

Міністерство освіти і науки України  
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

**ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ З АЛГЕБРИ ТА МАТЕМАТИЧНОГО  
АНАЛІЗУ**

*НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК*

Укладач: Рудницький С.О.

Умань  
2019

УДК 512+517]075.8

О-54

*Рекомендовано до друку Вченою радою  
Факультету фізики, математики та інформатики  
Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини  
(протокол № 3 від 1 листопада 2019 року)*

Рецензенти:

**ПОЛІЩУК Т.В.**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики та методики навчання математики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини

**ЧОРНОІВАН Ю.О.**, кандидат фізико-математичних наук, доцент, старший науковий співробітник Інституту механіки ім. С.П. Тимошенко НАН України

**О-54** Олімпіадні задачі з алгебри та математичного аналізу : навч. посібник / укл. С.О. Рудницький. – Умань: ВПЦ “Візаві”, 2019 – 147 с.

У навчальному посібнику подано матеріал з практичної підготовки до участі у студентських олімпіадах з математики різних рівнів. Посібник складається з двох розділів: *алгебра* та *математичний аналіз*. Усі теоретичні відомості ілюструються прикладами та типовими вправами для самостійного розв’язування.

Посібник розрахований на студентів фізико-математичних факультетів усіх форм навчання.

УДК 512+517]075.8

© С.О. Рудницький 2019

## ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	4
Розділ 1. Алгебра	5
Тема 1: Задачі в цілих числах	5
Тема 2: Алгебраїчні тотожності	17
Тема 3: Невід'ємність квадрата $x^2 \geq 0$	21
Тема 4: Нерівність Коші-Шварца	25
Тема 5: Нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним	30
Тема 6: Поліноми	32
Тема 7: Вкладені функції	40
Тема 8: Рекурентні послідовності	45
Тема 9: Функціональні рівняння	52
Тема 10: Тригонометричні тотожності	69
Тема 11: Тригонометричні підстановки	73
Тема 12: Тригонометричні телескопічні суми та добутки	76
Тема 13: Матриці та операції над ними	79
Розділ 2. Математичний аналіз	90
Тема 1: Границі числових послідовностей	90
Тема 2: Ряди. Знаходження суми ряду. Телескопічні ряди та нескінченні добутки	97
Тема 3: Похідна та її застосування. Теорема про середнє значення	106
Тема 4: Інтеграл та способи їх обчислення. Суми Рімана. Диференціювання під знаком інтеграла	117
Тема 5: Інтегральні нерівності	131
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	147

## ПЕРЕДМОВА

Олімпіади є важливою складовою підготовки сучасного вчителя або викладача математики. Вони надають змотивованим студентам шанс для вивчення концепцій та застосування стратегій, перевірки власних знань та здібностей, відкриття застосувань у реальному світі. Їхньою загальною метою є побудова відповідного підґрунтя для випускників математичних спеціальностей.

Навчальний посібник “Олімпіадні задачі з алгебри та математичного аналізу” підготовлено відповідно сучасним вимогам до професійної підготовки майбутнього вчителя математики. Він призначений допомогти у вивченні найважливіших тем та технік розв’язування задач, переконати читача у єдності різних розділів математики.

Матеріали посібника систематизовано у два розділи. У *першому розділі* розглядаються найважливіші поняття алгебри у розрізі окремих тем, де розкрито мистецтво алгебраїчного мислення в контексті олімпіадних задач. *Другий розділ* присвячено переважно тим задачам математичного аналізу, які є найуживанішими при проведенні математичних олімпіад різних рівнів.

Лаконічність, послідовність та доступність матеріалу, викладеного у посібнику, дозволить активізувати пізнавальну діяльність при вивченні математики, вивільнити час для практичної підготовки.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Gelca R., Putnam and beyond / Razvan Gelca, Titu Andreescu. – 2<sup>nd</sup> ed. – Springer, 2017. – 850 p.
2. Математичні олімпіади – 2014 : Метод. вказівки до розв'яз. задач для студ. усіх форм навчання / Уклад.: А.Б. Ільєнко, І.В. Орловський. – К.: НТУУ “КПІ”.– 2015. – 57 с.
3. Мітін Д.Ю. Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу: задачі студентських олімпіад. – Київ, 2014. – 64 с.
4. Nested functions [Електронний ресурс].– Режим доступу: <https://brilliant.org/wiki/nested-functions/>
5. Niculescu P. Integral inequalities. *\*Lecture presented on December 16, 2008, at the Abdus Salam School of Mathematical Sciences, Lahore.* [Електронний ресурс].– Режим доступу: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.625.7106&rep=rep1&type=pdf>
6. Putnam training problems, 2017 [Електронний ресурс].– Режим доступу: [http://math.northwestern.edu/putnam/training\\_problems-2017.pdf](http://math.northwestern.edu/putnam/training_problems-2017.pdf)
7. Студентські математичні олімпіади. Збірник задач. / Уклад. В.В. Булдигін, В.А. Кушніревич, О.С. Шкабара, В.В. Ясінський. – Київ, 2002. – 175 с.
8. Федак І.В. Функціональні рівняння: Навчальний посібник. (Видання друге). – Івано-Франківськ: ПНУ, 2018. – 144 с.
9. Шунда Н.М., Томусяк А.А. Практикум з математичного аналізу: Інтегральне числення. Ряди. – К.: Вища шк., 1995. – 541 с.