УДК 624.012.45

**Азизов Т.Н. , д.т.н., профессор** (Уманский государственный педагогический университет имени Павла Тычины)

# К РАСЧЕТУ СПЛОШНЫХ И РЕБРИСТЫХ КРУГЛЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЕРЕКРЫТИЙ

**В статье приведена методика расчета круглых железобетонных перекрытий с помощью разбиения на линейные секториальные конечные элементы. Методика позволяет рассчитывать железобетонные плиты с учетом изменяющихся по длине секторальных элементов жесткостей ребер и полок перекрытия.**

**Постановка задачи и анализ исследований.** Круглые в плане сплошные и ребристые, сборные и монолитные железобетонные перекрытия встречаются в качестве покрытий резервуаров, рынков, спортивных и других сооружений.

Расчет круглых железобетонных плит методом конечных элементов [4] имеет определенные трудности. При разбиении круглой плиты на четырехугольные конечные элементы с радиальными и тангенциальными сторонами размеры конечных элементов у внешней окружности и у центра существенно отличаются. Так как точность расчета зависит от размеров КЭ, то, следовательно, напряжения (усилия) в конечных элементах разных размеров будут определены с разной степенью точности, что создает определенные трудности при расчете. Более точной будет схема разбиения на ортогональные конечные элементы. Неудобство такой схемы состоит в том, что крайние элементы (треугольные) имеют нерегулярную нумерацию, что усложняет задание исходных данных.

Основным недостатком обеих вышеприведенных схем является сложность учета армирования железобетонного конечного элемента. Кроме того, если рассчитывается сборное перекрытие, круглое в плане, с цилиндрическими шарнирами вдоль радиусов (случай сборных плит), то при разбиении на плоские конечные элементы такое моделирование весьма проблематично.

Расчет «ручными» методами [5] предполагает упругую работу круглых плит и в настоящее время применяется все реже и реже.

Аппрокимационые методы расчета перекрытий и мостовых сооружений [3,6-8] предназначены для расчета только прямоугольных систем.

В связи с вышесказанным **целью настоящей статьи** является разработка методики расчета круглых перекрытий с учетом трещинообразования в их элементах.

**Изложение методики.** Пусть имеется круглое перекрытие, опертое в центре и по внешней окружности (такое опирание имеют, например, покрытия круглых резервуаров). Разобьем перекрытие радиальными плоскостями на $n$ секториальных тавровых балок (рис.1). В общем случае вдоль линий рассечения будут действовать (подобно общему случаю плоских перекрытий) [1] четыре функциональные неизвестные (рис.2).

