

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

# **ПРАКТИЧНИЙ КУРС КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ**

Навчальний посібник

**Укладач М. В. Дудик**

Бровари  
2022

УДК 530.145(075.8)

П69

**Рецензенти:**

*Краснобокий Ю. М.*, доцент кафедри фізики та інтегративних технологій навчання природничих наук, кандидат фізико-математичних наук Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини;

*Ковальов Л. Є.*, доцент кафедри математики та фізики, кандидат фізико-математичних наук Уманського національного університету садівництва.

*Рекомендовано до друку вченою радою факультету  
фізики, математики та інформатики Уманського державного  
педагогічного університету імені Павла Тичини  
(протокол № 13 від 27.05.2022 р.)*

**Практичний** курс квантової механіки : навч. посіб. / МОН України,  
П69 Уманський держ. пед. ун-т імені Павла Тичини ; уклад. М. В. Дудик. 2-ге  
вид., перероб. – Бровари : АНФ груп, 2022. – 107 с.

Посібник містить приклади розв'язання задач з курсу "Квантова механіка" для студентів природничо-математичних спеціальностей закладів вищої педагогічної освіти. Задачі упорядковані за окремими темами відповідно до стандартного змісту дисципліни. До кожної теми підготовлено збірку задач наближено однакового рівня складності, що дозволяє використовувати посібник для забезпечення студентів індивідуальними домашніми завданнями.

Посібник призначений для викладачів при підготовці до практичних занять з курсу "Квантова механіка" та для самостійної роботи студентів.

**УДК 530.145(075.8)**

© Дудик М.В., уклад., 2022

## Зміст

<b>Передмова</b>	4
<b>Опис дисципліни "Квантова механіка"</b>	5
<b>Тема 1.</b> Фізичні передумови квантової теорії. Математичний апарат квантової механіки	14
<b>Тема 2.</b> Потенціальна яма	24
<b>Тема 3.</b> Квантовий гармонічний осцилятор	31
<b>Тема 4.</b> Співвідношення невизначеностей Гейзенберга	37
<b>Тема 5.</b> Тунельний ефект	43
<b>Тема 6.</b> Квазікласичне наближення	49
<b>Тема 7.</b> Момент імпульсу у квантовій механіці	54
<b>Тема 8.</b> Варіаційний метод Рітца	59
<b>Тема 9.</b> Теорія збурень	65
<b>Тема 10.</b> Багато електронні атоми. Атом у зовнішніх полях	72
<b>Тема 11.</b> Квантова теорія випромінювання	78
<b>Тема 12.</b> Двохатомні молекули	83
Додаток: Таблиця параметрів двохатомних молекул	89
Контрольні питання для самоперевірки	90
Вимоги до оформлення ІНДЗ	102
Рекомендована література	107

## ПЕРЕДМОВА

Метою посібника є ознайомлення студентів зі стандартними типами задач квантової механіки та навчання методам їх розв'язування. Робота з посібником сприятиме вивченню дисципліни "Квантова механіка", засвоєнню основних положень квантової теорії, оволодінню методами, прийомами і способами розв'язування типових задач квантової механіки, що є передумовою успішного застосування набутих знань при оволодінні окремим дисциплінами науково-предметної підготовки здобувачів вищої освіти спеціальності Середня освіта з таких спеціалізацій як фізика, природничі науки, математика та інші.

Посібник призначений для самостійної роботи студентів і складається з методичних рекомендацій та вказівок до 12 практичних занять, що відповідають навчальній програмі дисципліни. Приведено опис дисципліни за навчальною програмою, що впроваджена в Уманському державному педагогічному університеті імені Павла Тичини за освітніми програмами Середня освіта (Фізика) і Середня освіта (Природничі науки).

Посібник містить значну кількість задач для самостійного опрацювання студентами, розв'язування яких дозволить закріпити їхні знання основних положень квантової теорії, забезпечить набуття ними навичок розв'язування задач. Для розв'язування задач, пропонованих в посібнику, передбачається наявність у студентів ґрунтовних знань з курсів вищої математики і загальної фізики.

На початку кожної теми в посібнику приведено основні формули, які необхідні для розв'язування задач, детально розглянуто приклади розв'язання типових задач. Кожна тема містить велику кількість однотипних задач для самостійного розв'язування, що дозволяє викладачу задавати кожному студенту індивідуальні домашні завдання.

