

УДК 517.9, 539.3

М. В. Дудик

Уманський державний педагогічний університет, Умань, Україна

НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ВІНЕРА — ГОПФА В ЗАДАЧАХ ПРИКЛАДНОЇ МЕХАНІКИ

Запропоновано метод послідовних наближень для розв'язання системи функціональних рівнянь Вінера — Гопфа. Метод використовує подання матричного коефіцієнта системи у вигляді суми двох матриць, одна з яких допускає точну факторизацію, а відносно іншої — матриці-збурення — передбачається умова її малості порівняно з першим доданком в області задання системи. Розв'язок системи шукається у вигляді розвинень за степенями матриці-збурення. На кожному кроці наближення розв'язання системи здійснюється за допомогою методу Вінера — Гопфа з використанням факторизації основної складової матричного коефіцієнта. Використання методу ілюструється на прикладі розв'язання задачі про розрахунок параметрів зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі в кінці міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох різних матеріалів. Зона моделюється лінією розриву переміщення, на якій напруження задовольняють критерій міцності Мізеса — Хілла. Показано, що за певних умов вже у першому наближенні метод дозволяє отримувати розв'язки з прийнятною точністю.

MSC: 39B72, 74S99.

Ключові слова: матричне функціональне рівняння Вінера — Гопфа, метод послідовних наближень, міжфазна тріщина, зона передруйнування, критерій Мізеса — Хілла.

DOI: XXXX.

1. Вступ

Багато плоских крайових задач математичної і теоретичної фізики, прикладної механіки за допомогою інтегральних перетворень можуть бути зведені до систем функціональних рівнянь виду

$$\Phi^+(p) + \mathbf{F}(p) = \mathbf{G}(p)\Phi^-(p) \quad (p \in D), \quad (1)$$

визначених у деякій смузі D площини комплексної змінної p , що розв'язуються за допомогою методу Вінера — Гопфа [1]. Тут $\Phi^+(p)$, $\Phi^-(p)$ — невідомі векторні функції, аналітичні в областях D^+ і D^- відповідно, $D = D^+ \cap D^-$ — спільна смуга їх аналітичності; $\mathbf{F}(p)$ і $\mathbf{G}(p)$ — задані

векторна і квадратна матрична функції, які можуть мати сингулярності поза смугою аналітичності. Ключовою проблемою розв'язання системи (1) є факторизація її матричного коефіцієнта $\mathbf{G}(p)$, тобто подання його у вигляді добутку

$$\mathbf{G}(p) = \mathbf{G}^+(p)\mathbf{G}^-(p) \quad (p \in D) \quad (2)$$

двох матриць $\mathbf{G}^+(p)$, $\mathbf{G}^-(p)$, аналітичних у областях D^+ , D^- відповідно.

Незважаючи на те, що ще у 1958 році М. Крейн та І. Гохберг в [2] доказали теоретичну можливість такої факторизації, проте ні вони, а потім і ніхто інший не змогли запропонувати універсального алгоритму точної аналітичної факторизації матричних функцій. Нині відомий лише один, виявлений Г. М. Чеботарьовим [3], вузький нетривіальний клас матричних функцій комплексної змінної, що допускають точну факторизацію у замкнутій аналітичній формі. Метод факторизації цього класу матриць розвивали А. А. Храпков [4-6], V. G. Daniele [7], B. Noble [1] та інші. Він успішно застосовувався для розв'язання ряду задач механіки руйнування, теорії розсіяння електромагнітних і пружних хвиль, контактних задач тощо.

Проте, метод Чеботарьова — Храпкова виявився недієвим у випадку матричних функцій, відмінних від знайденого ними виду. Це стимулювало пошук альтернативних та розвиток наближених методів факторизації матриць, у яких брали участь А. О. Антіпов, В. А. Бабешко, Р. В. Дудучава, Н. Г. Моїсєєв, В. І. Острик, В. В. Сільвестров, I. D. Abrahams, V. G. Daniele, I. Gohberg, R. A. Hurd, D. S. Jones, A. B. Lebre, G. Mishuris, A. D. Rawlins, S. Rogosin, G. R. Wickham та інші. Зокрема, у методі В. А. Бабешка факторизація матриці здійснюється у три етапи: нормалізації, наближеної факторизації і уточненої факторизації; на етапі наближеної факторизації нормалізовану матрицю наближають на дійсній вісі матрицею з раціональними коефіцієнтами [8]. Метод А. О. Антіпова полягає у розвиненні неаналітичних елементів матричного рівняння за їх полюсами у ряди з невідомими коефіцієнтами, що призводить до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь, яка розв'язується за допомогою асимптотичного методу [9, 10]. I. D. Abrahams для наближеної факторизації матриць використовує Паде-апроксимацію поліномами довільної степені [11].

В цілому, застосування наближених методів базується на громіздких

перетвореннях вихідної матриці, інші методи зводяться до досить трудомістких обчислювальних процедур. Тому існує потреба у розвитку математично зрозумілих і обчислювально простих методів отримання наближених аналітичних розв'язків систем функціональних рівнянь Вінера — Гопфа.

2. ОСНОВИ МЕТОДУ

На відміну від використання наближених методів факторизації матричного коефіцієнта вихідного рівняння (1) у даній роботі запропоновано метод послідовних наближень розв'язання системи функціональних рівнянь Вінера — Гопфа. Він базується на поданні матричного коефіцієнта системи у вигляді суми двох матриць, одна з яких, $\mathbf{G}_0(p)$, допускає аналітичну факторизацію в замкнутій формі, а відносно іншої — матриці-збурення $\mathbf{G}'(p)$ — приймається умова малості в області визначення системи порівняно з основною матрицею $\mathbf{G}_0(p)$:

$$\mathbf{G}(p) = \mathbf{G}_0(p) + \mathbf{G}'(p) \quad (\mathbf{G}_0(p) = \mathbf{G}_0^+(p)\mathbf{G}_0^-(p), \quad \mathbf{G}_0(p) \gg \mathbf{G}'(p), \quad p \in D). \quad (3)$$

Порівняння матриць не ϵ , в цілому, коректною процедурою при відсутності малого параметра, що міг би бути використаний у розкладанні (3). В подальшому вважатимемо, що обґрунтованість такого розкладання може бути перевірена за впливом матриці $\mathbf{G}'(p)$ на скалярні величини, які отримуються з вихідного рівняння Вінера — Гопфа.

