МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ОСНОВ ВЕКТОРНОГО ТА ТЕНЗОРНОГО АНАЛІЗУ

Навчальний посібник

Укладач С. О. Рудницький

Умань
2024

УДК 514.74(075.8)
З–41

Рецензенти:

Шаров С.В., кандидат педагогічних наук, в.о. завідувача кафедри комп’ютерних наук Таврійського державного агротехнологічного університету імені Дмитра Моторного;

Поліщук Т. В., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики та методики навчання математики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини;

Решітник Ю. В., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики та інтегративних технологій навчання природничих наук Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини.

Рекомендовано до друку вченою радою факультету фізики, математики та інформатики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини (протокол № 9 від 21 березня 2024 року)

З-41 **Збірник** задач з основ векторного та тензорного аналізу : навч. посіб. / МОН України, Уманський держ. пед. ун-т імені Павла Тичини ; уклад. С. О. Рудницький. – Умань : Візаві, 2024. – 122 с.

У навчальному посібнику подано матеріал з практичної підготовки до розв’язування задач з дисципліни основи векторного та тензорного аналізу. Посібник складається з тринадцяти тем, містить варіанти контрольних робіт та зразок підсумкового тесту з курсу. Усі теоретичні відомості ілюструються прикладами та типовими вправами для індивідуальної роботи.

Посібник розрахований на студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів усіх форм навчання.

УДК 514.74(075.8)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Шановні читачі, з радістю представляємо вашій увазі навчальний посібник "Збірник задач з основ векторного та тензорного аналізу". Цей посібник розроблений з метою допомогти вам в освоєнні ключових концепцій векторного та тензорного аналізу, які є фундаментальними у багатьох галузях науки та інженерії.

Вивчення векторного та тензорного аналізу є важливим кроком у підготовці майбутніх фахівців у різних галузях, починаючи від фізики та математики й закінчуючи інженерією та комп'ютерними науками. Ці концепції дозволяють вирішувати складні задачі у динаміці, теорії поля, механіці та багатьох інших областях.

Матеріал посібника висвітлено у розрізі тринадцяти основних тем, що передбачені навчальною програмою курсу "Основи векторного та тензорного аналізу" для студентів факультету фізики, математики та інформатики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини.

Цей збірник задач містить різноманітні завдання, які охоплюють широкий спектр тем, від базових властивостей векторів до більш складних тензорних операцій. Кожне завдання супроводжується чітким поясненням та послідовним розв'язком, що дозволяє вам крок за кроком розібратися з матеріалом. Також видання включає завдання для самостійного розв'язування, варіанти пропонованих контрольних та тестових завдань з дисципліни.

Ми сподіваємося, що цей посібник стане вашим надійним помічником у вивченні векторного та тензорного аналізу. Бажаємо вам успіхів у засвоєнні матеріалу та досягненні ваших навчальних та наукових цілей.

З найкращими побажаннями, укладач Рудницький С.О.

<u>Тема 1-2</u>: ***Векторна алгебра. Безкоординатний та координатний підходи***

Тут і надалі будемо розглядати вектори у тривимірному евклідовому просторі.

Довжину (модуль) вектора $\vec{a}$ позначатимемо $|\vec{a}|$. *Скалярний добуток* двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$. Необхідна та достатня умова ортогональності векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є рівність нулю їх скалярного добутку. Властивості скалярного добутку:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;
2. $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\cdot\vec{b} = \vec{a}_1\cdot\vec{b} + \vec{a}_2\cdot\vec{b}$;
3. $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\alpha\vec{b}),\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$;
4. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$.

У прямокутній декартовій системі координат вектор $\vec{a}$ можна однозначно задати набором трьох компонент $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, що є коефіцієнтами лінійного розкладання вектора $\vec{a}$ відносно базису ПДСК. Скалярний добуток двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ через їх компоненти: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ ортогональний до площини векторів-співмножників. У ПДСК векторний добуток знаходимо за формулою:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Довжина (модуль) вектора $\vec{a}\times\vec{b}$: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$. Геометричний зміст модуля векторного добутку – це площа паралелограма, побудованого на $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$S_{\square} = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right).$$

Площа трикутника обчислюється за формулою:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

Необхідна та достатня умова колінеарності відмінних від нуля векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є рівність нулю їх векторного добутку.
Властивості векторного добутку:

1. $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$;
2. $\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2\right)\times\vec{b} = \vec{a}_1\times\vec{b}+\vec{a}_2\times\vec{b}$;
3. $\left(\alpha\vec{a}\times\vec{b}\right) = \alpha\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \left(\vec{a}\times\alpha\vec{b}\right)$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$;
4. $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$.

Подвійний векторний добуток задовольняє тотожності:

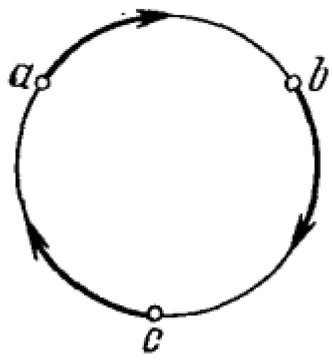
$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right),\ \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} = \vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right).$$

Мішаний добуток це число $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$. У ПДСК мішаний добуток знаходимо за формулою:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Необхідна та достатня умова компланарності трійки векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ є рівність нулю їх мішаного добутку.
Властивості мішаного добутку:

1. $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right) = \left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)$ – циклічна перестановка;



2. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$ – антициклічна перестановка.

Об’єм паралелепіпеда, який побудований на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ як на сторонах, дорівнює модулю мішаного добутку цих векторів:

$$V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

Для об’єму піраміди маємо наступну формулу:

$$V = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

Приклад 1. Перетворити вектор $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$ та встановити його геометричний зміст за умови, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні та ненульові.

Розв’язання.

Умова неколінеарності означає $(\vec{a}\times\vec{b}) \neq \vec{0}$. Перетворимо даний вектор:

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\times\vec{a} - \vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{a} - \vec{b}\times\vec{b} =$$
$$= \vec{0} + \vec{b}\times\vec{a} + \vec{b}\times\vec{a} - \vec{0} = 2(\vec{b}\times\vec{a})$$

Отже, геометричний зміст даного вектора – це вектор ортогональний до площини, побудованої на векторах $\vec{b}$ та $\vec{a}$, довжиною рівною подвоєній площі паралелограма побудованого на векторах $\vec{b}$ та $\vec{a}$.