У посібнику також приведено теми рефератів з квантової механіки для самостійного виконання в якості індивідуальних науково-дослідних завдань (ІНДЗ) та вимоги до їх оформлення.

## ОПИС ДИСЦИПЛІНИ "КВАНТОВА МЕХАНІКА"

Найменування показників	Характеристика дисципліни за формами навчання	
	денна	заочна
Вид дисципліни (обов'язкова чи вибіркова)	обов'язкова	обов'язкова
Мова викладання, навчання та оцінювання	українська	українська
Загальний обсяг у кредитах ЄКТС / годинах	4 / 120	4 / 120
Курс	4	4
Семестр	7	7
Кількість змістових модулів із розподілом:	4	4
Обсяг кредитів	4	4
Обсяг годин, у тому числі:	120	120
Аудиторні:	60	14
Лекційні:	36	8
Практичні:	24	6
Лабораторні:	0	0
Самостійна робота	50	106
Індивідуальні завдання:	10	0
Форма семестрового контролю:	екзамен	екзамен

### Мета і завдання дисципліни

**Мета:** вивчення студентами основ квантової механіки, її теоретичних й розрахункових методів та застосування їх до розв'язання широкого спектру фізичних задач. Основна увага приділяється з'ясуванню фізичного змісту понять квантової механіки й практичному опануванню розрахунковими методами, а також формуванню уявлень про квантовомеханічні закономірності, які покладено в основу сучасної фізики, та про їхні фундаментальні застосування.

**Завдання** дисципліни "Теоретична фізика (Квантова механіка)" полягає у засвоєнні студентами основних понять та методів квантової механіки та вмінь їх практично застосовувати. У результаті вивчення дисципліни студент повинен мати тверді теоретичні знання та вміти використовувати їх при розв'язуванні конкретних задач.

## Результати навчання за дисципліною

По завершенню вивчення дисципліни "Квантова механіка" студенти повинні:

**знати:** основні поняття і рівняння квантової механіки, методи розв'язування останніх, принципи застосування для пояснення будови і властивостей атомів та молекул;

**вміти:** знаходити комутатори квантово-механічних операторів; розв'язувати рівняння Шредінгера для частинки у прямокутній потенціальній ямі і для потенціалів певного виду; пояснювати хімічні властивості атомів на основі квантового стану зовнішніх електронних оболонок.

## Програма навчальної дисципліни

### *Змістовий модуль 1. Основи квантової механіки*

#### **Тема 1. Вихідні положення квантової механіки**

Експериментальні передумови виникнення квантової механіки. Корпускулярно-хвильовий дуалізм. Гіпотеза де Бройля. Хвильова функція і її фізичний зміст. Принцип суперпозиції. Власні стани квантово-механічної системи. Математичний апарат квантової механіки.

#### **Тема 2. Рівняння Шредінгера. Закони збереження у квантовій механіці**

Постулати квантової механіки. Стаціонарне рівняння Шредінгера. Нестационарне рівняння Шредінгера. Закон збереження числа частинок. Зміна з часом середніх значень фізичних величин. Закони збереження фізичних величин в квантовій механіці. Дзеркальна симетрія і закон збереження парності.

#### **Тема 3. Зв'язок квантової механіки з класичною механікою**

Рівняння руху в квантовій механіці. Теорема Еренфеста. Граничний перехід до класичної механіки. Квазікласичне наближення.

#### **Тема 4. Принцип невизначеностей Гейзенберга**

Метод Вентцеля – Крамерса – Бріллюена. Умови квантування Бора – Зомерфельда. Умови одночасної вимірюваності фізичних величин. Співвідношення невизначеностей Гейзенберга. Наслідки співвідношення невизначеностей. Роль вимірювального пристрою. Співвідношення невизначеностей для енергії і часу. Принцип доповнюваності Н.Бора.

#### **Тема 5. Поступальний і орбітальний рухи частинки у квантовій механіці**

Необмежений рух вільної частинки. Обмежений рух частинки: потенціальна яма. Орбітальний рух частинок. Квантування орбітального

моменту.

### **Тема 6. Спін елементарних частинок**

Спін елементарних частинок. Оператори спіну. Системи тотожних частинок. Принцип Паулі.