У відповідності з прийнятими вище припущеннями подамо розв'язок рівняння (1) у вигляді розвинень за степенями матриці-збурення $\mathbf{G}'(p)$:

$$\Phi^\pm(p) = \Phi_0^\pm(p) + \Phi_1^\pm(p) + \Phi_2^\pm(p) + \dots, \quad (4)$$

де кожен наступний доданок є значно меншим порівняно з попереднім. З урахуванням (3) і (4) рівняння (1) у нульовому наближенні зводимо до вигляду

$$(\mathbf{G}_0^+(p))^{-1} \Phi_0^+(p) + (\mathbf{G}_0^+(p))^{-1} \mathbf{F}(p) = \mathbf{G}_0^-(p) \Phi_0^-(p) \quad (p \in D), \quad (5)$$

де степінь “-1” позначає обернену матрицю. Розв'язання цього рівняння виконуємо за допомогою процедури Вінера — Гопфа [1]. Припускаючи, що

елементи вектора $(\mathbf{G}_0^+(p))^{-1} \mathbf{F}(p)$ задовольняють умову Гельдера, заміни-мо його за допомогою інтегралів типу Коші різницею крайових значень аналітичних векторів [12]:

$$\begin{aligned} (\mathbf{G}_0^+(p))^{-1} \mathbf{F}(p) &= \mathbf{F}_0^+(p) - \mathbf{F}_0^-(p), \\ \mathbf{F}_0^\pm(p) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(\mathbf{G}_0^+(z))^{-1} \mathbf{F}(z)}{z - p} dz \quad (\gamma \in D, \quad p \in D^\pm) \end{aligned} \quad (6)$$

і подамо рівняння (5) у формі

$$(\mathbf{G}_0^+(p))^{-1} \Phi_0^+(p) + \mathbf{F}_0^+(p) = \mathbf{G}_0^-(p) \Phi_0^-(p) + \mathbf{F}_0^-(p) \quad (p \in D). \quad (7)$$

Зробимо також додаткове припущення, що права і ліва частини рівняння (7) при $p \rightarrow \infty$ прямують до нуля. (Це припущення не є принциповим, оскільки нескладно узагальнити метод на випадок прямування лівої і правої частин рівняння до одного і того ж полінома, як це трапляється у скалярних функціональних рівняннях Вінера — Гопфа [12].) Тоді у відповідності з принципом аналітичного продовження та теореми Ліувілля отримуємо розв'язок рівняння (7)

$$\begin{aligned} \Phi_0^+(p) &= -\mathbf{G}_0^+(p) \mathbf{F}_0^+(p) \quad (p \in D^+), \\ \Phi_0^-(p) &= -(\mathbf{G}_0^-(p))^{-1} \mathbf{F}_0^-(p) \quad (p \in D^-), \end{aligned} \quad (8)$$

який є нульовим наближенням розв'язку вихідного рівняння (1).

У першому наближенні рівняння (1) має вигляд

$$\Phi_1^+(p) = \mathbf{G}_0(p) \Phi_1^-(p) + \mathbf{G}'(p) \Phi_0^-(p) \quad (p \in D).$$

Введемо векторну функцію

$$\mathbf{F}_1(p) = -\mathbf{G}'(p) \Phi_0^-(p).$$

З урахуванням факторизації матриці $\mathbf{G}_0(p)$ приходимо до рівняння

$$(\mathbf{G}_0^+(p))^{-1} \Phi_1^+(p) + (\mathbf{G}_0^+(p))^{-1} \mathbf{F}_1(p) = \mathbf{G}_0^-(p) \Phi_1^-(p) \quad (p \in D), \quad (9)$$

аналогічного рівнянню (5). Подібно до (6) виконаємо в (9) заміну $(\mathbf{G}_0^+(p))^{-1} \mathbf{F}_1(p)$ різницею крайових значень аналітичних векторів:

$$(\mathbf{G}_0^+(p))^{-1} \mathbf{F}_1(p) = \mathbf{F}_1^+(p) - \mathbf{F}_1^-(p), \quad (10)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1^\pm(p) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(\mathbf{G}_0^+(z))^{-1} \mathbf{F}_1(z)}{z-p} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(\mathbf{G}_0^+(z))^{-1} \mathbf{G}'(z) (\mathbf{G}_0^-(z))^{-1} \mathbf{F}_0^-(z)}{z-p} dz \quad (\gamma \in D, p \in D^\pm).\end{aligned}$$

Після підстановки (10) в (9) і використання принципу аналітичного продовження та теореми Ліувілля знайдемо поправку першого порядку за збуренням до розв'язку (8):

$$\begin{aligned}\Phi_1^+(p) &= -\mathbf{G}_0^+(p) \mathbf{F}_1^+(p) \quad (p \in D^+), \\ \Phi_1^-(p) &= -(\mathbf{G}_0^-(p))^{-1} \mathbf{F}_1^-(p) \quad (p \in D^-).\end{aligned}\tag{11}$$

Поправки n -го порядку $\Phi_n^\pm(p)$ отримуються аналогічно попередньому етапу і описуються формулами, подібними до (10)-(11):

$$\begin{aligned}\Phi_n^+(p) &= -\mathbf{G}_0^+(p) \mathbf{F}_n^+(p) \quad (p \in D^+), \\ \Phi_n^-(p) &= -(\mathbf{G}_0^-(p))^{-1} \mathbf{F}_n^-(p) \quad (p \in D^-),\end{aligned}\tag{12}$$

$$\mathbf{F}_n^\pm(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(\mathbf{G}_0^+(z))^{-1} \mathbf{G}'(z) (\mathbf{G}_0^-(z))^{-1} \mathbf{F}_{n-1}^\pm(z)}{z-p} dz \quad (\gamma \in D, p \in D^\pm).$$

Підсумовуючи ці поправки згідно з (4), знаходимо остаточний розв'язок рівняння (1):

$$\begin{aligned}\Phi^+(p) &= -\mathbf{G}_0^+(p) \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}_n^+(p) \quad (p \in D^+), \\ \Phi^-(p) &= -(\mathbf{G}_0^-(p))^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}_n^-(p) \quad (p \in D^-).\end{aligned}\tag{13}$$