Приклад 2. Визначте невідомий вектор $\vec{x}$ із системи двох рівнянь

$$\begin{cases} [illegible] \\ [illegible] \end{cases}$$

де скаляр λ і вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вважаються відомими, причому вектор $\vec{a}$ перпендикулярний вектору $\vec{b}$ і не перпендикулярний вектору $\vec{c}$, тобто

$$[illegible]$$

Розв'язання. Домножимо векторно перше рівняння системи на вектор $\vec{c}$, одержимо

$$[illegible]$$

або

$$[illegible]$$

звідки, використавши друге рівняння системи, ми матимемо

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

Підстановкою в рівняння нашої системи можна переконатися, що одержаний вектор її задовольняє. Отже, розглядувана система має єдиний розв'язок.

Приклад 3. Знайти кут між діагоналями паралелограма, який побудований на векторах $\vec{a} = ([illegible], [illegible], [illegible]1)$, $\vec{b} = (-1, 3, -4)$.

Розв'язання. Як відомо, діагоналі паралелограма є $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$. Знайдемо ці вектори:

$$\vec{a}+\vec{b}=(1;2;-1)+(-1;3;-4)=(0;5;-5);$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(1;2;-1)-(-1;3;-4)=(2;-1;3).$$

Тоді косинус кута між діагоналями знаходиться за формулою:

$$\cos\left(\vec{c},\vec{d}\right)=\frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{\left|\vec{c}\right|\left|\vec{d}\right|}=\frac{0\cdot2+5\cdot(-1)+(-5)\cdot3}{\sqrt{0^2+5^2+(-5)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{-20}{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\cdot7}}=$$

$$=-\frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

Приклад 4. Задано вектори $\vec{a}=(12;-3;-3)$, $\vec{b}=(1;2;4)$, $\vec{c}=(1;-3;-2)$. Обчислити проекцію вектора $\vec{b}+\vec{c}$ на вектор $\vec{a}$.

Розв'язання. Знайдемо координати вектора

$$\vec{b}+\vec{c}=(1+1;\,2-3;\,4-2)=(2;-1;2).$$

Обчислимо проекцію $\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ на вектор $\vec{a}$ за формулою:

$$пр_{\vec{a}}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\frac{\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{2\cdot12+(-1)\cdot(-3)+2\cdot(-3)}{\sqrt{12^2+(-3)^2+(-3)^2}}=$$

$$=\frac{21}{\sqrt{162}}=\frac{7\sqrt{2}}{6}.$$

Приклад 5. Дано трикутник своїми вершинами $A=(2;4;5)$, $B=(-3;2;2)$, $C=(-1;0;3)$. Покажіть, що $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів:

$$\overrightarrow{CA}=(2-(-1);\,4-0;\,5-3)=(3;4;2),$$

$$\overrightarrow{CB}=(-3-(-1);\,2-0;\,2-3)=(-2;2;-1).$$

Умова перпендикулярності двох векторів має вигляд: $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$. Перевіримо виконання цієї умови:

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 3\cdot(-2)+4\cdot 2+2\cdot(-1) = -6+8-2=0.$$

Доведено, що вектори перпендикулярні.

Приклад 6. Знайти площу паралелограма, який побудований на векторах $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Розв'язання. Модуль векторного добутку двох векторів дорівнює площі паралелограма, який побудований на цих векторах. Знайдемо векторний добуток:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\cdot(2-1) - \vec{j}\cdot(2+2) + \vec{k}\cdot(-1-2) = \vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Площа паралелограма дорівнює:

$$S_{\square} = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{1^2+(-4)^2+(-3)^2} = \sqrt{26}\ (\textit{кв.од.}).$$

Приклад 7. Розкрити дужки та спростити вираз:

$$\left(2\vec{k}\times\vec{j}\right)\cdot\left(3\vec{i}-\vec{k}\right)+\left(\vec{i}\times 2\vec{j}\right)\cdot\left(\vec{j}-3\vec{k}\right).$$

Розв'язання.

$$\left(2\vec{k}\times\vec{j}\right)\cdot\left(3\vec{i}-\vec{k}\right)+\left(\vec{i}\times 2\vec{j}\right)\cdot\left(\vec{j}-3\vec{k}\right) = \left(-2\vec{i}\right)\cdot\left(3\vec{i}-\vec{k}\right)+$$

$$+2\vec{k}\cdot\left(\vec{j}-3\vec{k}\right) = -6\vec{i}^{\,2}+2\vec{i}\cdot\vec{k}+2\vec{k}\cdot\vec{j}-6\vec{k}^{\,2} = -6-6 = -12.$$

Приклад 8. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \beta\vec{k}$ колінеарні?

Розв'язання. Умова колінеарності двох векторів має вигляд:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}; \qquad \frac{\alpha}{2} = \frac{-3}{4} = \frac{1}{\beta}.$$

Звідки

$\alpha = \dfrac{2\cdot(-3)}{4} = -\dfrac{3}{2}$; $\beta = \dfrac{4\cdot 1}{-3} = -\dfrac{4}{3}$.

Приклад 9. Обчислити об'єм паралелепіпеда і піраміди, які побудовані на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

Розв'язання. Об'єм паралелепіпеда дорівнює модулю мішаного добутку векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-15-2) = -51.$$

Тоді об'єми паралелепіпеда і піраміди дорівнюють:

$$V_{пар} = \left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right| = |-51| = 51 \ (\textit{куб.од.});$$

$$V_{піраміди} = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right| = \frac{51}{6} = 8{,}5 \ (\textit{куб.од.}).$$

Приклад 10. Довести, що точки $A=(2;-1;-2)$, $B=(1;2;1)$, $C=(2;3;0)$, $D=(5;0;-6)$ лежать в одній площині.

Розв'язання. Щоб довести, що ці чотири точки лежать в одній площині, доведемо, що в одній площині лежать вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ тобто ці три вектори компланарні.

Умова компланарності трьох векторів має вигляд:

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right) = 0$.

Знайдемо координати векторів:

$\overrightarrow{AB} = (-1;3;3)$, $\overrightarrow{AC} = (0;4;2)$, $\overrightarrow{AD} = (3;1;-4)$.

Обчислимо мішаний добуток векторів:

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 3\\ 0 & 4 & 2\\ 3 & 1 & -4\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}4 & 2\\ 1 & -4\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}3 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=-1\cdot(-16-2)+3\cdot(6-12)=18-18=0.$$

Таким чином, точки A, B, C, D лежать в одній площині.

