

Mathematical Subject Classification: 74R99
УДК 539.375

М. В. Дудик

Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

**АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ
ПРО КОГЕЗІЙНУ ЗОНУ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ
У З'ЄДНУВАЛЬНОМУ МАТЕРІАЛІ БІЛЯ ВЕРШИНИ
МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ**

Дудик М. В. Аналітичний розв'язок плоскої задачі про когезійну зону передруйнування у з'єднувальному матеріалі біля вершини міжфазної тріщини. Дано аналітичний розв'язок задачі про розрахунок в умовах плоскої деформації когезійної зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі в кінці тріщини, розташованої на плоскій межі поділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів. Зона моделюється лінією розриву переміщення, на якій напруження задовольняють квадратичній умові пластичності. За допомогою інтегрального перетворення Мелліна задача зведена до матричного рівняння Вінера–Хопфа, яке розв'язане за формулами Храпкова. Отримані рівняння для визначення довжини когезійної зони і фазового кута змішування мод навантаження в зоні та вирази для розкриття тріщини в її вершині. Виконано числове дослідження параметрів зони передруйнування.

Ключові слова: міжфазна тріщина, зона передруйнування, когезійна модель.

Дудик М. В. Аналитическое решение плоской задачи о когезионной зоне предразрушения в связующем материале вблизи вершины межфазной трещины. Дано аналитическое решение задачи о расчете в условиях плоской деформации когезионной зоны предразрушения в связующем материале в конце трещины, расположенной на плоской границе раздела двух различных однородных изотропных материалов. Зона моделируется линией разрыва смещения, на которой напряжения удовлетворяют квадратичному условию пластичности. С помощью интегрального преобразования Меллина задача сведена к матричному уравнению Винера–Хопфа, которое решено по формулам Храпкова. Получены уравнения для определения длины когезионной зоны и фазового угла смешивания мод нагрузки в зоне, а также выражения для вычисления раскрытия трещины в ее вершине. Выполнен числовой анализ параметров зоны предразрушения.

Ключевые слова: межфазная трещина, зона предразрушения, когезионная модель.

Dudyk M. V. Analytical solution of the plane problem on the cohesive prefracture zone in conjunctive material near the tip of the interfacial crack. The analytical solution of the problem of calculation under the plain strain conditions of a cohesive prefracture zone in the conjunctive material at the end of the crack on the interface of two different homogeneous isotropic materials is presented. The zone is modeled by the discontinuity line of displacement, on which the tensions meet the quadratic condition of plasticity. By the Mellin integral transformation the problem is taken to the Wiener-Hopf matrix equation, which is solved by the Khrapkov formulas. The equations for the determination of a cohesive zone length and the phase angle of mode mixity in the zone, and some expressions for the calculation of crack opening in its tip are obtained. The numerical

analysis of the prefracture zone parameters is executed.

Key words: interfacial crack, prefracture zone, cohesive model.

Вступ. Поширення тріщини по межі поділу з'єднаних матеріалів є однією з найімовірніших причин руйнування композитів. Цьому процесу передують утворення біля вершини міжфазної тріщини зони передруйнування, в якій матеріал внаслідок підвищеного рівня напружень виходить за межу пружності.

На початковому етапі розвитку зона передруйнування може бути ефективно описана в рамках моделі Леонова–Панасюка–Дагдейла [1], що подає зону лінією розриву переміщення, на якій задана деяка умова переходу матеріалу в передруйнівний стан. Зокрема, у випадку крихкого матеріалу в зоні передруйнування переважають відривні деформації, тому вона моделюється лінією розриву нормального переміщення, на якій нормальне напруження дорівнює опору відриву матеріалу [2]. Для пластичного матеріалу зону передруйнування моделюють лінією, на якій зазнає стрибка дотичне переміщення, а дотичне напруження дорівнює межі текучості матеріалу. Такі моделі більш прийнятні для опису бічних зон у одному із з'єднаних матеріалів [3-7], оскільки їх орієнтація при використанні різних критеріїв вибору напрямку поширення виявляється близькою до напрямків максимуму відривних нормальних або дотичних напружень, в яких переважають відповідні деформації (в залежності від властивостей матеріалу). Проте у випадку міжфазної зони передруйнування немає притаманної бічним зонам варіативності орієнтації, і оскільки через відсутність симетрії в полі напружень біля вершини тріщини зазвичай наявні I і II моди, це вимагає брати до уваги у побудові її моделі стрибки як відривних, так і зсувних деформацій. Такі ефекти враховані в когезійній моделі міжфазної тріщини, що стрімко розвивалась впродовж останніх двох десятиліть [8-14], і в деяких інших моделях [15, 16].

В когезійній моделі вводиться певна потенціальна функція, яка визначає зв'язок напружень зі стрибками переміщення. Складність визначальних рівнянь у когезійній зоні призвела до того, що їх розв'язання здійснюється головним чином числовими методами.

В даній роботі виконано аналітичний розрахунок міжфазної зони передруйнування в рамках моделі Леонова–Панасюка–Дагдейла з використанням для напружень притаманної когезійній моделі квадратичної умови передруйнування. Задача зведена до матричного рівняння Вінера–Хопфа, яке розв'язано за допомогою формул Храпкова. Знайдено рівняння для визначення довжини зони передруйнування, фазового кута навантаження в ній та розкриття тріщини в її вершині.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ.