З формальної точки зору розв'язок (13) можна вважати точним. Умовою коректності розв'язку є збіжність його рядів, тобто виконання нерівності $|\mathbf{F}_n^\pm(p)| < |\mathbf{F}_{n-1}^\pm(p)|$. Згідно з визначенням $\mathbf{F}_n^\pm(p)$ в (12) цій нерівності еквівалентна умова

$$\left| (\mathbf{G}_0^+(p))^{-1} \mathbf{G}'(p) (\mathbf{G}_0^-(p))^{-1} \right| < 1.\tag{14}$$

В той же час практичне застосування формул (13) для числових розрахунків наштовхується на зростання кратності інтегралів у кожному наступному наближенні. Ця обставина змушує обмежуватись в (13) невеликим

числом доданків, які враховуються при обчисленнях, і накладає замість (14) більш жорстке обмеження на матрицю-збурення:

$$\left| (\mathbf{G}_0^+(p))^{-1} \mathbf{G}'(p) (\mathbf{G}_0^-(p))^{-1} \right| \ll 1. \quad (15)$$

Як видно з попереднього розгляду, перевагою запропонованого методу є уникнення факторизації матричного коефіцієнта $\mathbf{G}(p)$ вихідного рівняння (1). З іншого боку, формально розв'язок (13) можна представити як результат дії деяких матричних операторів:

$$\Phi^\pm(p) = -\hat{\mathbf{G}}^\pm(p) \mathbf{F}_0(p) \quad (p \in D^\pm),$$

що дозволяє процедурі факторизації (2) поставити у відповідність операторне подання

$$\mathbf{G}(p) \rightarrow \hat{\mathbf{G}}^+(p) \hat{\mathbf{G}}^-(p).$$

У такому трактуванні розглянутий метод є близьким до деяких наближених методів факторизації матричних функцій, зокрема, запропонованого в [13] асимптотичного методу факторизації класу матриць, які на нескінченності прямують до тотожної матриці.

3. ПРИКЛАД ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ: МОДЕЛЬ ЗОНИ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ У З'ЄДНУВАЛЬНОМУ МАТЕРІАЛІ В КІНЦІ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ, ЩО ВИХОДИТЬ З КУТОВОЇ ТОЧКИ ЛАМАНОЇ МЕЖІ ПОДІЛУ ДВОХ РІЗНИХ МАТЕРІАЛІВ

В умовах плоскої деформації розглядаємо задачу про розрахунок параметрів початкової зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі біля вершини міжфазної тріщини, що виходить з куткової точки ламаної межі поділу двох пружних однорідних ізотропних матеріалів з модулями Юнга E_1 , E_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1 , ν_2 . Нехтуючи товщиною з'єднувального прошарку, моделюватимемо зону лінією розриву переміщення, на якій нормальне і дотичне напруження задовольняють умову

$$\left(\frac{\sigma_\theta}{\sigma_0} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{r\theta}}{\tau_0} \right)^2 = 1, \quad (16)$$

де σ_0 , τ_0 — опори відриву та зсуву з'єднувального матеріалу, що експериментально визначаються як середні значення нормального і дотичного

напружень в зоні при відповідній моді навантаження. Умова (16) використовується в одному з варіантів когезійної моделі міжфазного руйнування [14] і відповідає критерію міцності Мізеса — Хілла.

На початковому етапі свого розвитку довжина зони передруйнування l значно менша від довжини тріщини L та інших актуальних розмірів тіла, і оскільки напружено-деформований стан досліджується в околі зони, то вихідна задача зводиться до задачі про лінію розриву скінченної довжини, що поширюється з вершини півнескінченної міжфазної тріщини у кусково-однорідній площині по межі поділу двох різних пружних матеріалів (рис. 1). Умову на нескінченності формулюємо як вимогу переходу шуканого розв'язку на відстанях $l \ll r \ll L$ у розв'язок аналогічної задачі теорії пружності без лінії розриву, який відомий з робіт [15, 16].

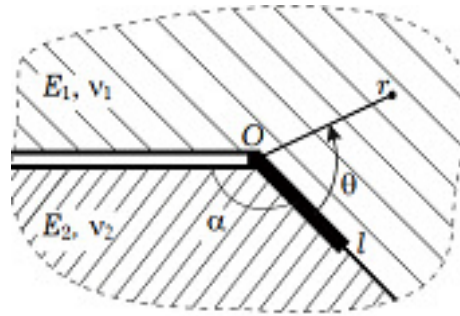


Рис. 1: Розрахункова схема задачі

Враховуючи умову (16) та вважаючи береги тріщини вільними від напружень (за винятком можливої області контакту берегів тріщини, яку вважаємо значно меншою порівняно із зоною передруйнування і нехтуємо нею), приходимо до статичної крайової задачі теорії пружності з граничними умовами

$$\theta = -\alpha \cup 2\pi - \alpha : \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0; \quad (17)$$

$$\theta = 0 : \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0; \quad (18)$$

$$\theta = 0, r < l : \quad \sigma_\theta = \sigma_0 \cos \psi(r), \quad \tau_{r\theta} = \tau_0 \sin \psi(r);$$

$$\theta = 0, r > l : \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0; \quad (19)$$

$$\theta = 0, r \rightarrow \infty : \quad \sigma_\theta \sim \sum_i C_i F_\sigma(\alpha, \lambda_i) r^{\lambda_i}, \quad \tau_{r\theta} \sim \sum_i C_i F_\tau(\alpha, \lambda_i) r^{\lambda_i}; \quad (20)$$