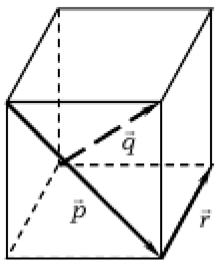
Індивідуальні завдання до теми 1-2

I. Задачі на добутки векторів.

1. Довести, що вектор [illegible] перпендикулярний до вектора $\vec{c}$ [illegible].

2. За якої умови рівність [illegible] буде правильною.

3. Дано куб зі стороною a. Обчислити мішаний добуток векторів $\left(\vec{p},\vec{q},\vec{r}\right)$.



4. Довести компланарність векторів [illegible], [illegible], [illegible], де n, p, m – числові коефіцієнти.

5. Для яких значень параметра p вектори [illegible], $\vec{b}=(p,0,-3)$ і [illegible] утворюють праву (ліву) трійку?

6. Дано вектори [illegible], $\vec{b}=(0,1,1)$, [illegible]. Знайти кут між вектором [illegible] та нормаллю до площини $\left(\vec{b}\vec{c}\right)$.

7. Знайти кут між векторами $\vec a$ і $\vec b$, якщо вектор [illegible] перпендикулярний до вектора [illegible], а вектор [illegible] перпендикулярний до вектора [illegible].

8. У площині yOz знайти вектор, що перпендикулярний до вектора [illegible] і має довжину, рівну 10.

9. Дано [illegible]. Знайти [illegible].

10. Довести, що рівність [illegible] буде правильною тоді й тільки тоді, коли [illegible].

II. Задачі на добутки векторів.

1. Знайти кут між векторами [illegible], а також площу паралелограма, побудованого на них.

2. Обчислити проекцію вектора [illegible] на вектор $\vec b$, якщо [illegible].

3. Дано вектори: [illegible]. Довести:

   1) вектори $\vec a$ і $\vec b$ перпендикулярні;

   2) вектори $\vec a$ і $\vec c$ колінеарні;

   3) вектори $\vec a$, $\vec b$ і $\vec c$ компланарні.

4. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах: [illegible].

5. Дано координати вершин піраміди: $O=(0;0;0)$, $A=(1;2;-1)$, $B=(-2;3;4)$, $C=(1;0;-2)$. Обчислити:

   1) кут ABC;

   2) площу грані ABC;

   3) об'єм піраміди $OABC$.

6. Чому дорівнює довжина висоти AH трикутника ABC, якщо його сторонами є вектори $\overrightarrow{BA} = \vec{m}$ та $\overrightarrow{BC} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$, де $|\vec{m}| = $ [illegible], $|\vec{n}| = $ [illegible] та кут між векторами $\vec{m}$ та $\vec{n}$ дорівнює 60 градусів?

7. З'ясувати, чи належать одній прямій точки $A = (2; 4; 1)$, $B = (3; 7; 5)$ та $C = (4; 10; 9)$. Якщо відповідь є позитивною, виразити вектор $\overrightarrow{AB}$ через вектор $\overrightarrow{CB}$; у протилежному випадку обчислити площу трикутника ABC.

8. Сторони трикутника ABC співпадають з векторами $\overrightarrow{AB} = 2\vec{m}$ [illegible] $\vec{n}$ та $\overrightarrow{AC} = \vec{m}$ [illegible] $\vec{n}$. Обчислити, чому дорівнює довжина сторони BC, якщо $|\vec{m}| = $ [illegible], $|\vec{n}| = $ [illegible], та кут між векторами $\vec{m}$ та $\vec{n}$ дорівнює 30 градусів.

9. При якому значенні змінної x вектори $\vec{a} = $ [illegible] $\vec{m}$ [illegible] $\vec{n}$ та $\vec{b} = 3\vec{m}$ [illegible] $\vec{n}$ будуть перпендикулярними, якщо $|\vec{m}| = $ [illegible], $|\vec{n}| = $ [illegible], та кут між векторами $\vec{m}$ та $\vec{n}$ дорівнює 60 градусів.

10. Довести, що $\left(\left(\vec{a} \times \vec{b}\right), \left(\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \times \left(\vec{c} \times \vec{a}\right)\right)\right) = \left(\vec{a}, \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right)^2$.

III. Задачі на геометричні співвідношення.

1. Довести, що проекція суми векторів на будь-яку вісь дорівнює сумі проекцій доданків на ту саму вісь.

2. Яку умову мають задовольняти три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, щоб із них можна було побудувати трикутник?

3. Довести, що можна побудувати трикутник, сторони якого однакові за довжиною та паралельні медіанам трикутника ABC.

4. Нехай A', B', C' – середини сторін трикутника, протилежних до його вершин A, B, C відповідно, O – довільна точка. Довести рівність $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

5. Довести теорему косинусів плоскої тригонометрії $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, де a, b, c – довжини сторін трикутника, γ

– внутрішній кут трикутника, протилежний до сторони із довжиною c.

6. Довести теорему синусів плоскої тригонометрії $\frac{sin\,\alpha}{a} = \frac{sin\,\beta}{b} = \frac{sin\,\gamma}{c}$, де α, β, γ – внутрішні кути трикутника, протилежні до сторін із довжинами a, b, c відповідно.

7. Вивести формули для $sin(\alpha \pm \beta)$ і $cos(\alpha \pm \beta)$, використовуючи властивості добутків векторів.

8. Задано одиничні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і кути між ними $\alpha = \angle(\vec{b}, \vec{c})$, $\beta = \angle(\vec{c}, \vec{a})$, $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$. Знайти кут між вектором $\vec{c}$ і площиною $(\vec{a}\vec{b})$.

9. Задано $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – вектори ребер тетраедра *DABC* зі спільним початком при вершині *D*. Знайти радіус-вектор висоти тетраедра, проведеної з вершини *D*.

10. Задано вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ однакової довжини. Знайти вектор $\vec{x}$, що утворює із векторами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ однакові кути.

IV. Векторні рівняння. Розв'яжіть рівняння відносно невідомого вектора $\vec{x}$.

1. $\alpha\vec{x} + \beta(\vec{a} \times \vec{x}) = \vec{b}$.

2. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{x}) = \vec{x}$.

Розв'яжіть рівняння відносно невідомих x, y, z.

3. $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{d}$.

4. $x(\vec{b} \times \vec{c}) + y(\vec{c} \times \vec{a}) + z(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{d}$.

<u>Тема 3</u>: ***Ортогональні перетворення*. *Матриця переходу***

Користуючись координатним підходом, доцільно вибирати таку систему координат, де геометричні об'єкти мають найпростішу структуру. У цій системі координат розв'язок задачі можна максимально спростити. Тому потрібно вміти за компонентами геометричних об'єктів в одній системі координат знаходити їх компоненти в іншій системі координат. Найпростіший тип перетворень – ортогональні, які переводять один ортонормований базис в інший, також ортонормований, зберігаючи при цьому довжини векторів і кути між ними. Зміна початку відліку ПДСК не впливає на координати векторів, крім радіус-вектора. Тому вважатимемо початок відліку незмінним.

Перехід від одного ортонормованого базису $S\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ до іншого $S'\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ називається *ортогональним перетворенням* та описується набором співвідношень

$$\vec{e}_i = \alpha_{ij}\vec{e}_j .$$

Коефіцієнти розкладання

$$\alpha_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \cos\angle(\vec{e}_i,\vec{e}_j)$$

утворюють матрицю переходу $A=\{\alpha_{ij}\}$.

Очевидно, пошук матриці переходу

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}$$

зручно проводити, подаючи її у розширеному вигляді

$$\begin{array}{cccc} & \vec{\ } & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \vec{\ } & & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \vec{\ } & & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \vec{e}_3 & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array},$$

де номер вектора (або координатної осі) штрихованого базису визначає номер рядка матриці переходу, а номер вектора (або осі) нештрихованого базису – номер стовпчика.

Із умов ортонормованості обох базисів випливають такі властивості рядків і стовпчиків матриці переходу:

1)сума квадратів елементів кожного рядка (стовпчика) матриці переходу дорівнює одиниці;

2)різні рядки (стовпчики) матриці переходу – ортогональні між собою.

Ці властивості дозволяють перевірити правильність побудови матриці переходу або знайти її елементи за мінімальним числом заданих. У матричному вигляді дані властивості можна занотувати так:

$$A \cdot A^T = A^T \cdot A = E,$$

де E – одинична матриця, A^T – матриця, транспонована до A.

Матриця переходу однозначно визначається трьома незалежними матричними елементами (або еквівалентними до них трьома незалежними параметрами) та одним знаком (знаком величини визначника $det\, A = \pm 1$).

Зауважимо, що декартові координати точки при переході від однієї прямокутної декартової системи координат до іншої перетворюються так само, як і базисні вектори , а саме

$$x_i' = \alpha_{ij} x_j \text{ та } x_i = \alpha_{ji} x_j'.$$

Якщо відомо кути між осями двох систем координат, то елементи α_{ij} матриці переходу зручно шукати як косинуси відповідних кутів. Розглянемо частинні випадки повороту системи координат, такі як *повороти* на кут φ *навколо координатних вісей*, які є базою для складніших поворотів системи координат:

1) повороту навколо вісі Ox_1 (Ox) відповідатиме матриця:

$$A_{XX'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\varphi & sin\,\varphi \\ 0 & -sin\,\varphi & cos\,\varphi \end{pmatrix};$$

2) повороту навколо вісі Ox_2 (Oy) відповідатиме матриця:

$$A_{XX'} = \begin{pmatrix} cos\,\varphi & 0 & sin\,\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\,\varphi & 0 & cos\,\varphi \end{pmatrix};$$

3) повороту навколо вісі Ox_3 (Oz) відповідатиме матриця:

$$A_{XX'} = \begin{pmatrix} cos\,\varphi & sin\,\varphi & 0 \\ -sin\,\varphi & cos\,\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1. Знайти матрицю переходу від системи координат S до системи S', повернутої на кут $\varphi = 45^\circ$ навколо вісі Ox.

Розв'язання. Використаємо подану формулу для повороту навколо заданої осі:

$$A_{SS'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\varphi & sin\,\varphi \\ 0 & -sin\,\varphi & cos\,\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,45^\circ & sin\,45^\circ \\ 0 & -sin\,45^\circ & cos\,45^\circ \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Складніші повороти системи координат, можна одержати за 2-3 послідовні повороти навколо різних вісей. Матриці таких переходів утворюються в результаті добутку матриць послідовних поворотів навколо вісей “справа на ліво”.

Приклад 2. Знайти матрицю переходу після двох послідовних поворотів на кут φ навколо осі *Oz* та кут θ навколо осі *Oy’*.

Розв’язання. Оскільки маємо складніший поворот, що утворюється після 2-х послідовних поворотів навколо вісей, то матрицю такого переходу знаходимо як добуток матриць поворотів навколо вісей “справа на ліво”, тобто множимо матрицю переходу навколо осі *Oy* на кут θ на *Oz* на кут φ:

$$A_{XX''} = \begin{pmatrix} cos\,\theta & 0 & sin\,\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\,\theta & 0 & cos\,\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} cos\,\varphi & sin\,\varphi & 0 \\ -sin\,\varphi & cos\,\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} cos\,\varphi\, cos\,\theta & sin\,\varphi\, cos\,\theta & sin\,\theta \\ -sin\,\varphi & cos\,\varphi & 0 \\ -cos\,\varphi\, sin\,\theta & -sin\,\varphi\, sin\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix}.$$

Приклад 3. Знайти компоненти вектора $\vec{a}$ [illegible] у системі координат *S*’, яка утворена після повороту на кут 60 градусів навколо вісі *Ox*.

Розв’язання. Знайдемо матрицю переходу:

$$M_{XX'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\alpha & sin\,\alpha \\ 0 & -sin\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,60^0 & sin\,60^0 \\ 0 & -sin\,60^0 & cos\,60^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$A' = M_{XX'} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ -\sqrt{3} + \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Примітка. Довжина вектора – інваріант, тобто вона не змінюється при ортогональних перетвореннях. Це можна використовувати при перевірці.

Виконаємо перевірку. До переходу: $|\vec{a}|$ [illegible] $2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$; після переходу:

$|\vec{a}|$ [illegible] $\left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1 + 1 + 3\sqrt{3} + \frac{27}{4} + \frac{9}{4} - 3\sqrt{3} + 3} =$

$$= \sqrt{5 + \frac{36}{4}} = \sqrt{14}.$$

Приклад 4. Знайти координати вектора після двох послідовних поворотів: спочатку на кут 90 градусів навколо вісі *Oz*, а потім на кут 180 градусів навколо вісі *Ox*, якщо координати вектора $\vec{a}$ [illegible] $, 4)$.

Розв'язання. Знайдемо загальну матрицю переходу:

$$M = M_{Ox} \cdot M_{Oz}$$

$$M_{Ox} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\alpha & sin\,\alpha \\ 0 & -sin\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{Oz} = \begin{pmatrix} cos\,\alpha & sin\,\alpha & 0 \\ -sin\,\alpha & cos\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M = M_{Ox} \cdot M_{Oz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A'' = M \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Виконаємо перевірку. До переходу: $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{17}$; після переходу: $|\vec{a}''| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{0+1+16} = \sqrt{17}$.