#### ***Практичні заняття***

Фізичні передумови квантової механіки. Математичний апарат квантової механіки. Потенціальна яма. Гармонічний осцилятор. Співвідношення невизначеностей Гейзенберга. Тунельний ефект. Квазікласичне наближення. Момент імпульсу в квантовій механіці.

## ***Змістовий модуль 2. Квантово-механічна теорія атома***

### **Тема 7. Квантовомеханічна теорія воднеподібних атомів**

Загальна характеристика атомів. Теорія воднеподібних атомів. Спектр та просторова структура атома водню.

### **Тема 8. Квантовомеханічна теорія складних атомів**

Рух валентного електрона в атомах лужних металів. Квантово-механічний стан електрона з урахуванням спіну. Атом гелію. Варіаційний принцип.

### **Тема 9. Періодична система хімічних елементів**

Метод самоузгодженого поля. Статистична модель атома. Періодична система елементів Менделєєва.

### **Тема 10. Теорія збурень**

Теорія збурень для стаціонарних станів з дискретним спектром. Теорія збурень при наявності виродження. Теорія нестаціонарних збурень.

### **Тема 11. Атом у зовнішніх полях**

Атом в електричному полі. Ефект Штарка. Атом в магнітному полі. Ефект Зеемана. Мультиплетна структура спектрів.

### **Тема 12. Взаємодія атомів з електромагнітними хвилями**

Взаємодія атомів з електромагнітними хвилями. Випромінювання і поглинання світла атомами. Час життя і природна ширина рівнів енергії. Оптичний квантовий генератор

#### ***Практичні заняття***

Варіаційний метод Рітца. Теорія збурень. Атом у зовнішніх полях. Квантова теорія випромінювання.

## ***Змістовий модуль 3. Квантова теорія молекул і твердого тіла***

### **Тема 13. Квантова теорія молекул**

Загальна характеристика молекул. Адіабатичне наближення в теорії молекул. Молекула водню. Ковалентний зв'язок. Гетерополярний зв'язок.

### **Тема 14. Енергетичний спектр молекул**

Сили Ван-дер-Ваальса. Класифікація електронних термів молекул.

Енергетичний спектр ядерної підсистеми молекул. Багатоатомні молекули.

### **Тема 15. Елементи квантової теорії твердого тіла**

Рух електрона у періодичному полі. Функції Блоха. Квазіімпульс електрона у періодичному полі кристалу. Зонна структура енергетичного спектра електрона у періодичному полі кристалу. Задача Кроніга і Пенні.

#### ***Практичні заняття***

Двохатомні молекули

## ***Змістовий модуль 4. Релятивістська квантова теорія***

### **Тема 16. Основні положення квантової теорії поля**

Теорія відносності і квантова механіка. Рівняння Клейна – Гордона – Фока. Частинки і античастинки в теорії Клейна – Гордона – Фока. Рівняння Дірака. Частинки і античастинки в теорії Дірака.

### **Тема 17. Елементи квантової електродинаміки**

Об'єднання електродинаміки з квантовою механікою. Вакуумний стан. Вторинне квантування у системах бозонів і ферміонів. Діаграми Фейнмана. Поляризація вакууму. Деякі ефекти квантової електродинаміки.

### **Тема 18. Теорія електрослабкої взаємодії**

Теорії слабкої взаємодії. Локальна калібровочна інваріантність. Спонтанне порушення симетрії. Модель Вейнберга – Салама. Обмеженість фізичних теорій.

## **Структура навчальної дисципліни**

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин					
	усього	у тому числі				
	го	лек.	пр.	лаб.	інд.	сам.
<b><i>Змістовий модуль 1. Основи квантової механіки</i></b>						
Тема 1. Вихідні положення квантової механіки.	7	2	2			3
Тема 2. Рівняння Шредінгера. Закони збереження у квантовій механіці.	5	2				3
Тема 3. Зв'язок квантової механіки з класичною механікою	7	2	2			3
Тема 4. Принцип невизначеностей Гейзенберга	7	2	2			3
Тема 5. Поступальний і орбітальний рухи частинки у квантовій механіці	16	2	8			6
Тема 6. Спін елементарних частинок	4	2				2
Разом за змістовим модулем 1	46	12	14			20



