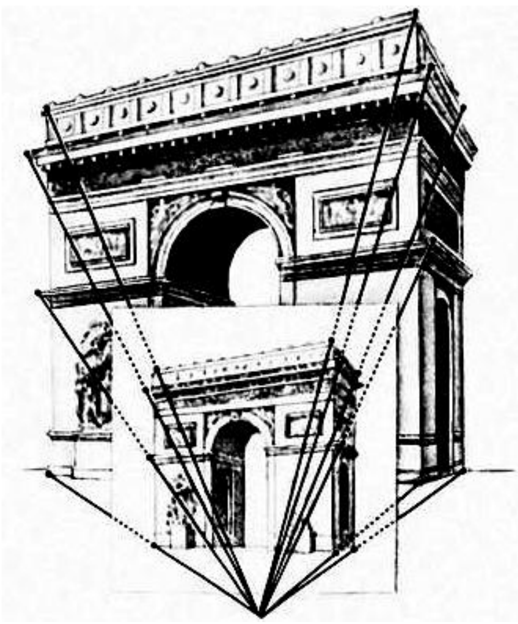
Міністерство освіти і науки України
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

Заїка О. В., Махомета Т. М.

«ПРОЕКТИВНА ГЕОМЕТРІЯ ТА МЕТОДИ ЗОБРАЖЕНЬ»

Навчальний посібник



Умань – 2015

УДК 519.145 (075.8)
ББК 22.151.32я73
П-79

Рекомендовано до друку вченою радою Інституту природничо-математичної та технологічної освіти Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини (протокол № 4 від 27 листопада 2014 року)

Рецензенти:
Кіпніс Л. А. завідувач кафедри вищої математики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини, доктор фізико-математичних наук, професор;

Дякон В. М. директор Уманської філії Європейського університету, кандидат фізико-математичних наук, доцент

П-79 Проективна геометрія та методи зображень : навчальний посібник для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів / укл. О. В. Заїка, Т.М. Махомета – Умань : ФОП Жовтий О. О., 2015. – 265 с**.**

В основу побудови курсу проективної геометрії автори поклали ідею геометричного перетворення. Даний посібник містить теоретичний матеріал, приклади розв’язаних задач та задачі для самостійного розв’язування, контрольні запитання і стане у нагоді студентам напряму підготовки 6.040201 Математика* під час вивчення курсу «Проективної геометрії та методи зображень».

Посібник розрахований для студентів фізико-математичних факультетів всіх форм навчання.

УДК 519.145 (075.8)
ББК 22.151.32я73

Зміст

Передмова

Вивчення курсу “Проективна геометрія” відіграє важливу роль у формуванні в майбутнього вчителя математики більш широкого погляду на геометрію, глибшого розуміння зв’язків між різними геометричними системами, природи геометричних властивостей, можливостей різних методів їх вивчення. Мета курсу: навчання студентів методам і фактам проективної геометрії, формування та розвиток вмінь застосовувати їх до розв’язування задач курсу; оволодіння студентами методами побудови зображень просторових фігур на площині та методами розв’язування задач на побудову за допомогою однієї лінійки, зокрема на побудову перерізів; розвиток просторової уяви та конструктивних вмінь у майбутнього вчителя математики.

Навчальний посібник складено за навчальною програмою, розробленою авторами, з опорою на раніше діючи навчальні програми для студентів фізико-математичного напрямку підготовки педагогічних вищих навчальних закладів.

Уміння зображати предмети оточуючого нас світу необхідне робітникам різних професій; елементарні навички з цієї області необхідні в шкільній навчальній роботі на уроках геометрії, фізики тощо. Учитель математики в своїй роботі часто використовує рисунки, які виконуються ним на дошці.

Усім знайомі зображення просторових фігур на площині: картини художників, креслення будинків, машин та їх деталей тощо. Правила побудови та використання зображень дають графічні науки: нарисна геометрія та креслення. В основі ж цих правил лежить математична теорія геометричних перетворень, особливо афінних та проективних.

Перш ніж побудувати машину, будинок чи споруду, креслять їх зображення на папері – роблять креслення. Для того, щоб за зображенням можна було виконувати побудову, саме зображення повинно бути достатньо точним та задовольняти певним вимогам.

