vec{j}_a \vec{A}_a dV_a = \frac{I_a}{2c} \oint_{l_a} \vec{A}_a d\vec{l}_a = [\text{Т-ма Стокса}] = \frac{I_a}{2a} \oint_{s_a} \text{rot } \vec{A}_a d\vec{S}_a = \frac{I_a}{2c} \oint_{s_a} \vec{H}_a d\vec{S}_a = \frac{I_a}{2c} \Phi_{aa}, \quad (11)$$

де Φ_{aa} – потік магнітного поля, створеного провідником зі струмом в провіднику, через поверхню, обмежену вісевою лінією провідника.

Аналогічне перетворення дає:

$$W_{ab} = \frac{I_a}{c} \Phi_{ab} = \frac{I_b}{c} \Phi_{ba}, \quad (12)$$

де $\Phi_{ab} = \oint_{s_a} \vec{H}_b d\vec{S}_a$ – магнітний потік, створений контуром b через контур a .

Порівнюючи (11-12) з (8), знаходимо:

$$W_{aa} = \frac{I_a}{2c} \Phi_{aa} = \frac{I_a^2}{2c^2} L_{aa} \Rightarrow \Phi_{aa} = \frac{I_a L_{aa}}{c}; \quad W_{ab} = \frac{I_b}{c} \Phi_{ab} = \frac{I_a I_b}{c^2} L_{ab} \Rightarrow \Phi_{ab} = \frac{I_a L_{ab}}{c}, \quad (13)$$

тобто індуктивності виступають як коефіцієнти пропорційності між відповідним магнітним потоком і силою струму.

МОДУЛЬ III. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ (ЕМХ) У ВАКУУМІ

§28. Хвильове рівняння і його розв'язок

Запишемо рівняння Максвелла у вакуумі при відсутності зарядів і струмів ($\rho = 0$, $\vec{j} = 0$)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \vec{H} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 0, & \operatorname{div} \vec{H} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Ці рівняння можуть мати відмінні від нуля розв'язки. Це означає, що ЕМП може існувати навіть при відсутності зарядів. Такі електромагнітні поля, що існують в пустоті при відсутності зарядів, називають електромагнітними хвилями. Дослідимо такі поля. Застосуємо до першого з рівнянь (1) операцію *rot*:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

або, враховуючи рівняння (1) $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, знайдемо

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Аналогічно отримується рівняння для напруженості магнітного поля:

$$\Delta \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

(2) і (3) називають хвильовими рівняннями. Якщо при відсутності зарядів і струмів використати калібровку $\varphi = 0$, $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ (17.12), то можна отримати аналогічне до (2) і (3) хвильове рівняння для векторного потенціалу (17.13):

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (4)$$

Рівняння (2-4) і описують електромагнітні хвилі у вакуумі.

Розглянемо окремий випадок, коли поле залежить лише від однієї просторової координати x і часу t , тобто $\vec{E} = \vec{E}(x,t)$, $\vec{H} = \vec{H}(x,t)$. Тоді рівняння (2-4) набудуть вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (5)$$

де під $u(x,t)$ розуміють довільну компоненту векторів $\vec{E}, \vec{H}, \vec{A}$. Як було показано в курсі ММФ (в чому можна також переконатись безпосередньою підстановкою в (5)), розв'язком рівняння (5) є

$$u(x,t) = g(x+ct) + h(x-ct), \quad (6)$$

де g і h - довільні, двічі диференційовані функції своїх аргументів. Розв'язок (6) являє собою накладання двох збурень, кожне з яких поширюється вздовж вісі Ox в сторону зменшення або зростання x зі швидкістю c по закону

$$x = \pm ct + x_0. \quad (7)$$

Такі збурення називаються біжучими плоскими електромагнітними хвилями.

Розглянемо плоску хвилю, яка поширюється в додатному напрямку осі

x . В цій хвилі всі польові характеристики є функціями тільки аргументу $x-ct$, в тому числі і векторний потенціал: $\vec{A} = \vec{A}(x-ct)$. При використанні калібровки (17.12) $\varphi=0, \operatorname{div} \vec{A}=0$ ми отримуємо наступні вирази для напруженостей полів:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi = -\frac{1}{c} \cdot \vec{A}' \cdot (-c) = \vec{A}',$$

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}(x-ct) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(x-ct) \times \vec{A}' = \operatorname{grad} x \times \vec{A}' = \vec{i} \times \vec{A}', \quad (8)$$

де \vec{i} - одиничний орт у напрямку вісі Ox , який співпадає з напрямком поширення хвилі \vec{n} . Це дозволяє замість (8) встановити наступне, незалежне від вибору системи координат співвідношення між напруженостями електричного і магнітного полів:

$$\vec{H} = \vec{n} \times \vec{A}' = \vec{n} \times \vec{E}. \quad (9)$$

Таким чином, у плоскій ЕМХ напруженості перпендикулярні одна одній і перпендикулярні напрямку поширення хвилі: $\vec{H} \perp \vec{E}, \vec{H} \perp \vec{n}, \vec{E} \perp \vec{n}$. З (9) також випливає, що електричне і магнітне поля плоскої хвилі однакові за абсолютною величиною:

$$|\vec{H}| = |\vec{n}| \cdot |\vec{E}| \cdot \sin 90^\circ = |\vec{E}|.$$

Знайдемо потік енергії в плоскій ЕМХ. Він визначається вектором Пойтінга:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}] = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times [\vec{n} \times \vec{E}]] = \frac{c}{4\pi} \{ \vec{n} \cdot E^2 - \vec{E}(\vec{E} \cdot \vec{n}) \} = \frac{c}{4\pi} E^2 \cdot \vec{n} = c \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \vec{n},$$

$$\vec{S} = c w \vec{n}, \quad (10)$$

де $w = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}$ - густина енергії ЕМП хвилі. Отже, потік енергії поширюється зі швидкістю світла в напрямку поширення хвилі \vec{n} . Густина імпульсу (імпульс одиниці об'єму) ЕМХ дорівнює:

$$\vec{g} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{c w \vec{n}}{c^2} = \frac{w}{c} \vec{n}. \quad (11)$$

Це співвідношення між густиною імпульсу \vec{g} і густиною енергії ЕМХ w узгоджується із формулою зв'язку між енергією ε і імпульсом \vec{p} фотонів - квантів світла, або інших частинок, що рухаються зі швидкістю світла. Дійсно, якщо концентрація фотонів дорівнює N , тоді $\vec{g} = N \vec{p}$, $w = N \varepsilon$, тому згідно (11) маємо:

$$N \vec{p} = \frac{N \varepsilon}{c} \vec{n} \Rightarrow \vec{p} = \frac{\varepsilon}{c} \vec{n}. \quad (12)$$

§29. Плоска монохроматична хвиля

Серед біжучих плоских хвиль важливе місце займають монохроматичні хвилі, для яких будь-яка компонента змінюється по гармонічному закону:

$$u(x,t) = u_0 \cos[k(x-ct) + \varphi_0], \quad (1)$$

де u_0, k, φ_0 - сталі величини, значення яких визначаються умовами збудження хвилі. Величина $\varphi = k(x-ct) + \varphi_0$ називається фазою хвилі, φ_0 - початкова фаза, u_0 - амплітуда. Величину $k \cdot c = \omega$ називають циклічною частотою. Відмітимо, що, розкривши в (1) під знаком косинуса круглі дужки, можна

записати

$$kx = (\vec{i}k + \vec{j} \cdot 0 + \vec{l} \cdot 0) \cdot (\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{l}z) = \vec{k} \cdot \vec{r}, \quad \vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{i},$$

або, в загальному випадку довільного напрямку поширення, $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$ – так званий хвильовий вектор, який співпадає з напрямком поширення хвилі \vec{n} (у формулі (1) це є напрямок вісі Ox - орт \vec{i}). Звідси випливає, що в загальному випадку, коли плоска монохроматична хвиля поширюється в довільному напрямку \vec{n} , компоненти хвилі можуть бути представлені у вигляді

$$u(\vec{r}, t) = u_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_0). \quad (2)$$

Співвідношення $k \cdot c = \omega$ визначає закон дисперсії електромагнітних хвиль.

Звідси знаходиться групова швидкість: $v_{gp} = \frac{d\omega}{dk} = c$. Існує також фазова швидкість, яка визначається умовою сталості фази ЕМХ:

$$kx - \omega t = const = kx_0 - \omega t_0 \Rightarrow v_\phi = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{\omega}{k} = c. \quad \text{Отже, групова і фазова швидкість}$$

електромагнітних хвиль у вакуумі співпадають. З фізичної точки зору це означає, що хвильові пакети, тобто, суперпозиції плоских монохроматичних хвиль з різними частотами, поширюються у вакуумі без зміни форми.

$$\text{Період хвилі дорівнює } T = \frac{2\pi}{\omega}; \text{ довжина хвилі } \lambda = c \cdot T = 2\pi \frac{c}{\omega} = 2\pi \frac{\phi}{k\phi} = \frac{2\pi}{k}.$$

Таким чином, модуль хвильового вектору зв'язаний з довжиною хвилі співвідношенням $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

В електродинаміці часто користуються комплексними представленням полів:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \quad (3)$$

маючи при цьому на увазі, що вимірюваними величинами є дійсні частини відповідних комплексних виразів:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right\}, \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{H}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right\}. \quad (4)$$

Підставляючи (3) в рівняння Максвела (28.1), отримаємо зв'язок між комплексними амплітудами полів:

$$\vec{H}_0 = \vec{n} \times \vec{E}_0, \quad \vec{E}_0 = \vec{H}_0 \times \vec{n}, \quad \vec{n} \cdot \vec{E}_0 = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{H}_0 = 0, \quad (5)$$

де $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$ - одиничний вектор у напрямку поширення хвилі. Співвідношення

(5) означають, що вектори \vec{H}_0, \vec{E}_0 і \vec{n} утворюють трійку взаємно перпендикулярних векторів, тобто плоска монохроматична хвиля є поперечною, причому модулі амплітуд полів однакові: $|\vec{E}_0| = |\vec{H}_0|$.

§30. Властивості плоскої монохроматичної хвилі

а) Ефект Доплера. Розглянемо релятивістськи інваріантний вираз

$$\vec{k} \vec{r} - \omega t = Inv. \quad (1)$$

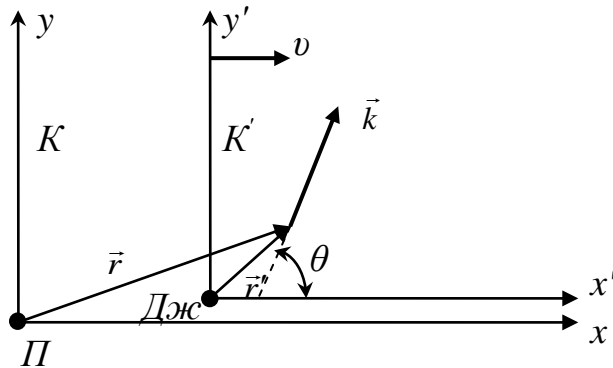
Релятивістська інваріантність цього виразу необхідна, щоб плоска монохроматична ЕМХ однаково виглядала в усіх ІСВ. Представимо (1) у

чотиривимірному вигляді, ввівши 4-вимірний хвильовий вектор

$$k^i (k^0, \vec{k}) \quad k^0 = \frac{\omega}{c} = |\vec{k}|. \quad (2)$$

Тоді релятивістська інваріантність виразу (1) є інваріантністю скалярного добутку 4-вимірного хвильового вектору з 4-радіус-вектором:

$$\omega t - \vec{k} \vec{r} = k_{\mu} x^{\mu} = \text{Inv} \quad (3)$$



Нехай джерело ЕМХ є нерухомим відносно ІСВ K' і випромінює плоску монохроматичну хвилю з частотою ω_0 під деяким кутом θ' до вісі Ox' . Приймач хвиль знаходиться в ІСВ K і спостерігає рух випроміненої хвилі під кутом θ до вісі Ox .

Користуючись формулами перетворень 4-векторів, знайдемо зв'язок між часовими компонентами хвильового вектора випроміненої і прийнятої хвилі:

$$k^{0'} = \frac{k^0 - \frac{v}{c} k^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad k^{0'} = \frac{\omega'}{c} = [\omega' \equiv \omega_0] = \frac{\omega_0}{c}; \quad k^0 = \frac{\omega}{c}; \quad k^1 = k_x = |\vec{k}| \cdot \cos \theta; \Rightarrow$$

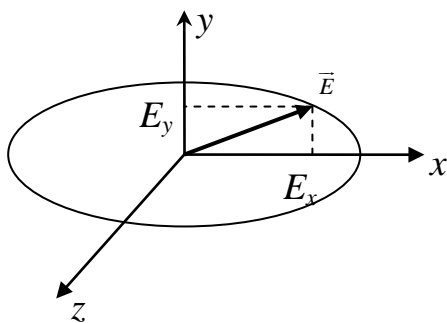
$$\Rightarrow \frac{\omega_0}{c} = \frac{\frac{\omega}{c} - \frac{v}{c} \frac{\omega}{c} \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

звідки отримуємо зв'язок між частотою ЕМХ в нерухомій і рухомій системами відліку:

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}. \quad (4)$$

Формула (4) визначає ефект Доплера – зміну частоти ЕМХ, викликану відносним рухом джерела і приймача.

б) Поляризація ЕМХ. Представимо вектор напруженості електричного поля \vec{E} монохроматичної хвилі, яка поширюється вздовж вісі z , у вигляді суми двох компонентів E_x і E_y :



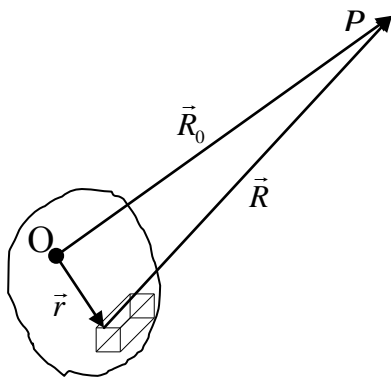
$$E_x = E_1 \cos(\vec{k} \vec{r} - \omega t + \varphi_0), \quad E_y = \pm E_2 \sin(\vec{k} \vec{r} - \omega t + \varphi_0) \quad (5)$$

де знак E_y залежить від того, в яку сторону напрямлений вектор \vec{E}_y - в напрямку чи проти додатного напрямку вісі y . З (5) можна отримати:

$$\left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2 = 1. \quad (6)$$

Отже, у кожній точці простору вектор електричного поля обертається в площині, перпендикулярній до напрямку поширення хвилі, причому його кінець описує еліпс. Така хвиля називається еліптично поляризованою. Обертання відбувається в напрямку за або проти напрямку гвинта, вгвинчуваного вздовж вісі z , відповідно при знакові (+) або (-) в (5). Якщо $E_1 = E_2$, то хвиля називається поляризованою по колу. Якщо або $E_1 = 0$, або $E_2 = 0$, то еліпс вироджується в пряму лінію. Це означає, що вектор \vec{E} завжди паралельний одному і тому ж напрямку. Така хвиля називається лінійно поляризованою. Еліптично поляризована хвиля може розглядатись як накладання двох лінійно поляризованих хвиль.

§31. Потенціали, що запізнюються. Дипольне випромінювання



В попередніх параграфах розглядалось поширення ЕМХ в пустому просторі. Розглянемо тепер випромінювання ЕМХ зарядами, що рухаються у вакуумі.

Нехай заряди і струми в об'ємі V розподілені по закону $\rho(\vec{r}, t)$, $\vec{j}(\vec{r}, t)$. Елементарний об'єм dV містить заряд $dq = \rho(\vec{r}, t)dV$, який створює в т. $P(X, Y, Z)$ скалярний потенціал $d\varphi(\vec{R}_0, t) = \frac{dq}{R} = \frac{\rho(\vec{r}, t)dV}{R}$. Повний скалярний

потенціал, створюваний всіма зарядами в об'ємі V , дорівнює
$$\varphi(\vec{R}_0, t) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}, t)dV}{R}.$$

Але ця формула не точна, тому що з неї випливає, що при зміні з часом густини заряду зміна потенціалу в т. P відбуватиметься миттєво, що суперечить 2-му постулату СТВ. Для того, щоб врахувати скінченність швидкості поширення електромагнітного сигналу, потрібно врахувати запізнення сигналу на час його поширення від заряду до точки P і замінити в густині заряду $\rho(\vec{r}, t)$ час t на $t - \frac{R}{c}$. Отже,

$$\varphi(\vec{R}_0, t) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}, t - \frac{R}{c})}{R} dV. \quad (1)$$

Аналогічно векторний потенціал

$$\vec{A}(\vec{R}_0, t) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}, t - \frac{R}{c})}{R} dV \quad (2)$$

Потенціали (1), (2) називають потенціалами, що запізнюються.

З малюнку видно, що $\vec{R} = \vec{R}_0 - \vec{r}$, але $|\vec{r}| \ll |\vec{R}_0|$. Тому величину R можна розкласти по степеням відношення r/R_0 :

$$\begin{aligned}
R &= |\vec{R}_0 - \vec{r}| = \sqrt{(\vec{R}_0 - \vec{r})^2} = (\vec{R}_0^2 - 2\vec{R}_0 \cdot \vec{r} + r^2)^{\frac{1}{2}} = \\
&= R_0 \left(1 - \frac{2\vec{R}_0 \cdot \vec{r}}{R_0^2} + \frac{r^2}{R_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left[\vec{n} = \frac{\vec{R}_0}{R_0} \right] \approx R_0 \left(1 - 2\vec{n} \frac{\vec{r}}{R_0} \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \left[(1+x)^n \approx 1+nx, |x| \ll 1 \right] = R_0 \left(1 - \frac{1}{2} \cdot 2\vec{n} \frac{\vec{r}}{R_0} \right) = R_0 - \vec{n} \cdot \vec{r} \quad (3)
\end{aligned}$$

Оскільки $\vec{n} \cdot \vec{r} \ll R_0$, то за формулою Тейлора можна виконати розкладання $f(R_0 - \vec{n} \cdot \vec{r}) \approx f(R_0) - \frac{\partial f(R_0)}{\partial R_0} \vec{n} \cdot \vec{r}$. Це дозволяє розкласти підінтегральні функції в (1) і (2), що дає:

$$\frac{\rho\left(\vec{r}, t - \frac{R}{c}\right)}{R} = \frac{\rho\left(\vec{r}, t - \frac{R_0}{c}\right)}{R_0} - \vec{n} \cdot \vec{r} \frac{\partial}{\partial R_0} \left(\frac{\rho\left(\vec{r}, t - \frac{R_0}{c}\right)}{R_0} \right) \quad (4)$$

Підставивши цей вираз в (1), отримаємо:

$$\varphi(\vec{R}_0, t) \approx \frac{1}{R_0} \int_V \rho\left(\vec{r}, t - \frac{R_0}{c}\right) dV - \vec{n} \frac{\partial}{\partial R_0} \left(\frac{1}{R_0} \int_V \vec{r} \rho\left(\vec{r}, t - \frac{R_0}{c}\right) dV \right).$$

Але перший інтеграл тут визначає повний заряд системи, який покладемо рівним нулю, вважаючи систему електронейтральною: $\int_V \rho\left(\vec{r}, t - \frac{R_0}{c}\right) dV = q = 0$. Другий інтеграл є не що інше, як

дипольний електричний момент, який мала система в момент $t - \frac{R_0}{c}$:

$\int_V \vec{r} \rho\left(\vec{r}, t - \frac{R_0}{c}\right) dV = \vec{p}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)$. В результаті отримаємо:

$$\varphi(\vec{R}_0, t) = -\vec{n} \frac{\partial}{\partial R_0} \frac{\vec{p}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{R_0}.$$

Нарешті, виконавши диференціювання і врахувавши, що

$$\frac{\partial}{\partial R_0} \vec{p}\left(t - \frac{R_0}{c}\right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{p}\left(t - \frac{R_0}{c}\right) = -\frac{1}{c} \dot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right),$$

отримаємо

$$\varphi(\vec{R}_0, t) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{p}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{cR_0^2} + \frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{cR_0}$$

Перший доданок тут обернено пропорційний квадрату відстані від системи до т. Р і спадає з відстанню швидше, ніж другий доданок. Тому на великих відстанях можна покласти

$$\varphi(\vec{R}_0, t) = \frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{cR_0}. \quad (5)$$

З тієї ж причини при підстановці (3) в (2) можна зберегти лише 1-й доданок:

$$A(\vec{R}_0, t) = \frac{1}{cR_0} \int_V \vec{j}\left(\vec{r}, t - \frac{R_0}{c}\right) dV = \frac{1}{cR_0} \int_V \rho\left(\vec{r}, t - \frac{R_0}{c}\right) \vec{r} dV = \frac{1}{cR_0} \frac{d}{dt} \vec{p}\left(t - \frac{R_0}{c}\right) = \frac{\dot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{cR_0}. \quad (6)$$

Формули (5) і (6) визначають скалярний і векторний потенціал поля випромінювання на великих відстанях від джерел поля. Ці формули показують, що поля випромінювання визначаються дипольним моментом випромінюючої системи. Тому таке випромінювання називається дипольним.

§32. Інтенсивність дипольного випромінювання

Знайдемо напруженості, які відповідають потенціалам дипольного випромінювання:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{c} \text{rot} \frac{\dot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{R_0} = \frac{1}{c} \text{grad} \left(\frac{1}{R_0} \right) \times \dot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right) + \frac{1}{cR_0} \text{rot} \dot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right) = \\ &= -\frac{1}{cR_0^2} \text{grad } R_0 \times \dot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right) + \frac{1}{cR_0} \text{grad} \left(t - \frac{R_0}{c} \right) \times \ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right) = \left[\text{grad } R_0 = \frac{\vec{R}_0}{R_0} = \vec{n} \right] = \\ &= -\frac{1}{cR_0^2} \vec{n} \times \dot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right) - \frac{1}{c^2 R_0} \text{grad } \vec{R}_0 \times \ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right) = \\ &= -\frac{\vec{n} \times \ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{c^2 R_0} \approx \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{n}}{c^2 R_0}. \end{aligned}$$

Аналогічно:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\text{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad} \frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{cR_0} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\dot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{cR_0} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial R_0} \left(\frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{cR_0} \right) \cdot \vec{n} - \frac{\ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{c^2 R_0} = \\ &= \left(\frac{\vec{n} \cdot \ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{c^2 R_0} \right) \cdot \vec{n} - \frac{\ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{c^2 R_0} \approx \frac{(\vec{n} \cdot \ddot{\vec{p}}) \cdot \vec{n}}{c^2 R_0} - \frac{\ddot{\vec{p}}}{c^2 R_0} = \frac{(\vec{n} \cdot \ddot{\vec{p}}) \cdot \vec{n} - \ddot{\vec{p}}}{c^2 R_0} = \frac{[\vec{n} \times \ddot{\vec{p}}] \times \vec{n}}{c^2 R_0}. \end{aligned}$$

Таким чином:
$$\vec{H} = \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{n}}{c^2 R_0}, \quad \vec{E} = \frac{[\vec{n} \times \ddot{\vec{p}}] \times \vec{n}}{c^2 R_0} = \vec{H} \times \vec{n}. \quad (1)$$

Формули (1) показують, що вектори \vec{H}, \vec{E} і \vec{n} взаємно перпендикулярні, тобто електромагнітна хвиля дипольного випромінювання є поперечною.

Крім того, $|\vec{H}|=|\vec{E}|$, як і в плоскій ЕМХ. Отже, на великій відстані від випромінюючої системи ЕМХ дипольного випромінювання подібна до плоскої хвилі. Амплітуда хвилі зменшується обернено пропорційно відстані. Зона електромагнітних хвиль на великій відстані від випромінювача, де поля визначаються формулами (1), називаються хвильовою зоною. Крім того, формули (1) показують, що електромагнітна хвиля дипольного випромінювання поляризована лінійно.

Знайдемо інтенсивність дипольного випромінювання, тобто повну енергію випромінювання за одиницю часу. Перш за все знайдемо вектор густини потоку енергії ЕМП хвилі – вектор Пойнтінга:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} = \frac{c}{4\pi} [\vec{H} \times \vec{n}] \times \vec{H} = \frac{c}{4\pi} H^2 \vec{n} . \quad (2)$$

Обчислимо повний потік енергії електромагнітних хвиль через замкнуту поверхню, що обмежує випромінюючу систему. Він визначає інтенсивність випромінювання та дорівнює:

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\Sigma} \vec{S} d\vec{\Sigma} = \oint_{\Sigma} \vec{S} \vec{n} d\Sigma = \frac{c}{4\pi} \oint_{\Sigma} H^2 d\Sigma = \left[H^2 = \frac{|\ddot{p}|^2}{c^4 R_0^2} \sin^2 \theta; d\Sigma = R_0^2 d\Omega = R_0^2 \sin \theta d\theta d\varphi \right] = \\ &= \frac{c}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \frac{\ddot{p}^2}{c^3 R_0^2} \sin^2 \theta R_0^2 \sin \theta = \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3} 2\pi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta ; \\ \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta &= \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta = -\int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta = \\ &= -\cos \theta \Big|_0^{\pi} + \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^{\pi} = +1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3} . \end{aligned}$$

Таким чином, інтенсивність випромінювання дорівнює

$$I = \frac{\ddot{p}^2}{2c} \frac{4}{3} = \frac{2\ddot{p}^2}{3c^3} \left(t - \frac{R_0}{c} \right) . \quad (3)$$

Ця формула визначає інтенсивність випромінювання по всім напрямкам.