Індивідуальні завдання до теми 3

I. Знайти матрицю переходу від системи координат S до системи S', повернутої на кут

1) $\varphi = 30^\circ$ навколо вісі Oz;

2) $\varphi = -60^\circ$ навколо вісі Ox;

3) $\varphi = 150^\circ$ навколо вісі Oy;

4) $\varphi = -105^\circ$ навколо вісі Ox;

5) $\varphi = 120^\circ$ навколо вісі Oz;

6) $\varphi = -30^\circ$ навколо вісі *Oy*;

7) $\varphi = 90^\circ$ навколо вісі *Oy*;

8) $\varphi = -135^\circ$ навколо вісі *Ox*;

9) $\varphi = 135^\circ$ навколо вісі *Oy*;

10) $\varphi = 105^\circ$ навколо вісі *Ox*.

II. Знайти компоненти вектора $\vec{a}\ (\ldots, \ldots + 1;\, 2k)$ в системі координат *S'*, яка утворена після повороту на кут 30 градусів навколо вісі *Oy*. (*k-номер у журналі академгрупи*).

III. Знайти координати вектора після двох послідовних поворотів: спочатку на кут 180 градусів навколо вісі *Oy*, а потім на кут 90 градусів навколо вісі *Oz*, якщо координати вектора $\vec{a}\ (\ldots, \ldots;\, 2 + k)$. (*k-номер у журналі академгрупи*).

<u>Тема 4</u>: ***Перетворення тензорів при заміні базису. Основи тензорної алгебри. Симетрія тензорів***

Закон перетворення тензора другого рангу t із компонентами t_{ij} (пишуть $\{t_{ij}\}$, говорять "тензор t_{ij}", матрицю компонент тензора позначають $\|t_{ij}\|$) за ортогональних перетворень системи координат має вигляд

$$t'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}t_{kl}, \; t_{ij} = \alpha_{ki}\alpha_{lj}t'_{kl}.$$

У матричній формі закон перетворення тензора другого рангу можна подати як

$$t' = MtM^T, \; t = M^T t' M.$$

Для тензорів вищих рангів закон перетворення компонент за ортогональних перетворень систем координат можна записати аналогічно, зокрема для тензора третього рангу маємо

$$\lambda'_{ijk} = \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn}\lambda_{lmn}, \; \lambda_{ijk} = \alpha_{li}\alpha_{mj}\alpha_{nk}\lambda'_{lmn}.$$

Компоненти тензора другого рангу у новій системі координат можна шукати, перемножуючи матриці. Для тензорів вищих рангів такої можливості у загальному випадку немає. Тому залишається покомпонентно розписувати відповідні суми.

Якщо за допомогою якої-небудь операції із одного або кількох тензорів утворюються інші, то такі операції називаються *тензорними*. За координатного підходу всі тензорні операції визначаються через компоненти тензорів, але мають інваріантний зміст, тобто означені співвідношення між компонентами тензорів виконуються у будь-якій системі координат.

Додавання (*віднімання*). Якщо A та B – тензори рангу n, то їх сумою (різницею) називається тензор C такого ж рангу n із компонентами

$$C_{i_1 \dots i_n} = A_{i_1 \dots i_n} \pm B_{i_1 \dots i_n}.$$

Зауважимо, що додавати (віднімати) можна тільки тензори одного рангу.

Множення. Зовнішнім (тензорним) добутком тензора $A=\left\{A_{i_1\ldots i_n}\right\}$ рангу n із тензором $B=\left\{B_{j_1\ldots j_m}\right\}$ рангу m називається тензор C рангу $n+m$ із компонентами $C_{i_1\ldots i_n j_1\ldots j_m}=A_{i_1\ldots i_n}B_{j_1\ldots j_m}$.

Тензори-співмножники, на відміну від доданків у сумі (різниці), можуть бути різного рангу. Наприклад, якщо A – тензор першого рангу (вектор), B – тензор другого рангу, то їх тензорним добутком є тензор C третього рангу із компонентами $C_{ijk}=A_iB_{jk}$. Зовнішній добуток тензорів – це спосіб побудови тензорів вищих рангів. Як й у випадку множення матриць, добуток тензорів є асоціативним і, загалом кажучи, некомутативним.

Згортка. Згорткою тензора $A=\left\{A_{i_1\ldots i_n}\right\}$ рангу n за виділеною парою індексів i_k, i_{k+j} називається тензор B рангу n–2, компоненти якого обчислюються так: у вибраній парі індексів покладають $i_k=i_{k+j}=s$ і за повторюваними (німими) індексами здійснюють підсумовування від 1 до 3:

$$B_{i_1\ldots i_{k-1}i_{k+1}\ldots i_{k+j-1}i_{k+j+1}\ldots i_n}=A_{i_1\ldots i_{k-1}si_{k+1}\ldots i_{k+j-1}si_{k+j+1}\ldots i_n}\equiv$$

$$\equiv\sum_{s=1}^{3}A_{i_1\ldots i_{k-1}si_{k+1}\ldots i_{k+j-1}si_{k+j+1}\ldots i_n}.$$

Згортати тензори можна за однією, двома, трьома тощо (якщо вистачає індексів) виділеними парами. Наприклад, якщо A – тензор третього рангу, то в результаті згортки за першою парою індексів отримують тензор першого рангу (вектор):

$$B_k=A_{iik}\equiv\sum_{i=1}^{3}A_{iik}=A_{11k}+A_{22k}+A_{33k}.$$

Очевидно, операція згортки означена для тензорів від другого рангу та вище.

Внутрішнім добутком або *згорткою* тензора $A = \left\{ A_{i_1 \dots i_n} \right\}$ рангу n із тензором $B = \left\{ B_{j_1 \dots j_m} \right\}$ рангу m за виділеною парою індексів i_k, j_l $\left(1 \le k \le n, 1 \le l \le m\right)$, один з яких належить тензору A, а другий – тензору B, називається тензор C рангу n+m–2 із компонентами

$$C_{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_n j_1 \dots j_{l-1} j_{l+1} \dots j_m} = A_{i_1 \dots i_{k-1} s i_{k+1} \dots i_n} B_{j_1 \dots j_{l-1} s j_{l+1} \dots j_m} \equiv$$

$$\equiv \sum_{s=1}^{3} A_{i_1 \dots i_{k-1} s i_{k+1} \dots i_n} B_{j_1 \dots j_{l-1} s j_{l+1} \dots j_m} .$$

Внутрішні добутки $d_i = t_{ij} a_j$, $c_i = b_k t_{ki}$, $\varphi = b_k t_{ki} a_i$ в інваріантному вигляді звичайно пишуть так: $\vec{d} = t\vec{a}$, $\vec{c} = \vec{b}t$, $\varphi = \vec{b}t\vec{a}$.

