

УДК 539.375

**Ю. В. Діхтяренко**

Уманський державний педагогічний університет

**ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ ПЛАСТИЧНОЇ ЗОНИ В КІНЦІ  
ТРІЩИНИ НОРМАЛЬНОГО ВІДРИВУ, ЩО ВИХОДИТЬ НА  
НЕГЛАДКУ МЕЖУ ПОДІЛУ СЕРЕДОВИЩ**

Діхтяренко Ю. В. Дослідження моделі пластичної зони в кінці тріщини нормального відриву, що виходить на негладку межу поділу середовищ. Методом Вінера-Хопфа в умовах плоскої деформації виконано розрахунок початкової пластичної зони в кінці тріщини нормального відриву, яка виходить на негладку межу поділу двох різних пружних середовищ в її кутовій точці. Для знаходження орієнтації пластичної зони використовується критерій максимуму швидкості дисипації енергії в ній. Отримано аналітичні вирази для довжини пластичної зони.

**Ключові слова:** пластична зона, кутова точка межі поділу середовищ, тріщина нормального відриву.

Дихтяренко Ю. В. Исследование модели пластической зоны в конце трещины нормального отрыва, выходящей на негладкую границу раздела упругих сред. Методом Винера-Хопфа в условиях плоской деформации выполнен расчет начальной пластической зоны в конце трещины нормального отрыва, выходящей на негладкую границу раздела двух различных упругих сред в ее угловой точке. Для определения ориентации пластической зоны используется критерий максимума скорости диссипации энергии в ней. Получены аналитические выражения для длин пластической зоны.

**Ключевые слова:** пластическая зона, угловая точка границы раздела сред, трещина нормального отрыва.

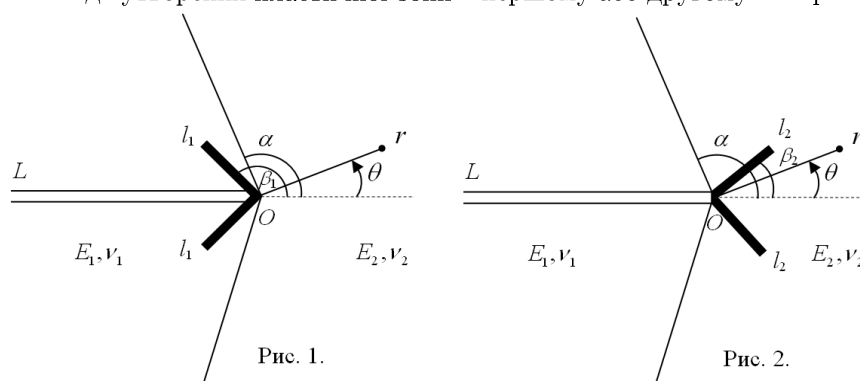
Dikhtiarenko Yu. V. Research of the model of the plastic zone at the tip of the normal bond-failure crack, out coming onto broken interface elastic media. A static problem on the calculation of the initial plastic zone at the tip of the normal bond-failure crack, out coming onto broken interface dissimilar elastic media in the corner point by Wiener-Hopf's method are done. Criterion of maximum energy dissipation rate is used to find the orientation of the plastic zone. An analytical expressions for the length of the plastic zone is obtained.

**Key words:** plastic zone, corner point of a media interface, normal bond-failure crack.

**Вступ.** Тріщини, включення та інші гострокінцеві дефекти є концентраторами напружень зі степеневу особливістю, тобто при навантаженні тіла в їх околі виникає висока інтенсивність напружень, яка приводить до утворення зони передруйнування. В залежності від властивостей матеріалу та умов навантаження зона передруйнування, яка утворюється в околі вершини тріщини, може бути крихкою (утворена у пружно-крихкому матеріалі і переважаючи деформації у ній носять характер відриву) або пластичною (утворена в пружно-пластичному матеріалі, і переважаючи деформації у ній носять характер зсуву). Проте аналітичне

розв'язання відповідної задачі механіки руйнування є досить складною математичною проблемою, тому використовуються різноманітні їх моделі. Однією з таких моделей є модель Леонова–Панасюка–Дагдейла, яка представляє зону лінією розриву переміщення, на якій в залежності від властивостей матеріалу задані певні умови його переходу у переддруйнівний стан. В рамках даної моделі виконана велика кількість розрахунків зон переддруйнування в однорідних тілах [1-3]. Розрахунки зон переддруйнування в кусково-однорідних тілах, як правило, стосуються тріщин, розташованих на плоскій [4-8] або ламаній [9-11] межі поділу різних середовищ. Проте, не менш важливе значення для механіки композитних матеріалів, клеєних, зварних з'єднань мають також задачі про розрахунок зон переддруйнування в кінці тріщин, що виходять на межу поділу середовищ [12-15]. Зокрема в [12], здійснено розрахунок пластичної зони у кінці тріщини нормального відриву в з'єднувальному матеріалі на межі поділу середовищ. В даній роботі розглядається симетрична задача про розрахунок пластичної зони у кінці тріщини нормального відриву, яка поширюється під кутом до лінії, на якій розташована тріщина в одному з матеріалів з'єднання.