§33. Дипольний осцилятор

Для багатьох наукових і технічних задач важливим є дослідження випромінювання системи, дипольний момент якої змінюється з часом за гармонічним законом:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \cos \omega t . \quad (1)$$

Такі системи називаються дипольними осциляторами. Такою системою може бути антена з періодичним струмом у ній, або атом у класичній моделі, який складається з позитивного нерухомого заряду і рухомого негативного заряду, що коливається за гармонічним законом. Іншим прикладом дипольного осцилятора є осцилятор Герца, який являє собою дві металеві кульки, з'єднані провідником і заряджені у початковий момент часу однаковими за величиною і протилежними за знаком зарядами. Внаслідок розряду

виникають гармонічні коливання:
заряду

$$q = q_0 \cos \omega t ,$$

дипольного моменту

$$\vec{p} = q\vec{l} = q_0\vec{l} \cos \omega t = \vec{p}_0 \cos \omega t$$

і струму

$$i = \frac{dq}{dt} = -q_0\omega \sin \omega t .$$

Знайдемо середнє значення потоку енергії поля через сферу радіуса R_0 , що оточує дипольний момент, використовуючи формулу (32.3) для

інтенсивності: $I = \frac{2\ddot{p}^2 \left(t - \frac{R_0}{c} \right)}{3c^3}$. Згідно (1) $\ddot{p}^2 = \ddot{p}_0^2 \omega^4 \cos^2 \omega \left(t - \frac{R_0}{c} \right)$. Середнє значення інтенсивності визначатиметься з формули:

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{2p_0^2 \omega^4 \cos^2 \omega \left(t - \frac{R_0}{c} \right)}{3c^3} dt = \left[\overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2} \right] = \frac{p_0^2 \omega^4}{3c^3} .$$

Отже, середня інтенсивність випромінювання дипольного осцилятора за період дорівнює:

$$\bar{I} = \frac{p_0^2 \omega^4}{3c^2} = \left[\omega = \frac{2\pi c}{T} = \frac{2\pi c}{\lambda} \right] = \frac{2^4 \pi^4 p_0^2 c}{3\lambda^4} . \quad (2)$$

Тобто, середнє значення енергії, що випромінюється осцилятором за період, прямо пропорційне квадрату амплітуди і четвертій степені частоти, або обернено пропорційне четвертій степені довжини хвилі.

Отриманий результат дозволяє пояснити ряд явищ:

1) Пояснимо голубий колір неба. Повітря, що оточує Землю, складається з молекул, кожна з яких можна розглядати як дипольний осцилятор. Сонячне світло викликає вимушені коливання осциляторів з частотою падаючого світла. В результаті кожен осцилятор випромінює енергію, яка обчислюється за формулою (2). Вважаючи амплітуду дипольного моменту молекули p_0 сталою, бачимо, що енергія сонячного світла, розсіяного молекулами повітря, обернено пропорційна λ^4 . Отже, молекули повітря найбільше розсіюють світло короткохвильової частини сонячного спектра, що й пояснює голубий колір неба - колір, що відповідає меншим значенням λ .

2) Осцилятор Герца має дипольний момент $\vec{p} = q\vec{l} = q_0\vec{l} \cos \omega t$. Внаслідок того, що заряджені кульки з'єднані провідником, в системі виникають коливання зарядів і струмів. Такий диполь, згідно з (2) випромінює енергію і є найпростішою моделлю антени. З (2) випливає, що енергія, яка випромінюється антеною, різко збільшується із зменшенням довжини хвилі. Це пояснює, чому в радіотехніці використовуються ЕМХ з довжиною кілька сот метрів і менше.

§34. Електромагнітне поле рухомого заряду

Визначимо потенціали поля, яке створюється одним точковим зарядом, що рухається по закону $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t)$. Потенціали поля в т. Р у момент часу t

внаслідок запізнення будуть визначатись положенням і швидкістю заряду в момент часу t' , для якого час поширення електромагнітного збурення з точки знаходження заряду $\vec{r}_0(t')$ в точку спостереження Р якраз дорівнює $t-t'$. Нехай $\vec{R}(t') = \vec{r} - \vec{r}_0(t')$ - радіус-вектор від заряду до т. Р. Тоді момент t' визначається рівнянням, звідки

$$R(t') = c(t-t'). \quad (1)$$

В системі відліку, в якій в момент часу t' частинка нерухома, поле в точці спостереження в момент t дається просто кулонівським потенціалом:

$$\varphi = \frac{e}{R(t')}, \quad \vec{A} = 0. \quad (2)$$

Вирази для потенціалів у довільній системі відліку отримаємо, написавши такий чотиривекторний потенціал A^i , щоб при швидкості $\vec{v} = 0$, він зводився до виразу (2). Відмітимо, що згідно з (1) потенціали (2) в чотиривимірній формі набувають вигляду:

$$A^i \left(\frac{e}{c(t-t')}, 0 \right). \quad (3)$$

При переході від вибраної ІСВ до інших вираз (3) повинен включати швидкість, яка у чотиривимірному представлення дорівнює:

$$u^i \left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad \text{Якщо покласти 4-потенціал пропорційним 4-швидкості,}$$

то при $\vec{v} = 0$ векторний потенціал також дорівнюватиме 0. Далі, в знаменнику виразу (3) стоїть часова компонента 4-вектора $R^k(c(t-t'), \vec{r} - \vec{r}_0(t'))$. Отже, в знаменник A^i необхідно ввести 4-вектор R^k , але для правильної розмірності його треба помножити на 4-швидкість. Отже, 4-потенціал потрібно визначити наступним чином:

$$A^i = e \frac{u^i}{R^k u_k} \quad (4)$$

$$\text{Оскільки } R^k u_k = \frac{c^2(t-t') - \vec{R}\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = [\text{викор. (1)}] = \frac{cR(t') - \vec{v}\vec{R}(t')}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c \left(R(t') - \frac{\vec{v}\vec{R}(t')}{c} \right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \text{ тому}$$

(4) з урахуванням явного вигляду u^i приводить до наступного вигляду потенціалів:

$$\varphi = A^0 = \frac{e}{\left(R - \frac{\vec{v}\vec{R}}{c} \right)_{t'}}; \quad \vec{A}' = \frac{e\vec{v}}{c \left(R - \frac{\vec{v}\vec{R}}{c} \right)_{t'}}. \quad (5)$$

Таким чином, у нас визначені потенціали і, отже, визначені поля. Потенціали (5) електромагнітного поля, створюваного рухомим зарядом, називаються потенціалами Ленара-Віхарта. Знаючи ці потенціали, можна знайти напруженість відповідних полів:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \dots = e \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)^3} \left(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c} R\right) + \frac{e}{c^2 \left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)^3} \left[\vec{R} \times \left[\left(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c} R\right) \times \dot{\vec{v}}\right]\right], \quad (6)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{R} [\vec{R} \times \vec{E}] = \vec{n} \times \vec{E} \quad (7)$$

Тут $\dot{\vec{v}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t'}$; всі величини у формулах (6) і (7) беруться в момент часу t' .

Згідно (6) електричне поле складається з двох доданків різного характеру. Перший доданок залежить від швидкості частинки, але не залежить від прискорення і на великих відстанях $E \sim \frac{e}{R^2}$. Другий доданок пропорційний прискоренню $\dot{\vec{v}}$ і на великих відстанях обернено пропорційний $1/R$. Цей доданок зв'язаний з випромінюванням частинкою ЕМХ. Що стосується першого доданку, то, будучи незалежним від прискорення, він повинен відповідати полю, створюваному рівномірно рухомих зарядом. Формула (7) також показує, що магнітне поле всюди перпендикулярне до електричного.

§35. Радіаційне тертя

При випромінюванні електромагнітного поля енергія зарядженої частинки зменшується з часом. Це зменшення можна розглядати як результат втрати випромінюючою системою енергії на виконання роботи проти особливої сили радіаційного тертя, яка є наслідком сили реакції поля (сили віддачі, як при пострілі гармати у механіці).

Для знаходження цієї сили виходитимемо з закону збереження енергії, згідно з яким втрата зарядженою частинкою енергії за одиницю часу дорівнює інтенсивності випромінювання:

$$\frac{dE}{dt} = -I = -\frac{2\ddot{p}^2}{3c^3}. \quad (1)$$

З іншого боку, втрати енергії частинки йдуть на виконання роботи проти сили радіаційного тертя:

$$dE = -\frac{2\ddot{p}^2}{3c^3} dt = dA = \vec{F}_{rad} d\vec{r} = \vec{F}_{rad} \vec{v} dt,$$

звідки:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{rad} \vec{v} dt &= -\int_{t_1}^{t_2} \frac{2\ddot{p}}{3c^3} dt = \begin{bmatrix} \vec{p} = e\vec{r} \\ \dot{\vec{p}} = e\dot{\vec{r}} = e\vec{v} \\ \ddot{\vec{p}} = e\ddot{\vec{r}} = e\dot{\vec{v}} \end{bmatrix} = -\frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{v}}^2 dt = -\frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{v}} \dot{\vec{v}} dt = \left[\int u \dot{v} dt = uv - \int v \dot{u} dt \right] = \\ &= -\frac{2e^2}{3c^3} \left(\dot{\vec{v}} \cdot \dot{\vec{v}} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\vec{v}} \dot{\vec{v}} dt \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Припустимо, що $\dot{\vec{v}} \cdot \dot{\vec{v}} \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$. Це має місце у багатьох випадках, зокрема:

- 1) при періодичному русі, коли $T = t_2 - t_1$;
- 2) якщо прискорення перпендикулярне швидкості ($\dot{\vec{v}} \perp \vec{v}$);
- 3) при скінченному часі прискорення: $\dot{\vec{v}}(t_1) = \dot{\vec{v}}(t_2) = 0$.

В усіх вказаних випадках, як випливає з (2), інтегральний баланс енергій буде виконуватись, якщо

$$\vec{F}_{rad} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{v}} = \frac{2e^2}{3c^3} 2\ddot{\vec{v}}. \quad (3)$$

Отже, сила радіаційного тертя виявляється пропорційною не прискоренню, а похідній від прискорення по часу $\ddot{\vec{v}}$.

Знайдемо межі застосування формули (3). Прискорений рух частинки відбувається під дією деякої зовнішньої сили F_0 , яка визначається за II законом Ньютона.

$$\vec{F}_0 = m\dot{\vec{v}}. \quad (4)$$

Виконані розрахунки F_{rad} справедливі в припущенні, що F_{rad} набагато менше F_0 . Припустимо, що рух є періодичним: $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{i\omega t}$, $\dot{\vec{v}} = \vec{v}_0 i\omega e^{i\omega t}$, $\ddot{\vec{v}} = -\vec{v}_0 \omega^2 e^{i\omega t}$, тому умова малості сил радіаційного тертя порівняно з діючою на заряд зовнішньою силою є, по-перше,

$$\frac{|\vec{F}_{rad}|}{|\vec{F}_0|} = \frac{\frac{2e^2}{3c^3} v_0 \omega^2}{m v_0 \omega} = \frac{2e^2 \omega}{3mc^3} \ll 1, \quad (5)$$

або, якщо ввести довжину хвилі згідно формули $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{\lambda}$, то

$$\frac{|\vec{F}_{rad}|}{|\vec{F}_0|} = \frac{4\pi^2 c}{3mc^3 \lambda} = \frac{4\pi e^2}{3mc^2 \lambda} \ll 1, \quad \lambda \gg \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{mc^2} = \frac{4\pi}{3} R_0, \quad (6)$$

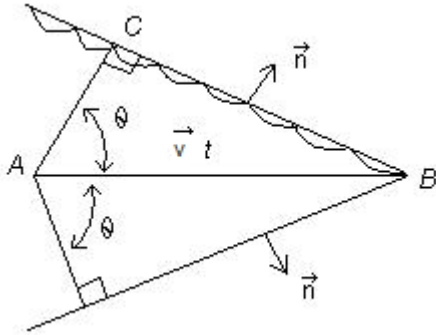
де R_0 – класичний радіус зарядженої частинки. Отже, формула (3) для F_{rad} придатна лише тоді, коли довжина випромінюваної зарядом хвилі значно більша за класичний радіус заряду, який і тут виявляється тією межею, за якою класична електродинаміка вступає у протиріччя із собою.

Відмітимо, що формула (1), застосована до руху окремої частинки, дає інтенсивність випромінювання частинки: :

$$I = \frac{2\ddot{\vec{p}}^2}{3c^3} = [\ddot{\vec{p}} = e\ddot{\vec{r}}] = \frac{2e^2 \ddot{\vec{r}}^2}{3c^3}. \quad (7)$$

Звідси випливає, що заряджена частинка випромінює електромагнітні хвилі лише тоді, коли її прискорення відмінне від нуля. Навпаки, частинка, яка рухається рівномірно і прямолінійно, не буде випромінювати електромагнітні хвилі. Ці висновки привели до відомих в теорії фізики проблем в планетарній моделі атома Резерфорда, тому що електрон, який рухається в атомі по коловій орбіті, має відмінне від нуля доцентрове прискорення і мусив би неперервно випромінювати електромагнітні хвилі, втрачаючи при цьому енергію і падаючи на ядро. В той же час спостереження показує стабільність атомів. Розв'язання цього протиріччя врешті привело до необхідності застосування в мікросвіті квантових законів.

§36. Ефект Вавилова-Черенкова



Вище було показано, що заряджена частинка при рівномірному русі не випромінює електромагнітні хвилі. Проте існує явище, коли частинка, що рухається без прискорення, випромінює ЕМХ у видимій частині спектру. Це явище відкрив П.А.Черенков у лабораторії С.І.Вавилова.

П.Черенков встановив, що при опромінюванні γ - променями чистих рідин у них виникає свічення у видимій області спектру. С.І.Вавілов вказав, що це свічення викликане не самими γ -променями, а електронами, які виникають при розсіянні γ - променів. Природу цього випромінювання, яке було назване випромінюванням Вавилова-Черенкова, теоретично з'ясували радянські фізики І.Є.Тамм і І.М.Франк. Вони показали, що свічення викликають лише ті електрони, які мають швидкість більшу від швидкості світла в даному середовищі $v > c_1 = \frac{c}{n}$, де n - показник заломлення середовища.

Важливою особливістю випромінювання Вавилова-Черенкова є його напрямленість вперед по конусу (див. мал.), нормаль до поверхні якого утворює з напрямом руху електрона кут, що визначається формулою $\cos \theta = \frac{c}{vn}$, де v - швидкість руху електрона ($v > c/n$).

Пояснення цього явища полягає в тому, що у точках середовища на шляху руху електрона збуджується ЕМП, яке поширюється з швидкістю c/n . В оточуючому просторі поле, збуджене електроном, існуватиме внаслідок інтерференції хвиль, що поширюються з точок траєкторії електрона. Це поле відмінне від 0 лише у випадку, коли швидкість електрона буде більша за c/n .

Нехай електрон летить з точки А в напрямі В і через час t пройде відстань $AB = vt$. З точки А за цей час сферична хвиля, викликана збудженням в: А середовищем, досягне сфери радіуса $\frac{c}{n}t = AC$. Легко бачити, що випромінювання проміжних точок одночасно досягне конуса, твірною якого є лінія СВ, а віссю – АВ. З малюнка видно, що

$$\cos \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{c}{n}t}{vt} = \frac{c}{nv}. \quad (1).$$

Лінія СВ є лінією, на якій (внаслідок когерентності випромінювання окремих молекул) фаза коливань є однаковою. Отже, конус, твірною якого є СВ, являє собою поверхню сталої фази, тобто фронт хвилі, для якої АС збігається з напрямом поширення. Це означає, що напрям поширення випромінювання Вавилова-Черенкова визначається формулою (1). Випромінювання Вавилова-Черенкова знайшло важливе застосування при дослідженнях у фізиці ЕЧ та атомного ядра. На його застосуванні базується принцип дії черенковських лічильників, які дозволяють по куту θ конуса

випромінювання заряджених частинок визначити їх v і $E_{кин}$. За відкриття цього явища і розробку його теорії П. Черенков, І. Тамм і І. Франк нагороджені Нобелівською премією. Умова (1) взагалі була давно відома в акустиці (конус Маха).

§37. Розсіяння ЕМХ вільними зарядами

Якщо на систему зарядів падає ЕМХ, то під її дією заряди приходять в рух. Цей рух у свою чергу супроводжується випромінюванням у всі сторони; відбувається розсіяння початкової хвилі.

Розсіяння зручно характеризувати відношенням кількості енергії, випромінюваної розсіюючою системою в даному напрямку за одиницю часу, до густини потоку енергії падаючого на систему випромінювання. Це відношення має розмірність площі і називається ефективним перерізом (або просто перерізом) розсіяння.

Нехай dI є енергія, випромінювана в тілесний кут $d\Omega$ (за 1 с) при падінні на неї хвилі з вектором Пойнтінга \vec{S} . Тоді переріз розсіяння (в тілесний кут $d\Omega$) дорівнює

$$d\sigma = \frac{dI}{|\vec{S}|}. \quad (1)$$

(риска над буквою означає усереднення по часу). Інтеграл від $d\sigma$ по всім напрямкам є повний переріз розсіяння.

Розглянемо розсіяння, яке виконує один нерухомий вільний заряд. Нехай на цей заряд падає плоска монохроматична лінійно поляризована хвиля. Її електричне поле можна записати у вигляді $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha)$.

Будемо вважати, що швидкість, яку набуває заряд під дією поля падаючої хвилі, мала порівняно з швидкістю світла. Тоді залишивши лише силу силою $\frac{e}{e}[\vec{v} \times \vec{H}]$ з боку магнітного поля можна знехтувати, що силу, яка діє на заряд з боку електричного поля, дорівнює $e\vec{E}$. При великих довжинах хвиль можна знехтувати також впливом зміщення заряду при його коливаннях під дією поля. Тоді, якщо заряд здійснює коливання біля початку координат $\left(\vec{k}\vec{r} \approx 2\pi \frac{r}{\lambda} \ll 1\right)$, то і можна тоді вважати, що на нього весь час діє те поле, яке є у початку координат, тобто, можна покласти $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \alpha)$.

Оскільки рівняння руху заряду є $m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E}$, а його дипольний момент $\vec{p} = e\vec{r}$, то

$$\ddot{\vec{p}} = e\ddot{\vec{r}} = \frac{e^2}{m}\vec{E}. \quad (2)$$

Для обчислення розсіяного випромінювання скористаємося формулами (32) для дипольного випромінювання:

$$dI = \dot{\vec{p}}^2 \frac{\sin^2 \theta}{4\pi c^3} d\Omega = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3} [\vec{E} \times \vec{n}']^2 d\Omega, \quad (3)$$

де \vec{n}' - одиничний вектор в напрямку розсіяння. З іншого боку, вектор Пойнтінга падаючої хвилі дорівнює: $S = \frac{c}{4\pi} E^2$. Звідси знаходимо переріз розсіяння в тілесний кут $d\Omega$:

$$d\Omega = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \Theta d\Omega = r_0^2 \sin^2 \Theta d\Omega \quad (4)$$

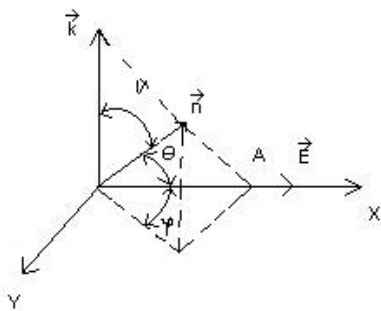
де θ - кут між напрямком розсіяння і напрямком поля \vec{E} падаючої хвилі. Ми бачимо, що переріз розсіяння вільним зарядом не залежить від частоти. Тут $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ позначає класичний радіус заряду.

Визначимо повний переріз σ . Для цього виберемо напрямок \vec{E} в якості полярної осі; тоді $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$; інтегруючи по $d\theta$ від 0 до π і по $d\varphi$ від 0 до 2π , знайдемо:

$$\sigma = r_0^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = r_0^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \pi r_0^2 = \frac{8}{3} \pi \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2. \quad (5)$$

Це є так звана формула Томсона.

Нарешті, обчислимо диференційний переріз $d\sigma$ у випадку, коли падаюча хвиля не поляризована (природне світло). Тоді (4) треба усереднити по всім напрямкам вектора \vec{E} в площині, перпендикулярній до напрямку поширення падаючої хвилі (напрямку хвильового вектора \vec{k}) по відношенню до напрямку розсіяння \vec{n} , тобто по всім значенням кута $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. З малюнка видно, що $OA = \cos \theta = \sin \vartheta \cos \varphi$. Тоді середнє значення:



$$\overline{\sin^2 \theta} = (1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi) = \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right) = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \vartheta) \quad (6)$$

Отже, розшукуваний переріз розсіяння неполяризованої хвилі вільним зарядом дорівнює

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \vartheta) \quad (7).$$

З (7) випливає, що ефективний переріз буде різним для різних кутів ϑ ; він максимальний для $\vartheta = 0$ та π і найменшим для $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

Експериментальна перевірка показала, що формула (7) описує розсіяння електромагнітних хвиль від довгих до коротких і не виконується для рентгенівських променів і γ -хвиль. Пояснюється це обмеженістю законів класичної електродинаміки. При взаємодії рентгенівського випромінювання з вільними електронами (для такого випромінювання електрони атома також можна вважати вільними) слід користуватись іншими, квантовими законами.

§38. Немонохроматичні хвилі

Немонохроматичною називають хвилю, яку не можна представити як гармонічну функцію, що відповідає одній частоті. Але її можна представити як суперпозицію монохроматичних хвиль різних частот.

Розглянемо плоску немонахроматичну хвилю, що поширюється у вакуумі в додатному напрямку вісі x . Будь-яка величина, що характеризує таку хвилю (\vec{E}, \vec{H} і т. д.) описується функцією $f = f(t - \frac{x}{c})$.

Зафіксувавши x , ми отримуємо функцію від t , що описує коливання поля в даній точці: $f = f(t)$.

Розглянемо випадок, коли хвиля, а також і коливання $f(t)$, існують протягом обмеженого проміжку часу (а не від $t = -\infty$ до $t = +\infty$). В цьому випадку $f(t)$ можна розкласти в інтеграл Фур'є, що містить неперервний ряд частот:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (1)$$

де $C(\omega)$ - функція частоти ω , яка визначається виразом

$$C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\omega\xi} d\xi. \quad (2)$$

Очевидно, що $C^*(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi = C(-\omega).$ (3)

Повна інтенсивність хвилі за час від $-\infty$ до ∞ визначається виразом

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right\} dt = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right\} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) C(-\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) C^*(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |C(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |C(\omega)|^2 d\omega. \quad (4) \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $|C(\omega)|^2$ характеризує долю повної інтенсивності, що припадає на одиничний інтервал частот, а $dI(\omega) = |C(\omega)|^2 d\omega$ - інтенсивність випромінювання в інтервалі частот $[\omega, \omega + d\omega]$.

Якщо хвиля періодична: $f(t+T) = f(t)$, то $f(t)$ можна розкласти в ряд Фур'є, що містить частоти $\omega_n = n\omega_0$, кратні основній частоті ω_0 :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-i\omega_n t}, \text{ де } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \text{ } C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{i\omega_n t} dt.$$

Можна також записати: $f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^* e^{i\omega_n t}.$

Середня інтенсивність хвилі пропорційна середньому значенню \vec{E}^2 або \vec{H}^2 , тобто пропорційна

$$\begin{aligned}
\overline{[f(t)]^2} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-i\omega_0 n t} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m^* e^{im\omega_0 t} \right) dt = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} C_n C_m^* \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i(m-n)\omega_0 t} dt = \\
&= \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} C_n C_m^* \delta_{nm} = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} C_n C_n^* = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = C_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2
\end{aligned}$$

Отже, середня інтенсивність немонохроматичної хвилі складається з інтенсивностей монохроматичних компонентів.

МОДУЛЬ IV. ЕЛЕКТРОДИНАМІКА СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

§39. Усереднення рівнянь Максвела

Рівняння Максвела, які у розділі 1 були отримані для вакууму, справедливі і тоді, коли крім поля та утворюючих його зарядів існує ще й взаємодіюча з цим полем речовина. Частинки, з яких складається речовина, під дією електромагнітного поля можуть рухатись, що приводить до появи наведених струмів і зарядів з густинами \vec{j} і ρ . Але ці наведені заряди і струми самі можуть бути джерелом електромагнітного поля. Таким чином, приходимо до задачі про знаходження самоузгодженого електромагнітного поля. Розв'язання таких задач складає предмет електродинаміки суцільних середовищ. В її основу покладені мікроскопічні рівняння Максвела, які є справедливими і в речовині:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, & \text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j}_3 + \vec{j}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \text{div } \vec{H} = 0, & \text{div } \vec{E} = 4\pi(\rho_3 + \rho), \end{cases} \quad (1)$$

де ρ_3 і \vec{j}_3 – це зовнішні заряди і струми (по відношенню до тіла), ρ , \vec{j} – наведені заряди і струми, які є функціями напруженостей електричного \vec{E} і магнітного \vec{H} полів, які ці заряди і струми в значній мірі самі і створюють.