<b>Змістовий модуль 2. Квантово-механічна теорія атома</b>						
Тема 7. Квантово-механічна теорія воднеподібних атомів	3	2				1
Тема 8. Квантово-механічна теорія складних атомів	3	2				1
Тема 9. Періодична система хімічних елементів	7	2	2			3
Тема 10. Теорія збурень	7	2	2			3
Тема 11. Атом у зовнішніх полях	7	2	2			3
Тема 12. Взаємодія атомів з електромагнітними хвилями	7	2	2			3
Разом за змістовим модулем 2	34	12	8			14
<b>Змістовий модуль 3. Квантова теорія молекул і твердого тіла</b>						
Тема 13. Квантова теорія молекул	4	2				2
Тема 14. Енергетичний спектр молекул	8	2	2			4
Тема 15. Елементи квантової теорії твердого тіла	4	2				2
Разом за змістовим модулем 3	16	6	2			10
<b>Змістовий модуль 4. Релятивістська квантова теорія</b>						
Тема 16. Основні положення квантової теорії поля	6	2				4
Тема 17. Елементи квантової електродинаміки	4	2				2
Тема 18. Теорія електрослабкої взаємодії	4	2				2
Разом за змістовим модулем 4	14	6				8
ІНДЗ	10					10
<b>Усього годин</b>	<b>120</b>	<b>36</b>	<b>24</b>			<b>60</b>

### Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	К-сть годин
1.	Фізичні передумови квантової механіки. Математичний апарат квантової механіки	2
2.	Потенціальна яма	2
3.	Квантовий гармонічний осцилятор	2
4.	Співвідношення невизначеностей Гейзенберга	2
5.	Тунельний ефект	2
6.	Квазікласичне наближення	2
7.	Момент імпульсу в квантовій механіці	2
8.	Варіаційний метод Рітца	2
9.	Теорія збурень	2
10.	Атом у зовнішніх полях	2
11.	Квантова теорія випромінювання	2
12.	Двохатомні молекули	2
<b>Усього годин</b>		<b>24</b>

## Самостійна робота

Самостійна робота студента передбачає виконання студентом запланованих завдань під методичним керівництвом викладача, але без його безпосередньої участі. Метою самостійної роботи є засвоєння навчальної програми в повному обсязі та послідовне формування у студентів самостійності як риси характеру, що відіграє суттєву роль у формуванні сучасного фахівця вищої кваліфікації.

Основними формами самостійної роботи студента під час вивчення дисципліни є такі:

- опрацювання теоретичних основ прослуханого лекційного матеріалу;
- вивчення окремих тем або питань, що передбачені для самостійного опрацювання;
- підготовка до практичних занять та виконання індивідуальних домашніх робіт;
- виконання індивідуального науково-дослідного завдання;
- систематика вивченого матеріалу курсу перед написанням модульних контрольних робіт та підготовка до підсумкового контролю.

### Питання, що передбачені для самостійного опрацювання при підготовці до практичних занять та модульного контролю

Назва теми	К-сть годин
	денна форма
Тема 1. Вихідні положення квантової механіки	3
Тема 2. Рівняння Шредінгера. Закони збереження у квантовій механіці.	3
Тема 3. Зв'язок квантової механіки з класичною механікою	3
Тема 4. Принцип невизначеностей Гейзенберга	3
Тема 5. Поступальний і орбітальний рухи частинки у квантовій механіці	6
Тема 6. Спін елементарних частинок	2
Тема 7. Квантовомеханічна теорія воднеподібних атомів	1
Тема 8. Квантовомеханічна теорія складних атомів	1
Тема 9. Періодична система хімічних елементів	3
Тема 10. Теорія збурень	3
Тема 11. Атом у зовнішніх полях	3
Тема 12. Взаємодія атомів з електромагнітними хвилями	3
Тема 13. Квантова теорія молекул	2
Тема 14. Енергетичний спектр молекул	4
Тема 15. Елементи квантової теорії твердого тіла	2

Тема 16. Основні положення квантової теорії поля	2
Тема 17. Елементи квантової електродинаміки	4
Тема 18. Теорія електрослабкої взаємодії	2
Виконання індивідуального навчального завдання	10
Усього годин	60

### Індивідуальні завдання

Індивідуальне науково-дослідне завдання (ІНДЗ) стосується питань квантової механіки, які не ввійшли до лекційного курсу дисципліни і виконується студентом у формі реферату за запропонованими нижче темами або наукового дослідження з підготовкою доповіді на науковій студентській конференції та/або публікацією тез доповіді (статті) у науковому збірнику. Вимоги до оформлення ІНДЗ подано на с. 102.