Якщо художник захоче намалювати з натури ряд будинків, він змушений буде дещо змінити і кути і відстані, але всі ці зміни підлягають строгим математичним правилам, законам. Якщо художник відступить від цих правил, то картина буде здаватися неправдивою або ж схематичною. В чому ж суть цих законів? Ми бачимо предмети тому, що в око потрапляє світло, яке відбивається від кожної точки поверхні предмета. Світло розповсюджується строго прямолінійно: шлях світла від точки предмета, на яку ми дивимося, до нашого ока є пряма лінія. Таким чином маємо центральне проектування.

Побудувати зображення предмета означає знайти його центральну або паралельну проекцію. Зазвичай на практиці ніхто не будує проекцій, розміщуючи між предметом та оком проектуючу площину. Таке зображення фактично здійснює фотоапарат, утворюючи на плівці центральну проекцію предметів. Паралельну проекцію таким чином отримати не можливо, оскільки в цьому випадку око чи об’єктив фотоапарата слід розмістити нескінченно далеко від предмета, що практично не здійснено. Тому лишається лише один шлях отримання проекцій – вивчення геометричних законів проектування та властивостей проекцій, тобто теорію побудови проекцій.

Теорія проективних перетворень вказує способи, які роблять метрично визначеними зображення, що виконані в центральній проекції. Такими зображеннями користуються архітектори (метод лінійної перспективи), в цій проекції отримуються зображення на фотографіях. Отже вивчення афінних та проективних перетворень дає методи розв΄язування метричних задач за допомогою зображень, виконаних в паралельній та центральній проекції, не дивлячись на всі спотворення, що відбуваються при проектуванні.

Ті, хто вивчав тільки евклідову геометрію, вважають очевидним факт, що дві прямі, що лежать в одній площині і мають спільний перпендикуляр, паралельні, тобто не перетнуться, як би далеко ми їх не продовжували. Проте, якщо ми, наприклад, подивимося на залізничні рейки, які є паралельними прямими, то нам безумовно здасться, що вони перетинаються на горизонті. Припустивши, що будь-які дві прямі перетинаються, ми отримуємо систему тверджень, настільки ж логічно несуперечливу, як і відмінна від неї система тверджень евклідової геометрії. Можна було б очікувати, що геометрія без кіл, відстаней, кутів і паралельності виявиться біднішою евклідової геометрії. Етимологічно здається дивним, що може існувати геометрія, яка не має справу з вимірами (адже саме слово «геометрія» походить від грецького слова, що означає землемір). Але в дійсності виникає дуже гарна і складна система з теоремами, про які Евклід не міг навіть подумати, оскільки зосередженість на вимірюванні відвела його зовсім в інший бік.

Тісно пов'язана з перспективою, проективна геометрія площини займається вивченням властивостей і відносин, які залишаються незмінними при проектуванні плоскої фігури на іншу площину. Плоска проективна геометрія займається вивченням геометричних властивостей, що не змінюються при центральному проектуванні. Прикладом такого проектування може служити тінь від абажура лампи, що падає на стіну або на підлогу. Зазвичай світова пляма має круглу або еліптичну форму на підлозі і гіперболічну - на стіні.

Таким чином, у проективній геометрії немає звичної відмінності між колом, еліпсом, параболою і гіперболою; це просто конічні перерізи, подібні один одному. Якщо художник малює кахельну підлогу на вертикальному полотні, то квадратні плитки вже не здаються квадратами, тому, що їх сторони і кути спотворюються. Тому проективна геометрія має справу з трикутниками, чотирикутниками і т.д., але не з прямокутними трикутниками, паралелограмами і т.д.

Проективна геометрія відрізняється від евклідової геометрії тим, що в ній не використовуються поняття паралельності, перпендикулярності і рівності відрізків і кутів і передбачається, що будь-які дві прямі на площині мають спільну точку.

Проективна геометрія може вивчатися як з чисто геометричної точки зору (спираючись на геометричні перетворення), так і з аналітичної (за допомогою однорідних координат) і з алгебраїчної, розглядаючи проективну площину, як структуру над полем. Часто, й історично, дійсна проективна площина розглядається як евклідова площина з додаванням «прямої у нескінченності».

Проективна геометрія доповнює евклідову, надаючи красиві і прості розв'язки для багатьох завдань, ускладнених присутністю паралельних прямих: шкільні геометричні задачі на побудову, які можна розв´язати за допомогою лише однієї лінійки, зокрема задачі з недосяжними точками; особливо проста і витончена проективна теорія конічних перерізів.

Якщо поглянути в історію, то в усі часи перед художником завжди стояла дуже важке завдання - зобразити на двовимірній площині малюнка або картини тривимірний простір. За часів античності та Середньовіччя її вирішували інтуїтивно, слідуючи зоровим враженням, здоровому глузду і традиціям. Епоха Відродження вперше створила математично строге вчення про способи передачі простору, назвавши його системою перспективи.

Хоча конічні перерізи вивчали ще Евклід, Архімед і Аполлоній в 4 і 3 ст. до н.е., перші дійсно проективні теореми були відкриті Паппо Олександрійським в 3 ст. н.е., а найперше проективне доведення теореми, що виходить з чисто проективних властивостей фігур, було запропоновано Ж. Понселе (1788-1867).

Основи проективної геометрії були закладені в 17 ст. Ж. Дезаргом (1593-1661) (у зв´язку з розвитком їм вченням про перспективу) і Б. Паскалем (1623-1662) (у зв'язку з вивченням ним деяких властивостей конічних перерізів).

Ідея нескінченно віддалених точок, в яких перетинаються паралельні прямі, з'явилася незалежно у французького архітектора Ж. Дезарга і у німецького астронома Й. Кеплера (1571-1630). Ж. Дезарг навіть запевняв, що може існувати пряма, що складається виключно з нескінченно віддалених точок. Велике значення для подальшого розвитку проективної геометрії мали роботи Г. Монжа (1746-1818).

У XIX столітті цікавість до цієї галузі відродилася завдяки працям Жана-Віктора Понселе та М. Шаля. Розвиваючи ідею, висловлену раніше Й. Кеплером, Понселе отримав проективний простір зі звичайного, постулював існування «нескінченно віддаленої площини», що містить «нескінченно віддалену пряму» для кожного пучка паралельних площин, і «нескінченно віддалену точку» для кожного пучка паралельних прямих. Це дозволило стверджувати, що дві паралельні прямі перетинаються в нескінченно віддаленій точці. Але для того, щоб дійсно перейти до проективної геометрії, треба урівняти в правах ці додатково введені нескінченно віддалені точки зі звичайними. Шаль продовжив і значно поглибив праці Понселе. Завдяки працям Я. Штейнера (1796-1863) і М. Шаля проективна геометрія досягла великих успіхів, але вона ґрунтувалася ще на метричній основі. Пізніше фон Штаудт (1798-1867), створив чисто синтетичну аксіоматизацію, що об'єднує нескінченно віддалені прямі з іншими. Всі ці геометри прагнули доводити теореми проективної геометрії синтетичним методом, поклавши в основу викладу проективні властивості фігур. Останні сліди залежності від вимірів усунув у 1899 р. М. П´єрі, що побудував систему аксіом проективної геометрії. Згодом іншими авторами пропонувалися системи аксіом, трохи відмінні від системи П´єрі.

Наприкінці XIX століття Ф. Клейн запропонував використовувати для проективної геометрії однорідні координати, які раніше запровадили Мьобіус (1790-1868), Плюккер (1801-1868). Вплив на розвиток проективної геометрії зробили роботи М. Лобачевського (1792-1856) по створенню неевклідової геометрії, що дозволили в подальшому А. Келі (1821-1895) і Ф. Клейну (1849-1925) розглянути різні геометричні системи з точки зору проективної геометрії.

Розвиток аналітичних методів звичайної проективної геометрії та побудова на її базі комплексної проективної геометрії (Е. Штудій, Е. Картал) поставили завдання про залежність тих чи інших проективних властивостей від того тіла, над яким побудована геометрія. У вирішенні цього питання великих успіхів домоглися А. Колмогоров і Л. Понтрягін.