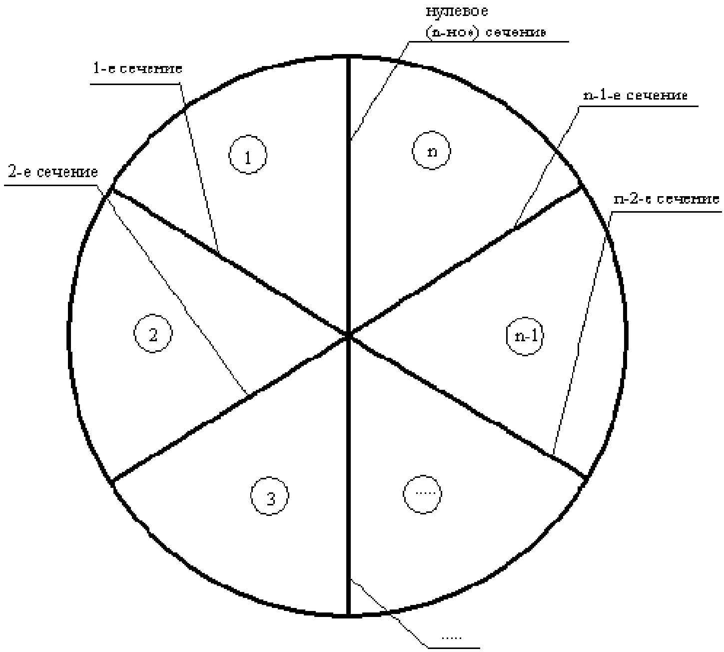


Рис.1.Схема разбиения на линейные элементы

Условиями совместности деформаций по линиям рассечения будут те же условия, что и при расчете прямоугольных перекрытий [1]. Разница будет состоять в том, что количество сечений в этом случае совпадает с количеством отсеченных элементов. Кроме того, ось координат $x$ как бы передвигается по кругу и всегда направлена от внешней окружности к центру по радиусу (см. рис. 2). Последняя кромка последнего таврового элемента совпадает с первой кромкой 1-го элемента, т.е. если рассматривать 1-й элемент, то по рис.1 $i$-$1$-м сечением будет нулевое сечение, а $i$-тым – первое сечение; для $n$-ного элемента $i$-$1$-м будет $n$-$1$-е сечение, $i$-тым – $n$-ное сечение, совпадающее с нулевым.

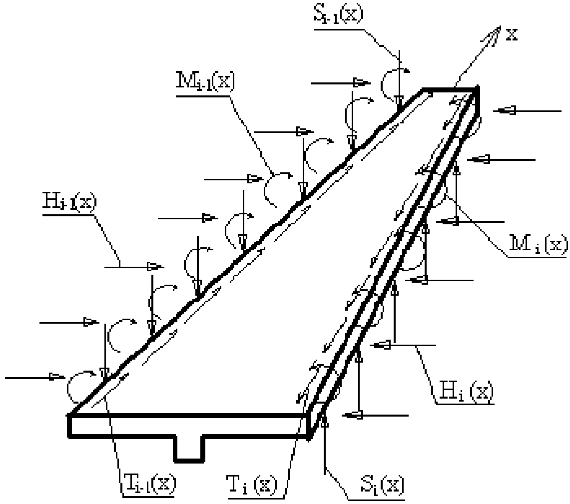


Рис.2. Внутренние усилия в ***i***-том отсеченном тавровом элементе

Если рассмотреть расчет сборного варианта круглого перекрытия постоянной толщины, то по линиям рассечения (швам) будут действовать только вертикальные силы взаимодействия секториальных элементов друг с другом. В этом случае можно пользоваться системой уравнений [1], считая, что жесткости плит $EJ_i$ и $GJ_i$ переменны по длине пролета, т.е. вместо констант $EJ_i$ и $GJ_i$ принимаются функции $EJ_i(x)$ и $GJ_i(x)$.

При выводе разрешающей системы уравнений неизвестные внутренние усилия вдоль линий рассечения определяются с помощью рассмотрения условий совместности кривизн и углов поворота слева и справа от сечения [1]. При этом получается система дифференциальных уравнений, коэффициентами при неизвестных которой являются жесткостные параметры: изгибная и крутильная жесткости ребер; цилиндрическая жесткость полок плитно-ребристой системы. Если в ребрах и полках образуются трещины, то система дифференциальных уравнений будет иметь переменные коэффициенты. Переменными они являются и в случае рассмотрения круглых перекрытий как с трещинами, так и без трещин.

Обстоятельство переменных коэффициентов усложняет расчет и делает практически не возможным решение с помощью разложения неизвестных $Ms(x)$ в ряды Фурье по синусам [1].

Этого можно избежать при использовании способа фиктивных усилий [2]. При этом жесткости ребер на кручение, цилиндрические жесткости полок и расстояния $a$ от осей стержней до линий рассечения считаются условно постоянными по длине ребер (пролету перекрытия).

Рассмотрим для простоты пояснения расчет при изменении жесткости полок и расстояний ***a*** двухребристой системы (это можно считать фрагментом круглого сборного ребристого перекрытия), схема которой приведена на рис. 3.