### Теми індивідуального науково-дослідного завдання

1.	Історія створення квантової теорії
2.	Модель атома Резерфорда і Бора
3.	Представлення Шредінгера і представлення Гейзенберга
4.	Історія спору Н.Бора і А.Ейнштейна з основ квантової механіки
5.	Квантова механіка та інтеграли за траєкторіями
6.	Варіаційний принцип у квантовій механіці
7.	Квантова теорія фотоэффекту
8.	Квантові переходи під дією раптових збурень
9.	Принципи роботи оптичних квантових генераторів
10.	Від'ємний іон водню $H^-$
11.	Метод Хартрі – Фока
12.	Метод Томаса – Фермі
13.	Розсіяння нейтронів у конденсованих полях
14.	Квантова теорія дисперсії світла
15.	Молекулярний іон водню $H_2^+$
16.	Теорія дейтрона
17.	Розсіяння електронів на атомі
18.	Метод парціальних хвиль у теорії розсіяння
19.	Теорія непружного розсіяння
20.	Квантування вільного електромагнітного поля
21.	Ефект Казимира
22.	Квантова теорія електричного дипольного випромінювання
23.	Рівняння Паулі
24.	Квазірелятивістське наближення рівняння Дірака.
25.	Атом водню з урахування релятивістських поправок

## Методи контролю

Оцінювання навчальних досягнень студентів за всіма видами навчальних робіт проводиться за поточним, модульним, підсумковим контролюми та з ІНДЗ. Поточний контроль знань студентів з навчальної дисципліни проводиться за результатами виконання домашніх завдань з розв'язування задач. Модульний контроль проводиться у тестовій формі на базі Інформаційно-освітнього середовища для студентів очної та заочної (дистанційної) форм навчання УДПУ (ІОСдСОтЗФН) в он-лайн режимі по завершенню вивчення відповідного модуля. Усі контрольні заходи включено до 100-бальної шкали оцінювання. Основними критеріями, що характеризують рівень компетентності студента при оцінюванні результатів поточного, модульного та підсумкового контролів з навчальної дисципліни є:

- виконання всіх видів навчальної роботи, що передбачені робочою програмою навчальної дисципліни;
- глибина і характер знань навчального матеріалу за змістом навчальної дисципліни;
- характер відповідей на поставлені питання (чіткість, лаконічність, логічність, послідовність тощо);
- обґрунтування вибору методу для розв'язання тих чи інших задач;
- рівень вміння аналізувати та захищати одержані результати.

## Критерії оцінювання результатів навчання

**Поточний контроль** полягає у оцінюванні виконання домашніх завдань з розв'язання задач за варіантами. Кожне домашнє завдання оцінюється за 2-бальною системою:

**2 б.** – вірний розв'язок з поясненням, точними ілюстраціями, без похибок;

**1,5 б.** – вірний розв'язок, у якому допущені несуттєві похибки;

**1 б.** – вірний в цілому розв'язок, який містить грубі похибки;

**0,5 б.** – розв'язок невірний, але містить вірні вихідні рівняння до розв'язання.

**0 б.** - розв'язок невірний або відсутній.

**Модульний контроль** здійснюється у вигляді незалежного комп'ютерного тестування засобами ІОСдСОтЗФН. Тест з кожного модулю складається з теоретичних питань, відповіді на які передбачають множинний вибір. Максимальна оцінка з кожного тесту складає 10 балів.

**Індивідуальне навчальне дослідження (ІНДЗ)** виконується за запропонованими вище темами і стосується питань квантової механіки, які не ввійшли до лекційного курсу дисципліни. Результати дослідження подаються студентом у формі реферату і оцінюється за 10-бальною

шкалою, яка враховує науковість, повноту розкриття теми, наявність посилань на першоджерела, у тому в числі в тексті, логічність і послідовність викладення матеріалу, наявність вступу і висновків, грамотність, якість оформлення.

**Підсумковий контроль** проводиться у формі усного екзамену за білетами або комп'ютерного тестування засобами ІОСдСОтЗФН УДПУ.