Мікроскопічна будова речовини з величезною кількістю частинок задають складний характер залежності \vec{E} , \vec{H} , ρ і \vec{j} від координат і часу. Тому в макроскопічній електродинаміці здійснюється усереднення цих величин, а також полів по деяким скінченим областям простору і відповідним проміжкам часу. Отримані усереднені електромагнітні поля називають макроскопічними.

Усереднення здійснюється за формулою:

$$\overline{f(\vec{r}, t)} = \frac{1}{\Delta V \Delta t} \int_{(\Delta V)} d\vec{R} \int_{\Delta t} d\tau f(\vec{r} + \vec{R}, t + \tau). \quad (2)$$

Усереднені рівняння Максвела матимуть вигляд:

$$\begin{cases} \overline{\text{rot } \vec{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \overline{\vec{H}}}{\partial t}, & \overline{\text{rot } \vec{H}} = \frac{4\pi}{c} (\overline{\vec{j}_3} + \overline{\vec{j}}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \overline{\vec{E}}}{\partial t}, \\ \overline{\text{div } \vec{H}} = 0, & \overline{\text{div } \vec{E}} = 4\pi(\overline{\rho} + \overline{\rho_3}). \end{cases} \quad (3)$$

Але $\frac{\partial \overline{f}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial f}{\partial t}} \Rightarrow \overline{\text{rot } \vec{E}} = \text{rot } \overline{\vec{E}} \dots$. Враховуючи це, систему (3) представимо у вигляді:

$$\begin{cases} \text{rot } \overline{\vec{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \overline{\vec{H}}}{\partial t}, & \text{rot } \overline{\vec{H}} = \frac{4\pi}{c} (\overline{\vec{j}_3} + \overline{\vec{j}}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \overline{\vec{E}}}{\partial t}, \\ \text{div } \overline{\vec{H}} = 0, & \text{div } \overline{\vec{E}} = 4\pi(\overline{\rho} + \overline{\rho_3}). \end{cases} \quad (4)$$

У макроскопічній електродинаміці прийнято позначати $\overline{\vec{E}} \equiv \vec{E}$ і називати напруженістю, а $\overline{\vec{H}} \equiv \vec{H}$ – магнітною індукцією. Крім того, у подальшому будемо опускати риску усереднення: $\overline{\vec{j}} = \vec{j}, \overline{\rho} = \rho$.

Отже, система рівнянь Максвелла набуває вигляду:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_3) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi(\rho + \rho_3). \quad (5)$$

Проте, система рівнянь Максвелла є неповною до тих пір, поки не встановлена залежність або між усередненими величинами \vec{j}, ρ і макроскопічними напруженостями полів \vec{E} і \vec{H} з одного боку та між \vec{j}, ρ і $\vec{j}_{\text{зовн}}, \rho_{\text{зовн}}$ з другого боку. Це вимагає розв'язання так званих кінетичних рівнянь. Але такий спосіб є дуже складним і вимагає досить детальної інформації про структуру речовини. Брак цієї інформації примушує вводити різні феноменологічні моделі або ж використовувати експериментальні залежності між \vec{j}, ρ та \vec{E}, \vec{B} . Часто, наприклад, вважають (і це підтверджується експериментами при слабких, порівняно з атомними, полях), що величини \vec{j} і \vec{E} зв'язані співвідношенням

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (6)$$

відомим як закон Ома у диференційній формі для ізотропних середовищ. Тут $\sigma = \frac{1}{\rho}$ (ρ – питомий опір, σ – питома електропровідність речовини). В анізотропних середовищах закон Ома, приймає тензорний вигляд

$$j_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 \sigma_{\alpha\beta} E_\beta, \quad (7)$$

де $\sigma_{\alpha\beta}$ називається тензором електропровідності.

§40. Рівняння ЕМП у середовищі

Величини наведених зарядів і струмів заздалегідь невідомі і їх необхідно виразити через деякі макроскопічні величини, які характеризують властивості речовини і залежать від значень напруженості електромагнітного поля. Зручно виражати ρ і \vec{j} через густини \vec{P} і \vec{M} макроскопічних електричних і магнітних дипольних моментів середовища, визначених наступним чином:

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{(\Delta V)} \vec{p}_i; \quad \vec{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{(\Delta V)} \vec{m}_i. \quad (1)$$

Тут \vec{p}_i і \vec{m}_i – електричні і магнітні дипольні моменти окремих мікрочастинок, з яких складається речовина. Підсумовування здійснюється по всім частинкам у фізично малому об'ємі ΔV . Вектор \vec{P} носить назву вектора електричної поляризації, вектор \vec{M} – вектора намагнічення.

Виразимо густину наведених зарядів через вектор електричної поляризації. Знайдемо повний дипольний момент об'єму V , який, за визначенням, дорівнює

$$\int_V \vec{P} dV = \int_V \rho \vec{r} dV. \quad (2)$$

Як було доведено у §20, інтеграл у правій частині (2) не залежить від вибору початку системи координат, якщо повний заряд тіла дорівнює нулю:

$$\int_V \rho dV = 0.$$

Помножимо обидві частини (2) на довільний сталий вектор \vec{a} :

$$\int_V (\vec{P} \cdot \vec{a}) dV = \int_V \rho (\vec{r} \cdot \vec{a}) dV .$$

Але $(\vec{P} \cdot \vec{\nabla})(\vec{r} \cdot \vec{a}) = \left(P_x \frac{\partial}{\partial x} + P_y \frac{\partial}{\partial y} + P_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x a_x + y a_y + z a_z) = P_x a_x + P_y a_y + P_z a_z = \vec{P} \cdot \vec{a}$, тому

$$\begin{aligned} \int_V \rho (\vec{r} \cdot \vec{a}) dV &= \int_V (\vec{P} \cdot \vec{a}) dV = \int_V (\vec{P} \cdot \vec{\nabla})(\vec{a} \cdot \vec{r}) dV = \left[(\vec{P} \cdot \vec{\nabla})(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{\nabla}(\vec{P}(\vec{a} \cdot \vec{r})) - (\vec{a} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \right] = \\ &= \int_V \text{div}(\vec{P}(\vec{a} \cdot \vec{r})) dV - \int_V (\vec{a} \cdot \vec{r}) \text{div} \vec{P} dV = \oint_s \vec{P}(\vec{a} \cdot \vec{r}) d\vec{S} - \int_V (\vec{a} \cdot \vec{r}) \text{div} \vec{P} dV = - \int_V (\vec{a} \cdot \vec{r}) \text{div} \vec{P} dV . \end{aligned}$$

При виведенні ми поклали $\oint_s \vec{P}(\vec{a} \cdot \vec{r}) d\vec{S} = 0$, оскільки поза тілом $\vec{P} = 0$. В рівності, що залишається, можна опустити вектор \vec{a} внаслідок його довільності, так що

$$\int_V \rho \vec{r} dV = - \int_V \vec{r} \text{div} \vec{P} dV .$$

Ця рівність перетворюється в тотожність, якщо покласти:

$$\rho = - \text{div} \vec{P} . \quad (3)$$

Це і є шуканий зв'язок між густиною зв'язаного заряду і вектором електричної поляризації, причому (3) одночасно задовольняє умову (2).

Вектор \vec{P} на межі тіла обертається в 0 стрибком. У цьому випадку на поверхні виникає поверхневий заряд. Для його обчислення необхідно виконати в (3) граничний перехід того ж характеру, як і при виведенні граничних умов (15.4). В результаті отримаємо

$$\sigma = P_n .$$

Виразимо тепер густина наведеного струму через вектори електричної і магнітної поляризації. Скористаємось рівнянням неперервності для наведених зарядів і струмів (8.8): $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$. При підстановці в нього (3)

отримаємо

$$\text{div} \vec{j} - \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{P} = 0, \quad \text{div} \left(\vec{j} - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) = 0 .$$

Звідси випливає

$$\vec{j} - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \text{rot} \vec{M}' , \quad \vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \text{rot} \vec{M}' , \quad (4)$$

де \vec{M}' - деякий вектор, який як і вектор \vec{P} , відмінний від 0 тільки в зайнятому тілом об'ємі. З (4) випливає, що густина наведеного струму може бути представлена у вигляді суми двох доданків. Перший доданок $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ називається струмом поляризації, оскільки він пов'язаний з переміщенням зарядів, що складають електричний дипольний момент речовини. Другий доданок, $\text{rot} \vec{M}'$, обумовлений наявністю в речовині замкнутих струмів, не пов'язаних з макроскопічним електричним полем.

Щоб зрозуміти зміст другого доданку, розглянемо струм у випадку

відсутності електричного поля, коли $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = 0$. У цьому випадку струм $\vec{j} = \text{rot } \vec{M}'$ повинен мати такі властивості:

1) повний струм через довільний переріз середовища дорівнює нулю:

$$\int \vec{j} d\vec{S} = 0; \quad (5)$$

2) між густиною наведеного струму і намагніченням в об'ємі V , відповідно до визначень дипольного магнітного моменту (26.8) і густини магнітного дипольного моменту (1), має виконуватись співвідношення

$$\frac{1}{2c} \int \vec{r} \times \vec{j} dV = \int \vec{M} dV, \text{ або } \frac{1}{2c} \int \vec{r} \times \text{rot } \vec{M}' dV = \int \vec{M} dV. \quad (6)$$

Застосовуючи до рівності (6) такий же прийом, як до рівності (2), можна показати, що вона зводиться до співвідношення

$$\frac{1}{c} \int \vec{M}' dV = \int \vec{M} dV,$$

звідки $\vec{M}' = c\vec{M}$, де \vec{M} - густина магнітного моменту середовища. Таким чином, при відсутності електричного поля

$$\vec{j} = c \text{rot } \vec{M}, \quad (7)$$

при цьому, як можна переконатись з теореми Стокса, виконується і рівність (5). Струм (7) прийнято називати струмом намагнічення. Отриманий вираз зберігається і при наявності статичного електричного поля.

При наявності змінного електричного поля, коли $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \neq 0$, величина $\frac{1}{c} \vec{M}'$ може і не співпадати з вектором намагнічення. Проте формула

$$\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \text{rot } \vec{M}. \quad (8)$$

зберігає свою силу, якщо \vec{M} не вважати густиною магнітного моменту

Підставимо тепер (3) і (8) в макроскопічні рівняння Максвелла (39.5):

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \left(\vec{j}_3 + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \text{rot } \vec{M} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \text{div } \vec{B} = 0, & \text{div } \vec{E} = 4\pi (\rho_3 - \text{div } \vec{P}). \end{cases}$$

звідки $\text{div}(\vec{E} + 4\pi\vec{P}) = 4\pi\rho_3$. Введемо вектор електричної індукції

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}. \quad (9)$$

Тоді одне з рівнянь Максвелла прийме вигляд:

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho_3. \quad (10)$$

Введемо також вектор напруженості магнітного поля співвідношенням:

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}. \quad (11)$$

Враховуючи (9) і (11), отримаємо ще одне з рівнянь Максвелла у середовищі:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_3 + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (12)$$

Відкидаючи надалі в (10) і (12) значок „3” для зовнішніх зарядів і струмів, приходимо до остаточної системи макроскопічних рівнянь Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, & \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho. \end{cases} \quad (13)$$

Отже, на відміну від електромагнітного поля у вакуумі, електромагнітне поле в речовині описується чотирма векторами: двома векторами напруженостей \vec{E} і \vec{H} та двома векторами індукції \vec{B} і \vec{D} електричного і магнітного полів. Тому система рівнянь (11) виявляється незамкнутою і її слід доповнити рівняннями, що встановлюють додаткові зв'язки між чотирма векторами поля. Часто ці зв'язки представляють лінійними і записують у вигляді:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu \vec{H}; \quad (14)$$

коефіцієнти ε і μ називають електричною і магнітною проникністю речовини. В загальному випадку вони можуть залежати від координат і часу, бути тензорами для анізотропних тіл тощо.

§41. Енергія ЕМП у середовищі

Частинки середовища, рухаючись у змінному ЕМП, отримують від поля енергію; при цьому зменшується енергія ЕМП і росте механічна (кінетична і потенціальна) енергія частинок. Оскільки при переміщенні частинок генерується поле, то існує і зворотній процес перетворення механічної енергії частинок в енергію ЕМП. Наявність такого обміну енергією означає, що в енергію ЕМП входить також енергія тієї частини механічного руху частинок середовища, яка обумовлена ЕМП у середовищі.

Частинки середовища разом із взаємодіючим з ним полем не завжди утворюють замкнуту систему. Вони можуть, наприклад, зазнавати зіткнень, передаючи свою енергію і імпульс таким збудженням середовища, які вже не взаємодіють безпосередньо з полем і тому не генерують його. Частина енергії електромагнітного поля переходить внаслідок зіткнень у неупорядковану механічну енергію заряджених частинок і не може бути повернута полю. Ця енергія в кінцевому рахунку переходить в тепло. Такий процес називається дисипацією енергії ЕМП.

Виведемо, користуючись рівняннями Максвелла в середовищі, співвідношення, що виражають енергію ЕМП. Цей вивід аналогічний виводу закону збереження енергії ЕМП у вакуумі (§13):

$$\begin{cases} \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div} [\vec{E} \times \vec{H}] = -\left(\frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right),$$

звідки

$$\frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\vec{E} \times \vec{H}] = -\vec{j} \cdot \vec{E} - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right). \quad (1)$$

Доповнимо ці рівняння матеріальними рівняннями

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H};$$

тоді

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \vec{E}^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \vec{D}),$$

аналогічно

$$\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \vec{B}).$$

Враховуючи це, перепишемо рівняння (1) у вигляді

$$\operatorname{div} \left(\frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}] \right) = -\vec{j} \vec{E} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \vec{D} + \vec{B} \vec{H}),$$

або

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{S} - \vec{j} \vec{E}, \quad (2)$$

де

$$w = \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \vec{D} + \vec{B} \vec{H}) = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2) \quad (3)$$

є густиною енергії ЕПМ в середовищі;

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}] \quad (4)$$

- вектор Пойтінга, який, як і у вакуумі (§13), має фізичний зміст вектора густини потоку енергії ЕМП.

Проаналізуємо доданок $-\vec{j} \vec{E}$ в (2). Згідно із законом Ома у диференціальній формі $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, але при наявності сторонніх сил неелектричної природи (тобто, хімічного, термічного та іншого походження) його слід записати у вигляді:

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}). \quad (5)$$

Це є узагальнений закон Ома, справедливий при наявності сторонніх сил в електричному колі. З нього:

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} - \vec{E}_{\text{стор}}. \quad (6)$$

Це приводить до виразу $-\vec{j} \vec{E} = -\frac{\vec{j}^2}{\sigma} + \vec{j} \vec{E}_{\text{стор}}$. (7)

Величина

$$\frac{\vec{j}^2}{\sigma} = q \quad (8)$$

дорівнює густині тепла, що виділяється струмами провідності за одиницю часу і виражає диференціальний закон Джоуля-Ленца. Величина

$$p = \vec{j} \vec{E}_{\text{стор}} \quad (9)$$

визначає потужність сторонніх сил, тобто роботу, що її виконують в одиниці об'єму сторонні сили за одиницю часу над струмами провідності \vec{j} . Отже, рівняння балансу енергій

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -q + p - \operatorname{div} \vec{S} \quad (10)$$

виражає закон збереження енергії ЕМП в середовищі.

Якщо проінтегрувати (10) по об'єму, то прийдемо до рівності:

$$P - Q - \frac{\partial W}{\partial t} = \oint_{\Sigma} S_n d\Sigma, \quad (11)$$

де

$$P = \int_V p dV = \int_V \vec{j} \vec{E}_{\text{сноп}} dV, \quad Q = \int_V \frac{j^2}{\sigma} dV, \quad W = \int_V W dV = \int_V \frac{\vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B}}{8\pi} dV. \quad (12)$$

Рівняння (11) виражає закон збереження енергії в інтегральній формі: надлишок роботи сторонніх сил (P) над кількістю виділеної теплоти (Q) і приростом електромагнітної енергії в довільному об'ємі дорівнює електромагнітній енергії, що витікає через поверхню, яка обмежує цей об'єм.

§42. Поширення ЕМХ у середовищі

В середовищі, як і у вакуумі, можуть поширюватись змінні ЕМП – електромагнітні хвилі. Їх існування впливає із розв'язку рівняння Максвела в середовищі. Припустимо, що середовище – однорідний діелектрик ($\epsilon, \mu = \text{const}$) без вільних електричних зарядів ($\rho = 0$) і струмів ($\vec{j} = 0$). Тоді з (40.13) маємо:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (1)$$

Диференціюючи перше з цих рівнянь по t і вносячи сюди потім $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ з

другого рівняння, отримаємо

$$\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \text{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{c}{\mu} \text{rot rot } \vec{E} = -\frac{c}{\mu} (\text{grad div } \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}) = \frac{c}{\mu} \nabla^2 \vec{E}, \quad \text{оскільки}$$

$$\text{div } \vec{D} = \epsilon \text{div } \vec{E} = 4\pi\rho = 0.$$

Отже, отримано хвильове рівняння

$$\frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \vec{E}, \quad \nabla^2 \vec{E} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \left(\text{аналогічно } \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \nabla^2 \vec{H} \right) \quad (2)$$

яке описує електромагнітну хвилю, що поширюється з швидкістю

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n}; \quad n = \sqrt{\epsilon\mu}, \quad (3)$$

де n називається показником заломлення середовища, що вводиться в оптиці співвідношенням $n = \frac{c}{v}$.

§43. Дисперсія і абсорбція ЕМХ

Коефіцієнт заломлення нескладно обчислити в класичній електронній теорії речовини в неферомагнітному діелектрику, для якого $\mu \approx 1, n \approx \sqrt{\epsilon}$, якщо розглядати поширення в діелектрику плоскої монохроматичної хвилі

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (1)$$

Припустимо, що електрон зв'язаний з атомом квазіупружними силами, рівними $-\kappa\vec{r}$. Тоді рівняння руху електрона під дією електричного поля (1) ЕМХ є

$$m\ddot{\vec{r}} = -\kappa\vec{r} - \gamma m\dot{\vec{r}} + e\vec{E}, \quad (2)$$

де $-\gamma m\dot{\vec{r}}$ - сила радіаційного тертя, $e\vec{E}$ - сила з боку електричного поля.

Перепишемо рівняння (2) у вигляді:

$$\ddot{\vec{r}} + \gamma \dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{i\omega t}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}. \quad (3)$$

Шукаємо розв'язок рівняння (3) у вигляді

$$\vec{r} = \vec{a} e^{i\omega t}, \quad (4)$$

де $|\vec{a}|$ - амплітуда вимушених коливань. Підстановка (4) в (3) дає після скорочення на $e^{i\omega t}$:

$$\vec{a}(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2) = \frac{e}{m} \vec{E}_0,$$

звідки

$$\vec{a} = \frac{\frac{e}{m} \vec{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}, \quad \vec{r} = \vec{a} e^{i\omega t} = \frac{\frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} = \frac{e}{m} \frac{\vec{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}. \quad (5)$$

Зміщення в атомі електрона, рух якого описується рівнянням (2), спричиняє виникнення дипольного електричного моменту

$$\vec{p} = e\vec{r} = \frac{e^2}{m} \frac{\vec{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}.$$

Якщо діелектрик має в одиниці об'єму N електронів, то дипольний електричний момент одиниці об'єму (вектор поляризації) дорівнює

$$\vec{P} = N\vec{p} = N \frac{e^2}{m} \frac{\vec{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}. \quad (6)$$

Але, оскільки $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \varepsilon\vec{E}$, то це дає $\varepsilon = 1 + \frac{4\pi N e^2 / m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$. (7)

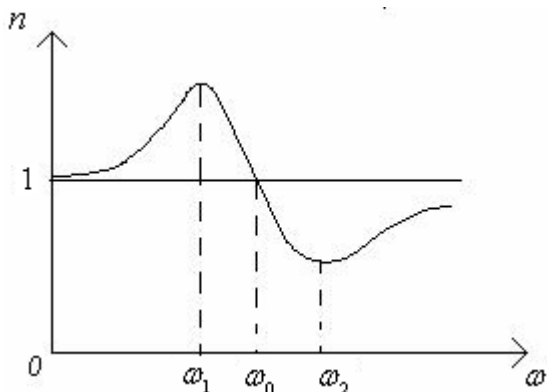
Отже, відносна діелектрична проникність середовища є комплексною функцією частоти коливань ω падаючої ЕМХ. Відповідно показник заломлення n' , як і ε , виявляється комплексною величиною:

$$n' = \sqrt{\varepsilon\mu} = \sqrt{1 + \frac{4\pi N e^2 / m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}}. \quad (8)$$

Для спрощення аналізу обмежимося випадком досить розріджених газів, коли другий доданок під коренем у (8) $\ll 1$. Тоді, розкладаючи (8) в ряд, отримаємо:

$$n' = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{4\pi N e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} = 1 + \frac{2\pi N \frac{e^2}{m} (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma^2 \omega^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{4\pi N e^2}{m}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma^2 \omega^2} \cdot i\gamma\omega = n - ik, \quad (9)$$

де n - дійсний показник заломлення, k - коефіцієнт поглинання (абсорбції). Залежність n і k від частоти ω має вигляд, зображений на малюнку. Залежність показника заломлення ЕМХ, а з ним і її швидкості в середовищі від частоти називають дисперсією ЕМХ.

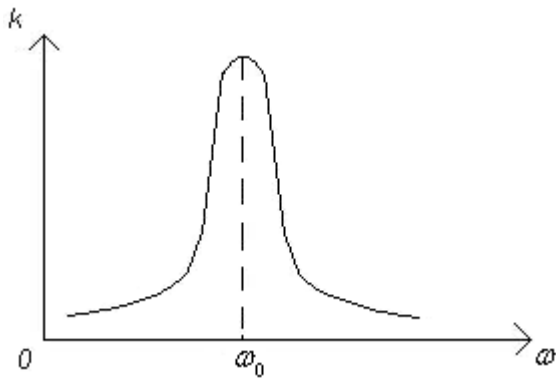


Області частот, де $n(\omega)$ зростає із збільшенням частоти ω , називається областю нормальної дисперсії. Інтервал частот (ω_1, ω_2) , де $n \downarrow$ при $\omega \uparrow$, називається областю аномальної дисперсії. Коефіцієнт поглинання має максимум при $\omega \rightarrow \omega_0$.

Відмітимо декілька крайніх випадків:

а) поширення ЕМХ з низькими частотами ($\omega \ll \omega_0$):

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m\omega_0^2} = \text{const}; \quad (10)$$



б) $\omega \gg \omega_0$ (ультрафіолетова і рентгенівська область):

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi ne^2}{m\omega^2}; \quad (11)$$

тобто $\varepsilon \uparrow$ при $\omega \uparrow$, а $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \downarrow$ при $\omega \uparrow$.

в) розріджений іонізований газ: $\omega_0 = 0, \gamma = 0$. Тоді

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi ne^2}{m\omega^2}. \quad (12)$$

Згідно (12), при $\omega^2 < \frac{4\pi Ne^2}{m}$ $\varepsilon < 0$, а $n = \sqrt{\varepsilon}$ - уявним. Це означає неможливість поширення відповідних ЕМХ.

§44. Поляризація неполярних діелектриків

Розрізняються два класи діелектриків з нейтральними молекулами: 1) неполярні діелектрики, молекули яких внаслідок електронної будови при відсутності зовнішнього електричного поля мають нульовий дипольний момент; 2) полярні діелектрики, молекули яких при відсутності зовнішнього поля мають ненульовий дипольний момент p_0 . До першого класу відносяться гази N_2, H_2, CO_2, \dots ; до другого – гази SO_2, H_2S , вода, ефіри, органічні кислоти тощо.

Якщо зовнішнє електричне поле відсутнє, дипольний момент в діелектриках дорівнює 0 в обох випадках; в другому випадку – через хаотичність орієнтацій диполів полярних діелектриків в наслідок теплового руху.

При появі зовнішнього поля діелектрик поляризується; цей процес є наслідком появи дипольних моментів у неполярних молекул або наслідком певної орієнтації дипольних моментів полярних молекул відносно напрямку електричного поля.

Під дією зовнішнього поля \vec{E} неполярні молекули поляризуються, тому що позитивний і негативний заряди молекул зміщуються в протилежних напрямках, і кожна молекула набуває дипольний момент $\vec{p} \parallel \vec{E}$, який в першому наближенні можна вважати пропорційним полю:

$$\vec{p} = \beta \vec{E}. \quad (1)$$

Коефіцієнт β називають коефіцієнтом поляризації (поляризованістю) молекули. Він обчислюється методами квантової механіки. Напрямки моментів \vec{p} всіх молекул у діелектрику можна вважати однаковими, так що вектор поляризації одиниці об'єму діелектрика дорівнює

$$\vec{P} = \sum \vec{p} = N\vec{p} = N\beta\vec{E}, \quad (2)$$

де N - число молекул в одиниці об'єму. Враховуючи співвідношення (40.9) і (40.14), отримаємо:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} = \vec{E} + 4\pi N \beta \vec{E} = (1 + 4\pi N \beta) \vec{E},$$

звідки діелектрична проникність діелектрика

$$\varepsilon = 1 + 4\pi \beta N. \quad (3)$$

Коефіцієнт поляризації молекул β визначається внутрішніми властивостями молекули і, отже, не залежить істотно від густини, тиску і температури діелектрика. Тому з (3) випливає, що діелектрична проникність є лінійною функцією густини речовини, бо $N \sim \rho$.

§45. Поляризація полярних діелектриків

Розглянемо поляризацію полярного діелектрика. В електричному полі молекула з дипольним моментом \vec{p}_0 набуває енергії

$$U = -\vec{p}_0 \vec{E} = -p_0 E \cos \theta. \quad (1)$$

Вектор поляризації \vec{P} буде паралельний полю, а його числове значення дорівнюватиме сумі проєкцій моментів усіх N диполів на напрям поля:

$$P = \sum p_{iz} = N \bar{p}_z. \quad (2)$$

Середнє значення \bar{p}_z визначається розподілом Больцмана:

$$\bar{p}_z = \frac{\int p_z e^{\frac{-U}{kT}} d\Omega}{\int e^{\frac{-U}{kT}} d\Omega}, \quad (3)$$

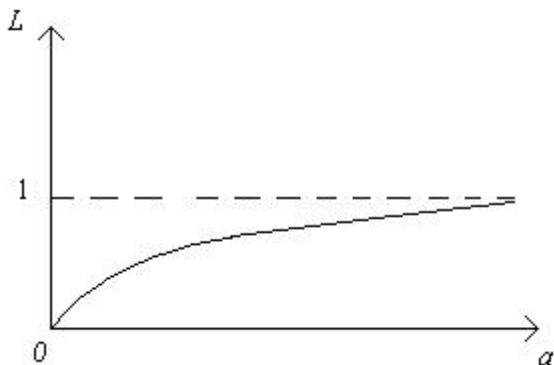
де $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ - елемент тілесного кута, $p_z = p_0 \cos \theta$ залежить тільки від θ . Підставивши в (3) значення p_z , U , $d\Omega$ отримаємо:

$$\bar{p}_z = \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi e^{\frac{p_0 E \cos \theta}{kT}} p_0 \cos \theta \sin \theta d\theta}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi e^{\frac{p_0 E \cos \theta}{kT}} \sin \theta d\theta} = \frac{p_0 \int_0^\pi e^{\frac{p_0 E \cos \theta}{kT}} \cos \theta \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi e^{\frac{p_0 E \cos \theta}{kT}} \sin \theta d\theta}. \quad (4)$$

Позначимо $a = \frac{p_0 E}{kT}$ і зробимо заміну $x = \cos \theta$; тоді

$$\bar{p}_z = p_0 \frac{\int_{-1}^1 e^{ax} x dx}{\int_{-1}^1 e^{ax} dx} = p_0 \frac{d}{da} \left[\ln \int_{-1}^1 e^{ax} dx \right] = p_0 \frac{d}{da} \ln \frac{e^a - e^{-a}}{a} = \quad (5)$$

$$= p_0 \frac{a}{e^a - e^{-a}} \frac{d}{da} \frac{e^a - e^{-a}}{a} = p_0 \left[\frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} \right] = p_0 L(a),$$



де функція $L(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a}$ називається функцією Ланжевена.

Отже, поляризація діелектрика дорівнює

$$P = N \bar{p}_z = N p_0 L(a). \quad (6)$$

В слабких електричних полях, коли $p_0 E \ll kT$, маємо

$$a \ll 1, L(a) \approx \frac{a}{3} = \frac{p_0 E}{3kT}, \text{ звідки}$$

$$P = \frac{N p_0^2}{3kT} E. \quad (7)$$

Тоді діелектрична проникність полярного діелектрика дорівнюватиме:

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi N p_0^2}{3kT}, \quad (8)$$

тобто з підвищенням температури зменшується, що обумовлено механізмом орієнтаційної поляризації.

Для сильних полів і низьких температур $a = \frac{p_0 E}{kT} \gg 1$, $L(a) \approx 1$, тому за (6) отримаємо

$$\vec{P} \approx \vec{p}_0 N, \quad (9)$$

тобто всі дипольні моменти орієнтовані приблизно в напрямі поля, при цьому \vec{P} вже не залежить від \vec{E} тому, що досягається стан насичення, коли збільшення \vec{P} вже далі неможливе.

§46. Класифікація магнетиків

Середовища, магнітна проникність в яких відмінна від одиниці, називаються магнетиками. В таких середовищах напруженість магнітного поля \vec{H} і магнітна індукція \vec{B} не співпадають між собою. Для більшості речовин зв'язок між ними лінійний:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (1)$$

але у деяких магнетиків (у першу чергу у феромагнетиків) ця залежність може бути нелінійною і навіть неоднозначною.

Для характеристики магнетиків, окрім магнітної проникності μ використовується ще одна величина - магнітна сприйнятливість χ , яка зв'язує вектор намагніченості речовини \vec{M} з напруженістю магнітного поля \vec{H} :

$$\vec{M} = \chi \vec{H}. \quad (2)$$

З формул (40.11) випливає: $\vec{B} = \mu \vec{H} + 4\pi \vec{M} = \vec{H} + 4\pi \chi \vec{H} = (1 + 4\pi \chi) \vec{H}$, звідки

$$\mu = 1 + 4\pi \chi. \quad (3)$$

Магнітна сприйнятливість може бути додатною або від'ємною величиною. В залежності від χ розрізняють такі види магнетиків:

1. Парамагнетики: $\chi > 0$, $\mu > 1$ (лужні метали, кисень). Парамагнетизм обумовлений орієнтацією зовнішнім полем власних, існуючих і при відсутності зовнішнього поля, магнітних моментів структурних елементів, з яких складається речовина.

2. Діамагнетики: $\chi < 0$, $\mu < 1$. Прикладом діамагнітного середовища можуть служити інертні гази. Діамагнетизм – явище універсальне і притаманне всім тілам без винятку. Але безпосередньо воно спостерігається тільки тоді, коли атоми або молекули при $\vec{H} = 0$ не мають власного магнітного моменту, тому що більш сильний парамагнетизм замасковує діамагнітний ефект.

3. Середовище, в яких макроскопічний магнітний момент існує і при відсутності зовнішнього поля, складають третій клас магнетиків. Їх типовим представником є феромагнетики. Крім феромагнетиків можуть існувати антиферомагнетики, в яких спонтанно виникають ланцюжки атомів з протилежно напрямленими магнітними моментами. Можуть існувати також і інші магнітні структури.

Сучасна атомна фізика встановила, що елементарними носіями магнетизму є елементарні частинки речовини: атомні ядра, електрони в атомі. Електрони в атомі мають орбітальний магнітний момент, обумовлений рухом електронів навколо ядра, а також власний магнітний момент, що називається спіновим. Магнітний момент ядер приблизно на 3 порядки менший, ніж електронів. Тому в першому наближенні повний магнітний момент атома визначається як векторна сума спінових магнітних моментів електронів і їх орбітальних моментів. При додаванні орбітальних і спінових моментів атома, який має парне число електронів, вони можуть повністю компенсуватись. Тоді результуючий магнітний момент атома дорівнює 0. Якщо повної компенсації не відбувається, то атом матиме сталий магнітний момент. Залежно від цього магнітні властивості тіл будуть різними. Тіла, атоми яких не мають сталого магнітного моменту, є діамагнітними, а тіла, атоми яких мають сталий магнітний момент, можуть бути парамагнітними, феромагнітними або антиферомагнітними залежно від характеру взаємодії між окремими атомами.

§47. Класична теорія парамагнетизму

З формули (46.2) маємо для магнітної сприйнятливості вираз

$$\chi = \frac{\bar{M}}{\bar{H}}, \quad (1)$$

де \bar{M} – намагніченість, яка дорівнює магнітному дипольному моменту одиниці об'єму речовини, \bar{H} – напруженість магнітного поля.

Нехай молекули парамагнітного газу являють собою магнітні диполі з магнітним моментом $\vec{\mu}$. Під дією зовнішнього магнітного поля \vec{H} ці дипольні моменти вишикувалися б у напрямку поля, якби цьому не перешкоджав тепловий рух. Внаслідок теплового руху в кожен момент часу є молекули будь-якої орієнтації відносно поля. Розподіл молекул-диполей за напрямкам описується формулою Максвелла-Больцмана:

$$dN = A e^{-U/kT} \sin \theta d\theta, \quad (2)$$

де dN - число тих диполів, напрямки яких складають з напрямком поля кути в інтервалі від θ до $\theta + d\theta$; величина

$$U = -\vec{\mu}\vec{H} = -\mu H \cos \theta \quad (3)$$

є потенціальною енергією окремого диполя в зовнішньому полі напруженістю \vec{H} , k – стала Больцмана. Стала A визначається з умови, що інтегрування (2) по всім напрямкам давало б повне число молекул N в одиниці об'єму. Тоді, згідно (2) і (3):

$$dN = A e^{\mu H \cos \theta / kT} \sin \theta d\theta = \left[a = \frac{\mu H}{kT} \right] = A e^{a \cos \theta} \sin \theta d\theta, \quad (4)$$

$$N = \int dN = A \int_0^\pi e^{a \cos \theta} \sin \theta d\theta = A \frac{e^a - e^{-a}}{a} \Rightarrow A = \frac{Na}{e^a - e^{-a}}. \quad (5)$$

Окрема молекула-диполь, яка утворює з полем \vec{H} кут θ , вносить у величину вектора намагніченості \vec{M} свій вклад, який дорівнює $\mu \cos \theta$, а dN диполів, що складають з \vec{H} кут θ , дають в M вклад $dM = \mu \cos \theta \cdot dN$; звідси повна величина вектора намагнічення отримується в результаті інтегрування по всім молекулам в одиниці об'єму газу:

$$M = \mu \int \cos \theta dN = \mu A \int_0^\pi e^{a \cos \theta} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{\mu A}{a} \left[(e^a + e^{-a}) - \frac{1}{a} (e^a - e^{-a}) \right] = \quad (6)$$

$$= N \mu \left[\frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} \right] = N \mu L(a).$$

Підставивши тепер (6) в (1), отримаємо

$$\chi = \frac{N \mu L(a)}{H} = \frac{N \mu}{H} L\left(\frac{\mu H}{kT}\right). \quad (7)$$

Такою є сприйтливості парамагнітного газу в загального випадку. У випадку, коли $a \ll 1$ або ж $\mu H \ll kT$, тобто при високих температурах чи слабких магнітних полях $L(a) \approx \frac{a}{3} \approx \frac{\mu H}{3kT}$. Тому

$$\chi = \frac{N \mu}{H} \cdot \frac{a}{3} = \frac{N \mu^2}{3kT} \sim \frac{1}{T}. \quad (8)$$

Така залежність від температури носить назву закону Кюри. В іншому крайньому випадку, коли $a \gg 1$, або $\mu H \gg kT$, тоді $L(a) \approx 1$, $\vec{M} = N \vec{\mu}$ - це відповідає стану насичення, коли всі магнітні моменти напрямлені вздовж поля.

§48. Феромагнетизм

Сильна взаємодія між суміжними магнітними диполями у феромагнетиках спричиняє спонтанне намагнічування цих речовин, тобто їх намагнічення при відсутності зовнішнього магнітного поля. Додатковою особливістю феромагнетиків є також нелінійність залежності намагніченості M від напруженості H та магнітний гістерезис і пов'язаний із цим залишковий магнетизм.

Фізична природа феромагнетизму не піддається поясненню в рамках класичної фізики, і тільки квантова механіка з'ясувала його справжню природу. Але ще у 1907р. французький вчений П.Вейс припустив, що причиною незвичної поведінки феромагнетиків є наявність в них невеликих за розмірами областей ($\sim 10^{-3} - 10^{-4}$ см) – доменів, в яких магнітні моменти атомів майже паралельні один одному, тобто ці області намагнічені майже до насичення. У реальному полікристалі домени у відсутності зовнішнього поля орієнтовані безладно, тому феромагнетик не намагнічений. Процес його намагнічення полягає в намаганні окремих доменів зорієнтуватися в напрямі зовнішнього магнітного поля, подібно до того, як це відбувається при намагнічуванні парамагнетиків. Тільки тут роль елементарних носіїв магнетизму відіграють домени.

За теорією Вейса магнітне поле, яке діє на магнітний момент атома

складається з прикладеного зовнішнього поля \vec{H} і деякого внутрішнього поля (поля Вейса), яке враховує вплив на даний атом сусідніх атомів і пропорційне намагніченню M : $\vec{H}_W = b\vec{M}$. Формально класична теорія феромагнетизму якісно пояснила основні властивості феромагнетиків, але не знайшла природу взаємодії атомних магнітних моментів. Це зробила квантова механіка. Було встановлено що намагнічення зумовлене паралельною орієнтацією спінів електронів. Намагніченість у типових феромагнетиків зберігається до точки Кюрі – температури, вище якої феромагнетик перетворюється у парамагнетик.

У 1928р. Я.Френкель і В.Гейзенберг показали, що в явищах феромагнетизму основну роль відіграє обмінна взаємодія електронів, яка визначається обмінним інтегралом:

$$A = \int \psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2) \left[\frac{e^2}{r_{12}} - \frac{Z_a e^2}{r_{1b}} - \frac{Z_b e^2}{r_{2a}} \right] \psi_b(\vec{r}_1)\psi_a(\vec{r}_2) dV_1 dV_2,$$

де індекси a і b хвильових функцій означають номер атома, індекси 1 і 2 – номери електронів. Необхідною умовою феромагнетизму є позитивне значення обмінного інтегралу, тому що тільки в цьому випадку з найбільшою енергією матиме стан в якому всі спіни паралельні. У строгій теорії насамперед слід обчислити величину і визначити знак обмінного інтегралу. Для цього треба знати енергетичний спектр і хвильові функції системи електронів, які беруть участь у феромагнетизмі. Однак точних відомостей про ці величини немає, і тому користуються наближеними трактуваннями феромагнетизму.

Виникнення доменів у феромагнетизмі можна пояснити за допомогою такої схеми. Припустимо, що в деякій області A спіни всіх електронів розмістились паралельно один одному. Тоді область A намагнітиться до насичення.

В сусідній області B спіни мають бути напрямлені протилежно до спінів області A , інакше ці 2 області являли б собою 2 магніти, які б дотикались однаковими полюсами, а цей стан є нестійким, очевидно, стійким буде стан, при якому сусідні області намагнітяться протилежно одна одній. У ряді випадків компенсація антипаралельно орієнтованих спінів виявляється неповною. Явище неповної компенсації двох підрешіток називається феромагнетизмом, а речовини з такими властивостями феромагнетиками.

§49. Класична теорія електропровідності металів

Якщо метал перебуває у твердому або рідкому стані, то його атоми іонізуються, поділяючись на один або декілька електронів і позитивний іон. Іони утворюють кристалічну будову металу, здійснюючи малі коливання навколо положення рівноваги. Відірвані від іонів вільні електрони хаотично рухаються в проміжках між іонами, утворюючи так званий електронний газ.

При відсутності зовнішнього електричного поля вільні електрони перебувають в абсолютно неупорядкованому тепловому русі. Включення поля приводить до збільшення руху електронів в напрямку діючих з боку поля сил, тобто до появи електричного струму. Стикаючись під час руху з іонами металу, електрони передають їм надлишок кінетичної енергії, набутої під дією сил поля, що веде до збільшення енергії теплового руху іонів, тобто

виділення джоулевого тепла.

Густина струму, створеного електронами провідності:

$$\vec{j} = \overline{\rho \vec{u}} = -en\vec{u}. \quad (1)$$

Будемо вважати електронний газ в металі ідеальним, тобто вважатимемо, що електрони між зіткненнями рухаються по законам руху матеріальних точок, які зазнають дії лише зовнішнього електричного поля \vec{E} . При відсутності зовнішнього поля \vec{E} середня швидкість електрона відносно ґратки дорівнює нулю. Під дією поля \vec{E} електрони набувають додаткову швидкість, що паралельна діючій на них силі: $\vec{u} \parallel \vec{E}$. Це накопичення швидкості \vec{u} відбувається лише під час вільного руху електронів між двома його послідовними зіткненнями з іонами ґратки (зіткнення вільних електронів між собою не впливають на їх середню швидкість, тому що при зіткненнях двох тіл однакової маси векторна сума їх швидкостей не змінюється в силу закону збереження імпульсу). При кожному такому зіткненні напрямок і величина швидкості змінюється випадковим чином. Отже, безпосередньо після зіткнення середнє значення швидкості \vec{u} дорівнює нулю, а безпосередньо перед зіткненням швидкість дорівнює:

$$\vec{u} = \vec{w}\tau = \frac{\vec{F}}{m}\tau = -\frac{e\vec{E}}{m}\tau,$$

де τ – середня тривалість вільного руху електрона. Тому середнє значення швидкості дорівнює

$$\vec{u} = \frac{1}{2}(0 + \vec{u}) = -\frac{e\vec{E}\tau}{2m}, \quad (2)$$

з іншого боку, якщо λ – середня довжина вільного пробігу електрона в металі, то

$$\tau = \frac{\lambda}{v}, \quad (3)$$

де v - середня швидкість неупорядкованого теплового руху електронів при відсутності зовнішнього поля, оскільки у всіх практично цікавих випадках $v \gg u$, і тому при обчисленні середнього числового (а не векторного) значення швидкості електрона додатковою швидкістю можна знехтувати.

Підставляючи отримані нами вирази (2-3) в (1), знайдемо

$$\vec{j} = \frac{e^2 n \tau}{2m} \vec{E} = \frac{e^2 n \lambda}{2m v} \vec{E} = \sigma \vec{E}. \quad (4)$$

Отже, густина струму виявляється пропорційною напруженості поля \vec{E} , як того вимагає закон Ома $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Звідси електропровідність металу дорівнює

$$\sigma = \frac{e^2 n \lambda}{2m v}. \quad (4)$$

§50. Труднощі класичної електронної теорії

Припустимо, що до електронного газу в металах можна застосувати класичну статистичну механіку. В ній доводиться, що середня енергія поступального теплового руху молекул будь-якого газу залежить лише від температури, але не від хімічної природи і молярної маси газу, і дорівнює

$$\bar{E}_{кин} = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT, \text{ звідки } \bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}, \quad (1)$$

де k – стала Больцмана. Застосувавши цю формулу до електронного газу в металі, отримаємо з (49.4):

$$\sigma = \frac{e^2 n \lambda}{2 m \bar{v}} = \frac{e^2 n \lambda}{2 \sqrt{3kTm}}. \quad (2)$$

На жаль, цю формулу не можна перевірити безпосередньо з даними дослідів, тому що ми не знаємо ні абсолютних значень n і λ , ні характеру їх залежності від температури. Але опосередковано формулу (2) можна перевірити, якщо її розглянути разом з іншими співвідношеннями, що зв'язують n і λ з рядом вимірюваних на досліді величин (теплоємність, термо ЕРС і т.д.).

Розглянемо для прикладу теплоємність одиниці об'єму кристалу. Якщо середня кінетична енергія вільних електронів визначається формулою (1), то повна кінетична енергія одиниці об'єму електронного газу в металі дорівнює

$$U_e = n \cdot \bar{E}_{кин} = \frac{3}{2} nkT.$$

Для іонів (атомів) з концентрацією $n_i = n_a$, крім кінетичної енергії поступального руху, треба врахувати ще й кінетичну енергію коливального руху:

$$U_i = n_i (\bar{E}_{кин,пост} + \bar{E}_{кин,об}) = n_i \left(\frac{3}{2} kT + \frac{3}{2} kT \right) = 3n_i kT.$$

Електронний газ та іони дають свій вклад в загальну теплоємність одиниці об'єму кристалу при сталому об'ємі:

$$C_{v,e} = \left(\frac{\partial U_e}{\partial T} \right)_v = \frac{3}{2} nk, \quad C_{v,i} = \left(\frac{\partial U_i}{\partial T} \right)_v = 3n_i k. \quad (3)$$

Експериментально ж вимірюється повна теплоємність металу, тобто $C_v = C_{v,e} + C_{v,i}$ - сума теплоємностей іонної ґратки і вільних електронів. Якщо від експериментально вимірюваної теплоємності металу відняти теплоємність іонної ґратки, то отримується теплоємність електронного газу. Виявляється, на долю теплоємності електронного газу залишається досить мала величина, яка може бути узгоджена з (3) тільки при таких малих значеннях концентрації електронів n , при яких для електропровідності по формулі (2) отримуються дуже малі значення. Точніше, якщо приписати теплоємності електронного газу в металах найбільше з узгоджених з даними дослідів значень, то з виразу для $C_{v,e}$ можна визначити верхню межу величини n .

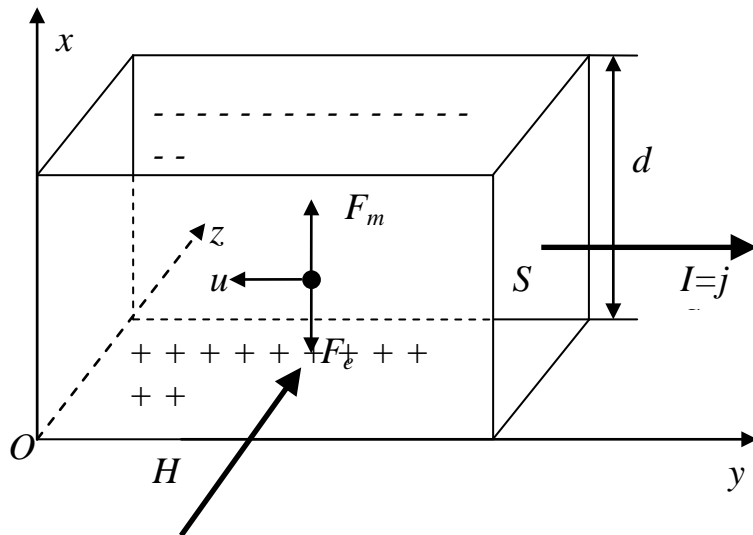
Підставивши в (2) знайдені значення n і знаючи з експерименту значення σ , можна знайти довжину вільного пробігу електрона λ . Несподівано вона виявляється дуже великою (наприклад, для срібла $5 \cdot 10^{-5}$ см), тоді як відстані між атомами лише 10^{-8} см. Стає незрозумілим, як електрон може пролетіти на відстані порядку 1000 атомних відстаней, не зіткнувшись жодного разу з атомами. Це протиріччя є одним з найсуттєвіших протиріч класичної електронної теорії металів.

При використанні даних по термоЕРС, контактним явищам виявляються додаткові протиріччя. Все це вказує на те, що на зміну класичній теорії

провідності металів має прийти квантова теорія. Така теорія відома як зонна теорія електропровідності.

§51. Ефект Холла

Якщо провідник зі струмом помістити в магнітне поле, перпендикулярне до напрямку струму, то в ньому виникає електричне поле, перпендикулярне і до напрямку струму, і до напрямку магнітного поля. Це явище було відкрито у 1879р. американським фізиком Холлом і називається ефектом Холла. Воно знаходить досить просте пояснення в рамках класичної електронної теорії.



Нехай по однорідній металічній пластинці протікає електричний струм густиною \vec{j} у напрямку вісі y . Якщо помістити пластинку в однорідне магнітне поле $\vec{H} \parallel Oz$, то електричні

заряди, рухом яких обумовлений струм, будуть зазнавати з боку магнітного поля дію сили Лоренца $\vec{F}_m = \frac{e}{c} [\vec{u} \times \vec{H}]$, де u – середня швидкість носіїв струму.

Ця сила відхилить електрони у напрямку вісі Ox і викликать накопичення електронів на поверхні пластини. Цей процес буде тривати доти, доки результуюча сила поля накопичених на верхній поверхні негативних зарядів і поля надлишку позитивних зарядів на нижній поверхні не зрівняють силу \vec{F}_m . Це електричне поле називають Холлівським полем.

Величина холлівського поля визначається з умови рівності сил $|\vec{F}_e| = |\vec{F}_m|$, або

$$eE_x = \frac{e}{c} uH, \quad E_x = \frac{u}{c} H. \quad (1)$$

З іншого боку, якщо густину струму представити у вигляді $j = neu$, то

$$j = neu \Rightarrow u = \frac{j}{ne} \Rightarrow E_x = \frac{1}{nec} jH = R_x jH. \quad (2)$$

Тут коефіцієнт $R_x = \frac{1}{nec}$ (3)

називається коефіцієнтом Холла і є характеристикою металу. З точки зору класичної електронної теорії він мав би бути для всіх металів від'ємним, тому що заряд електрона від'ємний. Проте для деяких металів (залізо, кобальт, цинк, кадмій) він виявляється додатнім, ніби носіями заряду є позитивно заряджені частинки, що суперечить класичній теорії металів. Ще протиріччя розв'язує тільки квантова теорія металів.

Ефект Холла знайшов застосування у вимірювальних пристроях для вимірювання магнітного поля, так званих датчиках Холла. Помножимо рівність (2) на площу пластини S і врахуємо зв'язок між напруженістю поля і

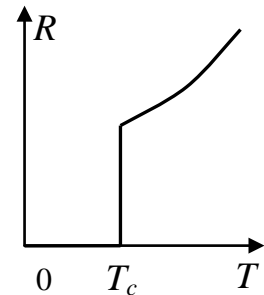
різницею потенціалів та силою і густиною струму, тоді отримаємо:

$$E_X \cdot S = R_X \cdot H j S, \quad E_X = \frac{U}{d}, \quad j S = I \Rightarrow \frac{US}{d} = R_X H I \Rightarrow H = \frac{US}{R_X d I}, \quad (4)$$

тобто, за силою струму і різницею потенціалів холлівського поля можна визначити напруженість магнітного поля. Такий метод вимірювання магнітного поля використовується у так званих Холлівських датчиках.