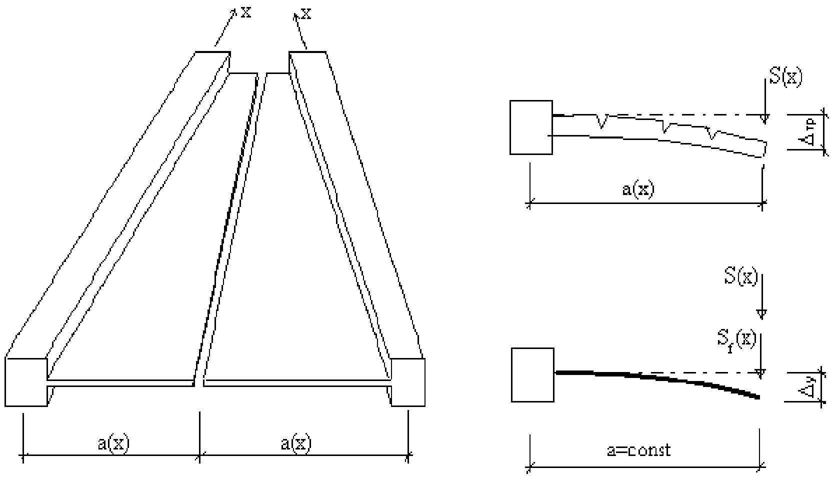


Рис.3. Схема действия усилий в поперечном сечении двухребристой системы

Пусть второе (справа на рисунке) ребро загружено распределенной нагрузкой ***q***.

Кроме подлежащих определению неизвестных ***S(x)*** (или моментов от этих усилий ***Ms(x)***) приложим в месте рассечения фиктивные усилия $\boldsymbol{S_f}$, которые будем учитывать только при определении перемещения от изгиба полок и не будем учитывать при других видах деформаций (изгиб и кручение ребер).

Кривизны слева и справа от сечения будут определяться (индексы ***l*** и ***r*** означают соответственно кривизны слева и справа от сечения) по выражениям, аналогичным [2]:

а) от изгиба ребер:

$$1/\rho_l = Ms/EI_1; \qquad 1/\rho_r = Mq/EI_2 - Ms/EI_2\,, \qquad (1)$$

где ***Mq*** – функция изгибающих моментов от внешней нагрузки ***q***;

б) от кручения ребер:

$$1/\rho_l= -(a^2/GI_1)Ms^{II}; \quad 1/\rho_r=(a^2/GI_2)Ms^{II} ; \tag{2}$$

в) от изгиба полок (в перпендикулярном оси ребер направлении):

$$1/\rho_l=(a^3/3D_1)Ms^{IV}+(a^3/3D_1)S_{f,l}{}^{II}; \quad 1/\rho_r=-(a^3/3D_2)Ms^{IV}-(a^3/3D_2)S_{f,r}{}^{II}. \tag{3}$$

В выражениях (1)-(3) жесткости $\boldsymbol{GI}$ и $\boldsymbol{D}$ считаются постоянными по длине пролета ребер, т.е. не зависят от координаты $\boldsymbol{x}$, но при этом под жесткостями $\boldsymbol{D}$ подразумеваются разные жесткости $\boldsymbol{D_l}$ – слева от сечения и $\boldsymbol{D_r}$ – справа от него.

Условие равенства кривизн $\boldsymbol{1/\rho_l=1/\rho_r}$ после приведения подобных позволяет получить разрешающее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned}(1/EI_1+1/EI_2)Ms-(a^2/GI_1+a^2/GI_2)Ms^{II}+(a^3/3D_1+a^3/3D_2)Ms^{IV}=\\ =(1/EI_2)Mq-(a^3/3D_1)S_{f,l}{}^{II}-(a^3/3D_2)S_{f,r}{}^{II} .\end{aligned} \tag{4}$$

Заметим, что функции фиктивных усилий $\boldsymbol{S_f}$ расположены в правой части уравнения как известные величины.

Так как величины $\boldsymbol{GI, EI, a}$ и $\boldsymbol{D}$ постоянны, то можно решать уравнение с помощью разложения неизвестных $\boldsymbol{Ms}$ в ряды Фурье или каким-либо другим способом решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Алгоритм итерационного расчета с использованием уравнения (4) (или системы уравнений при большем количестве ребер) имеет вид:

- на нулевой итерации из решения уравнения (4) при $\boldsymbol{S_{f,l}=S_{f,r}=0}$ (т.е. отсутствие фиктивных сил) определяется неизвестная функция $\boldsymbol{Ms(x)}$ (а, следовательно, и функция вертикальных усилий $\boldsymbol{S(x)}$, так как $\boldsymbol{S(x)=-Ms^{II}(x)}$);

- пролет плиты (ребра) предварительно разбивается на определенное количество участков длиной $\boldsymbol{\Delta l}$ (вполне достаточно 10 участков). На каждом $\boldsymbol{i}$-том участке определяется суммарная вертикальная сила $\boldsymbol{Q_i}$ от действия усилий $\boldsymbol{S(x)}$ на длине $\boldsymbol{\Delta l}$. От действия сил $\boldsymbol{Q_i}$ по методике СНиП (или любой известной методике определения перемещений элемента с трещинами) определяются перемещения конца консоли (полки) $\boldsymbol{\Delta_{mp}}$ с учетом образования трещин и реального расстояния $\boldsymbol{a(x)}$ (рис. 3). Следует отметить, что можно не делить пролет ребра на определенное количество участков, а рассматривать участки единичной длины, т.е. непосредственно эпюру $\boldsymbol{S(x)}$;

- если перемещения с учетом трещинообразования $\boldsymbol{\Delta_{mp}}$ отличаются от перемещений в предположении упругой работы $\boldsymbol{\Delta_y}$ и постоянной величины $\boldsymbol{a=const}$ (рис. 3), то на этом участке прикладываются фиктивные силы $\boldsymbol{S_f}$, величина которых равна нагрузке, от которой конец условно упругой (с начальной жесткостью) консоли полки с условно постоянной величиной $\boldsymbol{a=const}$ перемещается на величину, равную разнице $\boldsymbol{\Delta_{mp}-\Delta_y}$. При этом могут быть участки как без фиктивных сил, так и с наличием таковых. Другими словами эпюра $S_f(x)$ является неравномерной и может быть в том числе скачкообразной;

- вновь решается дифференциальное уравнение (4), теперь уже при наличии в правой части функций фиктивных усилий $S_f$. Определяется $S(x)$ и процесс повторяется до тех пор, пока величины $S(x)$ на последней итерации не будут отличаться от $S(x)$ на предыдущей итерации на заведомо заданную величину погрешности.

Заметим, что фиктивные силы участвуют лишь в выражениях изгиба полок (выражения (3)), так как они призваны добавить перемещения полок от уменьшения их жесткости в результате трещинообразования.

Если трещины образуются в ребрах, то в результате их образования и изменения крутильной жесткости ребра мы можем получить на рассматриваемой итерации перемещения от действия сил $S(x)$, а затем приложить фиктивные силы, которые бы создали перемещения конца консоли полки, равные перемещениям от кручения ребра с трещинами. Отметим важный факт, что и в этом случае фиктивные силы будут участвовать в выражениях перемещений от изгиба полок, а не от кручения ребер. С точки зрения решения задачи нам важно, чтобы рассматриваемая точка переместилась на величину, равную реальному перемещению будь то от кручения ребра с трещинами или от изгиба полки, т.к. именно от податливости этой точки будет зависеть величина искомого внутреннего усилия $S(x)$. Но величину перемещения рассматриваемой точки для подбора фиктивных усилий будет, конечно же, определять факт образования трещин в полке или ребре, а также изменяющаяся ширина $a(x)$.

Если трещины образовываются и в полке, и в ребре, то величина фиктивного усилий $S_f(x)$ подбирается из условия равенства перемещения от действия этой силы сумме перемещений полки и ребра с трещинами.

Преимущества такого способа учета трещинообразования и переменной величины $a(x)$ очевидны. Уравнения типа (4) являются дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами и решаются, как известно, значительно проще. При этом можно получить замкнутое решение, а также решение с помощью разложения неизвестных в ряды Фурье.

