Міністерство освіти і науки України

Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

**Лінійна алгебра**

**Модуль ІІІ. Лінійний простір**

**Модуль ІV. Лінійний оператор**

Навчальний посібник

**Укладач Дубовик В. В.**

Умань

ПП Жовтий О. О.

2017

УДК 512.64(075.8)

ББК 22.143я73

Л59

*Рекомендовано до друку*

*вченою радою факультету фізики, математики та інформатики*

*Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини (протокол №9 від 20 лютого 2017)*

**Рецензенти:**

**Кіпніс Л. А.** – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри вищої математики та методики навчання математики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини.

**Побережець І. І.** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фізики і математики Уманського національного університету садівництва.

**Л59 Дубовик В. В.** Лінійна алгебра. Модуль ІІІ. Лінійний простір. Модуль IV. Лінійний оператор : навчальний посібник / В. В. Дубовик – Умань: ПП Жовтий О. О., 2017. – 140 с.

У посібнику розкрито теоретичні основи лінійних просторів та лінійних операторів, а також розглянуті практичні завдання по даних темах. Кожний розділ доповнений контрольними запитаннями та завданнями для самоконтролю.

УДК 512.64(075.8)

ББК 22.143я73

# Передмова

Сучасна педагогічна освіта вимагає від майбутніх вчителів математики володіти не тільки знаннями, вміннями і навичками елементарної математики, а й іншими математичними дисциплінами для того, щоб стати висококваліфікованим фахівцем у своїй справі. Зокрема, особлива увага приділяється вивченню лінійної алгебри, адже отримані знання по закінченні курсу необхідні для оволодіння сучасним математичним апаратом із метою подальшого його застосування під час вивчення інших математичних дисциплін, а також при проведенні самостійних наукових досліджень. Опанування курсу лінійної алгебри займає важливе місце в системі підготовки майбутнього вчителя математики, оскільки сприяє як формуванню наукового світогляду в цілому, так і математичної культури зокрема.

Посібник складається з двох розділів. У першому розділі розкриваються основні теоретичні відомості про лінійний простір, а саме: визначення лінійного простору і підпростору, поняття лінійної залежності і незалежності векторів, поняття розмірності лінійного простору, поняття евклідового і афінного просторів. У другому розділі розкриваються основні теоретичні відомості про лінійні оператори, а саме: поняття лінійного оператора, матриці, рангу та дефекту лінійного оператора, розглядаються операції над лінійними операторами тощо.

У обох розділах, після кожного параграфа, наведені приклади розв’язування задач різних рівнів складності, а також підібрано контрольні запитання та завдання для самостійного опрацювання.

За допомогою матеріалів, уміщених в посібнику, студенти можуть оволодіти теоретичними знаннями та практичними вміннями розв’язування типових задач.

У цілому за змістом, структурою, логікою та послідовністю викладання матеріалу навчально-методичний посібник “ Лінійна алгебра. Модуль ІІ та модуль ІІІ ” відповідає навчальній програмі з дисципліни «Лінійна алгебра» та є оригінальним виданням, яке має наукову новизну та практичну цінність. Він буде корисним для студентів педагогічних університетів та викладачів вищих навчальних закладів.

# Умовні позначення

Під час користування посібником можуть зустрічатися різноманітні позначення. Давайте ж розглянемо, що кожен із них означає:

**Визначення**. Матеріал виділений з лівої частини вертикальною лінією, з відступом у 2,5 см.

**Теорема**. В рамку з усіх сторін виділені теореми. Доведення цих теорема не виділені, знаходяться поза рамкою.

Матеріал виділений з правої сторони вертикальною лінією вказує на **аксіоми, наслідки теорем** чи той матеріал, який автор вважає виділити серед іншого.

**Зміст**

[**Передмова** 1](#_Toc481751360)

[**Умовні позначення** 4](#_Toc481751361)

[**Розділ І. Лінійний простір** 7](#_Toc481751362)

[Тема 1.1. Визначення лінійного простору і підпростору 7](#_Toc481751363)

[Тема 1.2. Лінійна залежність і незалежність векторів 16](#_Toc481751364)

[Тема 1.3. Розмірність і базис лінійного простору. Ізоморфізм 24](#_Toc481751365)

[Тема 1.4. Координати вектора. Матриця системи векторів. Простір рівнянь однорідної системи лінійних рівнянь 34](#_Toc481751366)

[Тема 1.5. Матриця переходу від одного базису до іншого 41](#_Toc481751367)

[Тема 1.6. Визначення евклідового простору. 49](#_Toc481751368)

[1.6.1. Визначення евклідового простору 49](#_Toc481751369)

[1.6.2. Довжина вектора. Кут між векторами. 52](#_Toc481751370)

[1.6.3. Ортонормований базис 54](#_Toc481751371)

[1.6.4. Афінний простір 55](#_Toc481751372)

[**Розділ 2. Лінійний оператор** 61](#_Toc481751373)

[Тема 2.1. Основні означення, приклади. Поняття матриці лінійного оператора 61](#_Toc481751374)

[2.1.1. Означення лінійного оператора 61](#_Toc481751375)

[2.1.2. Приклади лінійних операторів 63](#_Toc481751376)

[2.1.3. Означення матриці лінійного оператора 69](#_Toc481751377)

[Тема 2.2. Ранг та дефект лінійного оператора. Обмеження лінійного оператора на інваріантний підпростір 78](#_Toc481751378)

[2.2.1 Ранг та дефект лінійного оператора 78](#_Toc481751379)

[2.2.2 Обмеження лінійного оператора на інваріантний підпростір 81](#_Toc481751380)

[Тема 2.3. Алгебра лінійних операторів 82](#_Toc481751381)

[2.3.1. Додавання та множення лінійних операторів 82](#_Toc481751382)

[2.3.2. Множення лінійного оператора на число 84](#_Toc481751383)

[2.3.3. Оператор , що обернений до даного 86](#_Toc481751384)

[2.3.4. Зміна матриці лінійного оператора 92](#_Toc481751385)

[Тема 2.4. Власні вектори лінійного оператора 96](#_Toc481751386)

[2.4.1. Визначення власного оператора лінійного простору. 96](#_Toc481751387)

[2.4.2. Знаходження власних векторів 96](#_Toc481751388)

[2.4.2. Деякі властивості власних векторів лінійного оператора 98](#_Toc481751389)

[2.4.3. Другий спосіб знаходження власного вектора лінійного оператора, який відповідає простому кореню характеристичного рівняння 100](#_Toc481751390)

[**Історія лінійної алгебри** 107](#_Toc481751391)

[Використана література 127](#_Toc481751392)

# Розділ І. Лінійний простір

## Тема 1.1. Визначення лінійного простору і підпростору

Розглянемо непорожню множину елементів … і – множину всіх дійсних чисел.

Нехай заданий закон, в силу якого кожній парі *x, y* елементів множини *V* ставиться у відповідність деякий елемент *z* цієї ж множини. В цьому випадку говорять, що на множину задана внутрішня операція, або операція додавання*,* елемент *z* називають сумою і пишуть .

Крім того, будемо рахувати, що визначена зовнішня операція, або операція множення елементів множини *V* на число, тобто заданий закон, в силу якого кожному елементу і довільному числу ∈*R*ставиться у відповідність певний елемент . Будемо називати *z* добутком числа *a* на елемент і писати або .

Припустимо, що для введених операцій виконуються наступні аксіоми.

1. для будь-яких x, y ∈ V.
2. для будь-яких
3. В множині існує елемент, який будемо називати нульовим і позначати , таким, що для будь-якого .
4. Для кожного елементу існує елемент, який будемо називати протилежним елементу x і позначати – , такий, що
5. Для будь-якого .