§52. Електромагнітні властивості надпровідників

Існує явище, механізм якого змогла повністю пояснити лише квантова теорія. Це явище надпровідності. Опір всіх чистих (без домішок) металів при наближенні до 0 К прямує до нуля як T^5 . Але в деяких металах і сплавах при певній критичній температурі опір стрибком падає до нуля (рис.). Стан металу нижче цієї температури називається надпровідником. При цьому магнітне поле не проникає в глибину надпровідника, тобто його напруженість і індукція в середині провідника дорівнює нулю. Це явище називається ефектом Мейсснера і Оксенфельда.



Пояснення механізму надпровідності неможливе в рамках класичної теорії. Суть механізму полягає в тому, що хоч між електронами діють кулонівські сили відштовхування, проте в твердих тілах між ними при певних умовах виникають і сили притягання, обумовлені тим, що електрони можуть обмінюватись квантами пружних коливань тіла - фононами. Це притягання призводить до утворення зв'язаних пар електронів - куперівських пар. Квантові закономірності приводять до того, що при низьких температурах ці пари мають властивість надплинності, тобто руху без тертя. Оскільки ці пари електронів мають електричний заряд, то їх надплинність рівносильна надпровідності.

Надпровідність є прикладом того, як взаємодія між частинками речовини може радикально змінити матеріальні рівняння електродинаміки. Встановимо електромагнітні властивості надпровідності із експериментальних фактів, що в середині надпровідника магнітне поле відсутнє: $\vec{B} = 0$, а провідність $\sigma = \infty$. Із закону Ома $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ та $\vec{j} \neq 0, \sigma = \infty$ випливає, що в середині надпровідника $\vec{E} = 0$. З рівняння Максвелла $rot \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ та рівності $\vec{E} = 0$ випливає:

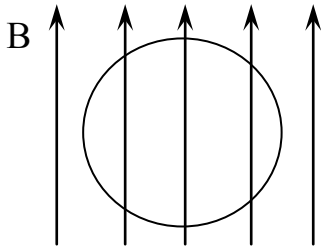
$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \vec{B} = const = 0. \quad (1)$$

Отже, при переході металу в надпровідний стан відбувається виштовхування магнітного поля з надпровідника.

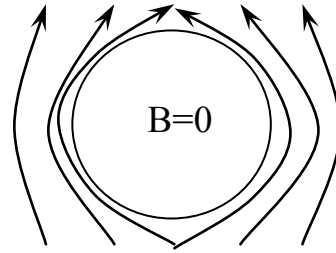
З граничних умов $B_{1,n} = B_{2,n} = 0$ випливає, що магнітне поле за межами надпровідника біля його поверхні дотичне до поверхні.

З рівняння Максвелла $rot \vec{H} = \frac{4\pi}{e} \vec{j}$ та (1) ($\vec{H} = \vec{B} = 0$) випливає, що в області надпровідника $\vec{j} = 0$. Отже, весь струм, що тече через надпровідник є струмом поверхневим і існує лише в тій тонкій області середовища, в яку ще

проникає магнітне поле (див. рис.).



Нормальний стан



Надпровідний стан

§53. Теорія Лондонів

Фріц і Ганс Лондони в рамках класичної фізики пояснили деякі властивості надпровідників. Розглянемо їх теорію.

Запишемо рівняння руху електрона в електромагнітному полі:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}_z}{m} = \frac{e}{m} \left[\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H} \right]. \quad (1)$$

Оскільки, як було показано в гідродинаміці,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}, \quad \text{а} \quad (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \text{grad} \frac{v^2}{2} - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v}, \quad (2)$$

то рівнянню (1) можна придати вигляд:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v} = \frac{e}{m} \vec{E} + \frac{e}{mc} \vec{v} \times \vec{B}, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \frac{e}{m} \vec{E} + \text{grad} \frac{v^2}{2} = \vec{v} \times \text{rot} \vec{v} + \frac{e}{mc} \vec{v} \times \vec{B}. \quad (3)$$

Візьмемо ротор від обох частин цього рівняння і з урахуванням 1-го рівняння Максвелла отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\text{rot} \vec{v} + \frac{e}{mc} \vec{B} \right) = \text{rot} \left[\vec{v} \left(\text{rot} \vec{v} + \frac{e}{mc} \vec{B} \right) \right]. \quad (4)$$

Введемо позначення $\vec{w} = \text{rot} \vec{v} + \frac{e}{mc} \vec{B}, \quad (5)$

тоді рівняння руху можна написати у вигляді:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = \text{rot} (\vec{v} \times \vec{w}). \quad (6)$$

Це рівняння має важливу властивість. Якщо в деякий момент часу значення \vec{w} обертається в 0, то похідна $\frac{\partial \vec{w}}{\partial t}$ в цей момент часу також буде дорівнювати 0, а тому значення \vec{w} буде дорівнювати 0 і у всі наступні моменти часу:

$$\vec{w} = \text{rot} \vec{v} + \frac{e}{mc} \vec{B} = 0. \quad (7)$$

Випадок $\vec{w} = 0$ є, звичайно, дуже спеціальним випадком руху електронів в одному тільки ЕМП без тертя. В звичайному ідеальному провіднику, для якого написані рівняння (1) і (6), значення \vec{w} не обов'язково дорівнює 0, і класична фізика не дає можливості пояснити, чому повинен реалізовуватись цей досить спеціальний випадок. Але саме випадку $\vec{w} = 0$ відповідає надпровідник, і пояснення цьому дає тільки квантова теорія.

Застосуємо операцію ротора до визначення густини електричного

струму $\vec{j} = ne\vec{v}$ і скористаємось рівнянням (7):

$$\text{rot } \vec{j} = \text{rot}(en\vec{v}) = en \text{rot } \vec{v} = [(7)] = -\frac{e^2 n}{mc} \vec{B}. \quad (8)$$

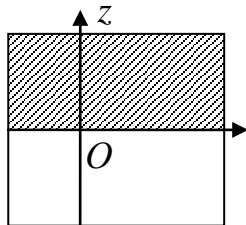
Рівняння (8) називається рівнянням Лондонів і є особливо важливим, тому що його можна розглядати як матеріальне рівняння, яке замикає у випадку надпровідників рівняння Максвелла. Видно, що воно не може бути приведене ні до рівняння $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, ні до $\vec{j} = c \text{rot } \vec{M}$.

Скористаємось тепер рівнянням Максвелла $\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$ і застосуємо до нього операцію ротора: $\text{rot rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \text{rot } \vec{j}$, або $\vec{B} - \Delta\vec{B} = \frac{4\pi}{c} \text{rot } \vec{j}$.

Використовуючи інше рівняння Максвелла $\text{div } \vec{B} = 0$ і формулу (8), отримаємо

$$\Delta\vec{B} = \frac{4\pi e^2 n}{mc^2} \vec{B}.$$

Надпровідни



У випадку плоскої геометрії (див. рис.) це рівняння приймає вигляд

$$\frac{d^2 B}{dz^2} = \frac{4\pi ne^2}{mc^2} B.$$

Його розв'язком є $B = A_1 e^{z/\delta} + A_2 e^{-z/\delta}$, де $\delta = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi ne^2}} = \frac{c}{\omega_p}$.

В напівпросторі, зайнятому надпровідником ($z > 0$)

$$B = B_0 e^{-z/\delta}. \quad (9)$$

Цей розв'язок і описує ефект Мейсснера-Оксенфельда. З (9) випливає, що глибина, на яку все ж таки проникає магнітне поле, дорівнює

$$\delta = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi ne^2}} = \frac{c}{\omega_p}, \quad (10)$$

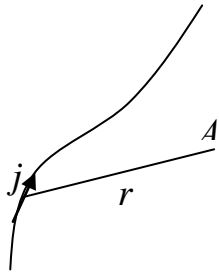
де $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi ne^2}{m}}$ - так звана плазмова частота. Типове значення величини $\delta \approx 5 \cdot 10^{-6}$ см.

Рівняння Лондонів є локальним в тому розумінні, що воно виражає густину струму \vec{j} через значення \vec{B} в тій же точці простору, в якій визначена і \vec{j} . Воно описує електродинамічні властивості реальних надпровідників у вузькій області температур поблизу переходу надпровідника у нормальний стан металу, коли магнітне поле біля поверхні змінюється достатньо повільно. У випадку ж швидкої просторової зміни магнітного поля біля поверхні лондонівське локальне рівняння слід замінити на нелокальне (випадок Пікарда).

§54. Квазістаціонарні струми

Характер змінних ЕМП в матеріальному середовищі суттєво залежить від роду цих середовищ і від порядку величини частоти поля. В цьому параграфі ми розглянемо явища, які відбуваються в масивних провідниках, поміщених у змінні ЕМП, швидкість зміни якого не дуже велика. Умови, накладені на ці поля, будуть приведені нижче, а поля і струми, що їм

задовольнятимуть, називаються *квазістаціонарними*. Існує широкий інтервал частот ω , де рівняння Максвела спрощується. Вони задовольняють ряду характерних умов, які розглянемо нижче.



1 умова квазістаціонарності: нехтування ефектом запізнення – поля в т. А в моменти t і $t' - r/c$ відрізняються дуже мало. Якщо T – період руху частинок в системі, а L – геометрична протяжність тієї області, в якій розглядаються електромагнітні збурення, то ця умова означає

$$T \gg \frac{L}{c} \quad \left(\omega \ll \frac{c}{L} \right), \quad (1)$$

тобто наближено можна вважати, що $c = \infty$ і значення поля в даній точці буде перебувати в одній фазі з їх значенням в будь-якій іншій точці.

2 умова квазістаціонарності: в провідниках (металах) струми провідності набагато більші за струми зміщення:

$$\vec{j} \gg \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (2)$$

так що в рівнянні Максвела можна знехтувати струмами зміщення.

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \approx \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (3)$$

Якщо скористатись законом Ома $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ та співвідношенням $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, то умова (2) еквівалентна

$$4\pi\sigma \cdot \vec{E} \gg \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (4)$$

Для періодичного струму $\vec{E} = \text{Re } \vec{E}_0 e^{i\omega t}$, де ω – частота струму, тому з (4) отримуємо

$$4\pi\sigma \gg \epsilon\omega \quad \text{або, так як } \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \text{то } T \gg \frac{\epsilon}{\sigma}. \quad (5)$$

3 умова квазістаціонарності: час, що характеризує квазістаціонарний струм, повинен бути набагато більший за час вільного пробігу електронів в металі:

$$T \gg \frac{\lambda}{v}, \quad (6)$$

де λ – середня довжина вільного пробігу, v – середня швидкість електронів.

При виконанні наведених умов коефіцієнти, що характеризують провідник, можна прийняти рівними значенням, що відповідають стаціонарним полям, і вважати сталими. Повна система рівнянь поля всередині провідника з квазістаціонарним струмом приймає вигляд:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad \text{div } \vec{B} = 0. \quad (7)$$

В рівняннях (7) \vec{E} – напруженість індукційного електричного поля, яка виникає завдяки змінному магнітному полю. Виключаючи \vec{E} за допомогою закону Ома, отримаємо з (7) рівняння для \vec{H} :

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot } \frac{\vec{j}}{\sigma} = \text{rot} \left(\frac{c}{4\pi\sigma} \text{rot } \vec{H} \right) \Rightarrow \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot } \frac{\text{rot } \vec{H}}{\sigma}. \quad (8)$$

В однорідному середовищі з сталими σ і μ маємо: $\text{div } \vec{B} = \text{div } \mu \vec{H} = \mu \text{div } \vec{H} = 0$,

отже

$$\frac{4\pi\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{1}{\sigma} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \nabla^2 \vec{H}) = \frac{1}{\sigma} \nabla^2 \vec{H} \quad \text{або}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (9)$$

(9) разом з рівнянням $\operatorname{div} \vec{H} = 0$ дає повну систему для визначення \vec{H} . Граничні умови для магнітного поля на поверхні провідника мають вигляд:

$$B_{1n} = B_{2n}; \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}. \quad (10)$$

Якщо $\mu=1$ (діа- і парамагнетики мають магнітну проникність $\mu \approx 1$), то граничні умови (10) дають $\vec{H}_1 = \vec{H}_2$ (11), а тоді з (7) випливає $\vec{j} = 0, j_n = 0 \Rightarrow E_n = \frac{j_n}{\sigma} = 0$, тобто в ізотропному провіднику електричне поле не перетинає поверхні.

§55. Змінний квазістаціонарний струм у замкнутому колі

Закон Ома для замкнутого електричного кола з джерелом струму має вигляд

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{ноід}}). \quad (1)$$

Поділимо (1) на σ і проінтегруємо по всьому колу:

$$\oint \frac{\vec{j} d\vec{l}}{\sigma} = \oint \vec{E} d\vec{l} + \oint \vec{E}_{\text{емор}} d\vec{l}. \quad (2)$$

За визначенням

$$\oint \vec{E}_{\text{емор}} d\vec{l} = \mathcal{E} - \quad (3)$$

Е.Р.С. джерела струму,

$$\text{а} \quad \oint \frac{\vec{j} d\vec{l}}{\sigma} = [\vec{j} \parallel \vec{l}] = \oint \frac{j S dl}{\sigma S} = [j S = I] = I \oint \frac{dl}{\sigma S} = IR, \quad \text{де } R = \oint \frac{dl}{\sigma S} - \text{опір кола.} \quad (4)$$

З рівняння Максвела $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ інтегруванням по поверхні, обмеженій електричним колом, з використанням теореми Стокса отримуємо

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int B_n dS = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (5)$$

Підставляючи (3-5) в (2), отримуємо рівняння, що визначає силу струму в колі:

$$IR = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathcal{E}. \quad (6)$$

Але магнітний потік $\Phi = \frac{LI}{c}$, де L - коефіцієнт самоіндукції поля, який разом з R є характеристикою конкретного електричного кола. Тоді

$$IR = -\frac{L}{c^2} \frac{\partial I}{\partial t} + \mathcal{E}. \quad (7)$$

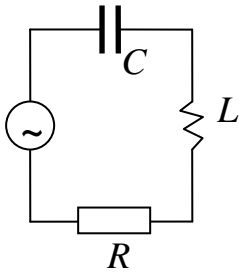
Для системи струмів рівняння (6) замінюється системою рівнянь

$$I_k R_k = -\frac{1}{c^2} \sum_i L_{ki} \frac{\partial I_i}{\partial t} + \mathcal{E}_k. \quad (8)$$

§56. Змінний квазістаціонарний струм у незамкнутому колі

Розглянемо коло з конденсатором ємності C , котушкою індуктивності L і активним опором R . Скористаємось законом збереження енергії ЕМП

(41.11)-(41.12):



$$\int \vec{j}\vec{E}_{\text{сноп}} dV - \int \frac{j^2}{\sigma} dV - \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}}{8\pi} dV = \oint S_n d\Sigma = 0. \quad (1)$$

Розглянемо в (1) інтеграл:

$$\int \frac{j^2}{\sigma} dV = \int \frac{j^2}{\sigma} dl \cdot \frac{S^2}{S} = I^2 \oint \frac{dl}{S\sigma} = I^2 R. \quad (2)$$

Формула (2) виражає закон Джоуля-Ленца в інтегральній формі. Розглянемо тепер інтеграл:

$$\int \vec{j}\vec{E}_{\text{сноп}} dV = \int \vec{j}\vec{E}_{\text{сноп}} S dl = I \oint \vec{E}_{\text{сноп}} d\vec{l} = I\mathcal{E}. \quad (3)$$

Тут \mathcal{E} - ЕРС джерела струму, а весь вираз (3) визначає потужність джерела в електричному колі.

Енергія електричного поля визначається в основному енергією конденсатора:

$$\frac{1}{4\pi} \int \vec{E}\vec{D} dV = W_{\text{конд}} = \frac{q^2}{2C}, \quad (4)$$

тоді як енергія магнітного поля визначається в основному котушкою

$$\text{індуктивності і дорівнює} \quad \frac{1}{4\pi} \int \vec{H}\vec{B} dV = W_{\text{магн}} = \frac{LI^2}{2c^2}. \quad (5)$$

$$\text{Підставимо (2-5) в (1) і отримаємо:} \quad I^2 R - I\mathcal{E} + \frac{1}{2C} \frac{\partial q^2}{\partial t} + \frac{L}{2c^2} \frac{\partial I^2}{\partial t} = 0. \quad (6)$$

Але $\frac{dq}{dt} = I; \Rightarrow \frac{dq^2}{dt} = 2q \frac{dq}{dt} = 2qI; \frac{dI^2}{dt} = 2I \frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{L}{c^2} \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} - \mathcal{E} = 0$, і остаточно

$$\frac{L}{c^2} \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} - \mathcal{E}(t) = 0. \quad (7)$$

Це є звичайне диференціальне рівняння другого порядку, з якого визначається $q = q(t)$, а далі і сила струму $I(t) = \frac{dq}{dt}$.

§57. Вимушені електромагнітні коливання

Нехай електричне коло, яке розглядали у попередньому параграфі містить генератор змінних гармонічних коливань, який породжує в колі ЕРС:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (1)$$

Визначимо величину струму в колі. Рівняння (56.7) набуде вигляду:

$$\frac{L}{c^2} \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}. \quad (2)$$

Частинний розв'язок рівняння (2) шукатимемо у вигляді

$$q(t) = q_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \dot{q}(t) = i\omega q_0 e^{i\omega t}, \quad \ddot{q}(t) = -\omega^2 q_0 e^{i\omega t}. \quad (3)$$

Підставимо (3) в (2) і отримаємо: $-\frac{L}{c^2} \omega^2 q_0 + i\omega q_0 R + \frac{q_0}{C} = \mathcal{E}_0$, звідки

$$q_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\frac{1}{C} - \frac{L\omega^2}{c^2} + i\omega R}, \quad q(t) = q_0 e^{i\omega t} = \frac{\mathcal{E}_0 e^{i\omega t}}{\frac{1}{C} - \frac{L\omega^2}{c^2} + i\omega R}. \quad (4)$$

Продиференціюємо (4) по часу:

$$I = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0 e^{i\omega t} i\omega}{\frac{1}{C} - \frac{L\omega^2}{c^2} + i\omega R} = \frac{\mathcal{E}_0 e^{i\omega t}}{R + i\left(\frac{L\omega}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\mathcal{E}_0 e^{i\omega t}}{R^2 + \left(\frac{L\omega}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \cdot \left[R - i\left(\frac{L\omega}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right) \right]. \quad (5)$$

$$\text{Але } R - i\left(\frac{L\omega}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right) = Ze^{i\varphi} = Z(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad Z = \left| R - i\left(\frac{L\omega}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right) \right| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{L\omega}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad (6)$$

де Z - повний опір кола, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{\omega C} - \frac{L\omega}{c^2}}{R}$ - зсув фаз між силою струму і ЕРС.

З урахуванням (6) рівняння (5) приймає вигляд

$$I = \frac{\mathcal{E}_0 e^{i(\omega t + \varphi)}}{Z} \quad (7)$$

– закон Ома для кола змінного струму. Згідно з формулою (7), сила струму не співпадає по фазі з ЕРС і в залежності від знаку φ або випереджає ЕРС, або запізнюється, але сила струму має ту ж частоту ω , що й ЕРС, тобто в колі виникають вимушені коливання. При $\frac{L\omega}{c^2} - \frac{1}{\omega C} = 0$, $\frac{L\omega}{c^2} = \frac{1}{\omega C}$, $\omega = \frac{c}{\sqrt{LC}}$ повний опір кола мінімальний: $Z_{\min} = R$, а сила струму максимальна. Це явище називається резонансом.

§58. Вільні електромагнітні коливання

Розглянемо електричне поле без джерела струму ($\mathcal{E} = 0$), яке складається з конденсатора ємності C , котушки індуктивності L і активного опору R . Рівняння (56.7) в цьому випадку прийме вигляд:

$$\frac{L}{c^2} \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (1)$$

Розв'язок шукатимемо у вигляді гармонічних коливань:

$$q(t) = q_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \dot{q}(t) = i\omega q_0 e^{i\omega t}, \quad \ddot{q}(t) = -\omega^2 q_0 e^{i\omega t}. \quad (2)$$

Це дає співвідношення: $-\frac{L}{c^2} \omega^2 + i\omega R + \frac{1}{C} = 0$, $\omega^2 - \frac{iRc^2}{L} \omega - \frac{c^2}{LC} = 0$, звідки частота

$$\omega = \frac{iRc^2}{2L} \pm \sqrt{\frac{c^2}{LC} - \frac{R^2 c^4}{4L^2}}. \quad (3)$$

Частота електромагнітних коливань виявляється комплексною, тому струм з часом буде затухати:

$$q(t) = q_0 e^{i\omega t} = q_0 \exp \left[-\frac{Rc^2}{2L} t \pm it \sqrt{\frac{c^2}{LC} - \frac{R^2 c^4}{4L^2}} \right]. \quad (4)$$

При умові $\frac{1}{LC} > \frac{R^2 c^2}{4L^2}$ мають місце затухаючі коливання. При $\frac{1}{LC} < \frac{R^2 c^2}{4L^2}$ відбуватиметься аперіодичний розряд. При $R = 0$ мають місце незатухаючі вільні коливання з частотою, що визначається формулою Томсона:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c^2}{LC}}. \quad (5)$$

§59. Скін-ефект

Розглянемо розподіл густини струму по перерізу провідника, в якому тече відмінний від 0 повний змінний струм. Виявляється, що змінний струм концентрується поблизу поверхні провідника. Це явище називають скін-

ефектом.

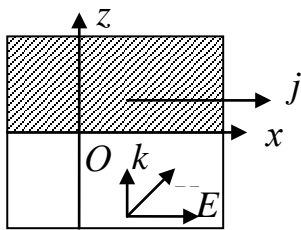
Точний розв'язок задачі про скін-ефект залежить, взагалі кажучи, не лише від форми провідника, але і від способу збудження в ньому струму, тобто від характеру зовнішнього змінного магнітного поля, що індукує струм. Але є важливий випадок, коли розподіл струму можна вважати незалежним від способу його збудження. Це струм у такому провіднику, товщина якого мала порівняно з його довжиною.

При побудові теорії скін-ефекта будемо виходити з рівнянь Максвелла для квазістаціонарного ЕМП, при яких можна використати спрощенні рівняння:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

і матеріальні рівняння $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Згідно §54, вони приводять до рівняння для напруженості магнітного поля (54.9) і аналогічного рівняння для напруженості електричного поля:

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \nabla^2 \vec{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1)$$



Спираючись на отримані рівняння, розглянемо задачу про проникнення ЕМП частоти ω в метал, який займає півпростір $z > 0$. Будемо вважати, що поперечне поле падає на поверхню металу нормально, так що електричне поле має тільки x – компоненту E_x , а магнітне – складову H_y .

Рівняння (1) для електричного поля в середовищі прийме вигляд:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}. \quad (2)$$

Нехай $E_x = E(z)e^{i\omega t}$. Тоді рівняння (2) прийме вигляд:

$$\frac{d^2 E}{dz^2} = i\omega \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} E. \quad (3)$$

Йому відповідає характеристичне рівняння $p^2 = \frac{i4\pi\mu\sigma\omega}{c^2}$, (4)

яке має корені $p_{1,2} = \pm \sqrt{i \frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2}} = \pm \frac{i+1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2}} = \pm (i+1) \sqrt{\frac{2\pi\mu\sigma\omega}{c^2}}$.

Звідси

$$E_x = E_0 e^{i\omega t} \exp \left[\pm \sqrt{\frac{2\pi\mu\sigma\omega}{c^2}} z \pm i \sqrt{\frac{2\pi\mu\sigma\omega}{c^2}} z \right]. \quad (5)$$

В цьому розв'язку слід залишити доданок, що обертається на ∞ в 0. Таким чином, крім осцилюючої частини, в розв'язку (5) є множник, що забезпечує локалізацію поля в провіднику біля поверхні:

$$E_x \sim e^{-z/\delta}, \quad (6)$$

де $\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}$ - характерна товщина цього скін-шару. Видно, що скін-шар

тим тонший, чим вища частота поля і провідність середовища. Магнітне поле спадає по тому ж закону, як і електричне. Оскільки за законом Ома, $\vec{j} = \sigma \vec{E}$,

оскільки $j_x = j_0 e^{-z/\delta}$, тобто струм тече у товщі δ поверхні провідника, яка тим менша, чим вища частота струму. Це пояснює, чому для зменшення опору високочастотному струму безкорисно збільшувати площу поперечного перерізу провідника, а доцільно наносити на його поверхню тонкий шар провідника з хорошою провідністю (золото, платина та інші), що й використовується часто в електроніці.

§60. Трансформатор

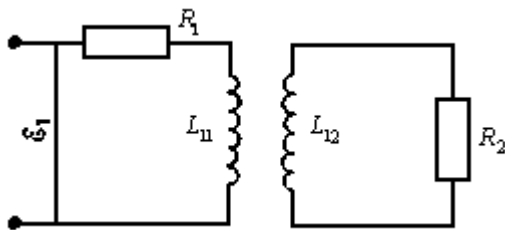
Розглянемо найпростішу схему трансформатора, який складається з двох індуктивно зв'язаних між собою котушок. Для спрощення обчислень припустимо, що сердечника немає і котушки розміщені у вакуумі (рис.). У первинній обмотці трансформатора є джерело зовнішньої періодичної ЕРС:

$$\mathcal{E}_1(t) = \mathcal{E}_{01} e^{i\omega t}. \quad (1)$$

Система рівнянь (55.8) тут буде така:

$$I_1 R_1 + \frac{1}{c^2} L_{11} \frac{\partial I_1}{\partial t} + \frac{1}{c^2} L_{12} \frac{\partial I_2}{\partial t} = \mathcal{E}_1(t) = \mathcal{E}_{01} e^{i\omega t}, \quad (2)$$

$$I_2 R_2 + \frac{1}{c^2} L_{22} \frac{\partial I_2}{\partial t} + \frac{1}{c^2} L_{21} \frac{\partial I_1}{\partial t} = 0.$$



Оскільки ЕРС є періодичною функцією

часу з циклічною частотою ω , то струми

також повинні бути такими ж періодичними функціями часу:

$$I_1(t) = I_{01} e^{i\omega t}, \quad I_2(t) = I_{02} e^{i\omega t}.$$

Підставивши струми в (2), виконавши диференціювання по часу та скоротивши отримані вирази на $e^{i\omega t}$, отримаємо:

$$I_{01} R_1 + \frac{1}{c^2} i\omega L_{11} I_{01} + \frac{1}{c^2} i\omega L_{12} I_{02} = \mathcal{E}_{01}, \quad (3)$$

$$I_{02} R_2 + \frac{1}{c^2} i\omega L_{22} I_{02} + \frac{1}{c^2} i\omega L_{21} I_{01} = 0.$$

З останнього рівняння отримаємо:

$$\frac{I_{02}}{I_{01}} = -\frac{i\omega L_{21}}{R_2 c^2 + i\omega L_{22}} = -\frac{i\omega L_{21} \cdot (R_2 c^2 - i\omega L_{22})}{R_2^2 c^4 + \omega^2 L_{22}^2} = -\frac{\omega L_{21} \cdot (\omega L_{22} + iR_2 c^2)}{R_2^2 c^4 + \omega^2 L_{22}^2}. \quad (4)$$

Але $\omega L_{22} + iR_2 c^2 = |\omega L_{22} + iR_2 c^2| e^{i\delta} = \sqrt{R_2^2 c^4 + \omega^2 L_{22}^2} e^{i\delta}$, $\delta = \arctg \frac{R_2 c^2}{\omega L_{22}}$, так що

$$\frac{I_{02}}{I_{01}} = -\frac{\omega L_{21}}{\sqrt{R_2^2 c^4 + \omega^2 L_{22}^2}} e^{i\delta}.$$

Зокрема, у важливому практичному випадку, коли індуктивний опір ωL_{22} вторинної обмотки значно більший за її активний опір: $\omega L_{22} \gg c^2 R_2$, з рівняння (4) наближено отримуємо

$$\frac{I_{02}}{I_{01}} \approx -\frac{L_{21}}{L_{22}}. \quad (5)$$

Отже, підбираючи належним чином коефіцієнти індуктивності L_{21} і L_{22} , ми можемо за допомогою трансформатора в будь-яку кількість раз підвищити або понизити силу струму у вторинній обмотці. Знак мінус у формулі (5) означає, що струми в обмотках протікають у протилежних фазах (різниця фаз дорівнює 180°), що узгоджується з правилом Ленца.

Звичайно, споживання енергії у вторинній обмотці збільшує витрати енергії джерела ЕРС, включеного у первинній обмотці. Дійсно, з рівнянь (3) випливає:

$$I_{01} \left(R_1 + \frac{1}{c^2} i\omega L_{11} + \frac{1}{c^2} i\omega L_{12} \frac{I_{02}}{I_{01}} \right) = \mathcal{E}_{01}.$$

Якщо вторинна обмотка відсутня або розімкнута ($R_2 = 0$), то $I_{02} = 0$, що приводить до розглянутих задач про одиничне коло зі змінним струмом. Якщо ж вторинна обмотка включена, то, підставляючи з (4) значення $\frac{I_{02}}{I_{01}}$ в останнє рівняння, отримаємо:

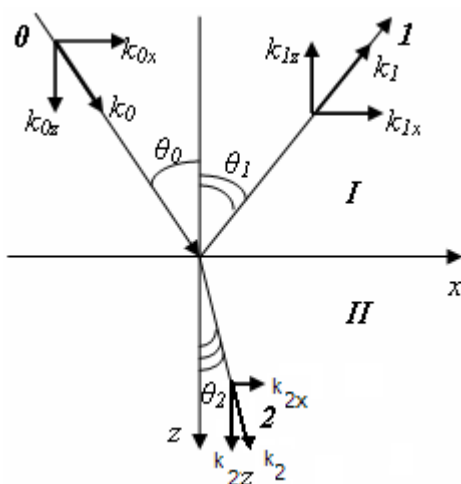
$$\begin{aligned} I_{01} \left(R_1 + \frac{1}{c^2} i\omega L_{11} + \frac{1}{c^2} \frac{\omega^2 L_{12}^2}{R_2 c^2 + i\omega L_{22}} \right) &= I_{01} \left(R_1 + \frac{1}{c^2} i\omega L_{11} + \frac{1}{c^2} \frac{\omega^2 L_{12}^2}{R_2 c^2 + i\omega L_{22}} \frac{R_2 c^2 - i\omega L_{22}}{R_2 c^2 - i\omega L_{22}} \right) = \\ &= I_{01} \left(R_1 + \frac{1}{c^2} i\omega L_{11} + \frac{1}{c^2} \frac{\omega^2 L_{12}^2 (R_2 c^2 - i\omega L_{22})}{R_2^2 c^4 + \omega^2 L_{22}^2} \right) = I_{01} \left\{ \left[R_1 + \frac{\omega^2 L_{12}^2}{R_2^2 c^4 + \omega^2 L_{22}^2} R_2 \right] + \right. \\ &\left. + \frac{1}{c^2} i\omega \left[L_{11} - \frac{\omega^2 L_{12}^2}{R_2^2 c^4 + \omega^2 L_{22}^2} L_{22} \right] \right\} = I_{01} \left\{ [R_1 + \alpha^2 R_2] + \frac{1}{c^2} i\omega [L_{11} - \alpha^2 L_{22}] \right\} = \mathcal{E}_{01}, \end{aligned}$$

де $\alpha^2 = \frac{\omega^2 L_{12}^2}{R_2^2 c^4 + \omega^2 L_{22}^2}$.

Таким чином, включення вторинної обмотки еквівалентно збільшенню активного опору і зменшенню самоіндукції первинної обмотки та збільшенню споживання енергії джерела ЕРС.

§61. Відбивання і заломлення ЕМХ

Межа поділу середовищ впливає на поширення ЕМХ. Найбільш важливо описати цей вплив на поширення поперечних ЕМХ, які мають можливість перетинати границі розділу і виходити у вакуум або генеруватись у вакуумі і падати на границю поділу вакуум – середовище.



Розглянемо падіння поперечної ЕМХ (див. рис.) з прозорого середовища (зокрема, це може бути вакуум) на плоску границю розділу прозорого середовища (позначимо його I) з будь-яким іншим середовищем (яке позначимо II). Падаючу хвилю позначимо індексом 0, відбиту – індексом 1, заломлену – індексом 2. Кут падіння хвилі на границю, який відраховується від нормалі до границі, позначимо θ_0 , кут відбивання – θ_1 , кут заломлення – θ_2 . Координатну площину xz розмістимо в площині поділу.

По відношенню до координат x і z задача є просторово-однорідною. Це означає, що тангенціальні компоненти хвильового вектора всіх трьох хвиль – падаючої, відбитої і заломленої – однакові:

$$k_{0x} = k_{1x} = k_{2x}.$$

Але $k_{0x} = k_1 \sin \theta_0$, $k_{1x} = k_1 \sin \theta_1$, де $k_0 = k_1 = \frac{\omega}{v_1} = \frac{\omega n_1}{c} = \frac{\omega \sqrt{\epsilon_1}}{c}$ - модуль хвильового

вектора для θ -го і I -го променів в I -му середовищі, звідки $\sin \theta_0 = \sin \theta_1$, і, отже, отримуємо:

$$\theta_0 = \theta_1. \quad (1)$$

Отже, рівність кута падіння куту відбивання є прямим наслідком збереження тангенціальної складової хвильового вектора падаючої і відбитої хвиль. З умови:

$$k_{0x} = k_{2x} \Rightarrow \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_1}}{c} \sin \theta_0 = k_{II} \sin \theta_2 = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_2}}{c} \sin \theta_2$$

отримуємо:

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (2)$$

Це є законом заломлення ЕМХ.

§62. Формули Френеля

Формули (61.1) і (61.2) дозволяють встановити хід променів, але ці формули нічого не говорять про їх інтенсивності. Для того, щоб знайти ці інтенсивності, потрібно взяти до уваги граничні умови на поверхні поділу.

a) Спочатку розглянемо випадок, коли поле \vec{E}_0 перпендикулярне до площини падіння xOz . Враховуючи звичайні умови неперервності тангенціальних компонент напруженостей електричного і магнітного полів, отримаємо на поверхні поділу:

$$E_{0r} + E_{1r} = E_{2r}; E_{0r} = E_0, E_{1r} = E_1, E_{2r} = E_2 \Rightarrow E_0 + E_1 = E_2. \quad (1)$$

Величину \vec{H} зручно виразити через \vec{E} за допомогою 1-го рівняння Максвелла

$$\begin{aligned} \vec{E} \parallel Oy, \vec{H} \parallel Ox, \vec{E}, \vec{H} \sim e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow i \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} \Rightarrow k_z E_y = -\frac{\omega}{c} H_x \Rightarrow H_x = -\frac{c}{\omega} k_z E_y. \end{aligned}$$

Маючи це на увазі, отримаємо на поверхні розподілу середовищ:

$$H_{0r} + H_{1r} = H_{2r} \Rightarrow k_{0z} E_{0y} + k_{1z} E_{1y} = k_{2z} E_{2y} \quad (2)$$

Але з малюнка §61 і закону відбивання випливає $k_{0z} = -k_{1z}$, тоді за допомогою (61.1) отримаємо з (61.2):

$$k_{0z} (E_0 - E_1) = k_{2z} E_2. \quad (3)$$

З формул (1) і (3) ми можемо виразити E_1 та E_2 через E_0 :

$$E_1 = \frac{k_{0z} - k_{2z}}{k_{0z} + k_{2z}} E_0, E_2 = \frac{2k_{0z}}{k_{0z} + k_{2z}} E_0. \quad (4)$$

Але $k_{0z} = k_0 \cos \theta_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_0$;

$$k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{2x}^2} = \sqrt{k_2^2 - k_{0x}^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 \sin^2 \theta_0} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_0}.$$

Звідси:

$$E_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_0 - \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_0}}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_0 + \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_0}} E_0, \quad (5)$$

$$E_2 = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_0}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_0 + \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_0}} E_0. \quad (6)$$

Формули (5) і (6) називаються формулами Френеля. У випадку, коли середовища прозорі і в силу (61.2) $\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_0}$, формули Френеля приймають вигляд:

$$E_1 = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_0)}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} E_0, \quad E_2 = \frac{2 \cos \theta_0 \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} E_0. \quad (7)$$

Можна переконатись, що граничні умови для D_n і B_n не дають нових результатів.

б) Якщо вектор \vec{E} лежить в площині падіння, то зручніше працювати з магнітним полем, вектор напруженості якого виявляється в площині поділу середовищ. Способом, аналогічним попередньому, отримуємо ще 2 формули:

$$H_1 = \frac{\varepsilon_2 k_{0z} - \varepsilon_1 k_{2z}}{\varepsilon_1 k_{2z} + \varepsilon_2 k_{0z}} H_0 = \frac{\varepsilon_2 \cos \theta_0 - \sqrt{\varepsilon_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_0)}}{\varepsilon_2 \cos \theta_0 + \sqrt{\varepsilon_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_0)}} H_0, \quad (8)$$

$$H_2 = \frac{2\varepsilon_2 k_{0z}}{\varepsilon_1 k_{2z} + \varepsilon_2 k_{0z}} H_0 = \frac{2\varepsilon_2 \cos \theta_0}{\varepsilon_2 \cos \theta_0 + \sqrt{\varepsilon_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_0)}} H_0, \quad (9)$$

також отримані Френелем. В прозорих середовищах ці формули приймуть вигляд:

$$H_1 = \frac{\operatorname{tg}(\theta_0 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_2)} H_0, \quad H_2 = \frac{\sin 2\theta_0}{\sin(\theta_0 + \theta_2) \cos(\theta_0 + \theta_2)} H_0. \quad (10)$$

§63. Коефіцієнт відбивання

Введемо поняття коефіцієнта відбивання. Визначимо його як відношення z -компонент векторів Пойнтінга відбитої і падаючої хвиль:

$R = \frac{|\bar{S}_{1z}|}{|\bar{S}_{0z}|}$. Без врахування просторової дисперсії і у випадку немагнітного

середовища (напруженості поля вважаються комплексними величинами)

$$R = \frac{\cos \theta_1 |E_1|^2}{\cos \theta_0 |E_0|^2}. \quad (1)$$

При нормальному падінні хвиль ($\theta_0 = \theta_1 = 0$) за допомогою (61.5) отримаємо, що

$$R = \left| \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} \right|^2. \quad (2)$$

Якщо показник заломлення середовища комплексний: $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2} = n'_2 + i\kappa$, то при падінні хвиль на таке середовище, наприклад, з пустоти ($\varepsilon_1 = 1$) матимемо:

$$R = \frac{(n_2 - 1) + \kappa_2^2}{(n_2 + 1) + \kappa_2^2}. \quad (3)$$

При похилому падінні, згідно з (61.5) і (61.9) та (61.8):

$$R_{\perp} = \frac{\sin^2(\theta_2 - \theta_0)}{\sin^2(\theta_2 + \theta_0)}, \quad R_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_2 - \theta_0)}{\operatorname{tg}^2(\theta_2 + \theta_0)}. \quad (4)$$

Тут R_{\perp} і R_{\parallel} - коефіцієнти відбивання падаючих хвиль, поляризованих, відповідно, перпендикулярно і паралельно площині відбивання.

Цікавим є випадок, коли хвиля падає під таким кутом, що сума кутів падіння і заломлення $\theta_0 + \theta_2 = \pi/2$. Позначимо цей виділений кут падіння символом $\theta_0 = \theta_p$; кут θ_p називається кутом Брюстера. Маючи на увазі визначення θ_p і закон заломлення (60.2), отримаємо:

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_p} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_2}}{\sin \theta_p} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_p}}{\sin \theta_p} = \operatorname{ctg} \theta_p = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}, \quad \operatorname{tg} \theta_p = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{u_1}{u_2} -$$

формула Брюстера. Таким чином, кут θ_p визначається величиною

відношення $\varepsilon_1/\varepsilon_2$. При $\theta_0 = \theta_p$ $R_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_2 - \theta_p)}{\operatorname{tg}^2(\theta_2 + \theta_p)} \rightarrow 0$. Тому при будь-якій поляризації

падаючого під кутом θ_p пучка електромагнітних хвиль відбиті від середовища 2 хвилі виявляються повністю поляризованими в площині, перпендикулярній площині падіння. Заломлені ж хвилі лінійно-поляризованими не будуть.

Друге важливе явище, яке виникає при відбиванні ЕМХ на поверхні розділу двох середовищ – повне внутрішнє відбивання. Воно виникає при відбиванні від оптично менш густого середовища, тобто при $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Коли має місце повне внутрішнє відбивання, то заломлена хвиля не проникає в оптично менш густе середовище; величини R_{\perp} і R_{\parallel} при цьому обертаються в 1. Відповідний кут падіння θ_i , при якому настає повне внутрішнє відбивання, визначається з умови, що при цьому $\theta_2 \rightarrow \pi/2$. Цей граничний кут θ_i визначається формулою $\sin \theta_i = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$. При $\theta_0 > \theta_i$ вся енергія падаючого ЕМП відбивається назад у перше середовище.

§64. Екранування поля заряду в електролітах і плазмі

Електролітом називається розчин (зазвичай водний) солі, кислоти або луга, а плазмою - іонізований (але в цілому нейтральний) газ. Спільним між цими фізичними об'єктами є те, що сіль (кислота або луг) в розчині в тій або іншій мірі диссоціює на іони різних знаків, і тому електроліт, так само як і плазму, можна розглядати в цілому як нейтральний газ іонів різного знаку.

Припустимо, що такий газ обмежений з одного боку плоскою стінкою, так що потенціал φ можна вважати функцією тільки однієї координати x - відстані від стінки. Цей потенціал задовольняє рівнянню Пуассона

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -4\pi\rho. \quad (1)$$

Очевидно, об'ємна густина заряду

$$\rho = \sum_i e_i n_i, \quad (2)$$

де e_i - заряд іона i -го сорту; n_i - число іонів цього сорту в одиниці об'єму.

Припустимо, що газ іонів, який розглядається нами, знаходиться в стані статистичної рівноваги. У цьому випадку частинки розподілені в просторі відповідно до відомої формули Больцмана

$$n = n_0 e^{\frac{U}{kT}}, \quad (3)$$

де n – концентрація частинок; T – температура; k – стала Больцмана; U – потенціальна енергія частинки; n_0 – концентрація частинок в тому місці, де потенціальна енергія дорівнює нулю. Зазвичай цю формулу застосовують у випадку, коли поле створюється зовнішніми джерелами; наприклад, такого типу формула (так звана барометрична формула) справедлива для газу, що знаходиться в заданому гравітаційному полі. Але цю формулу можна використовувати і тоді, коли поле створюється самими частинками. Саме така ситуація виникає в електролітах і плазмі. При цьому під U потрібно розуміти потенціальну енергію іона, обумовлену електричною взаємодією, $U = e_i \varphi$. Таким чином, концентрація іонів i -го сорту в точці x визначається формулою

$$n_i(x) = n_{i0} e^{\frac{e_i \varphi(x)}{kT}}, \quad (4)$$

де n_{i0} – концентрація іонів в точці, в якій $\varphi(x) = 0$. Підставляючи (4) в рівняння Пуассона (1), отримуємо

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -4\pi \sum_i e_i n_{i0} e^{\frac{e_i \varphi(x)}{kT}}. \quad (5)$$

До цього рівняння має бути додана умова нейтральності, яка означає, що далеко від стінки, де, як ми скоро переконаємося, потенціал обертається в нуль, концентрація заряду також обертається в нуль, тобто

$$\sum_i e_i n_{i0} = 0. \quad (6)$$

Дане рівняння Пуассона є прикладом самоузгодженого рівняння, тобто визначуваний ним потенціал φ такий, що відповідний йому розподіл Больцмана для іонів приводить точно до цього ж потенціалу. Зазвичай електрична енергія іона $e_i \varphi$ значно менша, ніж його теплова енергія kT .

Оскільки $e_i \varphi \sim \frac{e_i^2}{\bar{r}}$, де \bar{r} – середня відстань між іонами, яка дорівнює по порядку величини $n^{-1/3}$ (n – концентрація іонів), то умова $e_i \varphi \ll kT$ еквівалентна умові $n \ll \left(\frac{kT}{e_i^2}\right)^3$. При виконанні цієї умови

$$e^{\frac{e_i \varphi(x)}{kT}} \approx 1 - \frac{e_i \varphi(x)}{kT}. \quad (7)$$

Використовуючи це розкладання і враховуючи умову нейтральності, перепишемо рівняння Пуассона у вигляді

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \kappa^2 \varphi, \quad (8)$$

де $\kappa^2 = \frac{4\pi}{kT} \sum_i e_i^2 n_{i0}$.

Відмітимо, що якби потенціал залежав не від однієї, а від трьох координат, то самоузгоджене рівняння Пуассона мало б вигляд

$$\Delta\varphi = \kappa^2\varphi. \quad (9)$$

Розв'яжемо отримане одновимірне рівняння Пуассона. Загальний його розв'язок, як легко перевірити, має вигляд

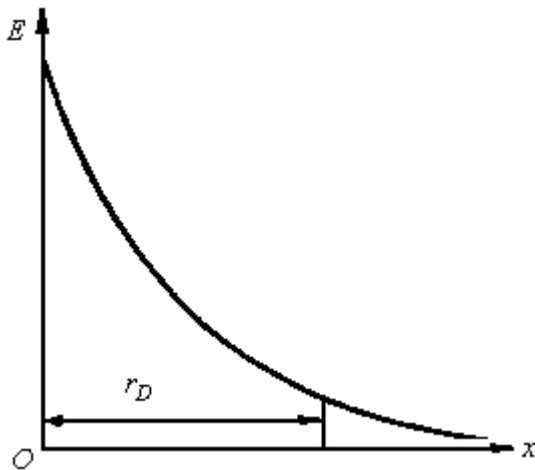
$$\varphi(x) = Ae^{-\kappa x} + Be^{\kappa x}, \quad (10)$$

де A і B – довільні константи. Другий з доданків, що входить у цю рівність, необмежено зростає із зростанням x . Тому якщо електроліт або плазма обмежені тільки з одного боку (при $x = 0$), то другий доданок не має сенсу і повинен бути відкинутим, тобто константа B повинна бути покладена рівною нулю. Константа A має при цьому, очевидно, зміст потенціалу на межі, так що потенціал визначається формулою

$$\varphi(x) = \varphi(0)e^{-\kappa x}. \quad (11)$$

Поле визначається формулою аналогічного виду: $E(x) = E(0)e^{-\kappa x}$.

Ми бачимо, що потенціал і поле експоненціально спадають з проникненням в товщину плазми або електроліту (див. рис.). Ефективна глибина проникнення поля визначається величиною, зворотною κ , і позначається через r_D :



$$r_D = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{kT}{4\pi \sum_i e_i^2 n_{i0}}}.$$

Цю величину називають дебаєвським радіусом.

Вище ми припускали, що $n \ll \left(\frac{kT}{e_i^2}\right)^3$.

Легко перевірити, що ця умова, яка означає малість середньої енергії взаємодії сусідніх іонів в порівнянні з тепловою енергією, еквівалентна умові малості середньої відстані $\bar{r} \sim n^{-1/3}$ між іонами в порівнянні з дебаєвським радіусом: $\bar{r} \ll r_D$.

Розглянемо тепер складнішу задачу, а саме визначимо поле, що створюється деякою сторонньою зарядженою частинкою, внесеною в плазму або в електроліт. Потенціал, що породжується цією частинкою, також визначається з рівняння $\Delta\varphi = \kappa^2\varphi$, яке унаслідок сферичної симетрії поля можна у сферичній системі координат представити у вигляді

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = \kappa^2\varphi.$$

Розв'язок цього рівняння зручно шукати у вигляді $\varphi(r) = \frac{\chi(r)}{r}$, де $\chi(r)$ – деяка функція r . Помічаючи, що $\frac{d\varphi(r)}{dr} = -\frac{\chi}{r^2} + \frac{\chi'}{r}$, де $\chi' = \frac{d\chi}{dr}$, маємо

$$\frac{d}{dr} (-\chi + r\chi') = \kappa^2 r\chi, \text{ звідки}$$

$$-\chi' + \chi' + r\chi'' = \kappa^2 r\chi; \quad \chi'' = \kappa^2 \chi, \quad \frac{d^2\chi}{dr^2} = \kappa^2 \chi.$$

Це рівняння має такий же вигляд, що і рівняння для φ в

одновимірному випадку. Тому $\chi(r) = Ae^{-kr}$, і, отже, $\varphi(r) = A \frac{e^{-kr}}{r}$. Стала A , що входить у цю формулу, повинна визначатися з тієї умови, що у безпосередній близькості до стороннього заряду потенціал повинен співпадати з потенціалом точкового заряду. Тому якщо q - заряд сторонньої частинки, то поле, що створюється цією частинкою, має на відстані r від неї потенціал

$$\varphi(r) = \frac{q}{r} e^{-kr}.$$

Цей потенціал відрізняється від кулонівського потенціалу точкового заряду $\frac{q}{r}$ експоненціальним множником e^{-kr} , що швидко спадає з ростом r .

Наявність цього множника показує, що поле стороннього заряду, внесеного у плазму, діє практично тільки на дебаєвській довжині $r_D = \frac{1}{k}$, а далі різко

падає з відстанню. Іншими словами, на відміну від поля, що породжується зарядом у вакуумі, яке хоча і спадає, але спадає повільно (обернено пропорційно до квадрата відстані) і може розглядатися як далекодіюче, поле, що породжується зарядом у плазмі, експоненціально спадає з відстанню і тому є короткодіючим. Зменшення потенціалу поля, що створюється зарядом, який знаходиться в плазмі, в порівнянні з полем, що створюється цим же зарядом у вакуумі, пов'язане з тим, що заряд в плазмі (і в електроліті) оточений хмаринною іонів, які в цілому екранують дію заряду. Тому потенціал $\varphi(r) = \frac{q}{r} e^{-kr}$ називають екранованим кулонівським потенціалом.

Якщо в плазму внести два заряди q_1 і q_2 , то енергія їх взаємодії визначається формулою

$$U = \frac{q_1 q_2}{r} e^{-kr},$$

де r - відстань між зарядами. Ця взаємодія також практично поширюється тільки на відстань порядку дебаєвського радіусу.

Зрозуміло, що ефект екранування притаманний не тільки сторонній частинці, але і будь-якому іону самої плазми (або електроліту). Кожен іон плазми оточений хмаринною іонів обох знаків заряду, яка екранує поле, створюване цим іоном. Тому потенціал, що породжується яким-небудь іоном плазми з зарядом e_i на відстані r від нього, визначається формулою $\varphi = \frac{e_i}{r} e^{-kr}$.

«Радіус дії» цього потенціалу дорівнює r_D .

Отже, середня енергія електричної взаємодії, що припадає на один іон із зарядом e_i , по порядку величини дорівнює $\frac{e_i^2}{r_D}$ (точніше, дорівнює $\frac{e_i^2}{2r_D}$),

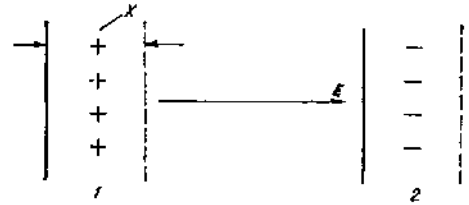
а вся енергія електричної взаємодії плазми $W = \frac{V}{2r_D} \sum_i e_i^2 n_{i0}$, де V — об'єм

плазми. Оскільки ефект екранування зменшує електричну взаємодію, то цю величину слід відняти від теплової енергії плазми $\frac{3}{2}NkT$ (N - загальне число іонів плазми). Таким чином, з урахуванням енергії електричної взаємодії

іонів повна енергія плазми $E = \frac{3}{2}NkT - \frac{V}{2r_D} \sum_i e_i^2 n_{i0}$.

§65. Плазмові коливання

На перший погляд здається, що концентрація частинок плазми залишається незмінною і постійно співпадає з самоузгодженим значенням, визначеним у попередньому параграфі. Насправді ця величина визначає тільки середнє значення, біля якого флюктує концентрація частинок. Чудовою особливістю флюктуації є їх коливальний характер. Щоб роз'яснити цю властивість плазми, розглянемо шар плазми і уявимо собі, що електрони плазми змістилися відносно іонів вправо на малу відстань x (див. мал.). Тоді в плазмі порушиться умова нейтральності і виникне електричне поле E (направлене вправо), яке легко визначити. Дійсно, граничні поверхні 1 і 2 шару плазми можна розглядати як дві заряджені площини, на яких поверхневі густини заряду дорівнюють відповідно enx і $-enx$, де $-e$ – заряд електрона, n – рівноважна концентрація електронів. Поля, створювані цими площинами, дорівнюють $2\pi enx$ і $-2\pi enx$. Усередині шару поля мають однаковий напрям, так що результуюче поле в шарі дорівнює $4\pi enx$, а зовні шару поля направлені в протилежні сторони і взаємно компенсуються. Таким чином, усередині шару



$$E = 4\pi enx.$$

Це поле діє на електрони, зміщення яких породило поле. Сила, що знається електроном з боку цього поля, дорівнює

$$f = -eE = -4\pi e^2 nx,$$

направлена у бік зменшення x . Її слід прирівняти $m\ddot{x}$, де \ddot{x} – прискорення електрона; m — його маса. В результаті отримаємо наступне рівняння руху електрона:

$$m\ddot{x} = -4\pi e^2 nx$$

або

$$\ddot{x} + \omega_p^2 x = 0,$$

де $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n}{m}}$. Це рівняння являє собою рівняння осцилятора, тобто точки, що коливається. Його розв'язок має вигляд

$$x = A \cos(\omega_p t + \alpha),$$

де A – амплітуда, а α – початкова фаза. Таким чином, електрони здійснюють гармонійні коливання з частотою ω_p . Ця частота називається плазмовою частотою або частотою Ленгмюра. Вона пропорційна квадратному кореню з концентрації електронів.

Амплітуда коливань A залежить від інтенсивності флюктуацій і, якщо флюктуації носять тепловий характер, визначається температурою плазми, зростаючи з її підвищенням. Але плазмові коливання можна викликати і штучно: у цьому випадку їх амплітуда визначається зовнішнім джерелом.

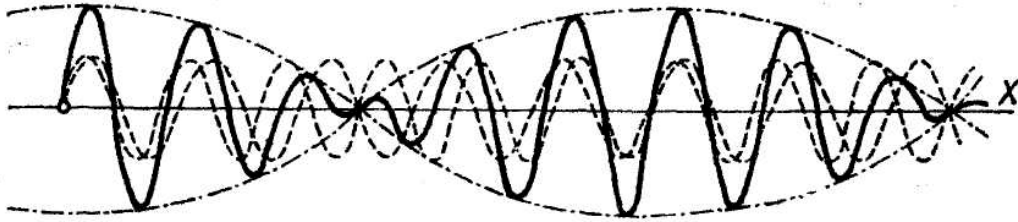
Ми отримали незатухаючі плазмові коливання, хоча в дійсності вони затухають завдяки зіткненням електронів і деяким специфічним плазмовим ефектам. Затухання, проте, дуже мале, особливо у випадку гарячої плазми. Навпаки, для електролітів, які ми вище також трактували як плазму, затухання плазмових коливань таке велике, що практично вони не виникають.

§66. Фазова і групова швидкості

При поширенні хвиль у середовищі має місце дисперсія; при цьому показник заломлення середовища є функцією частоти електромагнітних хвиль: $n = n(\omega)$, або, інакше кажучи, фазова швидкість залежить від частоти: $v = v(\omega)$

Розглянемо поширення двох монохроматичних хвиль з частотами, близькими до ω , а саме: $\omega - d\omega$ і $\omega + d\omega$. Таким хвилям відповідатимуть значення хвильового вектора $k - dk$ і $k + dk$. Тут $k = \frac{\omega}{v_\phi}$, де v_ϕ — фазова швидкість. Звідси

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}. \quad (1)$$



Якщо дві такі хвилі з однаковою амплітудою a_0 поширюються в напрямі осі X (див. рис.), то рівняння сумарної хвилі матиме вигляд:

$$s = a_0 \left\{ e^{i[(\omega - d\omega)t - (k - dk)x]} + e^{i[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x]} \right\}.$$

Після простих перетворень знайдемо:

$$s = a_0 \left\{ e^{i(td\omega - xdk)} + e^{-i(td\omega - xdk)} \right\} e^{i(\omega t - kx)},$$

$$s = 2a_0 \cos \left(t - x \frac{dk}{d\omega} \right) d\omega \cdot e^{i(\omega t - kx)}. \quad (2)$$

Як видно з формули (2), при накладанні двох монохроматичних хвиль утворюється хвиля з фазою $\varphi = \omega t - kx$ і амплітудою:

$$u = 2u_0 \cos \left[\left(t - x \frac{dk}{d\omega} \right) d\omega \right]. \quad (3)$$

Амплітуда такої суперпозиції двох хвиль (найпростішого пакета хвиль) залежить від t і від x . Позначимо аргумент функції (3) через α :

$$\alpha = t d\omega - x dk. \quad (4)$$

Сталому значенню α відповідає незмінна амплітуда. Швидкість переміщення незмінної амплітуди в просторі знайдемо диференціюванням (4):

$$0 = d\omega dt - dk dx,$$

звідки швидкість

$$v_{gp} = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (5)$$

Знайдена формула (5) виражає швидкість, з якою переміщується стала амплітуда, а значить, і енергія результуючого коливання — так звану *групову швидкість*. Підставимо в (5) $\omega = kv_\phi$; знайдемо:

$$v_{gp} = v_\phi + k \frac{dv_\phi}{dk}. \quad (6)$$

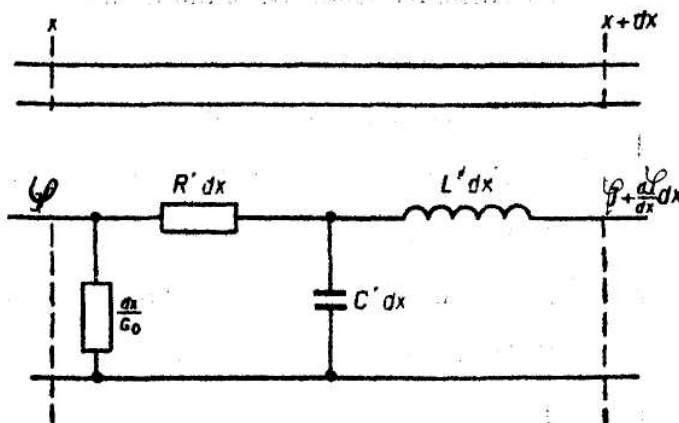
Ця формула виражає зв'язок між v_{gp} і v_ϕ .

Коли дисперсії немає, то $\frac{dv_\phi}{dk} = 0$. Тоді $v_{gp} = v_\phi$, тобто групова швидкість дорівнює фазовій. Для випадку пакета, що складається з кількох монохроматичних хвиль, а також для випадку складного коливання, яке може бути представлене у вигляді інтеграла Фур'є, означення (5) групової швидкості зберігається.

§67. Телеграфне рівняння

У багатьох практично важливих випадках електричний струм, що передається вздовж ліній, є швидкозмінним, і для нього не виконується умова квазістаціонарності. Як приклади можна назвати струми, що передаються на великі відстані при телеграфуванні, при телефонних розмовах, струми, що виникають при певних умовах у системах радіопередавальних станцій, тощо. Хоч теорія квазістаціонарних струмів не може бути застосована в цих випадках до всієї лінії, наближене формулювання задачі дає результати, що збігаються з точними.

Оскільки у випадку швидкозмінних струмів у різних точках лінії фази струму або фази потенціалу поля є різними, поділимо лінію на маленькі відрізки довжиною dx , у кожному з яких виконуються умови квазістаціонарності. Для кожного такого відрізка визначимо потенціали на його кінцях φ і $\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx$.



Індуктивність відрізка $L' dx$, його ємність $C' dx$ і опір $R' dx$. Тут L' , C' і R' - індуктивність, ємність і опір одиниці довжини лінії (рис.).

Повний спад потенціалу на кінцях відрізка є $-\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx$, ЕРС індукції $-\frac{L'}{c^2} dx \frac{\partial I}{\partial t}$, спад потенціалу на опорі $-R' dx I$. Для відрізка dx можна записати: $-\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx - \frac{L'}{c^2} dx \frac{\partial I}{\partial t} = R' dx I$. Скорочуючи на dx , знаходимо:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{L'}{c^2} \frac{\partial j}{\partial t} + R'I = 0 . \quad (1)$$

Струм на відрізку dx змінюватиметься тому, що частина заряду стікатиме з провідника внаслідок недостатньої ізоляції лінії, а також внаслідок збільшення заряду провідника. Якщо G' — провідність ізоляції лінії на одиницю довжини, то втрати заряду за одиницю часу внаслідок недосконалості ізоляції становлять $G' \varphi dx$, а за рахунок заряджання лінії $-C' dx \frac{\partial \varphi}{\partial t}$.

Заряд, що надходить за 1 с до елемента dx провідника, дорівнює приросту заряду в елементі dx плюс втрати заряду внаслідок недосконалості

ізоляції, тобто

$$I - \left(I + \frac{\partial I}{\partial x} dx \right) = C' dx \frac{\partial \varphi}{\partial t} + G' dx \varphi,$$

або

$$C' dx \frac{\partial \varphi}{\partial t} + G' \varphi + \frac{\partial I}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Виключаючи з рівнянь (1) і (2) φ або I , знаходимо рівняння для однієї змінної:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - C' \frac{L'}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \left(C'R' + \frac{L'G'}{c^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - R'G'\varphi = 0 \quad (3)$$

і

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - C' \frac{L'}{c^2} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \left(C'R' + \frac{L'G'}{c^2} \right) \frac{\partial I}{\partial t} - R'G'I = 0 \quad (4)$$

Такого типу рівняння називаються *телеграфними*. Вони мають важливе значення при розв'язуванні різноманітних задач, зв'язаних з передаванням змінних струмів уздовж лінії.

§68. Швидкозмінні струми вздовж ліній

Розглянемо випадок, коли по лінії проходить швидкозмінний періодичний струм $I = I_1(x)e^{i\omega t}$. Підставляючи цей вираз у (67.4), знайдемо:

$$\frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2} + \left[\omega^2 \frac{C'L'}{c^2} - R'G' - i\omega \left(C'R' + \frac{L'G'}{c^2} \right) \right] I_1 = 0. \quad (1)$$

Якщо скористатись позначенням:

$$k^{*2} = \omega^2 \frac{L'C'}{c^2} - R'G' - i\omega \left(C'R' + \frac{L'G'}{c^2} \right), \quad (2)$$

то (1) набере вигляду:

$$\frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2} + k^{*2} I_1 = 0.$$

Розв'язком цього рівняння є:

$$I_1 = I_0 e^{ik^*x} + I_0' e^{-ik^*x};$$

тоді

$$I = I_0 e^{i(\omega t - k^*x)} + I_0' e^{i(\omega t + k^*x)}. \quad (3)$$

Тут $k^* = k - is$ має зміст комплексного хвильового числа.

Струм I поширюється у формі хвиль в додатному і від'ємному напрямках осі X . Оскільки

$$k^{*2} = k^2 - s^2 - 2iks, \quad (4)$$

то, порівнюючи (4) з (2), знайдемо:

$$k^2 - s^2 = \omega^2 \frac{L'C'}{c^2} - R'G'; \quad (5)$$

$$2ks = \omega \left(C'R' + \frac{L'G'}{c^2} \right). \quad (6)$$

З цих двох рівнянь можна визначити k і s і підставити їх у (3); тоді

$$I = I_0 e^{-sx} e^{i(\omega t - kx)} + I_0' e^{sx} e^{i(\omega t + kx)}. \quad (7)$$

Розглянемо одну з хвиль, наприклад ту, що поширюється в додатному напрямі осі X :

$$I = I_0 e^{-sx} e^{i(\omega t - kx)}, \quad (8)$$

де k додатне [у випадку k від'ємного, хвиля, що поширюється в додатному напрямі осі X , зображається другим доданком рівняння (7)].

З рівняння (7) видно, що k і s при поширенні хвилі вздовж лінії повинні мати однакові знаки. У протилежному разі це означало б, що при збільшенні x амплітуда сили струму безмежно зростала б, що з фізичних міркувань повинно бути відкинута.

Якщо немає втрат внаслідок недостатньої ізоляції лінії, то $G' = 0$. В цьому випадку рівняння (5) і (6) перепишемо так:

$$k^2 - s^2 = \omega^2 \frac{L'C'}{c^2}; \quad (9)$$

$$2ks = \omega C'R'. \quad (10)$$

Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо:

$$k^2 = \frac{\omega^2 L'C'}{2c^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{c^4 R'^2}{\omega^2 L^2}} \right), \quad s^2 = \frac{\omega^2 L'C'}{2c^2} \left(\sqrt{1 + \frac{c^4 R'^2}{\omega^2 L^2}} - 1 \right). \quad (11)$$

Користуючись формулами (11), знайдемо фазову швидкість поширення швидкозмінного струму в лініях і дослідимо його затухання.

1°. З формули (11), враховуючи (67.1), знаходимо фазову швидкість для хвилі, що поширюється вздовж лінії:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{2} \left[\frac{L'C'}{c^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{c^4 R'^2}{\omega^2 L^2}} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

Оскільки C' від ω не залежить, L' є величина скінченна, а R' внаслідок скін-ефекту пропорціональне $\sqrt{\omega}$, то при досить великих ω

$$\frac{c^4 R'^2}{\omega^2 L^2} \ll 1. \quad (13)$$

Нехтуючи під радикалом у (12) другим доданком, знайдемо:

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{L'C'}}. \quad (14)$$

У цьому випадку фазова швидкість v_ϕ не залежить від ω . Це дуже важлива умова для провідного телефонного зв'язку. В разі залежності v_ϕ від ω виникали б спотворення сигналу, який має певний спектр частот.

Для певного діапазону частот умова (13), що забезпечує незалежність v_ϕ від ω виконуватиметься при досить малому $\frac{R'c^2}{L'}$. Але, оскільки зменшувати R' не вигідно з інших міркувань (лінія стає дорожча, ускладнюється її монтаж), у лініях далекого телеграфного зв'язку збільшують індуктивність вмиканням додаткових котушок індуктивності, розташованих уздовж лінії на певних відстанях.

2°. Коефіцієнт затухання знаходимо з (11)

$$s = \omega \left| \frac{L'C'}{2c^2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{c^4 R'^2}{\omega^2 L^2}} \right) \right|^{\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

При великих ω , коли $\frac{c^4 R'^2}{\omega^2 L^2} \ll 1$, розкладемо вираз $\sqrt{1 + \frac{c^4 R'^2}{\omega^2 L^2}}$ у ряд за

степенями другого доданка і обмежимося членом першого порядку малості. Тоді з (15) знайдемо $s = \frac{R'c}{2} \sqrt{\frac{C'}{L'}}$. Враховуючи, що для швидкозмінних струмів опір внаслідок скін-ефекту можна знайти у вигляді $R' = \rho\sqrt{\omega}$, де ρ від ω не залежить, матимемо остаточно:

$$s = \frac{\rho c}{2} \sqrt{\frac{\omega C'}{L'}}.$$

Отже, затухання в лінії зростає із збільшенням частоти.

§69. Поширення електромагнітних хвиль у хвилеводах

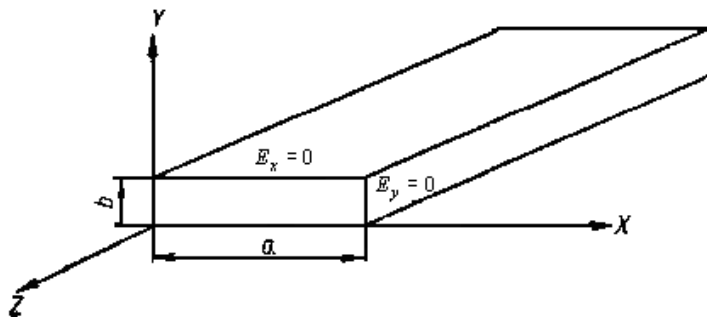
У радіотехніці сантиметрових і міліметрових хвиль є потреба передавати їх від одного вузла радіоустановки до іншого. Виявилось, що здійснити це можливо, користуючись порожніми всередині (або заповненими діелектриком) металевими трубами — хвилеводами.

Нехай хвилевод являє собою прямокутну трубу з поперечними розмірами a і b , причому стінки його є ідеальним провідником, для якого $\sigma = \infty$. З закону Ома $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ випливає, що в ідеальному провіднику $E = 0$. Для хвиль, що поширюються в трубі, повинні виконуватись рівняння Максвелла:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{B} = 0, \quad (1)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{D} = 0.$$

Оскільки в провіднику $E = 0$, а на межі двох середовищ $E_{2\tau} = E_{1\tau}$, то в трубі, на



межі діелектрика і провідника, повинна виконуватись умова $E_\tau = 0$. З цієї умови випливає, що $E_x = 0$ при $y = 0$ і $y = b$ (тобто для нижньої і верхньої стінок) та $E_y = 0$ при $x = 0$ і $x = a$ (для двох бічних стінок; див. рис.).

Перетворюючи рівняння (1) відомим способом (див. § 47), знайдемо для векторів E і H :

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \vec{H} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Розв'язок першого з рівнянь (2) шукатимемо у вигляді плоскої поперечної хвилі, що поширюється вздовж хвилеводу. Припустимо, що $E_z = 0$, а залежність від z і t компонент E_x і E_y виражається множником $e^{i(\omega t - k_z z)}$. У цьому випадку рівняння (2) для E_y має вигляд

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \left(\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \omega^2 - k_z^2 \right) E_y = 0; \quad (3)$$

аналогічне рівняння буде для E_x . Розв'язок рівняння для E_y шукаємо у вигляді:

$$E_y = E_0 \sin k_x x \cos k_y y e^{i(\omega t - k_z z)}. \quad (4)$$

Оскільки E_x і E_y зв'язані умовою $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$, то розв'язок для E_x , враховуючи (4), шукатимемо у вигляді $E_x = -E_0 \frac{k_y}{k_x} \cos k_x x \sin k_y y e^{i(\omega t - k_z z)}$. (5)

Граничні умови для E_x і E_y при $x = a$ і $y = b$ приводять до вимог $k_x a = n\pi$, $k_y b = m\pi$, де n і m цілі числа. Отже, $k_x = \frac{n\pi}{a}$, $k_y = \frac{m\pi}{b}$. (6)

Підставимо (4) у (3): $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \omega^2 = 0$. (7)

Враховуючи (6), знайдемо: $k_z = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{c^2} \omega^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$. (8)

Оскільки $\frac{\epsilon\mu}{c^2} = \frac{1}{v^2}$; $\frac{2\pi\nu}{\omega} = \frac{2\pi c}{\omega\sqrt{\epsilon\mu}} = \lambda$,

то $\frac{\epsilon\mu\omega^2}{c^2} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$. (9)

Тут λ – довжина електромагнітної хвилі у безмежному діелектричному середовищі. Підставляючи (9) у (8), знайдемо:

$$k_z = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \left(\frac{n}{2a}\right)^2 - \left(\frac{m}{2b}\right)^2}. \quad (10)$$

Ми бачимо, що у хвилеводі хвиля може поширюватися лише тоді, якщо

$$\frac{1}{\lambda^2} > \left(\frac{n}{2a}\right)^2 + \left(\frac{m}{2b}\right)^2. \quad \text{Введемо позначення: } \lambda_k = \left\{ \left(\frac{n}{2a}\right)^2 + \left(\frac{m}{2b}\right)^2 \right\}^{-1/2}. \quad (11)$$

Величину λ_k називають критичною довжиною хвилі у хвилеводі. Отже, у хвилеводі хвиля може поширюватися лише при умові $\lambda < \lambda_k$. Для довжин хвиль, більших від критичної, $\lambda > \lambda_k$, k_z буде уявним, тобто хвиля у хвилеводі поширюватись не може.

Знаючи компоненти вектора $\vec{E}(E_x, E_y, E_z)$, вектор \vec{H} можна визначити, користуючись рівнянням Максвелла $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$. Враховуючи, що залежність від часу векторів \vec{H} і \vec{E} визначається множителем $e^{i\omega t}$, знаходимо $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{i\omega\mu}{c} \vec{H}$, тому

$$H_x = -\frac{c}{i\omega\mu} \operatorname{rot}_x \vec{E} = -\frac{c}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right),$$

$$H_y = -\frac{c}{i\omega\mu} \operatorname{rot}_y \vec{E} = -\frac{c}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right),$$

$$H_z = -\frac{c}{i\omega\mu} \operatorname{rot}_z \vec{E} = -\frac{c}{i\omega\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right).$$

Користуючись (9.4) і (9.5), виразимо компоненти вектора \vec{H} :

$$\begin{aligned}
H_x &= -\frac{ck_z}{\omega\mu} E_0 \sin k_x x \cos k_y y e^{i(\omega t - k_z z)}, \\
H_y &= -\frac{ck_z k_y}{\omega\mu k_x} E_0 \cos k_x x \sin k_y y e^{i(\omega t - k_z z)}, \\
H_z &= \frac{ic(k_x^2 + k_y^2)}{\omega\mu k_x} E_0 \cos k_x x \sin k_y y e^{i(\omega t - k_z z)}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Як було показано, k_x , k_y , k_z визначаються рівняннями (6) і (10).

Тут слід звернути увагу на те, що коли $E_z = 0$, тобто коли вектор \vec{E} перпендикулярний до напрямку поширення хвилі у хвилеводі, то H_z виявилось, загалом кажучи, відмінним від нуля.

Розглянемо умову, коли не тільки $E_z = 0$, а й $H_z = 0$, тобто з'ясуємо можливість поширення у хвилеводі поперечних електромагнітних хвиль. З (12) випливає, що H_z перетворюється в нуль при $k_x^2 + k_y^2 = 0$, що, на підставі (7),

$$\text{означає: } k_z^2 = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \omega^2.$$

З (2) для вектора \vec{H} можна вивести рівняння, аналогічне (3), тобто рівняння

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \left(\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \omega^2 - k_z^2 \right) \vec{H} = 0.$$

Але, оскільки вираз у дужках є нулем, матимемо:

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} = 0. \tag{13}$$

В ідеальному провіднику $\vec{E} = 0$; тоді з (1) випливає, що також $\vec{H} = 0$. З граничних умов на межі діелектрика і провідника знайдемо, що $H_n = 0$, тобто вектор \vec{H} паралельний цій межі. У цьому випадку єдиним розв'язком (13) є $\vec{H} = 0$. Отже, якщо припустити, що в (12) $H_z = 0$, то H_x і H_y задовольнятимуть (13) і граничні умови лише тоді, коли вони також дорівнюватимуть нулю. Але це відповідає відсутності електромагнітних хвиль.

Таким чином, електромагнітна хвиля, в якій вектор \vec{E} перпендикулярний до напрямку поширення у хвилеводі, має поздовжню компоненту вектора \vec{H} . Такі хвилі називають *поперечно-електричними ТЕ-хвилями*, або *H-хвилями*. Аналогічно можна показати, що хвиля, для якої $H_z = 0$, має поздовжню складову вектора \vec{E} . Такі хвилі називаються *поперечно-магнітними*, або *ТН-хвилями*, або *E-хвилями*.