Специфичность составления системы уравнений для круглых плит состоит в том, что ввиду замкнутой схемы плиты при рассмотрении последнего сечения $i+1$-й стержень является не $n+1$-м (см. рис.1), а первым. Т.е. всегда рассматривается $i$-тое сечение, слева от которого находится $i$-тый стержень, справа – $i+1$-й стержень, а при рассмотрении последнего (и одновременно нулевого) сечения слева будет находиться последний элемент, а справа – первый. При этом количество сечений (а, следовательно, и количество разрешающих уравнений) будет на одно меньше, чем при расчете прямоугольных перекрытий по методике [1]. Таким образом, и задача определения усилий в круглых перекрытиях также решается по общей методике [1,2].

Если перекрытие ребристое монолитное или сборное ребристое, то задача решается аналогично решениям [2] с вышеприведенными изменениями. Т.е. все способы расчета сплошных, ребристых монолитных, ребристых сборных плит, приведенные для расчета прямоугольных перекрытий, распространяются и на круглые в плане перекрытия при учете вышеприведенных рекомендаций.

В этом заключается одно из серьезных преимуществ предложенного в настоящей статье метода расчета по сравнению с приближенными аппроксимационными методами, в которых расчет при изменении жесткости и геометрических размеров по длине отсеченного элемента весьма проблематичен.

**Выводы и перспективы исследований.**

Предложенный метод расчета круглых перекрытий позволяет рассчитывать их рассечением на секторальные линейные конечные элементы с изменяющимися геометрическими характеристиками при условно постоянной их жесткости.

Основной задачей является определение неизвестных усилий по линиям рассечения круглого перекрытия на линейные секторальные конечные элементы. После этого каждый элемент рассматривается как балка, нагруженная внешней нагрузкой, приложенной непосредственно на этот элемент, и определенными из решения основной задачи внутренними усилиями по линиям рассечения. Использование линейных конечных элементов удобно тем, что каждый такой элемент не зависимо от армирования его ребер и полок может рассматриваться как железобетонная балка, работающая на изгиб с кручением. Работа таких балок достаточно подробно исследована учеными. Поэтому описание напряженно-деформированного состояния такого элемента не представляет больших трудностей, что делает предложенный метод весьма удобным в практических расчетах.

Перспективой исследования в данном направлении является распространение метода на расчет крышек и оснований круглых резервуаров, которые должны рассчитываться как плиты, лежащие на упругом основании, а также учет всех силовых факторов в сечении (рис. 2) при рассмотрении общего случая расчета.

1. Азизов Т.Н. Теория пространственной работы перекрытий. – Киев: Науковий світ, 2001. – 276 с. 2. Азизов Т.Н. Пространственная работа железобетонных перекрытий. Теория и методы расчета: Дисс. … доктора техн. наук: 05.23.01 / Полтавский национальный технический университет. – Полтава, 2006. – 406 с. 3. Дроздов П.Ф. Расчёт сборных перекрытий, опирающихся на внутренние и наружную стены // Сборник трудов НИИСК. «Строительные конструкции», вып. XII. – Киев, 1969. – С.

120-129. 4. Еременко С.Ю. Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. – Харьков: Изд-во «Основа» при Харьковском университете, 1991. – 272 с.
5. Железобетонные конструкции: Спец. курс. Учеб. пособие для вузов / В.Н. Байков, П.Ф.Дроздов, И.А.Трифонов и др.; Под ред. В.Н. Байкова. – М.: Стройиздат, 1981. – 767 с. 6. Семченков А.С. Пространственно–деформирующиеся железобетонные диски перекрытий многоэтажных зданий. Эксперементальные исследования, практические методы расчета и проектирование: Дис. ... докт. техн. наук: 05.23.01. – М., 1991. – 703 с. 7. Трифонов И.А, Складнев Н.Н. Практический метод расчёта распределения рядовой сосредоточенной нагрузки в пролётных строениях балочных мостов // Известия вузов. Сер. Строительство и архитектура. – 1968. – №10. – С. 29-32. 8. Улицкий Б.Е., Потапкин А.А, Руденко В.И., Сахарова И.Д., Егорушкин Ю.М. Пространственные расчёты мостов. – М.: Транспорт, 1967. – 404 с.