де $\langle f \rangle$ позначає стрибок величини f на межі поділу; $\psi(r)$ — фазовий кут напруження в зоні передруйнування, який в подальшому через малість розмірів зони і для спрощення розв'язання задачі вважатимемо сталим і рівним його середньому значенню ψ ; $F_\sigma(\alpha, \lambda_i)$, $F_\tau(\alpha, \lambda_i)$ — відомі функції з робіт [15, 16]; C_i — довільні сталі, які характеризують інтенсивність зовнішнього навантаження і визначаються із розв'язку зовнішньої задачі; λ_i — показники сингулярності напружень в околі вершини тріщини, що є коренями характеристичного рівняння аналогічної задачі без зони передруйнування [15]:

$$D(\lambda) = 0 \quad (-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0),$$

$$D(\lambda) = -(1 + \kappa_1)^2 t_1 - 4(1 + \kappa_1)(e - 1)t_1 t_2 - e^2(1 + \kappa_2)^2 t_3 + \\ + 4(e - 1)^2 t_1 t_3 + 4e(1 + \kappa_2)(e - 1)t_3 t_4 + 2e(1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1)t_5,$$

$$t_1 = (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)\alpha, \quad t_2 = \sin^2(\lambda + 1)(2\pi - \alpha),$$

$$t_3 = (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)(2\pi - \alpha),$$

$$t_4 = \sin^2(\lambda + 1)\alpha, \quad t_5 = t_1 + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin 2\lambda\pi \cos(\lambda + 1)(2\pi - \alpha),$$

$$e = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} \cdot \frac{E_1}{E_2}, \quad \kappa_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)}.$$

В кінці зони передруйнування реалізується асимптотика, яка відповідає сингулярній частині розв'язку однорідної крайової задачі про півнескінчену лінію розриву переміщень на прямолінійній межі поділу двох різних пружних матеріалів, аналогічну міжфазній тріщині. Зокрема, для напружень має місце асимптотика [17]

$$r \rightarrow l + 0, \quad \sigma_\theta(r, 0) + i\tau_{r\theta}(r, 0) \sim \frac{k(r - l)^{i\omega}}{\sqrt{2\pi(r - l)}}, \quad (21)$$

де $k = k_1 + ik_2$ — локальний КІН в кінці зони, $\omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 - \beta}{1 + \beta}$, $\beta = \frac{(1 + e\kappa_2) - (e + \kappa_1)}{(1 + e\kappa_2) + (e + \kappa_1)}$ — параметр Дандерса.

За допомогою інтегрального перетворення Мелліна крайова задача теорії пружності з граничними умовами (17)-(20) зводиться до матричного рівняння Вінера — Гопфа у смугі $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — достатньо малі додатні числа), що містить уявну вісь:

$$\Phi^+(p) + \mathbf{F}(p) = \mathbf{G}(p)\Phi^-(p) \quad (-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2), \quad (22)$$

$$\Phi^+(p) = \int_1^\infty \begin{pmatrix} \sigma_\theta(\rho l, 0) \\ \tau_{r\theta}(\rho l, 0) \end{pmatrix} \rho^p d\rho,$$

$$\Phi^-(p) = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} u_\theta \\ u_r \end{pmatrix} \right\rangle \bigg|_{\substack{\theta=0 \\ r=\rho l}} \rho^p d\rho,$$

$$\mathbf{F}(p) = \begin{pmatrix} F_1(p) \\ F_2(p) \end{pmatrix},$$

$$F_1(p) = \frac{\sigma_0 \cos \psi}{p+1} - \sum_i \frac{C_i F_\sigma(\alpha, \lambda_i) l^{\lambda_i}}{p+1+\lambda_i}, \quad F_2(p) = \frac{\tau_0 \sin \psi}{p+1} - \sum_i \frac{C_i F_\tau(\alpha, \lambda_i) l^{\lambda_i}}{p+1+\lambda_i};$$

$$\mathbf{G}(p) = \frac{-(1+\kappa_1)}{D(-1-p)} \begin{pmatrix} g_{11}(p) & 2g_{12}(p) \\ 2g_{21}(p) & g_{22}(p) \end{pmatrix},$$

$$g_{11}(p) = e(1+\kappa_2)d_1(p)d_6(p) - (1+\kappa_1)d_2(p)d_4(p),$$

$$g_{12}(p) = 2(1-e)d_1(p)d_2(p) + e(1+\kappa_2)d_1(p)d_8(p) - (1+\kappa_1)d_2(p)d_7(p),$$

$$g_{21}(p) = e(1+\kappa_2)d_1(p)d_9(p) - 2(1-e)d_1(p)d_2(p) - (1+\kappa_1)d_2(p)d_5(p),$$

$$g_{22}(p) = (1+\kappa_1)d_2(p)d_3(p) - e(1+\kappa_2)d_1(p)d_{10}(p),$$

$$d_1(p) = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p(2\pi - \alpha), \quad d_2(p) = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha,$$

$$d_3(p) = p \sin 2\alpha - \sin 2p(2\pi - \alpha), \quad d_4(p) = p \sin 2\alpha + \sin 2p(2\pi - \alpha),$$

$$d_5(p) = p \sin^2 \alpha + \sin^2 p(2\pi - \alpha), \quad d_6(p) = p \sin 2\alpha - \sin 2p\alpha,$$

$$d_7(p) = p \sin^2 \alpha - \sin^2 p(2\pi - \alpha), \quad d_8(p) = p \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha,$$

$$d_9(p) = p \sin^2 \alpha + \sin^2 p\alpha, \quad d_{10}(p) = p \sin 2\alpha + \sin 2p\alpha.$$

Через складність матриці $\mathbf{G}(p)$ її факторизація за формулами Храпкова — Чеботарьова неможлива, тому використаємо наближений метод розв'язання рівняння (22), описаний вище. У нульовому наближенні візьмемо значення цієї матриці для плоскої межі поділу [18]:

$$\mathbf{G}_0(p) = \mathbf{G}(p)|_{\alpha=\pi} = -A \cdot \operatorname{tg} p\pi G(p) \mathbf{Q}(p), \quad (23)$$

$$G(p) = \frac{4(e+\kappa_1)(1+e\kappa_2) \cos^2 p\pi}{(e+\kappa_1)^2 + (1+e\kappa_2)^2 + 2(e+\kappa_1)(1+e\kappa_2) \cos 2p\pi},$$

$$A = \frac{(1 + \kappa_1)(1 + \kappa_1 + e(1 + \kappa_2))}{2(e + \kappa_1)(1 + e\kappa_2)}, \mathbf{Q}(p) = \mathbf{I} + g(p)\mathbf{J}, \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

де \mathbf{I} - одинична матриця, $g(p) = i\beta \operatorname{tg} p\pi$. Матриця $\mathbf{Q}(p)$ відноситься до типу Храпкова – Чеботарьова і факторизується на уявній вісі за формулами [6]:

$$\mathbf{Q}(p) = \mathbf{Q}^+(p)\mathbf{Q}^-(p) \quad (\operatorname{Re} p = 0), \quad \mathbf{Q}^\pm(p) = r^\pm(p) [\operatorname{ch} \theta^\pm(p)\mathbf{I} + \operatorname{sh} \theta^\pm(p)\mathbf{J}],$$