Властивості симетрії тензорів. Тензор A називається *симетричним* за виділеною парою індексів, якщо його компоненти не змінюються при перестановці індексів пари. Наприклад, симетричний за першою парою індексів тензор третього рангу A задовольняє умову $A_{ijk} = A_{jik}$.

Тензор A називається *антисиметричним* за виділеною парою індексів, якщо його компоненти змінюють знак при перестановці індексів пари. Наприклад, антисиметричний за першою парою індексів тензор A третього рангу задовольняє умову $A_{ijk} = -A_{jik}$.

Тензор називається *повністю симетричним* (*антисиметричним*), якщо він є симетричним (антисиметричним) за довільною парою індексів. Усі властивості симетрії є інваріантними, тобто не залежать від вибору системи координат.

Довільний тензор T можна подати у вигляді суми симетричного S та антисиметричного A тензорів відносно перестановки заданої пари індексів. Зокрема, для тензора другого рангу

$$T = S + A, \text{ де } S_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right),\ A_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right).$$

Приклад 1. Знайти компоненти тензора другого рангу $t = \left\| t_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ після повороту системи координат (*далі СК*) на кут 60 градусів навколо вісі Ox.

Розв'язання. Знайдемо матрицю переходу:

$$M_{Ox} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 60^0 & \sin 60^0 \\ 0 & -\sin 60^0 & \cos 60^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Згідно закону перетворення тензора другого рангу:

$$t' = MtM^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & \frac{\left(5 + 3\sqrt{3}\right)}{2} & \frac{3}{2} + 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \frac{\left(-5\sqrt{3} + 3\right)}{2} & \frac{-3\sqrt{3}}{2} + 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \sqrt{3} \\ -1 & \frac{6\sqrt{3} + 17}{4} & -\frac{\left(6 + \sqrt{3}\right)}{4} \\ \sqrt{3} & -\frac{\left(6 + \sqrt{3}\right)}{4} & \frac{-6\sqrt{3} + 19}{4} \end{pmatrix}$$

Примітка. Згортка симетричного тензора другого рангу є інваріантом! Симетричний тензор другого рангу після довільного повороту СК залишається симетричним!

Приклад 2. Задано тензор $t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ та вектор $\vec{a} = (1, 2, 3)$. Розкласти заданий тензор на симетричну $\boldsymbol{S}$ та антисиметричну $\boldsymbol{A}$ частини. Обчислити:

А) згортки t_{ii}, S_{ii}, A_{ii};

Б) $\vec{b} = t\vec{a}$, $\vec{c} = \vec{a}t$;

В) $a t\vec{a}$ [illegible];

Г) $\left(t_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} t_{kk} \right) a_i a_j$.

Розв'язання. Знайдемо симетричну та антисиметричну частини:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(t_{ij} + t_{ji}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ -2 & -5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 7 \\ -2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(t_{ij} - t_{ji}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ -2 & -5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Перевірка: $t_{ij} = S_{ij} + A_{ij}$.

А) $t_{ii} = 1 + (-5) + 9 = 5, S_{ii} = 5, A_{ii} = 0$;

Б) $\vec{b} = t\vec{a}$, в індексній формі $b_i = t_{ij} a_j$, в матричній формі $B = t \cdot A$.

$\vec{c} = \vec{a}t$, в індексній формі $c_j = a_i t_{ij}$, в матричній формі $C = t^T \cdot A$.

$$B = t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 36 \end{pmatrix},$$

$$C = t^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ -2 & -5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 42 \end{pmatrix}.$$

В) $\vec{a}t\vec{a} = \vec{a}\vec{b} = \vec{c}\vec{a}$. В індексній формі $a_i t_{ij} a_j = a_i b_i = c_j a_j$.

Тоді $a_i b_i = c_j a_j = (1,2,3) \cdot (6,12,36) = (-12,12,42) \cdot (1,2,3) = 138$.

Г) $\left(t_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} t_{kk} \right) a_i a_j$. Знайдемо та означимо деякі величини:

це згортка $t_{kk} = 5$ та $\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Перепозначимо $p_{ij} = \left(t_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} t_{kk} \right)$. Тоді шукана величина є скаляром, яку знаходимо за формулою $\lambda = p_{ij} a_i a_j = a_i p_{ij} a_j = a_i d_i$.

Тоді, в матричній формі, матимемо:

$$\lambda = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \frac{5}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -2 & 3 \\ 4 & -\frac{20}{3} & 6 \\ -7 & 8 & \frac{22}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} & \frac{26}{3} & 31 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{13+52}{3} + 93 = 114\frac{2}{3}.$$

Приклад 3. Знайти компоненту λ'_{123} тензора λ третього рангу у системі координат, отриманій поворотом на кут $\pi/4$ навколо осі Ox.

Розв'язання. Для тензора третього рангу, маємо $\lambda'_{ijk} = \alpha_{il}\alpha_{jm}\alpha_{kn}\lambda_{lmn}$. Тоді $\lambda'_{123} = \alpha_{1l}\alpha_{2m}\alpha_{3n}\lambda_{lmn}$. Запишемо матрицю переходу на кут $\pi/4$ навколо осі Ox:

$$\left\| \alpha_{pq} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi/4 & \sin\pi/4 \\ 0 & -\sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

У пошуку компоненти λ'_{123} беруть участь елементи матриці переходу з кожного рядка відповідно. Оскільки нульовими компонентами можна знехтувати (добуток буде нульовим), маємо:

$$\lambda'_{123} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{32}\lambda_{122} + \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\lambda_{123} + \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}\lambda_{132} + \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{33}\lambda_{133} =$$
$$= 1\cdot\sqrt{2}/2\cdot\left(-\sqrt{2}/2\right)\cdot\lambda_{122} + 1\cdot\sqrt{2}/2\cdot\sqrt{2}/2\cdot\lambda_{123} + 1\cdot\sqrt{2}/2\cdot\left(-\sqrt{2}/2\right)\cdot\lambda_{132} +$$
$$+ 1\cdot\sqrt{2}/2\cdot\sqrt{2}/2\cdot\lambda_{133} = \left(\lambda_{123} - \lambda_{132} + \lambda_{133} - \lambda_{122}\right)/2.$$

Індивідуальні завдання до теми 4

k-номер у журналі академгрупи

I. Знайти компоненти тензора другого рангу

$t = \left\|t_{ij}\right\| = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ -k & 1 & k+1 \\ 0 & k+1 & 2 \end{pmatrix}$ після повороту СК на кут 135 градусів

навколо вісі *Oy*.