1. Постановка задачі

В умовах плоскої деформації розглянемо задачу про визначення початкової зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі біля вершини міжфазної тріщини, розташованої на плоскій межі поділу двох пружних однорідних ізотропних матеріалів з модулями Юнга E_1 , E_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1 , ν_2 . Нехтуючи товщиною з'єднувального прошарку, моделюватимемо зону лінією розриву переміщення, на якій у відповідності з когезійною моделлю нормальне і дотичне

напруження задовольняють умову [14]

$$\left(\frac{\sigma_\theta}{\sigma_0}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{r\theta}}{\tau_0}\right)^2 = 1, \quad (1)$$

де σ_0, τ_0 – опори відриву та зсуву з'єднувального матеріалу, що експериментально визначаються як середні значення нормального і дотичного напружень у зоні при відповідній моді навантаження однорідного матеріалу.

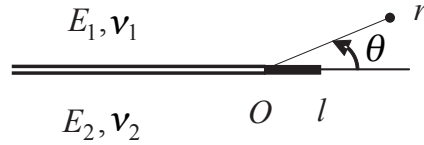


Рис. 1.

На початку розвитку довжина зони передруйнування l значно менша від довжини тріщини L та всіх інших розмірів тіла, і оскільки напружено-деформований стан досліджується в околі зони, то вихідна задача зводиться до задачі про лінію розриву скінченної довжини, що поширюється з вершини півнескінченної міжфазної тріщини по межі поділу двох пружних півплощин (рис. 1). На нескінченності формулюється умова можливості зшивання на відстанях $l \ll r \ll L$ шуканого розв'язку з розв'язком аналогічної задачі теорії пружності без лінії розриву, який відомий з робіт [17-20] і характеризується просторовими осциляціями переміщень і напружень при наближенні до вершини тріщини. Враховуючи умову (1) та вважаючи береги тріщини вільними від напружень, проходимо до статичної крайової задачі теорії пружності з граничними умовами

$$\theta = -\pi \cup \pi : \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0; \quad (2)$$

$$\theta = 0 : \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0; \quad (3)$$

$$\theta = 0, \quad r < l : \quad \sigma_\theta = \sigma_0 \cos \psi(r), \quad \tau_{r\theta} = \tau_0 \sin \psi(r);$$

$$\theta = 0, \quad r > l : \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0; \quad (4)$$

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow \infty : \quad \sigma_\theta \sim C_1 r^{-\frac{1}{2}+i\omega} + \bar{C}_1 r^{-\frac{1}{2}-i\omega}, \quad \tau_{r\theta} \sim C_2 r^{-\frac{1}{2}+i\omega} + \bar{C}_2 r^{-\frac{1}{2}-i\omega}, \quad (5)$$

де $\langle f \rangle$ позначає стрибок величини f ; $\psi(r)$ – фазовий кут напруження в зоні передруйнування, який в подальшому через малість її розмірів і для спрощення розв'язання задачі вважатимемо сталим і рівним його середньому значенню ψ ;

$$C_1 = e' K L^{-i\omega}, \quad C_2 = -i C_1, \quad K = K_I + i K_{II};$$

риска над C_1 і C_2 означає комплексне спряження; K – комплексний коефіцієнт напружень [20];

$$e' = \frac{1}{\sqrt{8\pi \cdot (1 - \beta^2)}}, \quad \omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 - \beta}{1 + \beta}, \quad \beta = \frac{(1 + e\kappa_2) - (e + \kappa_1)}{(1 + e\kappa_2) + (e + \kappa_1)};$$

$$e = \frac{E_1}{E_2} \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1}, \quad \kappa_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)}.$$

Передбачається виконання умови $\cos \psi \geq 0$, необхідної для відривного характеру нормального напруження в зоні передруйнування.

Розв'язок сформульованої крайової задачі будемо шукати у вигляді суми наступних двох задач. Перша відрізняється від неї тим, що замість першої пари умов в (4) використовуємо умови

$$\begin{aligned} \theta = 0, \quad r < l: \quad \sigma_\theta = \sigma_0 \cos \psi - C_1 r^{-\frac{1}{2}+i\omega} - \bar{C}_1 r^{-\frac{1}{2}-i\omega}, \quad \tau_{r\theta} = \\ \tau_0 \sin \psi - C_2 r^{-\frac{1}{2}+i\omega} - \bar{C}_2 r^{-\frac{1}{2}-i\omega}, \end{aligned} \quad (6)$$

а на нескінченості напруження спадають як $o(1/r)$. Друга задача — аналогічна задача без лінії розриву, розв'язок якої відомий [17-20], тому завдання полягає у розв'язанні першої задачі.

2. Розв'язання задачі

Для побудови розв'язку застосуємо інтегральне перетворення Мелліна

$$f^*(p, \theta) = \int_0^\infty f(r, \theta) r^p dr$$

до рівнянь рівноваги, умови сумісності деформацій, закону Гука і граничних умов (2-3). Врахувавши умови (6) і другу пару умов (4), прийдемо до матричного рівняння Вінера–Хопфа першої задачі у смугі $-\varepsilon_1 < \text{Re} p < \varepsilon_2$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — достатньо малі додатні числа), що містить уявну вісь:

$$\Phi^+(p) + \mathbf{F}(p) = -Atg p \pi G(p) \mathbf{Q}(p) \Phi^-(p), \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_1^+(p) \\ \Phi_2^+(p) \end{pmatrix} = \int_1^\infty \begin{pmatrix} \sigma_\theta(\rho l, 0) \\ \tau_{r\theta}(\rho l, 0) \end{pmatrix} \rho^p d\rho,$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_1^-(p) \\ \Phi_2^-(p) \end{pmatrix} = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} u_\theta \\ u_r \end{pmatrix} \Big|_{r=\rho l} \rho^p d\rho,$$

$$\mathbf{F}(p) = \begin{pmatrix} F_1(p) \\ F_2(p) \end{pmatrix},$$

$$F_1(p) = \frac{\sigma_0 \cos \psi}{p+1} - \frac{C_1 r^{-\frac{1}{2}+i\omega}}{p+\frac{1}{2}+i\omega} - \frac{\bar{C}_1 r^{-\frac{1}{2}-i\omega}}{p+\frac{1}{2}-i\omega}, \quad F_2(p) = \frac{\tau_0 \sin \psi}{p+1} - \frac{C_2 r^{-\frac{1}{2}+i\omega}}{p+\frac{1}{2}+i\omega} - \frac{\bar{C}_2 r^{-\frac{1}{2}-i\omega}}{p+\frac{1}{2}-i\omega},$$

$$G(p) = \frac{4(e + \kappa_1)(1 + e\kappa_2) \cos^2 p\pi}{(e + \kappa_1)^2 + (1 + e\kappa_2)^2 + 2(e + \kappa_1)(1 + e\kappa_2) \cos 2p\pi},$$

$$\mathbf{Q}(p) = \mathbf{I} + g(p)\mathbf{J}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

де \mathbf{I} — одинична матриця, $g(p) = i\beta t g p \pi$, а матриця \mathbf{J} володіє необхідною для факторизації властивістю $\mathbf{J}^2 = \mathbf{I}$.

Матричний коефіцієнт рівняння (7) відноситься до типу, розглянутого Храпковим [21, 22], і може бути факторизований за формулами:

$$\mathbf{Q}(p) = \mathbf{Q}^+(p)\mathbf{Q}^-(p) \quad (\operatorname{Re} p = 0), \quad \mathbf{Q}^\pm(p) = r^\pm(p) [ch\theta^\pm(p)\mathbf{I} + sh\theta^\pm(p)\mathbf{J}],$$

де елементи матриць $\mathbf{Q}^+(p)$ і $\mathbf{Q}^-(p)$ аналітичні у півплощинах $\operatorname{Re} p < 0$ і $\operatorname{Re} p > 0$ відповідно. Функції $r^\pm(p)$ і $\theta^\pm(p)$ задовольняють скалярним функціональним рівнянням

$$r^+(p)r^-(p) = \sqrt{1 - g^2(p)}, \quad \theta^+(p) + \theta^-(p) = \operatorname{arth}g(p) \quad (\operatorname{Re} p = 0),$$

які мають розв'язки [23]:

$$r^\pm(p) = (1 - \beta^2)^{1/4} \exp \left[\mp \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln H_1(t)}{it - p} dt \right], \quad H_1(t) = \frac{1 - \beta^2 t^2 \pi t}{1 - \beta^2},$$

$$\theta^\pm(p) = \frac{\pm p}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln H_2(t)}{t + ip} dt, \quad H_2(t) = \frac{\operatorname{arth}(\beta \cdot t \pi t)}{t}.$$

Скалярні коефіцієнти рівняння (7) факторизуються за формулами [23, 24]:

$$G(p) = \frac{G^+(p)}{G^-(p)} \quad (\operatorname{Re} p = 0), \quad \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G(z)}{z - p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p), & \operatorname{Re} p < 0, \\ G^-(p), & \operatorname{Re} p > 0; \end{cases}$$

$$tgp\pi = \frac{p}{K^+(p)K^-(p)}, \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(\frac{1}{2} \mp p)}$$

($\Gamma(z)$ – гамма-функція Ейлера). Це дозволяє переписати рівняння Вінера–Хопфа (7) у вигляді:

$$\frac{K^+(p)}{pG^+(p)} \tilde{\mathbf{Q}}^+(p)(\Phi^+(p) + \mathbf{F}(p)) = -\frac{A}{K^-(p)G^-(p)} \mathbf{Q}^-(p)\Phi^-(p) \quad (\operatorname{Re} p = 0), \quad (8)$$

де $\tilde{\mathbf{Q}}^+(p)$ – обернена до $\mathbf{Q}^+(p)$ матриця:

$$\tilde{\mathbf{Q}}^+(p) = [\mathbf{Q}^+(p)]^{-1} = [r^+(p)]^{-1} [ch\theta^+(p)\mathbf{I} - sh\theta^+(p)\mathbf{J}].$$

Розщепивши другий доданок в (8) за формулою

$$\frac{K^+(p)}{pG^+(p)} \tilde{\mathbf{Q}}^+(p)\mathbf{F}(p) = \tilde{\mathbf{F}}^+(p) - \tilde{\mathbf{F}}^-(p),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}^+(p) &= \frac{1}{p+1} \left[\frac{K^+(p)\tilde{\mathbf{Q}}^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-1)\tilde{\mathbf{Q}}^+(-1)}{G^+(-1)} \right] \begin{pmatrix} \sigma_0 \cos \psi \\ \tau_0 \sin \psi \end{pmatrix} - \\ &- \frac{l^{-\frac{1}{2}+i\omega}}{p+\frac{1}{2}+i\omega} \left[\frac{K^+(p)\tilde{\mathbf{Q}}^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-\frac{1}{2}-i\omega)\tilde{\mathbf{Q}}^+(-\frac{1}{2}-i\omega)}{(\frac{1}{2}+i\omega)G^+(-\frac{1}{2}-i\omega)} \right] \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} - \\ &- \frac{l^{-\frac{1}{2}-i\omega}}{p+\frac{1}{2}-i\omega} \left[\frac{K^+(p)\tilde{\mathbf{Q}}^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-\frac{1}{2}-i\omega)\tilde{\mathbf{Q}}^+(-\frac{1}{2}-i\omega)}{(\frac{1}{2}-i\omega)G^+(-\frac{1}{2}-i\omega)} \right] \begin{pmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}^-(p) = & \frac{1}{p+1} \frac{K^+(-1)\tilde{\mathbf{Q}}^+(-1)}{G^+(-1)} \begin{pmatrix} \sigma_0 \cos \psi \\ \tau_0 \sin \psi \end{pmatrix} - \frac{l^{-\frac{1}{2}+i\omega}}{p+\frac{1}{2}+i\omega} \times \\ & \times \frac{K^+(-\frac{1}{2}-i\omega)\tilde{\mathbf{Q}}^+(-\frac{1}{2}-i\omega)}{(\frac{1}{2}+i\omega)G^+(-\frac{1}{2}-i\omega)} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} - \\ & - \frac{l^{-\frac{1}{2}-i\omega}}{p+\frac{1}{2}-i\omega} \frac{K^+(-\frac{1}{2}-i\omega)\tilde{\mathbf{Q}}^+(-\frac{1}{2}-i\omega)}{(\frac{1}{2}-i\omega)G^+(-\frac{1}{2}-i\omega)} \begin{pmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

отримаємо замість (8) рівняння

$$\frac{K^+(p)}{pG^+(p)}\tilde{\mathbf{Q}}^+(p)\Phi^+(p)+\tilde{\mathbf{F}}^+(p)=-\frac{A}{K^-(p)G^-(p)}\mathbf{Q}^-(p)\Phi^-(p)+\tilde{\mathbf{F}}^-(p), \quad (\operatorname{Re} p = 0). \quad (9)$$

Ліва частина рівняння (9) аналітична у півплощині $\operatorname{Re} p < 0$, а права — у півплощині $\operatorname{Re} p > 0$. Тоді, у відповідності з принципом аналітичного продовження, повинна існувати єдина функція, аналітична у всій комплексній площині, яка дорівнює лівій і правій частині цього рівняння у відповідних півплощинах.

Враховуючи особливості поведінки напружень і переміщень біля вершини міжфазної зони передруйнування, за теоремою абелевого типу знаходимо асимптотики:

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(p) & \sim \frac{(\kappa_1 + e) + (1 + e\kappa_2)}{2(e + \kappa_1)} \cdot \frac{k_1}{\sqrt{-2pl}}, \quad \Phi_2^+(p) \sim \frac{(\kappa_1 + e) + (1 + e\kappa_2)}{2(1 + \kappa_1)} \cdot \frac{k_2}{\sqrt{-2pl}}, \\ \Phi_1^-(p) & \sim -\frac{1 + e\kappa_2}{1 + \kappa_1} \cdot \frac{k_1}{\sqrt{2pl}}, \quad \Phi_2^-(p) \sim -\frac{(\kappa_1 + e)(1 + e\kappa_2)}{(1 + \kappa_1)^2} \cdot \frac{k_2}{\sqrt{2pl}} (p \rightarrow \infty), \quad (10) \end{aligned}$$

де k_1, k_2 — коефіцієнти інтенсивності напружень в кінці зони. Взявши також до уваги обмеженість на нескінченості функцій $G^\pm(p)$ і $\mathbf{Q}^\pm(p)$ та асимптотики $K^+(p) \sim \sqrt{-p}$ ($p \rightarrow \infty, \operatorname{Re} p < 1/2$) і $K^-(p) \sim \sqrt{p}$ ($p \rightarrow \infty, \operatorname{Re} p > -1/2$), доходимо висновку, що ліва і права частини рівняння (9) прямують до нуля при $p \rightarrow \infty$. Тому за теоремою Ліувілля єдина аналітична функція тотожно дорівнює нулю у всій комплексній площині, що дозволяє знайти точний розв'язок рівняння (9):

$$\Phi^+(p) = -\frac{pG^+(p)}{K^+(p)}\mathbf{Q}^+(p)\tilde{\mathbf{F}}^+(p), \quad \Phi^-(p) = \frac{K^-(p)G^-(p)}{A}\tilde{\mathbf{Q}}^-(p)\tilde{\mathbf{F}}^-(p), \quad (11)$$

де $\tilde{\mathbf{Q}}^-(p) = [\mathbf{Q}^-(p)]^{-1}$.

3. Визначення параметрів зони передруйнування

Порівнюючи асимптотики розв'язків (11) при $p \rightarrow \infty$ з (10), знаходимо коефіцієнти інтенсивності напружень в кінці лінії розриву:

$$\begin{aligned} k_1 & = -\frac{(1 + \kappa_1)\sqrt{2l}}{A(1 + e\kappa_2)} \cdot \left\{ \tilde{Q}_{11}^-(\infty) \cdot X + \tilde{Q}_{12}^-(\infty) \cdot Y \right\}, \\ k_2 & = -\frac{(1 + \kappa_1)^2\sqrt{2l}}{A(\kappa_1 + e)(1 + e\kappa_2)} \cdot \left\{ \tilde{Q}_{21}^-(\infty) \cdot X + \tilde{Q}_{22}^-(\infty) \cdot Y \right\}, \end{aligned}$$

де

$$X = \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} \left[\tilde{Q}_{11}^+(-1)\sigma_0 \cos \psi + \tilde{Q}_{12}^+(-1)\tau_0 \sin \psi \right] -$$

$$\begin{aligned}
& -2\operatorname{Re} \left(Nl^{-\frac{1}{2}+i\omega} \left[\tilde{Q}_{11}^+(-\frac{1}{2}-i\omega)C_1 + \tilde{Q}_{12}^+(-\frac{1}{2}-i\omega)C_2 \right] \right), \\
& Y = \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} \left[\tilde{Q}_{21}^+(-1)\sigma_0 \cos \psi + \tilde{Q}_{22}^+(-1)\tau_0 \sin \psi \right] - \\
& -2\operatorname{Re} \left(Nl^{-\frac{1}{2}+i\omega} \left[\tilde{Q}_{21}^+(-\frac{1}{2}-i\omega)C_1 + \tilde{Q}_{22}^+(-\frac{1}{2}-i\omega)C_2 \right] \right), \\
& N = \frac{K^+(-\frac{1}{2}-i\omega)}{(\frac{1}{2}+i\omega)G^+(-\frac{1}{2}-i\omega)}.
\end{aligned}$$

Прирівнюючи k_1 , k_2 до нуля через вимогу обмеженості напружень в кінці зони переддруйнування, приходимо до системи лінійних однорідних рівнянь відносно X та Y :

$$\tilde{Q}_{11}^-(\infty) \cdot X + \tilde{Q}_{12}^-(\infty) \cdot Y = 0, \quad \tilde{Q}_{21}^-(\infty) \cdot X + \tilde{Q}_{22}^-(\infty) \cdot Y = 0.$$

Оскільки визначник цієї системи $\det \tilde{\mathbf{Q}}^-(\infty) = [r^-(\infty)]^{-2} = (1-\beta^2)^{-1/2}$ відмінний від нуля, то вона має лише тривіальний розв'язок $X = Y = 0$, який приводить до трансцендентних рівнянь для визначення відносної довжини $x = l/L$ і фазового кута когезійного напруження ψ , що після перетворень можуть бути записані у вигляді, зручному для числового розв'язання:

$$\begin{aligned}
x &= C\sigma^2 \left\{ \frac{\cos^2(\omega \ln x + \varphi + \xi + \zeta)}{n^2} + \sin^2(\omega \ln x + \varphi + \xi + \zeta) \right\}, \\
tg\psi &= n \cdot tg(\omega \ln x + \varphi + \xi + \zeta),
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
C &= \pi \left[\frac{2e' |N| \cdot |q'| G^+(-1)}{q} \right]^2, \\
q &= q_0^2 + q_1^2, \quad q' = (q_0\tilde{q}_0 + q_1\tilde{q}_1) + i(q_1\tilde{q}_0 + q_0\tilde{q}_1), \\
q_0 &= \tilde{Q}_{11}^+(-1), \quad q_1 = \tilde{Q}_{12}^+(-1), \quad \tilde{q}_0 = \tilde{Q}_{11}^+(-\frac{1}{2}-i\omega), \quad \tilde{q}_1 = \tilde{Q}_{12}^+(-\frac{1}{2}-i\omega);
\end{aligned}$$

$\sigma = \frac{|K_I + iK_{II}|}{\tau_0\sqrt{L}}$ — безрозмірний параметр зовнішнього навантаження, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{K_{II}}{K_I}$ — його фазовий кут; $n = \sigma_0/\tau_0$, $\xi = \arg N$, $\zeta = \arg q'$. Випадкам крихкого або пластичного з'єднувального матеріалу відповідають граничні переходи $n \rightarrow 0$, $\psi \rightarrow 0$ і $n \rightarrow \infty$, $\psi \rightarrow \pm\pi/2$, які приводять до моделей, розглянутих в [25, 26].

Отриманий вище розв'язок дозволяє визначити розкриття тріщини у її вершині як результат стрибків компонент переміщення в зоні переддруйнування, що виражаються через трансформанту $\Phi^-(0)$:

$$\begin{aligned}
\delta u_\theta(0,0) &= - \left\langle \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^* \right\rangle \Big|_{p=0, \theta=0} = - \frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1} l \Phi_1^-(0), \\
\delta u_r(0,0) &= - \left\langle \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^* \right\rangle \Big|_{p=0, \theta=0} = - \frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1} l \Phi_2^-(0).
\end{aligned}$$

Використовуючи (11), після перетворень знайдемо остаточно

$$\delta u_{\theta}(0,0) = -\frac{4(1-\nu_1^2)L}{E_1} \frac{2e'|N|\cdot|\tilde{q}|}{A\sqrt{\pi(1-\beta^2)}} \sigma\sqrt{x} \cos(\omega \ln x + \varphi + \xi + \zeta_1 - 2\eta),$$

$$\delta u_r(0,0) = -\frac{4(1-\nu_1^2)L}{E_1} \frac{2e'|N|\cdot|\tilde{q}|}{A\sqrt{\pi(1-\beta^2)}} \sigma\sqrt{x} \sin(\omega \ln x + \varphi + \xi + \tilde{\zeta} - 2\eta),$$

де $\tilde{q} = \tilde{q}_0 + i\tilde{q}_1$, $\tilde{\zeta} = \arg \tilde{q}$, $\eta = \arctg 2\omega$. Визначення стрибків нормального і дотичного переміщень в зоні передруйнування може бути використано для пошуку граничного навантаження за прийнятою в моделі когезійної зони умовою [8-10]

$$\left(\frac{\delta u_{\theta}}{\delta_n}\right)^2 + \left(\frac{\delta u_r}{\delta_{\tau}}\right)^2 = 1,$$

де δ_n , δ_{τ} — їх критичні значення, досягнення яких приводить до зрушення тріщини при суто відривному або зсувному характері деформацій у зоні.

Зазначимо, що відривний характер нормального напруження у зоні передруйнування передбачає виконання умови $\delta u_{\theta}(0,0) \geq 0$. У випадку ж, коли нормальне напруження в зоні має стискальний характер, більш прийнятним може бути моделювання зони передруйнування лінією ковзання зі зчепленням [26].

4. Аналіз отриманих результатів

Результати числових розрахунків параметрів зони передруйнування наведено на рис. 2-4 (на всіх рисунках, позначених як a , показана відносна довжина x ; b — фазовий кут ψ навантаження у зоні; c , d — приведені нормальне $\delta u'_{\theta} = \frac{\delta u_{\theta}(0,0)}{L} \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)}$ і дотичне $\delta u'_r = \frac{\delta u_r(0,0)}{L} \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)}$ розкриття). Всі обчислення виконано при $E_1/E_2 = 0,25$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$.

Згідно з розрахунками, довжина зони передруйнування та її розкриття у вершині тріщини нелінійно зростають за величиною зі збільшенням зовнішнього навантаження, заданого безрозмірним параметром σ (рис. 2, a , c , d). Залежність фазового кута навантаження у зоні від σ менш виражена, проте також спостерігається його повільне зростання зі збільшенням абсолютного значення навантаження (рис. 2, b).

На рис. 3 подано залежність параметрів зони передруйнування від фазового кута зовнішнього навантаження φ . Згідно з рис. 3, a , довжина зони у цій залежності має мінімум у випадку більш пластичного ($n > 1$) і максимум — у випадку більш крихкого ($n < 1$) з'єднувального матеріалу. Фазовий кут напружень ψ у зоні передруйнування зростає синхронно з ростом фазового кута зовнішнього навантаження, залишаючись, проте, меншим від нього (рис. 3, b). Дотичне і нормальне розкриття мають різну поведінку при зміні фазового кута навантаження: дотичне розкриття зростає з ростом φ , тоді як нормальне розкриття при $n \leq 1$ має максимум, а при $n > 1$ його залежність від φ є менш вираженою і немонотонною (рис. 3, c).

На параметри зони передруйнування суттєво впливає відношення опорів відриву і зсуву з'єднувального матеріалу $n = \sigma_0/\tau_0$. Як видно з рис. 4, a і 4, c , зі збільшенням опору відриву при сталому параметрі навантаження довжина зони передруйнування і розкриття тріщини у вершині зменшуються. Фазовий кут навантаження при $\varphi \leq 0$ є від'ємним і швидко спадає з ростом n , тоді як при $\varphi > 0$ він додатний і слабо залежить від n (рис. 4, b).

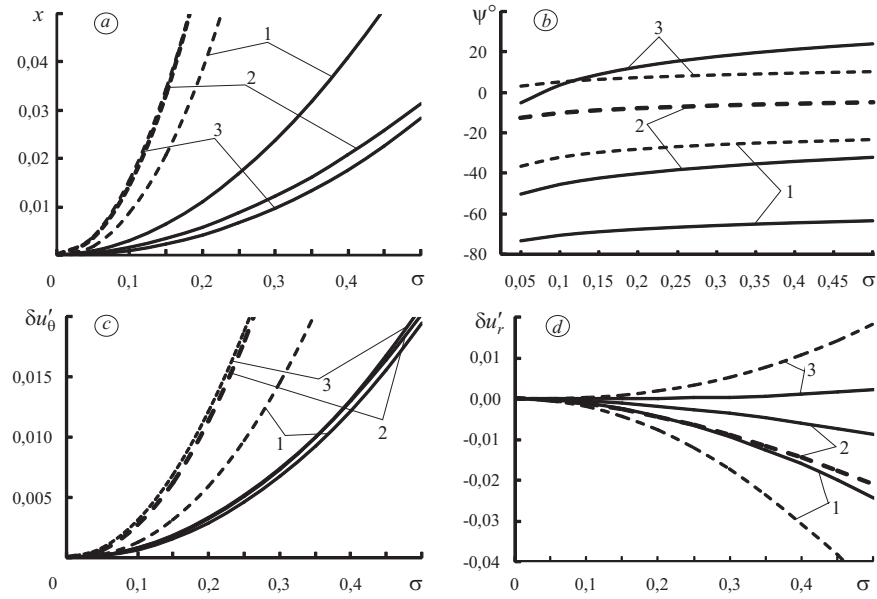


Рис. 2. Залежність параметрів зони передруйнування від безрозмірного параметра навантаження σ . Штрихові лінії — $n = 0, 5$; суцільні лінії — $n = 2$. Фазовий кут зовнішнього навантаження: 1) $\varphi = -30^\circ$; 2) $\varphi = 0^\circ$; 3) $\varphi = 30^\circ$

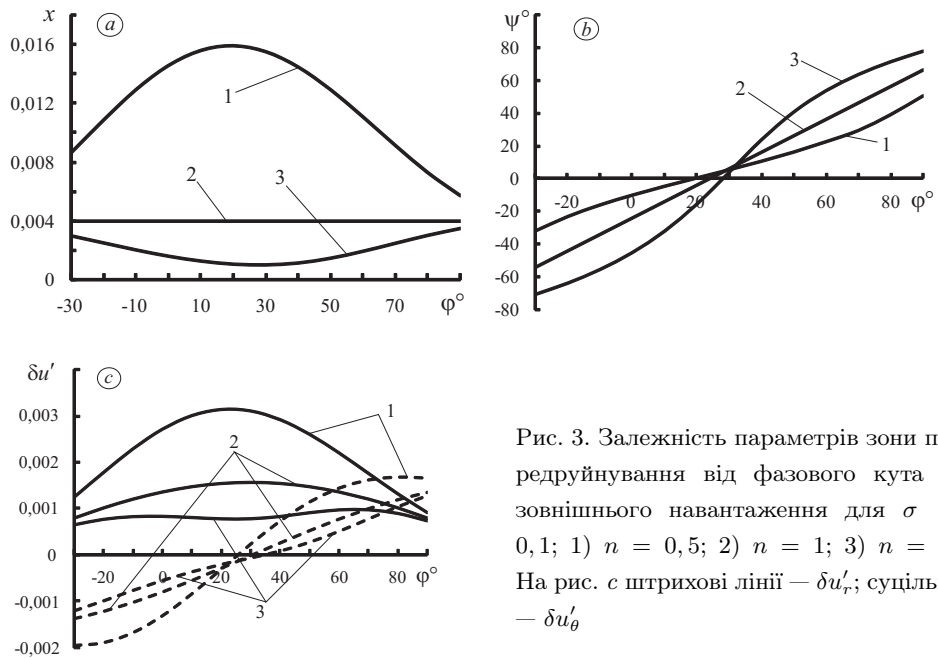


Рис. 3. Залежність параметрів зони передруйнування від фазового кута φ зовнішнього навантаження для $\sigma = 0, 1$; 1) $n = 0, 5$; 2) $n = 1$; 3) $n = 2$. На рис. с штрихові лінії — $\delta u'_r$; суцільні — $\delta u'_\theta$

Виконавши зворотне перетворення Мелліна знайдених у ході розв'язання задачі трансформант напружень, із залученням теореми про лишки можна визначити члени розвинень напружень у асимптотичні ряди в околі вершини тріщини після утворення зони передруйнування. Головний член розвинень визначатиметься нулем функції $G(p)$ в інтервалі $-1 < \text{Re} p < 0$, що дає дійсний показник сингулярності напружень, рівний $-1/2$. Таким чином, поява зони передруйнування усуває фізично некоректний осцилюючий характер сингулярності у вершині тріщини, зберігаючи, проте, кореневу особливість.

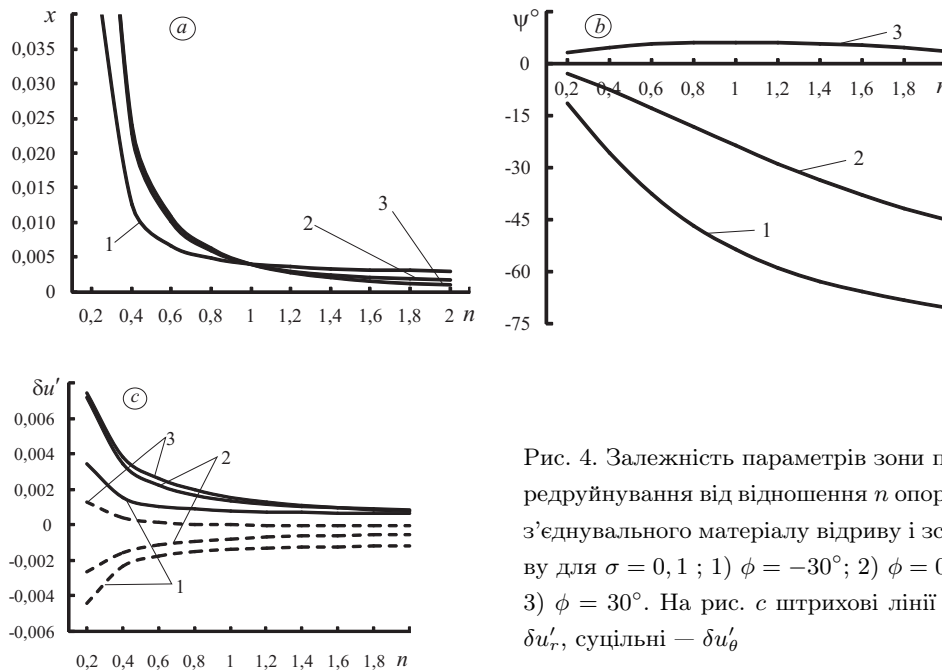


Рис. 4. Залежність параметрів зони передруйнування від відношення n опорів з'єднувального матеріалу відриву і зсуву для $\sigma = 0, 1$; 1) $\phi = -30^\circ$; 2) $\phi = 0^\circ$; 3) $\phi = 30^\circ$. На рис. с штрихові лінії — $\delta u'_r$, суцільні — $\delta u'_0$

ВИСНОВКИ. Методом Вінера-Хопфа знайдено аналітичний розв'язок задачі про розрахунок в умовах плоскої деформації в рамках моделі Леонова-Панасюка-Дагдейла з використанням елементів когезійної моделі параметрів маломасштабної зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі в кінці міжфазної тріщини, розташованої на плоскій межі поділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів. Отримані рівняння для визначення довжини зони і параметра змішування мод напружень в ній та формули для обчислення розкриття тріщини в її вершині. Показана можливість їх застосування для визначення граничного навантаження для змішаних мод. Здійснено числовий розрахунок параметрів зони та якісний аналіз їх залежності від зовнішнього навантаження і характеристик з'єднувального матеріалу.

1. **Панасюк В. В.** Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування [текст] / В.В. Панасюк, М.П. Саврук // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – №1. – С.49-68.

2. **Панасюк В. В.** Предельное равновесие хрупких тел с трещинами [текст] / В.В. Панасюк. – К.: Наук. думка, 1980. – 246 с.
3. **Каминский А. А.** О направлении развития тонкой пластической зоны предразрушения в вершине трещины на границе раздела различных сред [текст] / А.А. Каминский, М.В. Дудик, Л. А. Кипнис // Прикл. механика. – 2006. – Т.42, №2. – С.14-23.
4. **Каминский А. А.** О начальном повороте трещины, расположенной на границе раздела двух упругих сред [текст] / А.А. Каминский, М.В. Дудик, Кипнис Л.А. // Прикл. механика. – 2007. – Т.43, №10. – С.28-41.
5. **Каминский А. А.** Исследование процесса начального поворота трещины на границе раздела двух упругих сред при растяжении и сдвиге [текст] / А.А. Каминский, М.В. Дудик, Л. А. Кипнис // Прикл. механика. – 2009. – Т.45, №6. – С.71-79.
6. **Дудик М. В.** Дослідження початкового етапу повороту міжфазної тріщини у кутовій точці межі розділу середовищ [текст] / М.В. Дудик, Ю.В. Діхтяренко // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – Т.47, № 5. – С. 53-59.
7. **Діхтяренко Ю. В.** Моделювання початкової пластичної смуги у кутовій точці межі розділу середовищ з міжфазною тріщиною [текст] / Ю.В. Діхтяренко // Вісник Одес. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2011. – Т. 16, вип. 16. – С. 76-86.
8. **Tvergaard V.** On the toughness of ductile adhesive joints [text] / V. Tvergaard, J.H. Hutchinson // J. Mech. Phys. Solids. – 1996. – V. 44, No. 5. – P.789-800.
9. **Kishimoto K.** Fracture mechanics of bonding interface: a cohesive zone model [text] / K. Kishimoto, M. Omiya, W. Yang // Sensors and Actuators. – 2002. – V. A 99. – P. 198-206.
10. **Tvergaard V.** Influence of plasticity on interface toughness in a layered solid with residual stresses // Int. Journal of Solids and Structures. – 2003. – V. 40. – P. 5769-5779.
11. **Tvergaard V.** Cohesive zone representations of failure between elastic or rigid solids and ductile solids [text] / V. Tvergaard // Engineering Fracture Mechanics. – 2003. – V. 70. – P. 1859-1868.
12. **Jin Z.-H.** Cohesive zone modeling of interface fracture in elastic bi-materials [text] / Z.-H. Jin , C.T. Sun // Engineering Fracture Mechanics. – 2005. – V. 72. – P. 1805-1817.
13. **Sun C. T.** Modeling of composite fracture using cohesive zone and bringing models [text] / C.T. Sun, Z.-H. Jin // Composites Science and Technology. – 2006. – V. 66. – P. 1297-1302.
14. **Lee M. Y.** Determination of cohesive parameters for a mixed-mode cohesive zone model [text] / M.J. Lee, T.M. Cho, W.S. Kim, B.C. Lee, J.J. Lee // Int. Journal of Adhesion & Adhesives. – 2010. – V. 30. – P. 322-328.
15. **Гольдштейн Р.В.** Моделирование трещиностойкости композиционных материалов [текст] / Р.В. Гольдштейн, М.Н. Перельмутер // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т. 2, № 2. – С. 22-39.
16. **Волошко О.І.** Числове дослідження зон передруйнування тріщини в адгезійному прошарку між двома ізотропними матеріалами [текст] / О.І. Волошко, В.В. Лобода // машинознавство. – 2009. – №12. – С. 9-16.
17. **Erdogan F.** Stress distribution in a nonhomogeneous elastic plane with cracks [text] / F. Erdogan // Journal of Applied Mechanics. – 1963. – V. 30. – P. 232-237).
18. **Rice J. R.** Plane problems of crack in dissimilar media [text] / J.R. Rice, G.C. Sih // Journal of Applied Mechanics. – 1965. – V. 32. – P. 418-423.

19. **England A. H.** A crack between dissimilar media [text] / A.H. England // Journal of Applied Mechanics. - 1965. - V. 32. - P. 400-402.
20. **Rice J. R.** Elastic Fracture Mechanics Concepts for Interfacial Cracks [text] / J.R. Rice // Journal of Applied Mechanics. - 1988. - V. 55. - P.98-103.
21. **Храпков А. А.** Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил [текст] / А.А. Храпков // Прикл. математика и механика. - 1971. - Т. 35, вып. 4. - С. 677-689.
22. **Khrapkov A. A.** Wiener-Hopf method in mixed elasticity theory problems [text] / A.A. Khrapkov. - SPb.: V.E. Vedeneev VNIIG Publishing House, 2001. - 144 p.
23. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи [текст] / Ф.Д. Гахов. - М.: Наука, 1977. - 640 с.
24. **Нобл Б.** Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных [текст] /Б. Нобл. - М.: Изд-во иностр. лит., 1962. - 279с.
25. **Каминский А. А.** О модели Дагдейла для трещины на границе раздела различных сред [текст] / А.А. Каминский, Л. А. Кипнис, В.О. Колмакова // Прикл. механика. - 1999. - Т. 35, №1. - С. 63-68.
26. **Каминский А. А.** Линия скольжения в конце разреза на границе раздела сред [текст] / А.А. Каминский, Л. А. Кипнис, В.О. Колмакова // Прикл. механика. - 1995. - Т. 31, №6. - С. 86-91.