### Розподіл балів, які отримують здобувачі вищої освіти

Поточне тестування та самостійна робота																ІНДЗ	Підсумковий контроль	Сума балів
Змістовий модуль 1								Змістовий модуль 2					ЗМ3		ЗМ4			
Т1	Т2	Т3	Т4	Т5	Т6	Т7	МК1	Т8	Т9	Т10	Т11	МК2	Т12	МК3	МК4			
4	2	2	2	2	2	2	10	4	4	2	2	10	2	10	10	10	20	100

Тn - тема n-го практичного заняття; МКn – модульний контроль з n-го змістового модуля

У екзаменаційній відомості результати навчання проставляються за двома шкалами – 100-бальною та національною. Позитивні оцінки виставляються тільки тим студентам, які виконали всі види навчальної роботи, передбачені робочою програмою навчальної дисципліни, і набрали за результатами поточного та підсумкового контролів не менше 60 балів. Конвертація 100-бальної шкали у 4-х бальну здійснюється за наступною таблицею:

### Шкала оцінювання: національна та ЄКТС

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою	
		для екзамену, курсового проекту (роботи), практики	для заліку
90-100	A	відмінно	зараховано
82-89	B	добре	
75-81	C		
69-74	D	задовільно	
60-68	E		
35-59	FX	незадовільно з можливістю повторного складання	не зараховано з можливістю повторного складання
1-34	F	незадовільно з обов'язковим повторним вивченням дисципліни	не зараховано з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

**ТЕМА 1. ФІЗИЧНІ ПЕРЕДУМОВИ КВАНТОВОЇ ТЕОРІЇ.  
МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ**

**Основні формули і рівняння**

Правило Бора квантування моменту імпульсу	$mvr = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots$
Стала Планка	$\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с},$ $h = 2\pi\hbar = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Формула Планка для спектральної густини рівноважного теплового випромінювання	$\rho(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)}$
Енергія і імпульс фотона	$\varepsilon = \hbar\omega = h\nu,$ $\vec{p} = \frac{\hbar\omega}{c} \vec{n} = \frac{h\nu}{c} \vec{n} = \frac{h}{\lambda} \vec{n} = \hbar\vec{k}$
Рівняння Ейнштейна для фотоефекту	$\frac{m\nu^2}{2} = \hbar\omega - W$
Довжина хвилі де Бройля	$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{mv}; \quad \lambda \approx \frac{h}{mv} \quad (v \ll c)$
Лінійний оператор	$\hat{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \hat{L}f_1 + c_2 \hat{L}f_2$
Самоспряжений оператор	$\int f_1^*(x) \hat{L}f_2(x) dx = \int f_2(x) \hat{L}^* f_1^*(x) dx$
Сума операторів $\hat{A}$ і $\hat{B}$	$\hat{C} = \hat{A} + \hat{B} \Rightarrow \hat{C}f = \hat{A}f + \hat{B}f$
Добуток операторів $\hat{A}$ і $\hat{B}$	$\hat{C} = \hat{A}\hat{B} \Rightarrow \hat{C}f = \hat{A}(\hat{B}f)$
Комутатор операторів $\hat{A}$ і $\hat{B}$	$\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \equiv [\hat{A}, \hat{B}]$
Степінь оператора	$\hat{A}^n = \hat{A} \cdot \hat{A} \cdot \dots \cdot \hat{A}$
Рівняння на власні функції і власні значення оператора	$\hat{L}\psi = \lambda\psi$
Оператор проекції імпульсу	$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$
Оператор вектора імпульсу	$\hat{\vec{p}} = -i\hbar \vec{\nabla} = -i\hbar \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)$

Оператор кінетичної енергії	$\hat{T} = \frac{1}{2m}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2) =$ $= -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$
Оператор момент імпульсу	$\hat{M} = [\vec{r} \times \hat{p}] = -i\hbar [\vec{r} \times \vec{\nabla}], \quad \hat{M}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$
Оператор повної енергії (Гамільтона)	$\hat{H} = \hat{T} + \hat{U} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}, t)$

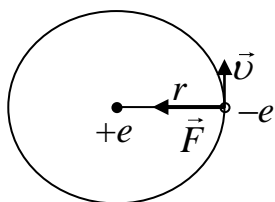
### Приклади розв'язування задач

**Задача 1.** В основу напівкласичної теорії атома водню Н.Бора покладені наступні квантові постулати: 1) Існують стаціонарні стани атома, в яких він не випромінює і не поглинає енергію; 2) Випромінювання і поглинання енергії атомом відбувається при його стрибкоподібному переході з одного стаціонарного стану в інший; 3) Правило квантування моменту імпульсу: модуль моменту імпульсу електрона на стаціонарній орбіті визначається за формулою:

$$mvr = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Користуючись цими постулатами знайти радіус стаціонарної орбіти, енергію стаціонарного стану електрона в атомі водню і вивести спектральну формулу.