II. Задано тензор $t = \begin{pmatrix} -k & -k & 1-k \\ k+1 & 3 & k \\ k+5 & k+7 & k \end{pmatrix}$ та вектор $\vec{a}$ [illegible] $([illegible])$.

Розкласти заданий тензор на симетричну ***S*** та антисиметричну ***A*** частини. Обчислити:

А) згортки t_{ii}, S_{ii}, A_{ii};

Б) $\vec{b} - t\vec{a}$, $\vec{c}$ [illegible] $\vec{a}$ [illegible];

В) $at\vec{a}$ [illegible] $\vec{a}$ [illegible] $\vec{a}\vec{a}$ [illegible];

Г) $\left(t_{ij} - \dfrac{1}{3}\delta_{ij}t_{kk}\right)a_i a_j$.

III. Задачі на доведення.

1. Тензор $t=\{t_{ijk}\}$ симетричний за парою індексів i та j, антисиметричний – за парою індексів j та k. Довести, що він тотожно дорівнює нулю.

2. Задано симетричний невироджений тензор $t=\{t_{ij}\}$. Довести, що тензор $a=\{a_{ij}\}$, компоненти якого задовольняють умови $t_{ik}a_{jk}=\delta_{ij}$, є симетричним.

3. Довести твердження: якщо компоненти тензора $t=\{t_{ij}\}$ задовольняють співвідношення $\alpha t_{ij}+\beta t_{ji}=0$, де α та β – деякі числа, то або $t_{ij}=t_{ji}$ та $\alpha=-\beta$, або $t_{ij}=-t_{ji}$ та $\alpha=\beta$.

4. Довести твердження: якщо тензор $t=\{t_{ijk}\}$ – симетричний за парою індексів i та j й для довільного вектора $\vec{a}$ виконується співвідношення $t_{ijk}a_i a_j a_k=0$, то має місце тотожність $t_{ijk}+t_{jki}+t_{kij}=0$.

5. Довести твердження: якщо для тензора $t=\{t_{ij}\}$ і довільного вектора $\vec{a}$ виконується рівність $t_{ij}a_j=\gamma a_i$, де γ не залежить від вектора $\vec{a}$, то $t=\gamma E$, де E – одиничний тензор.

6. Відомо, що тензори другого рангу A,B – симетричні, а T – антисиметричний. Довести, що тензор другого рангу $C=ATB-BTA$ симетричний.

7. Відомо, що для деякого тензора t вектори $\vec{A}=t\vec{a}$, $\vec{B}=t\vec{b}$, $\vec{C}=t\vec{c}$ компланарні, де $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – три фіксовані некомпланарні вектори. Довести, що всі вектори $t\vec{x}$, де $\vec{x}$ – довільний вектор, компланарні та існує такий відмінний від нуля вектор $\vec{n}$, що $t\vec{n}=0$. І навпаки, з існування такого вектора $\vec{n}$ випливає компланарність усіх векторів $t\vec{x}$.

8. Відомо, що для деякого тензора t вектори $\vec{A}=t\vec{a}$, $\vec{B}=t\vec{b}$, $\vec{C}=t\vec{c}$ колінеарні, де $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – три фіксовані некомпланарні вектори. Довести, що всі вектори $t\vec{x}$, де $\vec{x}$ – довільний вектор, колінеарні та існує два таких неколінеарних вектори $\vec{p}$ та $\vec{q}$, що $t\vec{p}=0$ та $t\vec{q}=0$. І навпаки, із наявності двох таких векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$ випливає колінеарність усіх векторів $t\vec{x}$.

9. Довести твердження: якщо для трьох некомпланарних векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ мають місце рівності $t\vec{a}=0$, $t\vec{b}=0$, $t\vec{c}=0$, то для довільного вектора $\vec{x}$ справедлива рівність $t\vec{x}=0$, тобто $t=0$.

10. Довести, що одиничний тензор $E=\left\{\delta_{ij}\right\}$ є ізотропним.

<u>Тема 5</u>: ***Головні вісі тензора. Приведення тензора до головних вісей. Інваріанти тензора другого рангу***

Компоненти тензора залежать від вибору системи координат. Але із компонент тензора можна скласти й комбінації, незалежні від вибору системи координат. Вони називаються інваріантами тензора й часто мають важливий фізичний зміст. Наприклад, деформацію пружного середовища характеризує тензор деформацій u_{kl}. Його перший інваріант

$$I_1 = u_{11} + u_{22} + u_{33} = \Delta V / V$$

дорівнює відносній зміні об'єму внаслідок деформації.

Велике практичне значення має також питання про вибір такої системи координат, в якій деякий тензор має найпростішу структуру. Розглянемо вибір такої системи для тензора другого рангу.

Спектральна задача для тензора $t = \{t_{ij}\}$ другого рангу полягає у розв'язанні векторного рівняння

$$t\vec{a} = \lambda\vec{a} \quad (\vec{a}t = \lambda\vec{a})$$

відносно невідомих вектора $\vec{a}$ (причому $\vec{a} \neq 0$) та числа λ. Вектор $\vec{a}$ називається правим (лівим) власним вектором тензора , *t*, λ – власним значенням тензора *t*,що відповідає власному вектору $\vec{a}$. Різними власними векторами вважаються лінійно незалежні власні вектори. Для несиметричного тензора власні вектори та власні значення не обов'язково є дійсними. Напрямок, що визначається вектором $\vec{a}$ (якщо $\vec{a}$ дійсний), називається *головним напрямком тензора*. Векторне рівняння $t\vec{a} = \lambda\vec{a}$ еквівалентне однорідній системі алгебраїчних рівнянь

$$t_{ij}a_j = \lambda a_i \qquad (a_i t_{ij} = \lambda a_j), \quad \text{де } i = 1, 2, 3,$$

або $$\left(t_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right)a_j = 0 \qquad \left(a_i\left(t_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right) = 0\right)$$

відносно компонент власного вектора $\vec{a}$ тензора *t*.

Зауважимо, що оскільки $\vec{a}$ та $\lambda\vec{a}$ є векторами, то власне значення λ є скалярною величиною або інваріантом.