**1. Постановка задачі.** В умовах плоскої деформації для кусково-однорідного ізотропного тіла з негладкою межею поділу середовищ розглядається задача про розрахунок початкової пластичної зони, яка утворюється в кінці тріщини нормального відриву, що виходить з кутової точки межі поділу в матеріал з модулем Юнга  $E_1$  і коефіцієнтом Пуассона  $\nu_1$ . Розрізнятимемо випадки утворення зони у матеріалі з пружними сталими  $E_1$  і  $\nu_1$  (Рис. 1) та у матеріалі з пружними сталими  $E_2$  і  $\nu_2$  (Рис. 2). У відповідності з гіпотезою локалізації [16-17] початкова зона зосереджена у тонкому шарі матеріалу, тому моделюватимемо її двома нахиленими під кутом  $\beta_i$  до продовження тріщини лініями розриву дотичного переміщення, на яких дотичне напруження дорівнює границі текучості матеріалу  $\tau_i$ . Тут і нижче індексом  $i$  ( $i = 1, 2$ ) будемо позначати величини, які відносяться до утворення пластичної зони в першому або другому матеріалі.



На початковому етапі розвитку розміри пластичної зони значно менші від довжини  $L$  тріщини і всіх інших суттєвих розмірів тіла, тому тіло будемо вважати кусково-однорідною площиною з межею поділу середовищ у формі сторін кута, з вершини якого вздовж бісектриси виходить півнескінчена прямолінійна тріщина, а під кутом  $\beta_i$  дві пластичні лінії розриву. Симетрія задачі дозволяє обмежитись верхньою частиною кусково-однорідної площини і виконати розра-

хунок лише однієї смуги в області  $0 \leq \theta \leq \pi$ , тому приходимо до двох однотипних статичних крайових задач теорії пружності з граничними умовами:

$$\theta = \pi : \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0; \theta = 0 : \tau_{r\theta} = 0, \quad u_\theta = 0;$$

$$\theta = \alpha : \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_r \rangle = \langle u_\theta \rangle = 0;$$

$$\theta = \beta_i : \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = 0; \quad (1)$$

$$\theta = \beta_i, \quad r < l_i : \tau_{r\theta} = \pm \tau_i;$$

$$\theta = \beta_i, \quad r > l_i : \langle u_r \rangle = 0; \quad (2)$$

$$\theta = \beta_i, \quad r \rightarrow \infty, \quad \tau_{r\theta} = C F_i(\beta_i) r^\lambda + o(1/r), \quad (3)$$

де  $0 \leq 2\alpha \leq 2\pi$  — кут розхилу межі поділу середовищ;  $\langle f \rangle$  — стрибок величини  $f$ ;  $C$  — стала, яка характеризує інтенсивність зовнішнього силового поля і вважається заданою за умовою задачі;

$$F_i(\beta) = \begin{cases} F_1(\beta), & \alpha \leq \theta \leq \pi \\ F_2(\beta), & 0 \leq \theta \leq \alpha \end{cases}$$

$$F_1(\beta) = \frac{(2\pi)^\lambda}{4\lambda\varphi_2} \{(\lambda + 2) \varphi_1 \sin(\lambda + 2)(\pi - \beta) - \lambda \varphi_1 \sin \lambda(\pi - \beta) -$$

$$- \lambda \varphi_2 \cos(\lambda + 2)(\pi - \beta) + \lambda \varphi_2 \cos \lambda(\pi - \beta)\},$$

$$F_2(\beta) = \frac{-(2\pi)^\lambda}{4\lambda\varphi_2 \cos \lambda\alpha} \{[(\lambda + 2) \psi_1 \varphi_1 + \lambda \psi_2 \varphi_2] \cos \lambda\alpha \sin(\lambda + 2)\beta +$$

$$+ \lambda(\psi_3 \varphi_1 + \psi_4 \varphi_2) \sin \lambda\beta\},$$

$$\varphi = -[(\lambda + 1) \sin 2\alpha + \sin 2(\lambda + 1)\alpha],$$

$$\varphi_1 = \varphi \{(e - 1) \lambda \sin(\lambda + 2)(\pi - \alpha) - [(e - 1)(\lambda + 2) - e(1 + \kappa_2) + (1 + \kappa_1)] \sin \lambda(\pi - \alpha)\} - 2e(1 + \kappa_2) \lambda \cos \pi \lambda \sin(\lambda + 1)\alpha \sin \alpha,$$

$$\varphi_2 = \varphi \{[(e - 1)(\lambda + 2) - e(1 + \kappa_2) + (1 + \kappa_1)] \cos \lambda(\pi - \alpha) - (e - 1)(\lambda + 2) \cos(\lambda + 2)(\pi - \alpha)\} - 2e(1 + \kappa_2) \sin \pi \lambda \times \\ \times (\lambda \sin(\lambda + 1)\alpha \sin \alpha + \cos \lambda\alpha),$$

$$\psi_1 = -2\lambda \cos(\pi\lambda - \alpha) \sin \alpha + 2 \sin(\lambda + 2)(\pi - \alpha) \cos \lambda\alpha,$$

$$\psi_2 = -2\lambda \sin(\pi\lambda - \alpha) \sin \alpha + 2 \cos \lambda\pi - 2 \cos(\lambda + 2)(\pi - \alpha) \cos \lambda\alpha,$$

$$\psi_3 = -\varphi \cos \lambda (\pi - \alpha) - 2 \sin \pi \lambda (\lambda \sin (\lambda + 1) \alpha \sin \alpha + \cos \lambda \alpha),$$

$$\psi_4 = -\varphi \sin \lambda (\pi - \alpha) + 2 \lambda \cos \pi \lambda \sin (\lambda + 1) \alpha \sin \alpha,$$

$$\kappa_i = 3 - 4\nu_i, e = \frac{E_1 1 + \nu_2}{E_2 1 + \nu_1},$$

$\lambda$  — єдиний на інтервалі  $(-1, 0)$  корінь характеристичного рівняння аналогічної задачі без пластичної зони [8]:

$$D_0(-\lambda - 1) = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} D_0(p) = & 4e^2 [\kappa_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha] \cdot [p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p (\pi - \alpha)] + \\ & + e \{ (1 + \kappa_1) (1 + \kappa_2) \sin 2p\pi - 4 [\kappa_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha] [p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p (\pi - \alpha)] - \\ & - (p \sin 2\alpha + \sin 2p\alpha) \{ (1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2) - 4 (p^2 \sin^2 \alpha + \kappa_1 \sin^2 p (\pi - \alpha)) \} \} + \\ & + (p \sin 2\alpha + \sin 2p\alpha) \{ (1 + \kappa_1)^2 - 4 [p^2 \sin^2 \alpha + \kappa_1 \sin^2 p (\pi - \alpha)] \}. \end{aligned}$$

В кінці пластичної смуги для напружень і зміщень реалізується асимптотика, яка являє собою асимптотично найбільший розв'язок однорідної задачі теорії пружності біля вершини півнескінченної прямої лінії розриву дотичного переміщення в однорідному матеріалі. Зокрема, мають місце асимптотики

$$\theta = \beta_i, \quad r \rightarrow l_i + 0: \quad \tau_{r\theta} \sim \frac{K_i}{\sqrt{2\pi(r - l_i)}}; \quad (5)$$

$$\theta = \beta_i, \quad r \rightarrow l_i - 0: \quad \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \sim -\frac{4(1 - \nu_i^2)}{E_i} \frac{K_i}{\sqrt{2\pi(l_i - r)}},$$

де  $K_i$  — коефіцієнт інтенсивності напружень в кінці лінії розриву, який повинен бути знайденим в ході розв'язання задачі.

Розв'язок задачі будемо шукати у вигляді суми розв'язків двох наступних задач. Перша задача відрізняється від вихідної тим, що замість першої з умов (2) використовується умова:

$$\theta = \beta_i, \quad r \leq l_i: \quad \tau_{r\theta} = \tau_i - CF_i(\lambda, \beta_i) r^\lambda, \quad (6)$$

а на нескінченності напруження спадають швидше, ніж  $\frac{1}{r}$ . Друга задача — аналогічна задача без пластичної зони. Оскільки цей розв'язок відомий [8], достатньо розв'язати першу задачу.

**2. Розрахунок пластичної зони методом Вінера-Хопфа.** Застосувавши до рівнянь рівноваги, умови сумісності деформацій, закону Гука і граничних умов (1) інтегральне перетворення Мелліна [18]  $f^*(p, \theta) = \int_0^\infty f(r, \theta) r^p dr$ , де  $f(r, \theta)$  — довільна компонента тензора напружень або вектора переміщення,  $p$  — комплексний параметр перетворення, та використовуючи другу умову (2) і умову (6), отримаємо рівняння Вінера-Хопфа першої задачі:

$$\Phi_i^+(p, \beta_i) + \frac{\tau_i}{p + 1} - \frac{CF_i(\beta_i) l_i^\lambda}{p + \lambda + 1} = -tgp\pi G_i(p, \beta_i) \Phi_i^-(p, \beta_i) \quad (-\delta_2 < \text{Re } p < \delta_1), \quad (7)$$

$$\Phi_i^+(p, \beta) = \int_1^\infty \tau_{r\theta}(\rho l_i, \beta) \rho^p d\rho, \quad \Phi_i^-(p, \beta) = \frac{E_i}{4(1 - \nu_i^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \Big|_{\substack{r = \rho l_i \\ \theta = \beta}} \rho^p d\rho,$$

$$G_i(p, \beta) = \frac{D_i(p, \beta) \cos p\pi}{D_0(p) \sin p\pi},$$

$$D_1(p, \beta) = 4(e-1)(\Delta_1\Delta_4 - \Delta_2\Delta_5)[e(1+\kappa_2)\sin 2p\alpha - (e-1)\Delta_6] - \\ - 4(e-1)(1+\kappa_1)\Delta_6[\sin 2p(\beta-\alpha)\Delta_1 + \sin^2 p(\beta-\alpha)\Delta_5] + \\ + e(1+\kappa_1)(1+\kappa_2)[4\sin(p-1)\beta\sin(p+1)\beta\Delta_1 + (\Delta_6 - \Delta_3)\Delta_5] - \\ - (1+\kappa_1)^2\Delta_5\Delta_6,$$

$$D_2(p, \beta) = e(1+\kappa_1)(1+\kappa_2)[\Delta_3(\Delta_4 - \Delta_5) + 4\sin(p-1)\beta\sin(p+1)\beta \times \\ \times (\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_7)] + [4\sin(p-1)\beta\sin(p+1)\beta\Delta_2 - \Delta_3\Delta_4] \left\{ (1+\kappa_1)^2 + \right. \\ \left. + 4(e-1)(1+\kappa_1)\sin^2 p(\pi-\alpha) - 4(e-1)^2\Delta_7 \right\} + 4e^2(1+\kappa_2)^2 \times \\ \times \sin(p-1)\beta\sin(p+1)\beta\Delta_7 + 4(e-1)e(1+\kappa_2)\Delta_7\Delta_8,$$

$$\Delta_1 = p^2 \sin^2 \beta - \sin^2 p(\pi - \beta), \quad \Delta_2 = p^2 \sin^2(\beta - \alpha) - \sin^2 p(\beta - \alpha),$$

$$\Delta_3 = p \sin 2\beta + \sin 2p\beta, \quad \Delta_4 = p \sin 2(\beta - \alpha) + \sin 2p(\beta - \alpha),$$

$$\Delta_5 = p \sin 2\beta - \sin 2p(\pi - \beta), \quad \Delta_6 = p \sin 2\alpha + \sin 2p\alpha,$$

$$\Delta_7 = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p(\pi - \alpha),$$

$$\Delta_8 = p \sin 2\beta \sin 2p(\alpha - \beta) - 2 \sin^2 p(\alpha - \beta) \cos 2\beta + 2 \sin p(\alpha + \beta) \sin p(\alpha - \beta).$$

Функція  $G_i(it, \beta)$  — парна, додатна, прямує до 1 при  $t \rightarrow \infty$ , тому можлива її факторизація за формулою Гахова [19]:

$$G_i(p, \beta) = \frac{G_i^+(p, \beta)}{G_i^-(p, \beta)} \quad (Re p = 0), \\ \exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G_i(z, \beta)}{z - p} dz \right] = \begin{cases} G_i^+(p, \beta), & Re p < 0 \\ G_i^-(p, \beta), & Re p > 0 \end{cases}. \quad (8)$$

Крім того, має місце факторизація:

$$tgp\pi = \frac{p}{K^+(p)K^-(p)}, \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(\frac{1}{2} \mp p)},$$

де  $\Gamma(p)$  — гамма-функція Ейлера. Тоді рівняння Вінера–Хопфа (7) можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} & \frac{K^+(p) \Phi_i^+(p, \beta_i)}{pG_i^+(p, \beta_i)} + \frac{\tau_i}{p+1} \left[ \frac{K^+(p)}{pG_i^+(p, \beta_i)} + \frac{K^+(-1)}{G_i^+(-1, \beta_i)} \right] - \\ & - \frac{CF_i(\beta_i) l_i^\lambda}{p+\lambda+1} \left[ \frac{K^+(p)}{pG_i^+(p, \beta_i)} + \frac{K^+(-\lambda-1)}{(\lambda+1)G_i^+(-\lambda-1, \beta_i)} \right] = \\ & = - \frac{\Phi_i^-(p, \beta_i)}{K_i^-(p)G_i^-(p, \beta_i)} - \frac{CF_i(\beta_i) l_i^\lambda K^+(-\lambda-1)}{(p+\lambda+1)(\lambda+1)G_i^+(-\lambda-1, \beta_i)} + \\ & + \frac{\tau_i K^+(-1)}{(p+1)G_i^+(-1, \beta_i)} \quad (Re p = 0). \end{aligned} \quad (9)$$

Ліва частина рівняння (9) аналітична в півплощині  $Re p < 0$ , а права — в півплощині  $Re p > 0$ . Отже, у відповідності з принципом аналітичного продовження, повинна існувати єдина функція, аналітична у всій комплексній площині, яка дорівнює лівій і правій частині цього рівняння у відповідних півплощинах.