### Розв'язок:



З 2-го закону Ньютона:  $mv_n = F_n$  або  $m \frac{v^2}{r} = k \frac{e^2}{r^2}$  (в системі одиниць СІ  $k = 1/4\pi\epsilon_0$ , в Гаусовій  $k = 1$ ) знаходимо швидкість електрона:

$$v = \sqrt{\frac{ke^2}{mr}}. \quad (2)$$

Підставимо  $v$  в (1) і визначимо радіус відповідної орбіти:

$$m \sqrt{\frac{ke^2}{mr}} \cdot r = n\hbar; \quad \sqrt{ke^2 mr} = n\hbar; \quad ke^2 mr = n^2 \hbar^2 \Rightarrow r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{kme^2} = an^2, \quad (3)$$

де  $a = \frac{\hbar^2}{kme^2} = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = 5,29 \cdot 10^{-11}$  (м) – так званий борівський радіус атома водню. Повна енергія електрона дорівнюватиме:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{ke^2}{r} = \frac{\cancel{m}}{2} \cdot \frac{ke^2}{\cancel{m}r} - \frac{ke^2}{r} = -\frac{ke^2}{2r}.$$

Підставимо сюди  $r_n$  з (3): 
$$E_n = -\frac{ke^2}{2r_n} = -\frac{ke^2}{n^2\hbar^2} \cdot kme^2 = -\frac{mk^2e^2}{2\hbar^2n^2} = -\frac{I}{n^2}, \quad (4)$$

де  $I = E_\infty - E_1 = \frac{mk^2e^2}{2\hbar^2} = \frac{me^2}{2\hbar^2(4\pi\epsilon_0)^2} = 13,56(\text{eV})$  – енергія іонізації атома

водню. З (4) випливає спектральна формула Бальмера:

$$\nu_{nl} = \frac{E_n - E_m}{h} = R \left( \frac{1}{l^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad \text{де } R = \frac{mk^2e^2}{4\pi\hbar^3} = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ Гц} \text{ – стала Рідберга.}$$

**Задача 2.** Показати, що стаціонарним борівським орбітам відповідає ціле число дебройлівських хвиль електрона. Знайти довжину хвилі електрона на  $n$ -ій орбіті.

### Розв'язок

Довжина  $n$ -ї орбіти електрона в атомі водню  $\ell_n = 2\pi r_n$ , а довжина дебройлівської хвилі електрона на цій орбіті є

$$\lambda_n = \frac{h}{p_n} = \frac{2\pi\hbar}{m\omega_n}. \quad (1)$$

Звідси 
$$\frac{\ell_n}{\lambda_n} = \frac{2\pi r_n}{2\pi\hbar / m\omega_n} = \frac{m\omega_n r_n}{\hbar}.$$

З правила квантування моменту імпульсу  $m\omega_n r_n = n\hbar$ , тому

$$\frac{\ell_n}{\lambda_n} = \frac{n\hbar}{\hbar} = n, \quad (2)$$

що й потрібно було довести.

Враховуючи (2) та формулу (3) Задачі 1 для  $r_n$ , знаходимо довжина хвилі де Бройля електрона на  $n$ -ій орбіті:

$$\lambda_n = \frac{\ell_n}{n} = \frac{2\pi r_n}{n} = \frac{2\pi}{n} \cdot an^2 = 2\pi an = 2\pi \cdot n \cdot 5,29 \cdot 10^{-11} (\text{м}) = 3,33 \cdot 10^{-11} (\text{м}).$$

**Задача 3.** Використовуючи формулу Планка для спектральної густини рівноважного теплового випромінювання абсолютно чорного тіла, отримати: а) закон Стефана – Больцмана; б) закон зміщення Віна; в) формулу Релея – Джинса.

### Розв'язок

Формула Планка має вигляд: 
$$\rho(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3 / \pi^2 c^3}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (k \text{ – стала Больцмана}). \quad (1)$$

а) Визначаємо об'ємну густину випромінювання підсумовуванням спектральної густини за всіма частотами: