

УДК 539.375

Дудик М. В.¹, к. ф.-м. н., доц.
Діхтяренко Ю.В.¹ ст. викладач
Щепкіна Я.І.¹ студент

**Вплив зони передруйнування з областю
деструкції та лінійного зміцнення
адгезійного матеріалу на міцність
міжфазного з'єднання**

¹ Уманський державний педагогічний універси-
тет імені Павла Тичини, 20300, Черкаська обл.,
м. Умань, вул. Садова, 2
e-mail: dudik_m@hotmail.com

M. V. Dudyk¹, Ph. D., Assoc. Prof.
Yu. V. Dikhtiarenko¹ senior teacher
Ya. I. Shchepkina¹ student

**Influence of the prefracture zone with the
destruction area and linear strengthening of
adhesion material on strength of interfacial
joint**

¹ Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University,
20300, Cherkassy region, Uman, Sadova str., 2
e-mail: dudik_m@hotmail.com

В умовах плоскої деформації в рамках моделі Леонова-Панасюка виконано розрахунок маломасштабної зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі з лінійним зміцненням і зоною деструкції біля вершини міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів. Досліджено вплив утворення зони передруйнування на умови граничної рівноваги кусково-однорідного тіла.

Ключові слова: міжфазна тріщина, зона передруйнування, зона деструкції, лінійне зміцнення, граничний стан.

Under the plain strain conditions, by the Wiener-Hopf method we found the analytical solution of the problem about the computation of the small-scale pre-fracture zone with the near-tip area of destruction in the vicinity of angular point of the broken interface of two different elastic media, from which an interfacial crack goes out. The pre-fracture, which propagates from an angular point along the interface in the joining material, is simulated by the line of rupture of the normal displacement, on which the normal stress satisfies the linear law of strengthening. The destruction zone is determined as an adjacent to the crack tip the area of pre-fracture zone with the high level of the breaking interparticle bonds, that causes the decrease of the stress in the zone and the increase of its opening. The transcendent equations for the calculations of sizes of the pre-fracture and destruction zones and of the crack opening in its tip are obtained. The numerical analysis of the influence of strengthening and the formation of destruction zone on the conditions of start of the crack and on the ultimate sizes of zones is carried out. Their substantial dependence on the parameters of material strengthening, loading configuration and on the interface angle as well as is revealed. It is established that the ultimate size of the destruction zone constitutes a considerable part of the pre-fracture zone, reaching 0,9 of its lengths.

Key words: interfacial crack, pre-fracture zone, destruction zone, crack opening, ultimate state.

Статтю представив докт. фіз.-мат. наук, проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Актуальною проблемою механіки руйнування композитів, зварних і клеєних з'єднань тощо є визначення умов граничної рівноваги кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною. Високий рівень напружень біля вершини тріщини призводить до появи в її околі зони передруйнування – області необоротних деформацій матеріалу. Одним з шляхів урахування впливу зони передруйнування на граничний стан тіла є використання моделі Леонова-Панасюка [1], яка подає

зону поверхнею розриву нормального переміщення із заданим на ній сталим нормальним напруженням, що має смисл опору відриву матеріалу і визначається експериментально як середнє значення напруження по довжині зони. Проте, така модель не враховує особливості структури зони і розподілу напружень в ній, тому в [2, 3] було розвинуто її варіант з лінійним зміцненням матеріалу та зоною розпушення (деструкції) з високим рівнем деформацій. При цьому в [3] у якості критерію, що визначає умови зрушення тріщини, прийнято досягнення довжиною зони

деструкції певного критичного значення d_c , що використовується як окрема характеристика матеріалу. Нижче в рамках моделі [2, 3] розглядається метод дослідження граничного стану тіла з використанням поширеного у механіці руйнування КРТ-критерію [1], що передбачає зрушення тріщини при досягненні розкриття тріщини у її вершині критичного значення.

2. Постановка задачі та її розв'язання

У умовах плоскої деформації розглядається задача про визначення параметрів стану граничної рівноваги кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною довжини L , яка виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів з модулями Юнга E_1 , E_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1 , ν_2 . Передбачається, що у випадку меншої тріщиностійкості з'єднувального матеріалу порівняно з тріщиностійкістю матеріалів з'єднаних частин тіла у ньому утворюється маломасштабна зона передруйнування довжини l , яка містить у прилеглий до вершини тріщини частині область деструкції матеріалу довжини d .

Вважаємо граничним стан тіла, коли розкриття зони передруйнування у вершині тріщини досягає критичного значення d_c , яке є базовою характеристикою тріщиностійкості з'єднувального матеріалу. Нехтуючи товщиною з'єднувального шару і деформаціями зсуву, моделюватимемо зону передруйнування лінією розриву нормального переміщення, на якій задано певний розподіл нормального напруження, що відповідає лінійному зміцненню матеріалу [2, 3]. Для розрахунку розкриття та інших параметрів зони у припущенні її маломасштабності аж до зрушення тріщини розглядатимемо тіло як кусково-однорідну площину з межею поділу матеріалів у формі сторін кута, з вершини якого вздовж однієї зі сторін виходить півнескінчена тріщина з вільними від навантаження берегами, вздовж іншої – лінія розриву (рис. 1).

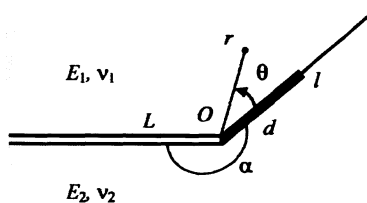


Рис. 1. Розрахункова схема задачі

У полярній системі координат з початком у вершині тріщини граничні умови відповідної крайової задачі теорії пружності мають вигляд:

$$\theta = -\alpha \cup \theta = 2\pi - \alpha: \sigma_\theta = \tau_{r,\theta} = 0;$$

$$\theta = 0: \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r,\theta} \rangle = 0, \langle u_r \rangle = 0;$$

$$\theta = 0, r > l: \langle u_\theta \rangle = 0;$$

$$\theta = 0: \sigma_\theta = \begin{cases} (r + d_c - d) \frac{\sigma_c}{d_c}, & 0 \leq r \leq d, \\ \sigma_s + (\sigma_c - \sigma_s) \frac{l - r}{l - d}, & d \leq r \leq l, \end{cases} \quad (1)$$

де d_c – критичний розмір зони деструкції, якому відповідає зрушення тріщини, σ_s і σ_c – границі текучості і міцності з'єднувального матеріалу при розтягу [2, 3].

Для маломасштабної зони передруйнування розв'язок задачі на відстанях, значно більших за її довжину, але значно менших від довжини тріщини, повинен переходити у асимптотично найбільший розв'язок біля вершини тріщини аналогічної задачі без зони передруйнування, відомий з [4]. Це дозволяє сформулювати умову на нескінченності у вигляді:

$$\theta = 0, r \rightarrow \infty: \sigma_\theta = \sum_i C_i F(\lambda_i) r^{\lambda_i} + o(1/r),$$

де λ_i – показники сингулярності напружень, що є коренями у смузі $-1 < \text{Re } \lambda < 0$ характеристичного рівняння задачі

$$D(\lambda) = 0, \quad (2)$$

$$D(\lambda) = -(1 + \kappa_1)^2 t_1 - 4(1 + \kappa_1)(e - 1)t_2 - e^2(1 + \kappa_2)^2 t_3 + 4(e - 1)^2 t_4 + 4e(1 + \kappa_2)(e - 1)t_5 + 2e(1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1)t_5,$$

$$t_1 = (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)\alpha, \quad t_2 = \sin^2(\lambda + 1)(2\pi - \alpha),$$

$$t_3 = (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)(2\pi - \alpha), \quad t_4 = \sin^2(\lambda + 1)\alpha, \quad t_5 = t_1 + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin 2\lambda \cos(\lambda + 1)(2\pi - \alpha),$$

$$e = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} \cdot \frac{E_1}{E_2}, \quad \kappa_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)}; \quad F(\lambda) = \frac{1}{X\Delta} [2t_1\psi_1 + e(1 + \kappa_2)((\lambda + 2)\psi_2 - \psi_3)], \quad X = 4\sqrt{\frac{2\pi(1 + e\kappa_2)}{(e + \kappa_1)}},$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha)[(e - 1)\lambda - (1 + \kappa_1)] - (e - 1)(\lambda + 2)\sin\lambda(2\pi - \alpha), \\ \psi_2 &= 2\lambda \sin^2\alpha \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha) - \sin\lambda(2\pi - \alpha) + \cos(\lambda + 2)\alpha \sin 2\lambda\pi, \\ \psi_3 &= \sin\lambda\alpha[2\cos(\lambda + 2)\alpha \cos(\lambda + 2)(2\pi - \alpha) + \lambda \cos 2\lambda\pi], \\ \Delta &= (1 + \kappa_1)t_6 - 0,5e(1 + \kappa_2)t_7 + 2(e - 1)[\lambda t_8 \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha) + t_9 \sin\lambda\alpha], \\ t_6 &= \lambda \sin\alpha \cos(\lambda + 1)(2\pi - \alpha) - \sin\lambda\alpha \cos 2\lambda\pi, \quad t_7 = (\lambda + 2)\sin\lambda(2\pi - \alpha) - \lambda \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha), \\ t_8 &= (\lambda + 2)\sin^2\alpha - \sin^2(\lambda + 1)\alpha, \quad t_9 = (\lambda + 2)\sin(\lambda + 1)(2\pi - \alpha)\sin(\lambda + 1)\alpha - \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha)\sin(\lambda + 2)\alpha; \end{aligned}$$

C_i – сталі, які характеризують інтенсивність зовнішнього силового поля і вважаються заданими за умовою задачі. Припускається, що на межі поділу в області зони передруйнування діє розтягувальне нормальне напруження, яке забезпечує відривні деформації, необхідні для утворення зони.

Згідно з [4], в залежності від пружних параметрів з'єднаних матеріалів і кута зламу межі поділу рівняння (2) може мати два чи три дійсних показника сингулярності $\lambda_i, i=1+3$, або ж два комплексно спряжених $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ і один чи жодного дійсного показника λ_3 . В подальшому при розрахунках параметрів зони розрізнятимемо випадки наявності лише дійсних або й комплексних показників сингулярності.

Сформульована задача лише умовою (1) відрізняється від аналогічної задачі про міжфазну зону передруйнування без зони деструкції і лінійного зміцнення, розв'язаної в [4] за допомогою методу Вінера-Хопфа. З урахуванням (1) знайдемо в [4] розв'язок приводить до рівняння для визначення довжини зони передруйнування $x = l/L$ (в одиницях довжини тріщини) в залежності від наявних коренів характеристичного рівняння (2) у смугі $-1 < \text{Re } \lambda < 0$:

а) якщо характеристичне рівняння (2) має 2 або 3 дійсні корені, то йому відповідає рівняння:

$$\sigma \sum_{i=1}^3 n_i F(\lambda_i) N(\lambda_i) x^{\lambda_i} = \frac{(1 - qy)S_1 - (1 - q)S_2}{1 - y}, \quad (3)$$

$$\sigma = \frac{C_1 L^{\lambda_1}}{\sigma_c}, \quad n_i = \frac{C_i L^{\lambda_i}}{C_1 L^{\lambda_1}};$$

б) якщо рівняння (2) має 2 комплексно спряжені ($\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \lambda_r + i\lambda_m$, $C_1 = \overline{C_2} = \frac{K_I + iK_{II}}{\sqrt{2\pi L^{\lambda_m}}}$) і один або жодного дійсного кореня λ_3 , то рівняння набуває вигляду:

$$\sigma \left\{ 2|F(\lambda_1)| \cdot |N(\lambda_1)| x^{2\lambda_r} \cos(\lambda_m \ln x + \varphi + \psi + \xi) + n_3 F(\lambda_3) N(\lambda_3) x^{\lambda_3} \right\} =$$

$$= \frac{(1 - qy)S_1 - (1 - q)S_2}{1 - y}, \quad (4)$$

$$\varphi = \arg F(\lambda_1), \quad \psi = \arctg n, \quad n = K_{II} / K_I,$$

$$\sigma = \frac{|K| L^{\lambda_r}}{\sqrt{2\pi} \sigma_c}, \quad \xi = \arg N(\lambda_1), \quad n_3 = \frac{\sqrt{2\pi} C_3 L^{\lambda_3}}{|K| L^{\lambda_r}};$$

$K = K_I + iK_{II}$ – комплексний коефіцієнт інтенсивності напружень. Тут і нижче використовуються спільні для випадків дійсних і комплексних показників сингулярності λ_1, λ_2 позначення:

$$q = \frac{\sigma_s}{\sigma_c}, \quad y = \frac{d}{l}, \quad N(\lambda) = \frac{K^+(-\lambda - 1)}{(\lambda + 1)G^+(-\lambda - 1)};$$

$$S_1 = N(0), \quad S_2 = N(1), \quad K^+(p) = \frac{\Gamma(1 - p)}{\Gamma(0,5 - p)},$$

$$G^+(p) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G(z)}{z - p} dz \right] \quad (\text{Re } p < 0),$$

$$G(p) = \frac{(1 + \kappa_1)D_1(p) \cos p\pi}{AD(-1 - p) \sin p\pi},$$

$$A = \frac{(1 + \kappa_1)[e + \kappa_1 + 1 + e\kappa_2]}{2(e + \kappa_1)(1 + e\kappa_2)};$$

$$D_1(p) = e(1 + \kappa_2)\Delta_1\Delta_2 - (1 + \kappa_1)\Delta_3\Delta_4,$$

$$\Delta_1 = p^2 \sin^2\alpha - \sin^2 p(2\pi - \alpha),$$

$$\Delta_2(p) = p \sin 2\alpha - \sin 2p\alpha,$$

$$\Delta_3 = p^2 \sin^2\alpha - \sin^2 p\alpha,$$

$$\Delta_4(p) = p \sin 2\alpha + \sin 2p(2\pi - \alpha);$$

$\Gamma(z)$ – гамма-функція Ейлера.

Рівняння (3), (4) містять невідому відносну довжину зони деструкції $y = d/l$. Для самоузгодженого визначення x і y використовуємо умову рівності розкриття зони передруйнування в кінці зони деструкції його критичному значенню $\langle u_0(d, 0) \rangle = \delta_c$, що приводить до додаткового рівняння:

$$-\frac{x}{1 + \kappa_1} \left\{ C_0(x, y; \sigma) + \sum_k C_k(x, y; \sigma)(1 - y)^{1 + \lambda_k} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\delta_c E_1}{4(1-\nu_1^2)L\sigma_c} \equiv \delta'_c, \quad (5) \\
 C_0(x, y; \sigma) &= (1-y) \left\langle \left(1 - \frac{xy}{x_c y_c} \right) \left\{ \frac{f''(-1)D_1'''(-1)}{[D_1''(-1)]^2} + \right. \right. \\
 &+ Q_0 \left[\ln 4 - \frac{4}{3} + 2I - \frac{S_2}{S_1} \right] \left. \right\rangle + \frac{Q_0}{S_1} [S_2 q - P_0(x, \sigma)] + \\
 &+ \frac{f(-2)x(1+y)}{2D_1(-2)x_c y_c} + Q_0 y \ln y \cdot \left(q - \frac{x}{x_c y_c} \right), \\
 Q_0 &= \frac{2f'(-1)}{D_1''(-1)}, \\
 C_k(x, y; \sigma) &= \frac{f(-1-\lambda'_k) G^+(-1-\lambda'_k)}{D_1'(-1-\lambda'_k) K^+(-1-\lambda'_k)} \times \\
 &\times \left\{ -\frac{S_1}{\lambda'_k} \left[\left(1 - \frac{xy}{x_c y_c} \right) y^{-\lambda_k} + (1-qr) \frac{1-y^{-\lambda_k}}{1-y} \right] + \right. \\
 &+ \left. \frac{S_2}{1-\lambda'_k} \left[\frac{xy^{1-\lambda_k}}{x_c y_c} - (1-q) \frac{1-y^{-\lambda_k}}{1-y} \right] - P_k(x, \sigma) \right\}, \\
 f(p) &= [(p-\kappa_1)\tilde{a}_1(p) + \tilde{a}_2(p)] - \\
 &- e[(p-\kappa_2)\tilde{b}_1(p) + \tilde{b}_2(p)], \\
 \tilde{a}_1(p) &= e(1+\kappa_2) \left(\frac{1}{2} \Delta_2 \Delta_6 + 2\Delta_3 \Delta_8 \right) - \\
 &- 2\Delta_3 [1+\kappa_1 - 2(e-1)\Delta_5], \\
 \tilde{a}_2(p) &= e(1+\kappa_2) [2(p-1)\Delta_7 \Delta_8 - \frac{1}{2}(p+1)\Delta_2 \Delta_6] - \\
 &- 2\Delta_3 \{ 2\Delta_7 [e+\kappa_1 - p(e-1)] - (1+\kappa_1)(p+1) \}, \\
 \tilde{b}_1(p) &= 2\Delta_1 [e(1+\kappa_2) + 2(e-1)\Delta_{10}] - \\
 &- (1+\kappa_1) \left(\frac{1}{2} \Delta_4 \Delta_9 + 2\Delta_7 \Delta_{10} \right), \\
 \tilde{b}_2(p) &= (1+\kappa_1) \left(\frac{1}{2} (p+1)\Delta_4 \Delta_9 - 2(p-1)\Delta_7 \Delta_8 \right) - \\
 &- 2\Delta_1 \{ e(1+\kappa_2)(p+1) - 2\Delta_8 [1+e\kappa_2 + p(e-1)] \}, \\
 \Delta_5(p) &= p \sin^2 \alpha - \sin^2 p(2\pi - \alpha), \\
 \Delta_6(p) &= p \sin 2\alpha - \sin 2p(2\pi - \alpha), \\
 \Delta_7(p) &= p \sin^2 \alpha + \sin^2 p(2\pi - \alpha), \\
 \Delta_8(p) &= p \sin^2 \alpha + \sin^2 p\alpha, \\
 \Delta_9(p) &= p \sin 2\alpha + \sin 2p\alpha, \\
 \Delta_{10}(p) &= p \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha; \\
 I &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-t^2) \ln G(it)}{(1-t^2)^2 + 4t^2} dt;
 \end{aligned}$$

$x_c = l_c / L$, $y_c = d_c / l_c$ – граничні значення відно-
сних розмірів зон передруйнування і деструкції,
штрихи при функціях $f(p)$ та $D_1(p)$ означають
похідні по p ; λ'_k – корені рівняння $D_1(-1-x)=0$,
які задовольняють умову $\text{Re } \lambda'_k > -1$; функції
 $P_0(x, \sigma)$ і $P_k(x, \sigma)$ відносної довжини зони пере-
друйнування x і безрозмірного параметра наван-
таження σ в залежності від наявних коренів рів-
няння (2) у смузі $-1 < \text{Re } \lambda < 0$ мають наступний
вигляд:

а) λ_1, λ_2 є дійсними:

$$P_0(x, \sigma) = \sigma \sum_i \frac{n_i F(\lambda_i) N(\lambda_i)}{\lambda_i} x^{\lambda_i},$$

$$P_k(x, \sigma) = \sigma \sum_i \frac{n_i F(\lambda_i) N(\lambda_i)}{\lambda_i - \lambda'_k} x^{\lambda_i},$$

б) λ_1, λ_2 є комплексно спряженими ($\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$):

$$P_0(x, \sigma) = 2\sigma \frac{|F(\lambda_1)| \cdot |N(\lambda_1)|}{|\lambda_1|} x^{\lambda_r} \cos(\lambda_m \ln x +$$

$$+ \varphi + \psi + \xi - \arg \lambda_1) + \sigma \frac{n_3 F(\lambda_3) N(\lambda_3)}{\lambda_3} x^{\lambda_3},$$

$$P_k(x, \sigma) = 2\sigma \frac{|F(\lambda_1)| \cdot |N(\lambda_1)|}{|\lambda_1 - \lambda'_k|} x^{\lambda_r} \cos(\lambda_m \ln x +$$

$$+ \varphi + \psi + \xi - \arg(\lambda_1 - \lambda'_k)) + \sigma \frac{n_3 F(\lambda_3) N(\lambda_3)}{\lambda_3 - \lambda'_k} x^{\lambda_3}.$$

В рівняння (3)-(5) відповідно до прийнятого в
(1) розподілу напружень у зоні передруйнування
в якості параметра входить граничний розмір зо-
ни деструкції d_c в момент зрушення тріщини.
Для його знаходження, дотримуючись КРТ-
критерію [1], прийmemo в якості умови зрушення
досягнення розкриття тріщини в її вершині кри-
тичного значення: $\delta(0, 0) = \langle u_\theta(0, 0) \rangle = \delta_\kappa$. Припу-
скаючи, що при цьому довжина зони передруй-
нування залишається значно меншою від довжи-
ни тріщини, визначимо нормоване розкриття
тріщини у вершині $\delta'_0(\sigma) = \frac{\delta(0, 0) E_1}{4(1-\nu_1^2)L\sigma_c}$:

$$\begin{aligned}
 \delta'_0(\sigma) &= -\frac{x}{A\sqrt{\pi G(0)}} \left\{ S_1 \left[\left(1 - \frac{xy}{x_c y_c} \right) y + (1-qr) \right] + \right. \\
 &+ \left. \frac{S_2}{2} \left[\frac{xy^2}{x_c y_c} - (1-q)(1+y) \right] - P(x, \sigma) \right\}, \quad (6)
 \end{aligned}$$

де функція $P(x, \sigma)$ в залежності від значень показників сингулярності має вигляд:

а) λ_1, λ_2 є дійсними:

$$P(x, \sigma) = \sigma \sum_i \frac{n_i F(\lambda_i) N(\lambda_i)}{1 + \lambda_i} x^{\lambda_i};$$

б) λ_1, λ_2 є комплексно спряженими:

$$P(x, \sigma) = 2\sigma \frac{|F(\lambda_1)| \cdot |N(\lambda_1)|}{|1 + \lambda_1|} x^{\lambda_r} \cos(\lambda_m \ln x + \varphi + \psi + \xi - \arg(1 + \lambda_1)) + \sigma \frac{n_3 F(\lambda_3) N(\lambda_3)}{1 + \lambda_3} x^{\lambda_3}.$$

Таким чином, алгоритм визначення параметрів зон передруйнування і деструкції є наступним. На першому етапі, покладаючи в рівняннях (3)-(6) $x = x_c$, $y = y_c$, $\sigma = \sigma_k$, $\delta'_0(\sigma_k) = \delta_k E_1 / 4(1 - \nu_1^2) L \sigma_c \equiv \delta'_k$, з отриманої системи рівнянь знаходимо граничне навантаження σ_k тіла перед зрушенням і відповідні йому граничні розміри зони передруйнування і зони деструкції x_c, y_c . Ці значення підставляються у вихідні рівняння (3)-(6), з яких визначаються розміри зон x, y і розкриття тріщини $\delta'_0(\sigma)$ при заданому безрозмірному навантаженні σ .

3. Числовий аналіз результатів і висновки

Приведені у п.2 рівняння використано для дослідження впливу зони деструкції і лінійного зміцнення з'єднувального матеріалу на умови граничної рівноваги кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною. На рис. 2-4 подано результати числових розрахунків граничних відносних розмірів зони передруйнування x_c , зони деструкції y_c і нормованого граничного навантаження σ_k для деяких параметрів композитного з'єднання і конфігурації зовнішнього навантаження при $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ і $n_3 = 0$. Пунктирні лінії відповідають розрахункам параметрів зони передруйнування без урахування зони деструкції і лінійного зміцнення, виконаним згідно з моделлю, розглянутою у [4].

Згідно з рис. 2, граничні розміри зон передруйнування і деструкції та граничне навантаження є тим більшими, чим більше відрізняються модулі Юнга матеріалів ($E_1/E_2 \rightarrow 0$). Утворення зони деструкції призводить до зниження граничного навантаження і довжини зони передруйнування (суцільні лінії) порівняно з випадком відсутності зони деструкції (пунктирні лінії). Граничний розмір зони деструкції виявляється досить значним, одного порядку величини з довжиною всієї зони передруйнування.

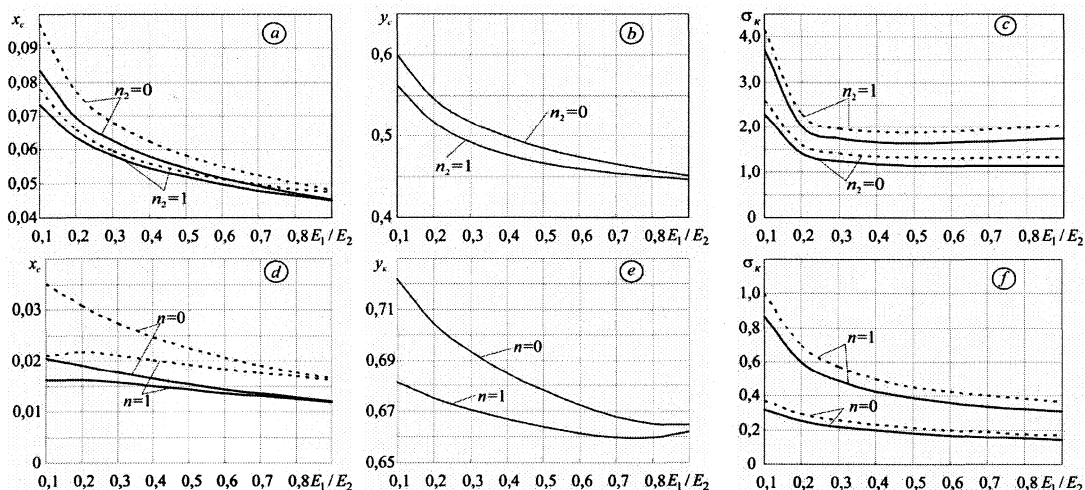


Рис. 2. Залежність граничних розмірів зони передруйнування x_c , зони деструкції y_c і навантаження σ_k від відношення модулів Юнга з'єднаних матеріалів E_1/E_2 для дійсних (a, b, c: $\alpha=50^\circ$, $\delta'_k = 0,1$, $\delta'_c = 0,08$, $q=0,5$) і комплексних (d, e, f: $\alpha=210^\circ$, $\delta'_k = 0,01$, $\delta'_c = 0,008$, $q=0,5$) коренів рівняння (2).

Як видно з рис. 3, характер залежності розмірів зони передруйнування і зони деструкції та граничного навантаження від відношення

$q = \sigma_s / \sigma_c$, яке характеризує ступінь зміцнення матеріалу, є різним для різних δ_c . Посилення зміцнення (зменшення величини σ_s / σ_c) може супроводжуватись як зменшенням, так і збільшенням x_c , y_c в залежності від конфігурації навантаження, заданого множниками n_i і n в рів-

няннях (3-6), та величини критичного розкриття зони деструкції δ_c . Зміцнення з'єднувального матеріалу призводить до зростання граничного навантаження σ_k при малих і майже не впливає на нього при достатньо великих значеннях параметра δ_c (рис. 3, c, f).

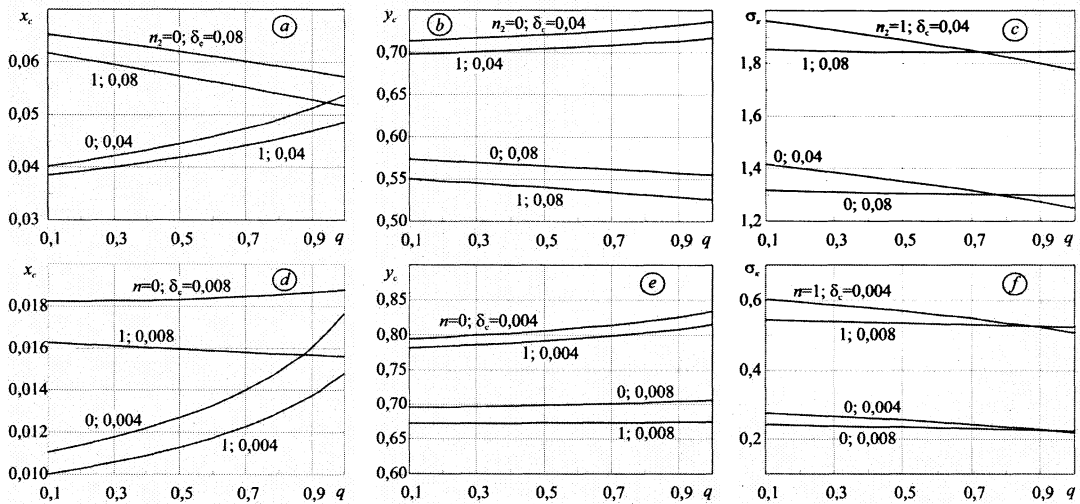


Рис. 3. Залежність граничних розмірів зони передруйнування x_c , зони деструкції y_c і навантаження σ_k від параметра лінійного зміцнення $q = \sigma_s / \sigma_c$ для дійсних (a, b, c: $\alpha = 50^\circ$, $\delta'_k = 0,1$) і комплексних (d, e, f: $\alpha = 210^\circ$, $\delta'_k = 0,01$) коренів рівняння (2); $E_1/E_2 = 0,25$.

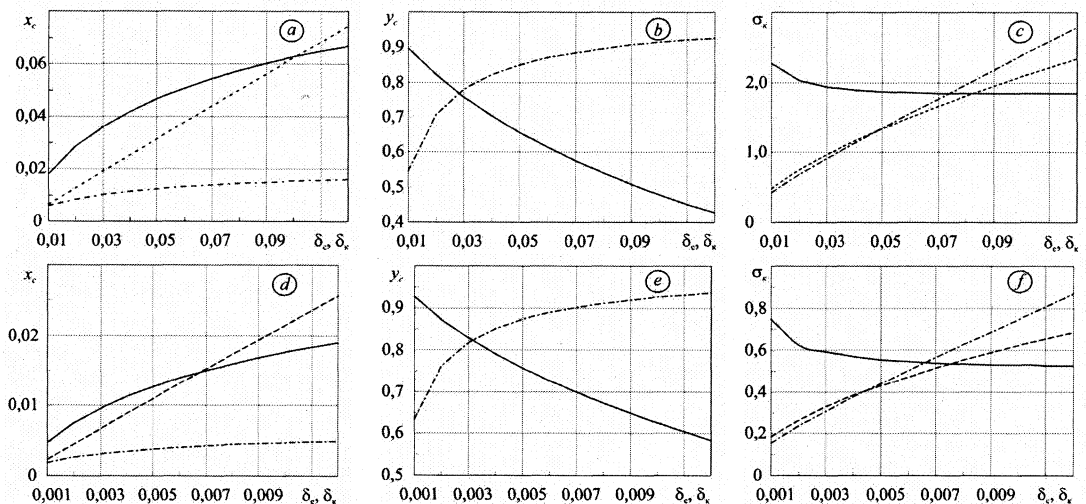


Рис. 4. Залежність параметрів граничного стану зони передруйнування від граничних розкриттів δ_c (суцільні лінії) і δ_k (пунктирні і штрих-пунктирні лінії) для $E_1/E_2 = 0,25$, $q = 0,5$; a, b, c) $\alpha = 50^\circ$, $n_2 = 1$; d, e, f) $\alpha = 210^\circ$, $n = 1$.

Графіки на рис. 4 ілюструють залежності граничних розмірів зон передруйнування і деструкції та граничного навантаження від граничного розкриття δ_c зони деструкції (суцільні лінії) і гра-

ничного розкриття зони передруйнування δ_κ у вершині тріщини (в рамках моделей без зони деструкції і зміцнення та з їх урахуванням – відповідно пунктирні і штрих-пунктирні лінії). При розрахунках залежності параметрів зони передруйнування від δ_κ у випадку дійсних показників сингулярності λ_1, λ_2 покладали $\delta_c=0,008$, у випадку комплексних – $\delta_c=0,001$. При розрахунках залежності параметрів зони передруйнування від δ_c

у випадку дійсних λ_1, λ_2 покладали $\delta_\kappa=0,1$, у випадку комплексних – $\delta_\kappa=0,01$. З рисунків випливає, що при збільшенні δ_c відносна довжина зони передруйнування $x_c=l_c/L$ зростає, а відносна довжина зони деструкції $y_c=d_c/l_c$ і нормоване граничне навантаження σ_κ зменшуються (суцільні лінії). При збільшенні δ_κ , як і слід було очікувати з фізичних міркувань, всі вказані параметри зростають.

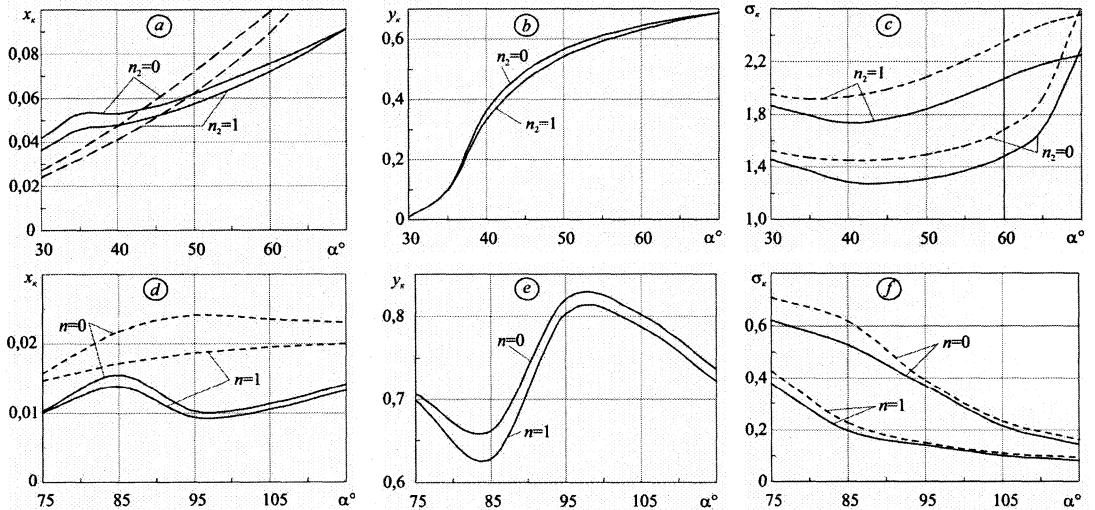


Рис. 5. Залежність граничних розмірів зони передруйнування x_c , зони деструкції y_c і навантаження σ_κ від кута зламу межі поділу середовищ α для дійсних (a, b, c: $\delta'_\kappa = 0,1$, $\delta'_c = 0,08$) і комплексних (d, e, f: $\alpha = 210^\circ$, $\delta'_\kappa = 0,01$, $\delta'_c = 0,008$) коренів рівняння (2); $E_1/E_2=0,25$, $q=0,5$.

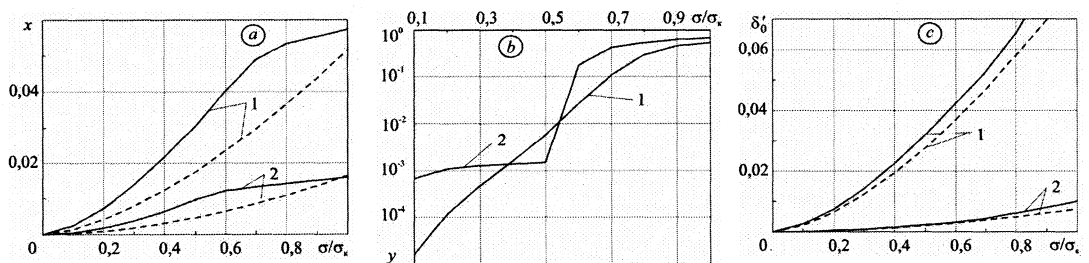


Рис. 6. Залежність відносних розмірів зон передруйнування x і деструкції y та приведеного розкриття тріщини δ'_0 від безрозмірного параметра навантаження σ ; 1) $\alpha=50^\circ$, $\delta'_\kappa = 0,1$, $\delta'_c = 0,08$, $n_2=1$; 2) $\alpha=210^\circ$, $\delta'_\kappa = 0,01$, $\delta'_c = 0,008$, $n=1$; $E_1/E_2=0,25$.

