успішного професійного розвитку перекреслює у фахівця всі інші позитивні моменти – наявність у нього високого рівня розвитку необхідних психофізіологічних властивостей, професійних знань та досвіду, гігієнічно та ергономічно сприятливих умов праці, відмінного здоров'я та інших.

Тематика: Педагогічні науки

ВИКОРИСТАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ІНТЕРПРЕТАЦІЙ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ВИРАЗІВ У НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ

Рудницький С.О.
викладач кафедри вищої математики та
методики навчання математики,
Уманський державний педагогічний університет
імені Павла Тичини

В розумінні математики важливе місце займають наочності та їх використання в навчальному процесі. Щоб учні правильно зрозуміли та засвоїли нове математичне поняття, його треба, по можливості, проілюструвати.

Проблемами візуалізації навчального матеріалу з математики займаються науковці, серед яких Нельсен Р.Б. [1], Далінгер В.О., Вербицький А.А., Кушнір І.А. та інші. Також варто відмітити оригінальні ідеї математиків-аматорів зі всього світу, праці яких відображені в науково-популярних статтях, форумах, блоґах тощо (див. наприклад [2]).

Технологія візуалізації навчальної інформації може стати основою нових методик навчання математики як у загальноосвітніх школах, так і у закладах вищої освіти, оскільки мова математики – це, насамперед, мова математичних моделей, символів, образів, які беззаперечно є частиною процесу візуалізації математичного знання [3, с. 65].

По мірі переходу в старші класи потреба в наочностях зменшується, оскільки навчальний матеріал ускладнюється та нагромаджується. На нашу думку, при вивченні тригонометрії в старших класах також варто супроводжувати уроки та факультативи додатковим ілюстративним матеріалом, наприклад *геометричними інтерпретаціями* основних тригонометричних формул.

Під *геометричними інтерпретаціями* можна розуміти рисунки або діаграми, що допомагають досліднику зрозуміти, *чому* певне твердження може бути правдивим, а також побачити, *як* можна почати говорити про його доведення. Різні підходи до створення таких рисунків стають стимулом до нових творчих пошуків.

Нижче ми наведемо авторські приклади геометричних інтерпретацій для тригонометричних виразів від кутів трикутника.

Приклад 1. Довести рівність $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$ *для* $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

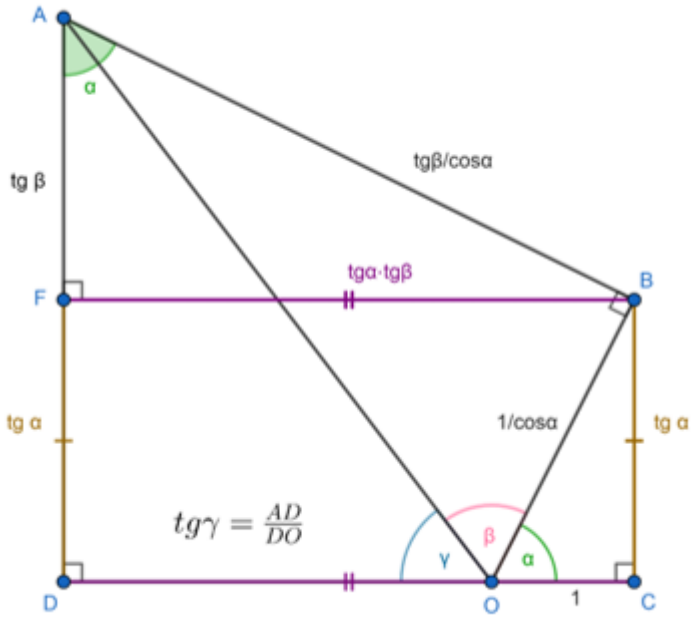

Рис 1.

Коментар. На відрізку OC одиничної довжини побудуємо прямокутний трикутник $\triangle OCB$ з гострим кутом α. На відрізку OB відкладемо гострий кут β, утворивши прямокутний трикутник $\triangle OBA$ і, нарешті, опустивши

перпендикуляр з точки A на продовження сторони OC, утворимо прямокутний трикутник $\triangle ODA$. Додатково проведемо відрізок BF паралельно до DC. Очевидно, що чотирикутник $DFBC$ – прямокутник. Також, в утвореному прямокутному трикутнику $\triangle AFB$ кут $\angle FAB = \alpha$ (за сумою кутів опуклого чотирикутника $ADOB$). За означенням тригонометричних функцій у прямокутних трикутниках в послідовності $\triangle OCB \to \triangle OBA \to \triangle AFB$ виразимо довжини їх сторін. Ключовими для нас будуть: $AF = \operatorname{tg}\beta$ та $FB = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$. Оскільки $DFBC$ – прямокутник, то $FB = DC$, та $FD = BC$. Тоді у прямокутному трикутнику $\triangle ADO$: катет $AD = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$ та катет $DO = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta - 1$. За означенням тангенса у $\triangle ADO$, маємо:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{AD}{DO} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta - 1}.$$

Звідси одержимо $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$. □

Приклад 2. Довести рівність $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ для $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

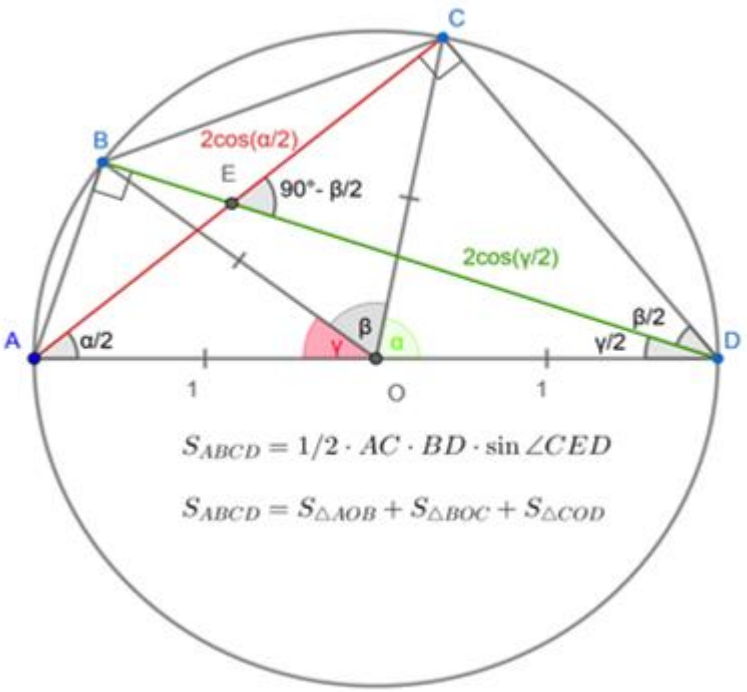

Рис 2.

Коментар. На колі одиничного радіуса як на діаметрі побудуємо чотирикутник $ABCD$ за кутами $\angle COD = \alpha$, $\angle COB = \beta$, $\angle BOA = \gamma$, $\alpha + \beta + \gamma ==$

π. Тоді чотирикутник *ABCD* – вписаний у це коло. Кути: $\angle CAD = \alpha/2$, $\angle CDB = \beta/2$, $\angle BDA = \gamma/2$, як відповідні вписані кути до заданих центральних кутів $\angle COD = \alpha$, $\angle COB = \beta$, $\angle BOA = \gamma$. Трикутники $\triangle ABD$ та $\triangle ACD$ - прямокутні (їх спільна сторона *AD* є діаметром кола). Тоді з $\triangle ACD$, $AC = 2\cos(\alpha/2)$, а з $\triangle ABD$, $BD = 2\cos(\gamma/2)$. Також, ще звернемо увагу, що $\angle CED = 90° - \beta/2$. Тепер, з одного боку, виразимо площу чотирикутника *ABCD*, як:

$$S_{ABCD} = 1/2 \cdot AC \cdot BD \cdot sin\angle CED =$$

$$= 1/2 \cdot 2\cos(\alpha/2) \cdot 2\cos(\gamma/2) \cdot \sin(90° - \beta/2) =$$

$$= 2 \cdot \cos(\alpha/2) \cdot \cos(\gamma/2) \cdot \cos(\beta/2).$$

З іншого боку,

$$S_{ABCD} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COD} =$$

$$= 1/2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin\gamma + 1/2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin\beta + 1/2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin\alpha =$$

$$= 1/2 \cdot (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma).$$

Прирівнявши праві частини формул для площі, одержимо початкову. □

Отже, уміле використання візуалізації у процесі навчання математики може сприяти розвитку самостійності, активності, творчої пізнавальної діяльності учнів, стимулюванні вчителів до створення та використання геометричних інтерпретацій на заняттях, перевірки засвоєних знань та їх використання для одержання нових.

Список літератури:

1. Nelsen R. Proofs without words (Exercises in Visual Thinking). – The Mathematical Association of America; First Edition, Later Printing edition, 1993. – 160 p.

2. Trigonographer: сайт. URL: http://trigonography.com

3. Шевченко І.С. Приклади візуалізації у навчанні математики // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. – Суми: СумДПУ ім. А.С. Макаренка, 2014. – № 2 (3). – С. 65-78.