де елементи матриць $\mathbf{Q}^+(p)$ і $\mathbf{Q}^-(p)$ аналітичні у півплощинах $\operatorname{Re} p < 0$ і $\operatorname{Re} p > 0$ відповідно. Функції $r^\pm(p)$ і $\theta^\pm(p)$ знайдено згідно з [6] у [18]:

$$r^\pm(p) = (1 - \beta^2)^{1/4} \exp \left[\pm \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln H_1(t)}{t + ip} dt \right], \quad H_1(t) = \frac{1 - \beta^2 \operatorname{th}^2 \pi t}{1 - \beta^2},$$

$$\theta^\pm(p) = \frac{\pm p}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_2(t)}{t + ip} dt, \quad H_2(t) = \frac{\operatorname{arth}(\beta \cdot \operatorname{th} \pi t)}{t}.$$

Скалярні коефіцієнти рівняння (23) факторизуються за формулами [12]:

$$G(p) = \frac{G^+(p)}{G^-(p)} \quad (\operatorname{Re} p = 0),$$

$$\exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G(z)}{z - p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p), & \operatorname{Re} p < 0, \\ G^-(p), & \operatorname{Re} p > 0; \end{cases} \quad (24)$$

$$\operatorname{tg} p\pi = \frac{p}{K^+(p)K^-(p)}, \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(0,5 \mp p)}.$$

Застосовуючи теорему абелевого типу до асимптотики (21) і враховуючи обмеженість напружень біля кінця зони передруйнування, у відповідності з описаним вище наближеним методом і з урахуванням (23)-(24) отримаємо розв'язок рівняння (22) у нульовому наближенні:

$$\Phi_0^+(p) = -\frac{pG^+(p)}{K^+(p)} \mathbf{Q}^+(p) \mathbf{F}_0^+(p) \quad (\operatorname{Re} p < 0),$$

$$\Phi_0^-(p) = \frac{K^-(p)G^-(p)}{A} [\mathbf{Q}^-(p)]^{-1} \mathbf{F}_0^-(p) \quad (\operatorname{Re} p < 0), \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_0^+(p) &= \frac{1}{p+1} \left(\frac{K^+(p)}{pG^+(p)} [\mathbf{Q}^+(p)]^{-1} + \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} [\mathbf{Q}^+(-1)]^{-1} \right) \begin{pmatrix} \sigma_0 \cos \psi \\ \tau_0 \sin \psi \end{pmatrix} \\
&\quad - \sum_i \frac{C_i l^{\lambda_i}}{p+1+\lambda_i} \left(\frac{K^+(p)}{pG^+(p)} [\mathbf{Q}^+(p)]^{-1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{K^+(-1-\lambda_i)}{(1+\lambda_i)G^+(-1-\lambda_i)} [\mathbf{Q}^+(-1-\lambda_i)]^{-1} \right) \begin{pmatrix} F_\sigma(\alpha, \lambda_i) \\ F_\tau(\alpha, \lambda_i) \end{pmatrix}, \\
\mathbf{F}_0^-(p) &= \frac{1}{p+1} \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} [\mathbf{Q}^+(-1)]^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_0 \cos \psi \\ \tau_0 \sin \psi \end{pmatrix} \\
&\quad - \sum_i \frac{C_i l^{\lambda_i}}{p+1+\lambda_i} \frac{K^+(-1-\lambda_i)}{(1+\lambda_i)G^+(-1-\lambda_i)} \\
&\quad \times [\mathbf{Q}^+(-1-\lambda_i)]^{-1} \begin{pmatrix} F_\sigma(\alpha, \lambda_i) \\ F_\tau(\alpha, \lambda_i) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

З розв'язку (25) за процедурою Вінера — Гопфа, подібно до [15, 16], отримаємо рівняння для визначення довжини зони і фазового кута напружень у зоні:

$$\begin{aligned}
&\frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} [\mathbf{Q}^+(-1)]^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_0 \cos \psi \\ \tau_0 \sin \psi \end{pmatrix} \\
&\quad - \sum_i \frac{C_i l^{\lambda_i} K^+(-1-\lambda_i)}{(1+\lambda_i)G^+(-1-\lambda_i)} [\mathbf{Q}^+(-1-\lambda_i)]^{-1} \begin{pmatrix} F_\sigma(\alpha, \lambda_i) \\ F_\tau(\alpha, \lambda_i) \end{pmatrix} = 0. \quad (26)
\end{aligned}$$

Використовуючи знайдене нульове наближення (25) розв'язку вихідного рівняння Вінера — Гопфа (22) і покладаючи матрицю-збурення як

$$\mathbf{G}'(p) = \mathbf{G}(p) - \mathbf{G}_0(p),$$

за формулами (10)-(11) знаходимо поправки до розв'язку у першому наближенні:

$$\begin{aligned}
\Phi_1^+(p) &= -\mathbf{G}_0^+(p) \mathbf{F}_1^+(p) \quad (\operatorname{Re} p < 0), \\
\Phi_1^-(p) &= -(\mathbf{G}_0^-(p))^{-1} \mathbf{F}_1^-(p) \quad (\operatorname{Re} p > 0),
\end{aligned} \quad (27)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{(\mathbf{G}_0^+(z))^{-1} \mathbf{G}'(z) (\mathbf{G}_0^-(z))^{-1} \mathbf{F}_0^-(z)}{z-p} dz = \begin{cases} \mathbf{F}_1^+(p), & \operatorname{Re} p < 0, \\ \mathbf{F}_1^-(p), & \operatorname{Re} p > 0. \end{cases}$$

Враховуючи асимптотики (21) і обмеженість напружень біля кінця зони переддруйнування, приходимо замість (26) до уточнених рівнянь для ви-