Граничні параметри зони передруйнування суттєво залежать від кута зламу межі поділу середовищ α (рис. 5). В цій залежності спостерігаються максимуми і мінімуми розмірів всієї зони передруйнування і зони деструкції. У випадку комплексно спряжених λ_1, λ_2 максимумам граничної довжини зони передруйнування наближено відповідають мінімуми відносної довжини зо-

ни деструкції і навпаки (рис. 5, d, e). Відносна довжина зони деструкції є досить малою при малих кутах розхилу ($\alpha < 35^\circ$, рис. 5, b). Згідно з рис. 5, c, f, при обраних параметрах δ_c, δ_κ граничне навантаження в моделі без зони деструкції (пунктирні лінії) виявляється більшим, ніж у моделі із зоною деструкції (суцільні лінії), проте цей висновок не є загальним, оскільки з рис. 4, c, f випливає, що при достатньо великих значеннях δ_c ,

δ_k нерівність між граничними навантаженнями стає протилежною.

Після визначення граничних параметрів розглянута модель дозволяє розрахувати параметри зони передруйнування при докритичному навантаженні. Результати окремих розрахунків, подані на рис. 6, показують, що розміри зон передруйнування і деструкції та розкриття тріщини у вершині нелінійно зростають з ростом зовнішнього навантаження, заданого безрозмірним параметром σ . У зміцненому матеріалі при наявності зони деструкції довжина зони передруйнування і розкриття тріщини (суцільні лінії) при однакових умовах навантаження виявляються більшими, ніж при їх відсутності (пунктирні лінії, рис. 6, а, с). У залежності відносної довжини зони деструкції від навантаження передбачається стрибок при великих кутах зламу (рис. 6, б).

Висновки

В умовах плоскої деформації за допомогою методу Вінера-Хопфа знайдено аналітичний розв'язок задачі про розрахунок маломасштабної зони передруйнування з привершинною зоною де-

струкції в околі кутової точки межі поділу двох різних пружних середовищ, з якої виходить міжфазна тріщина. Зона передруйнування, що розвивається з кутової точки по межі поділу середовищ у з'єднувальному матеріалі, моделюється лінією розриву нормального переміщення, на якій нормальне напруження задовольняє лінійному закону зміцнення. Зона деструкції визначається як прилегла до вершини тріщини область зони передруйнування з високим рівнем розривних міжчастинкових зв'язків, що обумовлює зниження напруження в зоні і збільшення її розкриття. Отримано трансцендентні рівняння для визначення розмірів зони передруйнування і деструкції та розкриття тріщини у її вершині. Здійснено числовий аналіз впливу зміцнення і утворення зони деструкції на умови зрушення тріщини і граничні розміри зон. Виявлено їх суттєву залежність від параметрів зміцнення матеріалу, конфігурації навантаження, а також від кута зламу межі поділу середовищ. Встановлено, що граничний розмір зони деструкції складає значну частину зони передруйнування, досягаючи 0,9 її довжини.

Список використаних джерел

1. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В.В. Панасюк. – Киев: Наук. думка, 1968. – 246 с.
2. Панько І.М. Теоретичні основи інженерних методів для оцінки тріщиноустійкості матеріалів і елементів конструкцій. – Львів: Вид. центр Львів. нац. ун-ту ім. І. Франка, 2000. – 279 с.
3. Панасюк В.В. Гранична рівновага тіла з тріщиною з урахуванням особливостей розподілу напружень біля її вершини / В. В. Панасюк, І.М. Панько // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – 41, № 4. – С. 5–8.
4. Дудик М.В. Розвиток зони передруйнування від міжфазної тріщини у кутовій точці межі розділу двох пружних середовищ / М.В. Дудик, Ю.В. Діхтяренко // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2011. – 54, №2. – С.103-114.

References

1. PANASYUK, V.V. (1968) *Limit Equilibrium of Brittle Bodies with Cracks*. Kiev: Naukova Dumka.
2. PAN'KO, I.M. (2000) *Teoretychni osnovy inzhenernykh metodiv dlia otsinky trishchynostiikosti materialiv i elementiv konstruktssii*. Lviv: Vyd. tsentr Lviv. nats. un-tu im. I. Franka.
3. PANASYUK V.V. & PAN'KO I.M. (2005) Limiting equilibrium of a cracked body with regard for the specific features of the distribution of stresses near the crack tip. *Mater. Sci.* 41 (4). pp. 433–438.
4. DUDYK, M.V. & DIKHTYARENKO, Yu. V. (2012) Development of a prefracture zone from an interfacial crack at a corner point of an interface of two elastic media. *Journal of Mathematical Sciences*. 184 (2). pp.121-135.

Надійшла до редколегії 25.03.16