ПИТАННЯ МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ

Модуль 1. Теорія електромагнітного поля (ЕМП) у вакуумі

1. Назвіть відомі типи фундаментальних взаємодій.
2. Яку взаємодію відносять до електромагнітної?
3. Що називають електромагнітним полем?
4. Запишіть закон Кулона.
5. Що розуміють під далеко діючим характером ЕМП?
6. Для яких явищ ЕМП описується рівняннями Максвелла?
7. Сформулюйте закон збереження електричного заряду для замкнутої системи.
8. Що розуміють під універсальністю електромагнітної взаємодії?
9. Як представляється дія, що відповідає за взаємодію зарядженої частинки з ЕМП?
10. Як позначають і називають компоненти 4-потенціала?
11. Запишіть вираз для функції Лагранжа зарядженої частинки в ЕМП.
12. Запишіть рівняння руху зарядженої частинки в ЕМП.
13. Запишіть вираз для сили Лоренца.
14. Запишіть вираз для напруженостей електричного і магнітного полів через потенціали.
15. В чому суть калібровочної інваріантності ЕМП?
16. Приведіть калібровочні перетворення в 4-вимірній формі.
17. В чому відмінність у використанні напруженостей і потенціалів ЕМП?
18. Приведіть формулу-визначення 4-вимірного аналога оператора “набла”.
19. Приведіть формулу-визначення тензора ЕМП.
20. Приведіть вигляд тензора ЕМП через напруженості.
21. Як в матричній формі можна представити перетворення Лоренца?
22. Запишіть формули перетворень компонентів вектора напруженості електричного поля.
23. Запишіть формули перетворень компонентів вектора напруженості магнітного поля.
24. Приведіть формули перетворень компонентів напруженостей ЕМП в нерелятивістському наближенні у векторній формі.
25. Приведіть вирази обох інваріантів ЕМП.
26. Що означає інваріантність інваріантів ЕМП?
27. Приведіть вирази інваріантів ЕМП у 4-вимірній формі через тензор ЕМП.
28. Приведіть наслідки з інваріантів ЕМП.
29. Запишіть 1-у пару рівнянь Максвелла в диференціальній формі.
30. Запишіть 1-у пару рівнянь Максвелла в інтегральній формі.
31. Яку величину називають електрорушійною силою?
32. Яку величину називають магнітним потоком?
33. Сформулюйте закон електромагнітної індукції Фарадея.
34. Запишіть 1-у пару рівнянь Максвелла в 4-вимірній формі.
35. Що розуміють під густиною електричного заряду?
36. Яке явище називають електричним струмом?
37. Яку величину називають густиною електричного струму?
38. Який фізичний зміст має вектор густини електричного струму?

39. Запишіть закон збереження електричного заряду в диференціальній формі.
40. Запишіть закон збереження електричного заряду в інтегральній формі.
41. Приведіть визначення 4-вимірного вектора густини струму.
42. Запишіть закон збереження електричного заряду в 4-вимірній формі
43. Як показати, що повний електричний заряд в деякому об'ємі не залежить від вибору ІСВ?
44. Запишіть вираз для дії, що відповідає взаємодії ЕМП з зарядженими частинками.
45. Запишіть вираз для дії, що відповідає ЕМП.
46. Запишіть 2-у пару рівнянь Максвелла в 4-вимірній формі.
47. Запишіть 2-у пару рівнянь Максвелла у тривимірній диференціальній формі.
48. Запишіть 2-у пару рівнянь Максвелла у тривимірній інтегральній формі.
49. Що називають струмом зміщення?
50. Яку систему одиниць називають абсолютною гаусовою?
51. Які основні одиниці утворюють систему СІ?
52. Які величини характеризують ЕМП у вакуумі в системі СІ?
53. Який зв'язок між напруженостями і векторами індукції в системі СІ?
54. Який вигляд має система рівнянь Максвелла в гаусовій системі одиниць?
55. Який вигляд має система рівнянь Максвелла в системі одиниць СІ?
56. Як швидкість світла у вакуумі виражається через електричну і магнітну сталі?
57. Які переваги має гаусова система одиниць перед СІ у використанні в теорії ЕМП?
58. Приведіть для порівняння формулу закону Кулона в СІ та у гаусовій системі одиниць.
59. Запишіть вираз для вектора Пойнтінга.
60. Запишіть вираз для густини енергії ЕМП.
61. Який фізичний зміст має вектор Пойнтінга?
62. Запишіть рівняння, що виражає закон збереження енергії частинок в ЕМП в диференц. формі.
63. Запишіть рівняння, що виражає закон збереження енергії частинок в ЕМП в інтеграл. формі.
64. Запишіть вираз для імпульсу ЕМП.
65. Які експериментальні докази існування імпульсу ЕМП?
66. Запишіть вираз для моменту імпульсу ЕМП.
67. На яких поверхнях використовують зшивку компонентів ЕМП?
68. Що розуміють під поверхневою густиною зарядів?
69. Запишіть граничні умови для нормальної складової вектора напруженості електричного поля.
70. Запишіть граничні умови для нормальної складової вектора напруженості магнітного поля.
71. Що розуміють під поверхневою густиною струму?
72. Запишіть граничні умови для тангенціальної складової вектора напруженості магнітного поля.
73. Запишіть граничні умови для тангенціальної складової вектора напруженості електричн. поля.

74. Сформулюйте умови, при яких рівняння Максвелла мають єдиний розв'язок.
75. Запишіть вираз для оператора Даламбера.
76. Запишіть умову калібровки Лоренца.
77. Запишіть рівняння, яким задовольняють потенціали при калібровці Лоренца.
78. Запишіть умову калібровки Кулона.
79. Запишіть рівняння, яким задовольняють потенціали при калібровці Кулона.
80. Запишіть рівняння для векторного потенціалу при відсутності зарядів і струмів.

Модуль 2. Стаціонарне електромагнітне поле у вакуумі

1. Яке поле називають електростатичним?
2. Запишіть рівняння Максвелла для електростатичного поля.
3. Який зв'язок між напруженістю і потенціалом електростатичного поля?
4. Як визначається робота електростатичного поля по переміщенню точкового заряду?
5. Який фізичний зміст електростатичного потенціалу?
6. Чому дорівнює робота електростатичного поля по переміщенню точкового заряду вздовж замкнутої кривої?
7. Якому рівнянню задовольняє електростатичний потенціал?
8. Запишіть рівняння для електростатичного потенціалу у вакуумі.
9. Запишіть граничні умови для електростатичного потенціалу на особливих поверхнях.
10. Як можна представити об'ємну густину системи точкових зарядів?
11. Як визначається δ -функція Дірака?
12. Запишіть формулу для електростатичного потенціалу точкового заряду.
13. Запишіть формулу для напруженості електростатичного поля точкового заряду.
14. Приведіть формулу закону взаємодії двох точкових зарядів.
15. Сформулюйте принцип суперпозиції для системи електричних зарядів.
16. Запишіть формулу для електростатичного потенціалу системи точкових електричних зарядів.
17. Запишіть формулу для електростатичного потенціалу зарядженої системи з заданою об'ємною густиною заряду.
18. Якою умовою визначається можливість використання наближеного виразу для електростатичного потенціалу на великих відстанях?
19. Чому дорівнює електростатичний потенціал системи зарядів на великій відстані у першому наближенні?
20. Який фізичний зміст першого наближення електростатичного потенціалу системи зарядів на великій відстані?
21. Що називають дипольним моментом системи?
22. За якої умови дипольний момент системи не залежить від вибору початку координат?
23. Чому дорівнює електростатичний потенціал електричного диполя?
24. Яку систему називають елементарним електричним диполем?

25. Чому дорівнює напруженість електричного поля диполя?
26. Що називають квадрупольним моментом системи?
27. Як представляється електростатичний потенціал квадруполя?
28. В яких випадках суттєвим є вклад квадрупольного моменту в електростатичний потенціал?
29. Запишіть формулу для густини енергії електростатичного поля.
30. Запишіть формулу для енергії електростатичного поля в заданому об'ємі.
31. Приведіть формулу для енергії замкнутої системи електричних зарядів.
32. Приведіть вираз для енергії двох обмежених систем електричних зарядів.
33. Приведіть вираз для енергії взаємодії двох обмежених систем електричних зарядів.
34. Як визначається сила взаємодії двох обмежених систем електричних зарядів?
35. Приведіть вираз для власної енергії обмеженої системи електричних зарядів через густину заряду.
36. Приведіть вираз для енергії взаємодії двох обмежених систем електричних зарядів через густину заряду.
37. Чому дорівнює електростатична енергія взаємодії системи точкових зарядів?
38. Чому дорівнює власна електростатична енергія точкового заряду?
39. Про що свідчить нескінченне значення власної електростатичної енергії точкових зарядів?
40. Якою відстанню визначаються межі застосування класичної електродинаміки?
41. Яка умова визначає межі застосування класичної електродинаміки?
42. Чому припущення про протяжність елементарної частинки суперечить СТВ?
43. В чому полягає ідея перенормування власної електростатичної енергії зарядженої частинки?
44. Який вираз визначає електростатичну енергію поверхневих зарядів?
45. Чому дорівнює об'ємна густина електростатичної енергії всередині провідника?
46. Яку властивість має електростатичний потенціал на поверхні провідника?
47. Чому дорівнює електростатична енергія ізольованих провідників?
48. Яку систему називають конденсатором?
49. Який зв'язок між потенціалом, зарядом і ємністю?
50. Чому дорівнює електростатична енергія конденсатора?
51. Запишіть рівняння Максвелла для статичного магнітного поля.
52. Що є джерелом статичного магнітного поля?
53. Приведіть закон Ерстеда для статичного магнітного поля.
54. Якому рівнянню задовольняє векторний потенціал статичного магнітного поля?
55. Приведіть загальний розв'язок рівняння Пуассона для векторного потенціалу.
56. Приведіть закон Біо-Савара-Лапласа для об'ємних струмів.
57. Що розуміють під квазілінійними струмами?

58. Яку заміну використовують для переходу від об'ємних до квазілінійних струмів?
59. Приведіть закон Біо-Савара-Лапласа для квазілінійних струмів.
60. Сформулюйте правило правого гвинта.
61. Запишіть формулу сили Ампера, що діє на об'ємні струми.
62. Запишіть формулу сили Ампера, що діє на квазілінійний струм.
63. Сформулюйте правило лівої руки для сили Ампера.
64. Чому дорівнює векторний потенціал обмеженої системи стаціонарних струмів на великих відстанях?
65. Приведіть визначення магнітного моменту для об'ємного струму.
66. Чому дорівнює магнітний момент плоского контуру зі струмом?
67. Чому дорівнює магнітний момент системи заряджених частинок?
68. Що розуміють під гіромагнітним відношенням зарядженої частинки?
69. Чому дорівнює гіромагнітне відношення для зарядженої частинки?
70. Що називають спіновим магнітним моментом частинки?
71. Запишіть формулу для напруженості магнітного поля диполя.
72. Запишіть вираз для густини енергії магнітного поля.
73. Приведіть формулу для енергії об'ємного електричного струму в магнітному полі.
74. Приведіть вираз для енергії взаємодії об'ємних струмів.
75. Приведіть вираз для власної енергії провідника через індуктивність.
76. Приведіть вираз для енергії взаємодії провідників через індуктивність.
77. Приведіть вираз для коефіцієнта взаємної індукції квазілінійних струмів.
78. Приведіть вираз для власної магнітної енергії через магнітний потік.
79. Приведіть вираз для енергії взаємодії провідників через магнітний потік.
80. Приведіть співвідношення між магнітним потоком, струмом і індуктивністю.

Модуль 3. Електромагнітні хвилі у вакуумі

1. Запишіть систему рівнянь Максвелла у вакуумі при відсутності зарядів і струмів.
2. Запишіть хвильове рівняння для електромагнітної хвилі.
3. Який загальний розв'язок хвильового рівняння для електромагнітного поля?
4. Який фізичний зміст розв'язку хвильового рівняння у випадку плоскої електромагнітної хвилі?
5. Яку калібровку використовують для потенціалів електромагнітних хвиль?
6. Який зв'язок між напруженостями електричного і магнітного полів у плоскій електромагнітній хвилі?
7. Що означає поперечність плоскої ЕМХ?
8. Чому дорівнює густина потоку енергії плоскої електромагнітної хвилі?
9. Чому дорівнює густина потоку імпульсу плоскої електромагнітної хвилі?
10. Яким є співвідношення між енергією і імпульсом для кванта світла?
11. Яку хвилю називають плоскою монохроматичною електромагнітною хвилею?
12. Яке співвідношення між циклічною частотою і хвильовим вектором монохроматичної ЕМХ?

13. Приведіть визначення фазової і групової швидкостей монохроматичної електромагнітної хвилі.
14. Що означає рівність групової і фазової швидкостей монохроматичної електромагнітної хвилі?
15. Яке співвідношення між довжиною хвилі і хвильовим вектором плоскої монохроматичної ЕМХ?
16. Які співвідношення між векторами амплітуд напруженостей і напрямку поширення плоскої монохроматичної ЕМХ?
17. Як можна зобразити вигляд плоскої монохроматичної електромагнітної хвилі?
18. В чому суть ефекту Доплера?
19. Приведіть формулу релятивістського ефекту Доплера.
20. Приведіть формулу нерелятивістського ефекту Доплера.
21. Яку електромагнітну хвилю називають еліптично поляризованою?
22. Яку електромагнітну хвилю називають лінійно поляризованою?
23. Яку електромагнітну хвилю називають поляризованою по колу?
24. Чим викликана назва потенціалів електромагнітного випромінювання, що запізнюються?
25. Запишіть вираз для потенціалів, що запізнюються.
26. Запишіть вираз для потенціалів дипольного електромагнітного випромінювання на великих відстанях від випромінюючої системи.
27. Чому дорівнюють напруженості електромагнітного поля дипольного випромінювання?
28. Чому дорівнює вектор Пойнтінга для дипольного випромінювання?
29. Який вигляд має діаграма дипольного випромінювання?
30. В якому напрямку по відношенню до дипольного моменту інтенсивність випромінювання максимальна?
31. Чому дорівнює інтенсивність дипольного випромінювання?
32. Яку систему називають дипольним осцилятором?
33. Приведіть приклади дипольного осцилятора.
34. Приведіть вираз для середнього значення за період інтенсивності випромінювання дипольного осцилятора.
35. Від чого і як залежить середня за період інтенсивність випромінювання дипольного осцилятора?
36. Який висновок випливає із виразу для інтенсивності випромінювання дипольного осцилятора для радіозв'язку?
37. Як в електродинаміці пояснюється голубий колір неба?
38. Яким часом визначаються потенціали ЕМП рухомого заряду в довільній точці?
39. Приведіть вираз для потенціалів ЕМП рухомого заряду.
40. Який характер має електромагнітне поле рухомого заряду?
41. Що розуміють під радіаційним тертям?
42. Яка природа сили радіаційного тертя?
43. Приведіть формулу для сили радіаційного тертя.
44. За яких умов отримується формула для сили радіаційного тертя?
45. Якою умовою обмежується використання формули для сили радіаційного тертя?

46. Приведіть формулу для інтенсивності випромінювання рухомої зарядженої частинки.
47. В чому полягає протиріччя між висновками класичної електродинаміки і планетарною моделлю атома?
48. В чому суть ефекту Вавилова-Черенкова?
49. Яка природа випромінювання Вавилова-Черенкова?
50. Яку особливість має напрямок випромінювання Вавилова-Черенкова?
51. Що означає розсіяння ЕМХ?
52. Як визначається ефективний переріз розсіяння ЕМХ?
53. Приведіть формулу ефективного переріза розсіяння плоскої монохроматичної хвилі вільною частинкою.
54. Приведіть формулу Томсона для повного перерізу розсіяння.
55. Приведіть формулу перерізу розсіяння неполяризованої хвилі вільним зарядом.
56. Яку ЕМХ називають немонохроматичною?
57. Приведіть формулу розкладання довільної функції часу в інтеграл Фур'є.
58. Як визначається повна інтенсивність немонохроматичної хвилі?
59. Приведіть формулу розкладання періодичної функції часу в ряд Фур'є.
60. Як визначається середня інтенсивність періодичної немонохроматичної хвилі?

Модуль 4. Електродинаміка суцільних середовищ

1. Що розуміють під наведеними зарядами і струмами в речовині?
2. Чому електромагнітне поле у речовині називають самоузгодженим?
3. Як здійснюється усереднення мікроскопічних рівнянь Максвела в речовині?
4. Який вигляд мають мікроскопічні рівняння Максвела після усереднення?
5. Що називають вектором магнітної індукції?
6. Приведіть закон Ома у диференціальній формі.
7. Що називають вектором електричної поляризації?
8. Що називають вектором намагніченості?
9. Який зв'язок між вектором електричної поляризації і густиною наведеного заряду?
10. Яка формула зв'язує густину наведеного струму з векторами електричної поляризації і намагніченості речовини?
11. Як визначається вектор електричної індукції?
12. Як визначається вектор напруженості магнітного поля у середовищі?
13. Який вигляд має система рівнянь Максвела у середовищі?
14. Як вводяться електрична і магнітна проникності речовини?
15. Приведіть вираз для густини енергії електромагнітного в речовині.
16. Запишіть закон збереження енергії електромагнітного поля у речовині.
17. Запишіть закон Ома у диференціальній формі при наявності сторонніх сил.
18. Приведіть закон Джоуля-Ленца у диференціальній формі.
19. Яку величину називають питомою потужністю сторонніх сил?
20. Приведіть закон збереження енергії електромагнітного поля в інтегральній формі.

21. Запишіть хвильове рівняння для електромагнітного поля у середовищі.
22. Якою формулою визначається швидкість електромагнітної хвилі у середовищі?
23. Як показник заломлення виражається через електричну і магнітну проникності?
24. Від чого залежить показник заломлення речовини в рамках електронної теорії?
25. Яке явище називають дисперсією електромагнітних хвиль?
26. Яке явище називають абсорбцією електромагнітних хвиль?
27. Який вигляд має залежність показника заломлення від частоти ЕМХ?
28. Який вигляд має коефіцієнт поглинання від частоти ЕМХ?
29. При якій умові в іонізованому газі неможливе поширення ЕМХ?
30. Які діелектрики називають неполярними?
31. Яка природа поляризації неполярних діелектриків?
32. Чому дорівнює діелектрична проникність неполярного діелектрика?
33. Які діелектрики називають полярними?
34. Яка природа поляризації полярних діелектриків?
35. Чому дорівнює діелектрична проникність полярного діелектрика у слабких електричних полях?
36. Що розуміють під станом насичення полярного діелектрика?
37. Як визначається магнітна сприйнятливість речовини?
38. Який зв'язок між магнітною сприйнятливістю і магнітною проникністю речовини?
39. Які речовини відносять до парамагнетиків?
40. Які речовини відносять до діамагнетиків?
41. Які речовини відносять до феромагнетиків?
42. Що є основними носіями магнетизму речовини?
43. В чому суть гістерезису феромагнетиків?
44. Що називають залишковим магнетизмом феромагнетиків?
45. В чому суть теорії Вейса природи феромагнетизму?
46. Які сучасні погляди на природу феромагнетизму?
47. Яка природа антиферомагнетиків?
48. Які вихідні принципи класичної теорії електропровідності металів?
49. Чому дорівнює електропровідність металів у класичній теорії електропровідності?
50. Які труднощі має класична теорія електропровідності металів?
51. В чому суть ефекту Холла?
52. Як класична теорія електропровідності пояснює ефект Холла?
53. Що називають коефіцієнтом Холла?
54. Яке явище називають надпровідністю?
55. В чому суть ефекту Мейснера і Оксенфельда?
56. Яке пояснення природи надпровідності дає квантова теорія?
57. Яким є магнітне і електричне поля всередині надпровідника?
58. Що можна сказати про розподіл струму в надпровіднику?
59. Чим визначається глибина проникнення магнітного поля в надпровідник?
60. Які струми і поля називають квазістаціонарними?
61. Якою є перша умова квазістаціонарності електричних струмів?

62. Яку математично виражається перша умова квазістаціонарності електричних струмів?
63. Якою є друга умова квазістаціонарності електричних струмів?
64. Яку математично виражається друга умова квазістаціонарності електричних струмів?
65. Якою є третя умова квазістаціонарності електричних струмів?
66. Який вигляд приймає система рівнянь Максвелла для квазістаціонарних полів?
67. Якому рівнянню задовольняє напруженість магнітного поля для квазістаціонарних струмів?
68. Приведіть рівняння для змінного квазістаціонарного струму у замкнутому електричному колі.
69. Якою формулою визначається опір провідника?
70. Приведіть вираз для закону Джоуля-Ленца в інтегральній формі.
71. Запишіть диференціальне рівняння для заряду у незамкнутому електричному колі.
72. Приведіть закон Ома для електричного кола з джерелом змінних гармонічних коливань.
73. За якої умови в замкнутому колі із джерелом періодичного струму виникає резонанс?
74. Яка формула визначає повний опір електричного кола з джерелом змінних гармонічних коливань?
75. Якою формулою визначається частота вільних електромагнітних коливань в колі?
76. При якій умові в електричному колі мають місце незатухаючі вільні коливання?
77. Приведіть формулу Томсона.
78. Яке явище називають скін-ефектом?
79. Якою формулою визначається товщина скін-шару?
80. Як враховується скін-ефект у електро- і радіотехніці?
81. Сформулюйте закон відбивання ЕМХ.
82. Сформулюйте закон заломлення ЕМХ при перетині межі розділу прозорих середовищ.
83. Який фізичний зміст формул Френеля?
84. Що визначає кут Брюстера?
85. За яких умов відбувається повне внутрішнє відбивання?
86. Що означає екранування поля заряду в електролітах і плазмі?
87. Якою величиною визначається глибина проникнення поля при екрануванні заряду?
88. Який вираз визначає електричний потенціал екранованого поля точкового заряду в плазмі?
89. Приведіть формулу електричної взаємодії плазми.
90. Приведіть формулу для частоти плазмових коливань.

ПИТАННЯ ДО ЕКЗАМЕНУ З ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

1. Основні властивості електромагнітної взаємодії
2. Рівняння руху зарядженої частинки в електромагнітному полі
3. Калібровочні перетворення потенціалів
4. Тензор електромагнітного поля
5. Перетворення напруженостей електромагнітного поля
6. Інваріанти електромагнітного поля
7. Перша пара рівнянь Максвела
8. Густина електричного струму
9. Дія для електромагнітного поля
10. Вивід другої пари рівнянь Максвела з принципу найменшої дії
11. Тривимірна форма другої пари рівнянь Максвела
12. Системи одиниць вимірювання електричних і магнітних величин
13. Енергія електромагнітного поля
14. Закон збереження імпульсу в електромагнітному полі
15. Граничні умови для векторів електромагнітного поля
16. Єдиність розв'язку рівнянь Максвела
17. Рівняння для електромагнітних потенціалів
18. Постійне електричне поле у вакуумі
19. Електростатичне поле системи точкових зарядів
20. Потенціал на великих відстанях від системи зарядів
21. Електростатична енергія зарядів
22. Класичний радіус електрона. Перенормування.
23. Електроємність провідників
24. Постійне магнітне поле у вакуумі
25. Сила Ампера
26. Магнітний момент
27. Енергія в постійному магнітному полі
28. Хвильове рівняння і його розв'язок
29. Плоска монохроматична хвиля
30. Властивості плоскої монохроматичної хвилі
31. Потенціали, що запізнюються. Дипольне випромінювання
32. Інтенсивність дипольного випромінювання
33. Дипольний осцилятор
34. Електромагнітне поле рухомого заряду
35. Радіаційне тертя
36. Ефект Вавілова-Черенкова
37. Розсіяння електромагнітних хвиль вільними зарядами
38. Немонохроматичні хвилі
39. Усереднення рівнянь Максвела
40. Рівняння електромагнітного поля в середовищі
41. Енергія електромагнітного поля в середовищі
42. Поширення електромагнітних хвиль в середовищі
43. Дисперсія і абсорбція електромагнітних хвиль у середовищі
44. Поляризація неполярних діелектриків
45. Класифікація магнетиків

46. Класична теорія парамагнетизму
47. Феромагнетизм
48. Класична теорія електропровідності металів
49. Труднощі класичної електронної теорії
50. Ефект Холла
51. Квазістаціонарні струми
52. Змінний струм у замкнутому колі
53. Змінний струм в незамкнутому колі
54. Вимушені електромагнітні коливання
55. Вільні електромагнітні коливання в електричному колі
56. Трансформатор
57. Скін-ефект
58. Електромагнітні властивості надпровідників
59. Теорія Лондонів
60. Відбивання і заломлення електромагнітних хвиль
61. Фазова і групова швидкості
62. Хвилі вздовж ліній. Телеграфне рівняння
63. Поширення електромагнітних хвиль у хвилеводах

Для нотаток

Навчальне видання

Електродинаміка
курс лекцій

Дудик Михайло Володимирович
Діхтяренко Юлія Володимирівна

*Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів
фізико-математичних спеціальностей*

Видання здійснено в авторському редагуванні

Підписано до друку 15.01.2015. Формат 60×90 1/32

Папір офсет.

Обл.-вид. арк. 0,45. Ум. друк. арк. 0,4

Тираж 100. Зам. №2561.

Видавець та виготовлювач
ФОП Жовтий О.О.

20300, м. Умань, вул. Садова, 2
(УДПУ, навчальний корпус №1)

Тел. 097 255 65 07

047 44 5 21 66

093 540 78 82

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
Серія ДК, №2444 від 22.03.2006 р.