значення довжини зони і фазового кута напружень у зоні:

$$\begin{aligned} & \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} [\mathbf{Q}^+(-1)]^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_0 \cos \psi \\ \tau_0 \sin \psi \end{pmatrix} \\ & - \sum_i \frac{C_i l^{\lambda_i} K^+(-1 - \lambda_i)}{(1 + \lambda_i) G^+(-1 - \lambda_i)} [\mathbf{Q}^+(-1 - \lambda_i)]^{-1} \begin{pmatrix} F_\sigma(\alpha, \lambda_i) \\ F_\tau(\alpha, \lambda_i) \end{pmatrix} \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} (\mathbf{G}_0^+(z))^{-1} \mathbf{G}'(z) (\mathbf{G}_0^-(z))^{-1} \mathbf{F}_0^-(z) dz = 0. \end{aligned}$$

З визначення $\Phi^-(p)$ в (22) отримуємо компоненти стрибка переміщення у вершині тріщини:

$$\delta u = \begin{pmatrix} \delta u_\theta(0, 0) \\ \delta u_r(0, 0) \end{pmatrix} = -\frac{4(1 - \nu_1^2)}{E_1} \Phi^-(0),$$

які визначають повне розкриття тріщини у вершині

$$\delta = \sqrt{\delta u_\theta(0, 0)^2 + \delta u_r(0, 0)^2}.$$

На підставі формул (25) і (27) знаходимо розкриття у нульовому і першому наближеннях:

$$\begin{aligned} \delta u_0 &= -\frac{4(1 - \nu_1^2)}{E_1} \frac{1}{A\sqrt{\pi G(0)}} \mathbf{F}_0^-(0), \\ \delta u_1 &= \left(\mathbf{I} + \frac{1}{2A\sqrt{\pi}} [\mathbf{G}_0^+(0)]^{-1} \mathbf{G}'(0) \right) \delta \mathbf{u}_0. \end{aligned}$$

4. ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ПРИКЛАДУ

Найвища ефективність наближеного підходу у розглянутому вище прикладі про маломасштабну зону передруйнування очікується при кутах зламу межі поділу матеріалів α , близьких до кута $\alpha_0 = 180^\circ$, якому відповідає нульове наближення (23) матричного коефіцієнта рівняння Вінера — Гопфа (22). При таких кутах зламу, як виявлено в [15], НДС біля вершини міжфазної тріщини довжиною $L \gg l$ визначається двома комплексно спряженими показниками сингулярності $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \lambda_r + i\lambda_m$ і комплексним коефіцієнтом інтенсивності напружень $K = K_1 + iK_2$, який входить в коефіцієнти розвинень (20):

$$C_1 = \bar{C}_2 = \frac{KL^{-i\lambda_m}}{\sqrt{2\pi}}.$$

У зв'язку з цим зовнішнє навантаження задаємо безрозмірним параметром $\sigma = \frac{|K|L^{\lambda r}}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}$ і фазовим кутом $\varphi = \text{arctg}(K_2/K_1)$, нехтуючи в (20) регулярними вкладками.

У таблицях 1–2 (в кінці статті) наведено результати окремих розрахунків параметрів зони передруйнування (відносної довжини $x = l/L$, фазового кута напружень у зоні ψ та нормованого повного розкриття тріщини в її вершині $\delta' = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)\sigma_0} \frac{\delta}{L}$ і їх відносні відмінності ε_x , ε_ψ , ε_δ у нульовому і першому наближенні) для $E_1/E_2 = 0,5$, $\nu_1/\nu_2 = 0,3$, $\sigma_0/\tau_0 = 5$, $\sigma = 0,1$.

Як видно з таблиць, існують інтервали параметрів досліджуваного тіла і навантаження, яким відповідає цілком прийнятна похибка визначення довжини зони передруйнування, яка виявляється найбільш чутливою до кута зламу межі поділу і фазового кута навантаження. Зокрема, при збільшенні кута зламу межі поділу матеріалів похибка наближеного розв'язку немонотонно зростає. Немонотонною є також залежність похибки від фазового кута навантаження, проте немонотонність залежностей від кутів зламу і фазового кута навантаження є характерною особливістю для параметрів зони передруйнування в околі вершини міжфазної тріщини у кусково-однорідному тілі з ламаною межею поділу [16].

В таблицях жирним шрифтом виділені стрічки зі значними відмінностями розрахованих значень довжин зони передруйнування та/або фазового кута напружень у зоні у нульовому і першому наближеннях теорії збурень. Отже, при відповідних їм кутах зламу межі поділу і фазових кутах навантаження умови застосовності наближеного розв'язку виявляються невиконаними, а відмова від поправок наступного порядку некоректною.

5. Висновки

Запропоновано наближений метод розв'язання системи функціональних рівнянь Вінера — Гопфа, який не використовує факторизацію матричного коефіцієнта. Метод базується на поданні матричного коефіцієнта системи у вигляді суми двох матриць, одна з яких допускає точну факторизацію, а інша розглядається як мале збурення до першої в області визначення системи. Розв'язок системи шукається у вигляді розвинень за степенями матриці-збурення.

В якості ілюстрації застосування методу розглянуто розв'язання з йо-

го допомогою задачі про розрахунок параметрів зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі в кінці міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох різних матеріалів. Показано, що при певних умовах вже у першому наближенні метод дозволяє отримувати розв'язки з достатньою точністю.

Табл. 1: Параметри зони передруйнування при різних кутах зламу межі поділу для $K_2/K_1 = 2$.

$\alpha, ^\circ$	x_0	x_1	$\varepsilon_x, \%$	$\psi_0, ^\circ$	$\psi_1, ^\circ$	$\varepsilon_\psi, \%$	δ'_0	δ'_1	$\varepsilon_\delta, \%$
150	0,075468	0,07729	2,35	73,52	73,75	0,31	0,18396	0,18372	0,13
155	0,079884	0,07953	0,44	75,51	75,51	0,0017	0,1675	0,16656	0,57
160	0,081855	0,08008	2,22	77,19	77,07	0,15	0,15365	0,15239	0,83
165	0,081389	0,07901	3,01	78,65	78,49	0,20	0,14182	0,14054	0,91
170	0,078668	0,07647	2,87	79,93	79,79	0,18	0,13159	0,13056	0,79
175	0,074009	0,07267	1,84	81,07	80,98	0,10	0,12268	0,12209	0,48
180	0,06783	0,06783	0,00	82,11	82,11	0,00	0,11488	0,11488	0,00
185	0,060607	0,0622	2,56	83,06	83,17	0,13	0,10806	0,10876	0,64
190	0,056028	0,00319	5,70	83,96	84,18	0,26	0,10211	0,10359	1,42
195	0,044989	0,04958	9,26	84,81	85,15	0,40	0,09696	0,09927	2,32
200	0,037483	0,04311	13,05	85,64	86,09	0,53	0,09256	0,09575	3,33

Табл. 2: Параметри зони переддруйнування при різних фазових кутах навантаження для $\alpha = 160^\circ$.

$\varphi, ^\circ$	x_0	x_1	$\varepsilon_x, \%$	$\psi_0, ^\circ$	$\psi_1, ^\circ$	$\varepsilon_\psi, \%$	δ'_0	δ'_1	$\varepsilon_\delta, \%$
0	0,0052764	0,00569	7,20	-19,16	-25,02	23,39	0,45206	0,45199	0,02
10	0,0065949	0,00599	10,14	25,10	18,73	34,04	0,43674	0,43645	0,07
20	0,0148477	0,01312	13,17	51,66	48,82	5,81	0,31038	0,3098	0,19
30	0,0283536	0,02588	9,57	63,59	62,31	2,05	0,2353	0,2345	0,34
40	0,0446754	0,04182	6,82	70,15	69,49	0,95	0,19275	0,19177	0,51
50	0,0615364	0,05867	4,89	74,47	74,11	0,48	0,16576	0,16464	0,68
60	0,0768316	0,07428	3,44	77,69	77,50	0,25	0,14702	0,14578	0,85
70	0,0887731	0,08681	2,26	80,33	80,23	0,12	0,13318	0,13184	0,12
80	0,0960488	0,09488	1,23	82,66	82,62	0,05	0,1226	0,12117	1,18
90	0,0979388	0,09766	0,29	84,85	84,84	0,01	0,11453	0,11303	1,32
100	0,094368	0,09497	0,63	87,05	87,05	0,01	0,10875	0,10721	1,43
110	0,0858859	0,08726	1,57	89,37	89,37	0,01	0,10561	0,10407	1,48
120	0,0735793	0,07554	2,59	91,99	91,95	0,05	0,10607	0,10459	1,41
130	0,0589268	0,06122	3,75	95,13	95,01	0,14	0,11209	0,11076	1,20
140	0,0436127	0,04596	5,12	99,19	98,91	0,34	0,12714	0,12605	0,86
150	0,029321	0,03146	6,81	104,90	104,32	0,77	0,15728	0,1565	0,50

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. — Москва : Изд-во иностр. лит., 1962. — 279 с.
2. Гохберг И. Ц. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн // Успехи матем. наук. — 1958. — Т. XIII, вып. 2. — С. 1–78.
3. Чеботарев Г. Н. К решению в замкнутой форме краевой задачи Римана для системы n пар функций / Г. Н. Чеботарев // Учен. зап. Казан. ун-та. — 1956. — Т.116, кн.4. — С. 31–58.
4. Храпков А. А. Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил / А. А. Храпков // Прикл. математика и механика. — 1971. — Т. 35, вып. 4. — С. 677–689.
5. Храпков А. А. Задачи об упругом равновесии бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине, разрешимые в замкнутой / А. А. Храпков // Прикл. математика и механика. — 1971. — Т. 35, вып. 6. — С. 1062–1069.
6. Khrapkov A. A. Wiener–Hopf method in mixed elasticity theory problems. — St. Petersburg : V. E. VNIIG Inc., 2001. — 144 p.
7. Daniele V. G. On the factorization of Wiener — Hopf matrices in problems solvable with Hurd’s method / V. G. Daniele // IEEE Trans. Antennas Propagat. — 1978. — Vol. 26. — P. 614–616.
8. Бабешко В. А. Обобщенный способ приближенной факторизации матриц-функций / В. А. Бабешко // ДАН СССР. — 1979. — Т. 247, № 5. — С. 1089–1093.
9. Антипов Ю. А. Точное решение задачи о вдавливании кольцевого штампа в полупространство / Ю. А. Антипов // ДАН Укр. ССР. Серия А. Физ.-мат. и техн. науки. — 1987. — № 7. — С. 29–33.
10. Антипов Ю. А. Контактные задачи теории упругости при наличии трения и сцепления / Ю. А. Антипов, Н. Х. Арутюнян // Прикл. математика и механика. — 1991. — Т. 55, вып. 6. — С. 1005–1017.
11. Abrahams I. D. On the solution of Wiener — Hopf problems involving noncommutative matrix kernel decompositions / I. D. Abrahams // SIAM J. Appl. Math. — 1997. — Vol. 57. — P. 541–567.
12. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Изд. 3-е / Гахов Ф. Д. — Москва : Наука, 1977. — 640 с.
13. Mishuris G. An asymptotic method of factorization of a class of matrix functions / G. Mishuris, S. Rogosin // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science. — 2014. — Vol. 470, № 2166. — P. 0109–0123.
14. Lee M. Y. Determination of cohesive parameters for a mixed-mode cohesive zone model / M.J. Lee, T.M. Cho, W.S. Kim, B.C. Lee, J.J. Lee // Int. Journal of Adhesion & Adhesives. — 2010. — Vol. 30. — P. 322–328.

15. Дудик М. В., Діхтяренко Ю. В. Розвиток зони передруйнування від міжфазної тріщини у кутовій точці межі розділу двох пружних середовищ / М. В. Дудик, Ю. В. Діхтяренко // Матем. методи та фіз.-мех. поля. — 2011. — Т. 54, № 2. — С. 103–114.
16. Дудик М. В. Вплив пластичності з'єднувального матеріалу на поворот міжфазної тріщини у кутовій точці межі поділу середовищ / М. В. Дудик, Ю. В. Діхтяренко, В. М. Дякон // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2014. — № 1. — С. 45–52.
17. Rice J. R. Elastic fracture mechanics concepts for interface crack / J. R. Rice // Transactions of the ASME. J. Appl. Mech. — 1988. — Vol. 55. — P. 98–103.
18. Дудик М. В. Аналітичний розв'язок плоскої задачі про когезійну зону передруйнування у з'єднувальному матеріалі біля вершини міжфазної тріщини / М. В. Дудик // Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех. — 2013. — Т. 19, вип. 4. — С. 84–95.