Враховуючи асимптотики (5), за допомогою теореми абелевого типу отримуємо [20]:

$$\Phi_i^+(p, \beta_i) \sim \frac{K_i}{\sqrt{-2pl_i}}, \quad \Phi_i^-(p, \beta_i) \sim -\frac{K_i}{\sqrt{2pl_i}} \quad (p \rightarrow \infty), \quad (10)$$

звідки випливає, що функції у лівій і правій частинах рівняння (9) на нескінченності прямують до нуля. Тому, відповідно до теореми Ліувілля, єдина аналітична функція тотожно дорівнює нулю у всій комплексній площині  $p$ . Звідси отримуємо точний розв'язок рівняння Вінера–Хопфа:

$$\begin{aligned} \Phi_i^+(p, \beta_i) &= -\frac{pG_i^+(p, \beta_i)}{K^+(p)} \left\{ \frac{\tau_i}{p+1} \left[ \frac{K^+(p)}{pG_i^+(p, \beta_i)} + \frac{K^+(-1)}{G_i^+(-1, \beta_i)} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{CF_i(\beta_i) l_i^\lambda}{p+\lambda+1} \left[ \frac{K^+(p)}{pG_i^+(p, \beta_i)} + \frac{K^+(-\lambda-1)}{(\lambda+1)G_i^+(-\lambda-1, \beta_i)} \right] \right\} \quad (Re p < 0), \\ \Phi_i^-(p, \beta_i) &= K^-(p) G_i^-(p, \beta_i) \left\{ \frac{\tau_i K^+(-1)}{(p+1)G_i^+(-1, \beta_i)} - \right. \\ & \left. - \frac{CF_i(\beta_i) l_i^\lambda K^+(-\lambda-1)}{(\lambda+1)(p+\lambda+1)G_i^+(-\lambda-1, \beta_i)} \right\} \quad (Re p > 0). \end{aligned} \quad (11)$$

У відповідності з отриманим розв'язком (11) для рівняння Вінера–Хопфа має місце асимптотика

$$\Phi_i^-(p, \beta_i) \sim \frac{1}{\sqrt{p}} \left\{ \frac{\tau_i K^+(-1)}{G_i^+(-1, \beta_i)} - \frac{CF_i(\beta_i) l_i^\lambda K^+(-\lambda-1)}{(\lambda+1)G_i^+(-\lambda-1, \beta_i)} \right\} \quad (p \rightarrow \infty). \quad (12)$$

Порівнюючи (12) і (10), знаходимо коефіцієнт інтенсивності напружень в кінці пластичної смуги:

$$K_i = -\sqrt{2l_i} \left\{ \frac{\tau_i K^+(-1)}{G_i^+(-1, \beta_i)} - \frac{CF_i(\beta_i) l_i^\lambda K^+(-\lambda-1)}{(\lambda+1)G_i^+(-\lambda-1, \beta_i)} \right\}. \quad (13)$$

Приймаючи умову обмеженості напружень в кінці лінії розриву, покладемо  $K_i = 0$  і отримаємо з (13) вираз для визначення її довжини:

$$l_i = \left( \frac{|C|}{\tau_i} \right)^{-\frac{1}{\lambda}} R_i(\beta_i), \quad (14)$$

$$R_i(\beta_i) = \left[ \frac{\sqrt{\pi} |F_i(\beta_i)| \Gamma(\lambda + 1) I_i(0, \beta_i)}{2\Gamma(1, 5 + \lambda) I_i(\lambda, \beta_i)} \right]^{-\frac{1}{\lambda}},$$

$$I_i = \exp \left[ \frac{\lambda + 1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln G_i(it, \beta_i)}{t^2 + (\lambda + 1)^2} dt \right].$$

Згідно з формулою (14) довжина пластичної зони нелінійно зростає зі збільшенням зовнішнього навантаження, яке входить у рівняння для довжини через множник  $C$ . Крім того, довжина зони тим більша, чим менша границя текучості матеріалу  $\tau_i$ .

В якості критерію вибору напрямку поширення пластичної смуги використаємо умову максимуму швидкості дисипації енергії в смугі [21]. Враховуючи знайдений вище розв'язок рівняння Вінера-Хопфа (11), умову  $K_i = 0$  і формули (14), знаходимо потенціальну енергію, накопичену у смугі:

$$W_i = - \frac{4\tau_i^2(1 - \nu_i^2)\lambda}{\pi E_i(2 + \lambda)} \left( \frac{|C| \sqrt{\pi} \Gamma(\lambda + 1)}{2\tau_i \Gamma(1, 5 + \lambda)} \right)^{-\frac{2}{\lambda}} w_i(\beta_i). \quad (15)$$

$$w_i(\beta) = \left[ \frac{|F_i(\beta)| I_i(0, \beta)^{1+\lambda}}{I_i(\lambda, \beta)} \right]^{-\frac{2}{\lambda}}.$$

Пов'язуючи залежність потенціальної енергії від часу зі зміною навантаження, що входить у множник  $C$ , отримуємо швидкість дисипації енергії в пластичній смугі:

$$\frac{dW_i}{dt} = \frac{8\tau_i^2(1 - \nu_i^2)}{\pi E_i(2 + \lambda)} \left( \frac{|C| \sqrt{\pi} \Gamma(\lambda + 1)}{2\tau_i \Gamma(1, 5 + \lambda)} \right)^{-\frac{2}{\lambda}} w_i(\beta_i) \frac{1}{C} \frac{dC}{dt}. \quad (16)$$

Припускаючи, що  $\frac{1}{C} \frac{dC}{dt} > 0$  ( $C$  – додатна зростаюча або від’ємна спадаюча функція часу), приходимо до умови визначення очікуваного напрямку поширення пластичної смуги  $w_i(\beta_i) = \max$ .

Виконавши зворотне перетворення Мелліна [18] трансформант напружень із залученням теореми про лишки, можна визначити головні члени розвинень напружень у асимптотичні ряди в околі вершини тріщини після утворення пластичної зони. Зокрема, формула для нормального напруження має наступну структуру:

$$\sigma_\theta(r, \theta) = C_i(\alpha, e_0, \nu_1, \nu_2, L, \tau, C) f_i(\theta, \alpha, e_0, \nu_1, \nu_2) r^{\lambda_i} + \tau \varphi_i(\theta, \alpha, e_0, \nu_1, \nu_2, C) + \psi_i(r, \theta, \alpha, e_0, \nu_1, \nu_2, L, \tau, C), \quad (17)$$

де  $e_0 = E_1/E_2$ ;  $C_i, f_i, \varphi_i$  – відомі функції;  $\psi_i$  – функція, що наближається до нуля при  $r \rightarrow 0$ ;  $\lambda_i$  – корені характеристичного рівняння задачі

$$D_i(-\lambda_i - 1, \beta_i) = 0, \quad (18)$$

що лежать у смугі  $-1 < \lambda_i < 0$ . Відмінність зазначених коренів рівняння (18) від коренів рівняння (4) характеризує зміну характеру напружено-деформованого стану в околі кутової точки внаслідок утворення початкової пластичної зони.

**3. Аналіз отриманих результатів.** Використовуючи критерій максимуму швидкості дисипації енергії для визначення кута нахилу пластичної зони, порівнюємо їх значення для смуг у кожному з матеріалів з’єднання. Відношення цих швидкостей дисипації енергій, а також довжин пластичних смуг дорівнюють

$$\frac{dW_1/dt}{dW_2/dt} = \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{-2(\lambda+1)/\lambda} Z, \quad \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{-1/\lambda} X, \quad (19)$$

$$Z = \frac{1 - \nu_1}{e(1 - \nu_2)} \left[ \frac{|F_1(\beta_1)| I_1(0, \beta_1)^{1+\lambda} I_2(\lambda, \beta_2)}{|F_2(\beta_2)| I_2(0, \beta_2)^{1+\lambda} I_1(\lambda, \beta_1)} \right]^{-\frac{2}{\lambda}},$$

$$X = \left[ \frac{|F_1(\beta_1)| I_1(0, \beta_1) I_2(\lambda, \beta_2)}{|F_2(\beta_2)| I_2(0, \beta_2) I_1(\lambda, \beta_1)} \right]^{-\frac{1}{\lambda}}.$$

В таблиці 1 представлені результати числових розрахунків залежності від кута розхилу межі поділу середовищ  $2\alpha$  кутів нахилу пластичних смуг в кожному з матеріалів, а також множників  $X$  і  $Z$ , які визначають відношення довжин і швидкостей дисипації енергій. Розрахунки виконані при відношеннях модулів Юнга середовищ  $\frac{E_1}{E_2} = 0,2$  (ліва частина таблиці) та  $\frac{E_1}{E_2} = 5$  (права частина таблиці) і однакових значеннях їхніх коефіцієнтів Пуассона  $\nu_1 = \nu_2 = 0,25$ .



Таблиця 1

$2\alpha^\circ$	$\beta_1^\circ$	$\beta_2^\circ$	$X$	$Z$	$\beta_1^\circ$	$\beta_2^\circ$	$X$	$Z$
20	99,1	10	7,336	78,096	69,4	10	5,667	6,045
40	110,6	20	3,621	23,088	61,5	20	1,988	1,345
60	114,5	30	4,945	44,681	30	30	1,022	0,999
80	115,3	40	16,736	504,195	40	40	1,020	1,000
100	115,6	50	344,265	$4,087 \cdot 10^9$	50	50	1,021	1,000
120	116,1	60	115,535	$2,225 \cdot 10^4$	60	60	1,022	0,999
140	116,8	70	12,644	$2,54 \cdot 10^2$	70	67,1	1,072	0,996
160	117,5	80	4,146	26,202	80	70,6	1,104	0,958
180	117,6	65,1	0,854	3,125	90	73,9	1,075	0,877
200	115,9	61,2	0,602	0,128	100	77	0,998	0,747
220	110	61,6	0,053	0,011	110	80	0,870	0,574
240	120	63,9	0,024	0,002	120	83	0,715	0,0387
260	130	66,7	0,011	$4,869 \cdot 10^{-4}$	130	85,8	0,554	0,228
280	140	69,5	$4,7 \cdot 10^{-3}$	$9,016 \cdot 10^{-5}$	140	87,7	0,402	0,117
300	150	72,1	$1,55 \cdot 10^{-3}$	$1,063 \cdot 10^{-5}$	150	87,4	0,250	0,045
320	160	74,1	$3,23 \cdot 10^{-4}$	$5,463 \cdot 10^{-7}$	160	83,5	0,097	$7,085 \cdot 10^{-3}$
340	170	75,4	$2,19 \cdot 10^{-5}$	$3,811 \cdot 10^{-9}$	170	78,2	0,010	$8,903 \cdot 10^{-5}$

Аналіз приведених в таблиці 1 результатів розрахунків показує, що при рівності границь текучості з'єднаних матеріалів ( $\tau_1 = \tau_2$ ) у випадку  $E_1 < E_2$  і кутах розхилу межі поділу середовищ  $2\alpha \leq 180^\circ$  маємо  $dW_1/dt > dW_2/dt$ , що у відповідності з прийнятим енергетичним критерієм припускає утворення двох симетричних бокових пластичних смуг в першому матеріалі, тоді як при кутах розхилу  $180^\circ < 2\alpha < 340^\circ$  маємо  $dW_1/dt < dW_2/dt$ , тому перевагу слід надати утворенню двох бокових смуг у другому матеріалі.

З правої частини таблиці випливає, що при  $E_1 > E_2$  і однакових значеннях границь текучості з'єднаних матеріалів ( $\tau_1 = \tau_2$ ) при кутах розхилу  $2\alpha \leq 40^\circ$  маємо  $dW_1/dt > dW_2/dt$ , тобто дві симетричні пластичні смуги утворюються в першому матеріалі. При кутах розхилу від  $\approx 60^\circ$  до деякого  $2\alpha_1 \approx 120^\circ$ , який визначається з умови  $dW_1/dt > dW_2/dt$ , поширення пластичної смуги буде відбуватись вздовж межі поділу середовищ у першому або другому матеріалі ( $\beta_1 = \beta_2 = \alpha$ ) в залежності від значень границь текучості з'єднаних матеріалів. При кутах  $2\alpha_1 > 120^\circ$  маємо  $dW_1/dt < dW_2/dt$ , тому передбачається утворення двох симетричних бокових смуг у другому матеріалі.

На рис. 3 представлені результати числових розрахунків залежності показників сингулярності напружень від кута розхилу межі поділу середовищ  $2\alpha$  при відсутності пластичної зони ( $\lambda$ ) та після утворення пластичної зони в першому матеріалі ( $\lambda_1$ ) і після утворення пластичної зони у другому матеріалі ( $\lambda_2$ ). Порівняння коренів  $\lambda$  характеристичного рівняння (4) задачі без пластичної зони і  $\lambda_i$  характеристичних рівнянь (18) після утворення зон в одному з матеріалів вказує на послаблення концентрації напружень в околі вершини тріщини ( $\lambda_i > \lambda$ ), за винятком певних параметрів, при яких, як показав попередній аналіз, утворення пластичної зони у відповідному матеріалі мало ймовірно. Збереження концентрації в околі вершини тріщини означає, що розвиток пластичної зони в околі кутової точки буде продовжуватись шляхом збільшення геометричних розмірів

початкової зони при збільшенні навантаження та появою нових пластичних зон або зон крихкого передруйнування (process zone), які можуть бути розраховані аналогічним способом. Разом з тим при певних кутах розхилу концентрація напружень після утворення пластичної смуги зникає ( $\lambda_i = 0$ ).

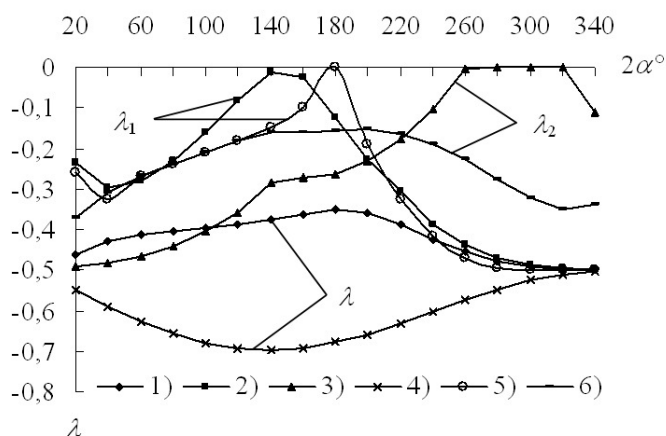


Рис. 3. Залежність показників сингулярності напружень від кута розхилу межі поділу середовищ  $2\alpha (\nu_1 = \nu_2 = 0, 25)$  : 1 – 3)  $\frac{E_1}{E_2} = 0, 2$ ; 4 – 6)  $\frac{E_1}{E_2} = 5$ .

**Висновки.** Розглянута симетрична задача про розрахунок пластичної зони в кінці тріщини нормального відриву, вершина якої співпадає з кутовою точкою межі поділу середовищ. Задача розв'язана методом Вінера-Хопфа із застосуванням інтегрального перетворення Мелінна та деяких положень теорії функцій комплексної змінної. Отримані результати можна використовувати для інженерних розрахунків НДС в композитних матеріалах з тріщиною, яка виходить на негладку межу поділу середовищ в її кутовій точці.

1. **Панасюк В. В.** Модель смуг пластичності в пружно-пластичних задачах механіки руйнування [текст] / В. В. Панасюк, М. П. Саврук // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – Т. 28, № 1. – С. 49–68.
2. **Черепанов Г. П.** Механіка хрупкого руйнування [текст] / Г. П. Черепанов. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
3. **Черепанов Г. П.** Пластические линии разрыва в конце трещины [текст] / Г. П. Черепанов // Прикл. мат. и мех. – 1976. – Т. 40, № 4. – С. 720–728.
4. **Каминский А. А.** Расчет зоны предразрушения в конце трещины на границе раздела сред [текст] / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, М. В. Дудик // Теор. и прикл. механика. – 2002. – Вып. 36. – С. 90–93.
5. **Каминский А. А.** Линия скольжения в конце разреза на границе раздела различных сред [текст] / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, В. А. Колмакова // Прикл. механика. – 1995. – Т. 31, № 6. – С. 86–91.

6. Каминский А. А. Расчет пластической зоны в конце трещины в рамках модели "трезубец" / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, В. А. Колмакова // Прикл. механика. – 1997. – Т. 33. – № 5. – С. 70–76.
7. Каминский А. А. О модели Дагдейла для трещины на границе раздела различных сред [текст] / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, В. А. Колмакова // Прикл. механика. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 63–68.
8. Камінський А. О. Напруження біля кінців тріщини на межі розділу двох середовищ за наявності пластичних смуг [текст] / А. О. Камінський, М. В. Дудик, Л. А. Кіпніс // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – № 3. – С. 71–76.
9. Dudyk M. V. Investigation of the initial stage of kinking of an interface crack at an angular point of the interface of two media [text] / M. V. Dudyk, Yu. V. Dikhtyarenko // Materials Science. – 2012. – V. 47, № 5. – P. 627–635.
10. Dudyk M. V. Development of a prefracture zone from an interface crack at a corner point of an interface of two elastic media [text] / M. V. Dudyk, Yu. V. Dikhtyarenko // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – V. 184, № 2. – P. 121–135.
11. Діхтяренко Ю. В. Моделювання початкової пластичної смуги у кутовій точці межі розділу середовищ з міжфазною тріщиною [текст] / Ю. В. Діхтяренко // Вісн. Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2011. – Т. 16, вип. 16. – С. 76–86.
12. Dudik M. V. Analysis of plastic slip lines at the tip of a crack terminating at the interface of different media [text] / M. V. Dudik, L. A. Kipnis, A. V. Pavlenko // Int. Appl. Mech. – 2002. – V. 38, № 2. – С. 197–202.
13. Каминский А. А. О начальном развитии зоны предразрушения вблизи конца трещины, выходящей на границу раздела различных сред [текст] / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, М. В. Дудик // Прикл. механика. – 2004. – Т. 40, № 2. – С. 74–81.
14. Каминский А. А. О зоне предразрушения в конце трещины, выходящей на границу раздела упругих сред [текст] / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, В. А. Колмакова, М. В. Дудик // Доповіді НАН України. – 2006. – № 7. – С. 43–46.
15. Камінський А. О. Дослідження зони передруйнування у кінці тріщини нормального відриву, що виходить на негладку межу розділу пружних середовищ [текст] / А. О. Камінський, Л. А. Кіпніс, М. В. Дудик, Ю. В. Діхтяренко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, № 4. – С. 111–119.
16. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits [text] / D. S. Dugdale // J. Mech. and Phys. Solids. – 1960. – V. 8, № 2. – P. 100–104.
17. Леонов М. Я. Полосы пластичности при растяжении пластин с трещиновидным концентратором [текст] / М. Я. Леонов, П. М. Витвицкий, С. Я. Ярема // ДАН СССР. – 1963. – Т. 148, № 3. – С. 541–544.
18. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости [текст] / Я. С. Уфлянд. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.
19. Гахов Ф. Д. Краевые задачи [текст] / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
20. Нобл Б. Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных [текст] / Б. Нобл. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
21. Черепанов Г. П. К общей теории разрушения [текст] / Г. П. Черепанов // Физ.-хим. механика материалов. – 1986. – № 1. – С. 36–44.