Дудик М. В.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИНЕРА — ХОПФА В ЗАДАЧАХ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

Резюме

Предложен метод последовательных приближений для решения системы функциональных уравнений Винера — Хопфа. Метод использует представление матричного коэффициента системы в виде суммы двух матриц, одна из которых допускает точную факторизацию, а относительно другой — матрицы-возмущения — предполагается условие ее малости по сравнению с первым слагаемым в области задания системы. Решение системы ищется в виде разложения по степеням матрицы-возмущения. На каждом шаге приближения решение системы осуществляется с помощью метода Винера — Хопфа с использованием факторизации основной составляющей матричного коэффициента. Использование метода иллюстрируется на примере решения задачи о расчете параметров зоны передруйнувания в соединительном материале в конце межфазной трещины, выходящей из угловой точки ломаной границе раздела двух различных материалов. Зона моделируется линией разрыва перемещения, на которой напряжение удовлетворяет критерий прочности Мизеса — Хилла. Показано, что при определенных условиях уже в первом приближении метод позволяет получать решения с допустимой точностью.

Ключевые слова: матричное функциональное уравнение Винера — Хопфа, метод последовательных приближений, межфазная трещина, зона предразрушения, критерий Мизеса — Хилла.

Dudyk M. V.

AN APPROXIMATE METHOD FOR SOLVING WIENER—HOPF MATRIX EQUATIONS IN PROBLEMS OF APPLIED MECHANICS

Summary

Method of successive approximations for the solution of the Wiener—Hopf functional equations system is offered. The method uses the presentation of matrix coefficient of the system

as a sum of two matrices, where the first matrix assumes the exact factorization, and the second matrix — matrix-perturbation — is much smaller than the first matrix in the domain of system definition. Solution of the system is sought in the form of expansions in powers of the matrix-perturbation. At each step of the approximation the solution of the system is carried out by means of the Wiener—Hopf method using factorization of the main component of the matrix coefficient. The example of the use of method is considered for the solution of the problem about the calculation of the pre-fracture zone parameters in connecting material near the tip of the interfacial crack outcoming from the angular point of the broken interface of two different materials. The zone is modeled by the discontinuity line of displacement, on which the stresses meet the Mises—Hill failure criterion. It is shown that under certain conditions, already in the first approximation, the method allows to obtain solutions with permissible accuracy.

Key words: Wiener—Hopf matrix functional equation, method of successive approximations, interfacial crack, pre-fracture zone, Mises—Hill criterion.

REFERENCES

1. Noble, B. (1988). *Methods Based on the Wiener-Hopf Technique*, 2nd ed. New York, Chelsea.
2. Gohberg, I.C., Krein, M.G. (1960). Systems of integral equations on a half-line with kernels depending on the difference of the arguments. *American Mathematical Society Translations: Series 2*. Vol. 14, P. 217–287.
3. Chebotarev, G.N. (1956). To close-form solution of boundary-value Riemann problem for systems of n pairs of functions. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta*, Vol. 116, № 4, P. 31–58.
4. Khrapkov, A.A. (1971). Certain cases of the elastic equilibrium of an infinite wedge with a nonsymmetric notch at the vertex, subjected to concentrated forces. *J. Appl. Math. Mech.* Vol. 35, P. 625–637.
5. Khrapkov, A.A. (1971). Closed form solutions of the problems on the elastic equilibrium of an infinite wedge with a nonsymmetric notch at the apex. *J. Appl. Math. Mech.* Vol. 35, P. 1009–1016.
6. Khrapkov, A.A. (2001). *Wiener—Hopf method in mixed elasticity theory problems*. St. Petersburg: B. E. Vedenev VNIIG Inc.
7. Daniele, V.G. (1978). On the factorization of Wiener—Hopf matrices in problems solvable with Hurd's method. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* Vol. 26, P. 614–616.
8. Babeshko, V.A. (1979). An efficient method of approximate factorization of matrix functions. *Doklady AN SSSR [Proc. USSR Acad. Sci.]*. Vol. 247, № 5, P. 1089–1093.
9. Antipov, Yu.A. (1987). Exact Solution of Problem Pertaining to Pressing of Circular Die into Half-Space. *Doklady AN USSR. Seriya A: Fiziko-Matematicheskie i Tekhnicheskie Nauki [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, Series A, Physico-Mathematical and Engineering Sciences]*. № 7, P. 29–33.

10. Antipov, Yu.A., Arutyunyan, N.Kh. (1991). Contact problems of the theory of elasticity with friction and adhesion. *J. Appl. Mat. Mech. (PMM)*. Vol. 55, № 6, P. 887–901.
11. Abrahams, I. D. (1997). On the solution of Wiener–Hopf problems involving noncommutative matrix kernel decompositions. *SIAM J. Appl. Math.* Vol. 57, P. 541–567.
12. Gakhov, F.D. (1966). *Boundary Value Problems*. Oxford, Pergamon Press.
13. Mishuris, G., Rogosin, S. (2014). An asymptotic method of factorization of a class of matrix functions. *Proc. Royal Society A: Math., Phys. and Eng. Science*. Vol. 470, № 2166, P. 0109–0123.
14. Lee, M.Y., Cho, T.M., Kim, W.S., Lee, B.C., Lee, J.J. (2010). Determination of cohesive parameters for a mixed-mode cohesive zone model. *Int. Journal of Adhesion & Adhesives*. Vol. 30, P. 322–328.
15. Dudyk, M.V., Dikhtyarenko, Yu.V. (2012). Development of a prefracture zone from an interfacial crack at a corner point of an interface of two elastic media. *J. Math. Sciences*. Vol. 184, № 2, P. 121–135.
16. Dudyk, M.V., Dikhtyarenko, Yu.V., Dyakon, V.M. (2014). Influence of the plasticity of a joining material on the kink of an Interface crack at the corner point of the interface of media. *Materials Science*. Vol. 50, № 1, P. 46–54.
17. Rice, J.R. (1988). Elastic fracture mechanics concepts for interface crack. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* Vol. 55, P. 98–103.
18. Dudyk, M.V. (2013). Analytical solution of the plane problem on the cohesive prefracture zone in conjunctive material near the tip of the interfacial crack. *Visnyk Odes'k. nats. universytetu. Matematika i mekhanika [Odesa National University Herald. Mathematics and Mechanics]*. Vol. 18, No. 4, P. 84–95.