Із умови існування нетривіального розв'язку системи $\left(t_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right)a_j = 0$ випливає *характеристичне рівняння*

$$\left|t_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right| = 0$$

для пошуку власних значень λ, що є спільними для лівих і правих власних векторів тензора *t*. Очевидно, для тривимірного тензора *t* другого рангу характеристичне рівняння є алгебраїчним рівнянням третього степеня відносно λ

$$\left|t_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right| = \begin{vmatrix} t_{11}-\lambda & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22}-\lambda & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Кількість власних значень λ дорівнює числу коренів характеристичного рівняння. Вона збігається із розмірністю простору та дорівнює трьом. Якщо всі власні значення різні $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, число лінійно незалежних власних векторів також дорівнює трьом. Для несиметричного тензора, якщо два або більше власних значень однакові, кількість власних векторів може бути менше трьох.

Розкривши визначник і враховуючи, що головні значення тензора будуть інваріантами лише за умови, що інваріантами будуть коефіцієнти алгебраїчного рівняння третього степеня, характеристичне рівняння перепишемо у вигляді $\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$, де коефіцієнти

$$I_1 = t_{11} + t_{22} + t_{33},\ I_2 = \begin{vmatrix} t_{22} & t_{32} \\ t_{23} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{12} & t_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{31} \\ t_{13} & t_{33} \end{vmatrix},\ I_3 = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix},$$

відповідно, називаються першим, другим і третім інваріантами тензора t.

Перший інваріант дорівнює сумі діагональних елементів матриці, яка є зображенням тензора у вибраній системі координат. Суму діагональних елементів довільної квадратної матриці називають слідом матриці та використовують спеціальні позначення: $\mathrm{Sp}\,t$ або $\mathrm{Tr}\,t$. Другий інваріант тензора дорівнює сумі головних мінорів відповідної матриці, а третій – визначнику $\det t$.

Інваріанти тензора t другого рангу виражають через власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ як

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Ці вирази випливають із теореми Вієта про зв'язок коефіцієнтів кубічного рівняння з його коренями.

Власні вектори $\vec{c}_i$ тензора t можна знайти за допомогою послідовної підстановки власних значень λ_i $(i = 1, 2, 3)$ до системи

$$\begin{cases} (t_{11} - \lambda)x_1 + t_{12}x_2 + t_{13}x_3 = 0, \\ t_{21}x_1 + (t_{22} - \lambda)x_2 + t_{23}x_3 = 0, \\ t_{31}x_1 + t_{32}x_2 + (t_{33} - \lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

Оскільки вона є однорідною, то її розв'язок визначено із точністю до множника. Тобто, якщо $\vec{c}$ – розв'язок, то $C\vec{c}$ – також розв'язок, де C – довільне число. Отже, власні вектори знаходять із точністю до числових множників, які можна визначити з умови нормування, що вибирається із міркувань зручності (напр. нормування на одиницю) із точністю до знаку.

Власні значення симетричного тензора t другого рангу є дійсними, і власні вектори завжди можна вибрати дійсними. Якщо всі власні значення різні $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, то відповідні їм власні вектори взаємно ортогональні, а у випадку власних значень, що збігаються, власні вектори завжди можна вибрати ортогональними. Одиничні власні вектори такого тензора задають ортонормований базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ і головні напрямки тензора. Важливою особливістю головних напрямків є те, що тензор t набуває діагональної форми

$$t = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

якщо осі координат сумістити із головними напрямками, причому на головній діагоналі стоять власні значення в порядку нумерації осей. Прямокутна декартова система координат із базисом $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ називається *головною системою координат* тензора t.

У випадку двох однакових власних значень $\lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_1$ однозначно визначається лише власний вектор $\vec{e}_1$. Будь-який вектор із площини, перпендикулярної до $\vec{e}_1$ також буде власним. У цій площині завжди можна вибрати (причому, неоднозначно) пару ортогональних векторів так, щоб вони разом з $\vec{e}_1$ утворювали праву трійку векторів. Для тензорів, кратних одиничному, будь-який вектор буде власним.

Приклад 1. Знайти власні числа та відповідні їм власні вектори тензора $T = \|t_{ij}\| = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Знайти інваріанти тензора I_1, I_2, I_3. Перевірити виконання теореми Гамільтона-Келі: $t^3 - I_1 t^2 + I_2 t - I_3 E = 0$.

Розв'язання. Нагадаємо, що власні числа є розв'язками рівняння:

$$t\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

$$t_{ij}x_j = \lambda x_i = \lambda\delta_{ij}x_j$$

$$\left(t_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right)x_j = 0.$$

$$\begin{pmatrix} t_{11}-\lambda & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22}-\lambda & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33}-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Складаємо характеристичне рівняння:

$$det\left(t_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right) = 0\,.$$

$$\begin{vmatrix} t_{11}-\lambda & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22}-\lambda & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] = 0\,.$$

Отже, власні числа: $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1.$

Підставляючи кожне із значень λ в систему:

$$\begin{cases} \left(t_{11}-\lambda\right)x_1 + t_{12}x_2 + t_{13}x_3 = 0, \\ t_{21}x_1 + \left(t_{22}-\lambda\right)x_2 + t_{23}x_3 = 0, \\ t_{31}x_1 + t_{32}x_2 + \left(t_{33}-\lambda\right)x_3 = 0, \end{cases}$$

Одержимо систему однорідних рівнянь, головний визначник якої за відомо дорівнює нулю. Як відомо, такі системи мають безліч рішень, які визначають лише напрямок власного вектора.

Розглянемо процес визначення власних векторів в нашому прикладі.

При $\lambda_1 = 5$, система має вигляд:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 0x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 0x_3 = 0, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0, \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, отримаємо $x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = t$.

Власний вектор $\vec{e}_1 = (0,0,1)$.

Аналогічно, при $\lambda_2 = 3$, система:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 0x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 0x_3 = 0, \\ 0x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, отримаємо $x_1 = x_2 = t, \quad x_3 = 0$. Власний вектор $\vec{e}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

Аналогічно, при $\lambda_3 = 1$, система:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 0x_3 = 0, \\ 0x_1 + 0x_2 + 4x_3 = 0, \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, отримаємо $x_1 = t, x_2 = -t, \quad x_3 = 0$. Власний вектор $\vec{e}_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$. Легко перевірити, що всі три головні вектори взаємно перпендикулярні та вибираються одиничними.

Запишемо формули для інваріантів:

$$I_1 = t_{11} + t_{22} + t_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 9$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} t_{22} & t_{32} \\ t_{23} & t_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{12} & t_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t_{11} & t_{31} \\ t_{13} & t_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = 23$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 15$$

Перевірити виконання теореми Гамільтона-Келі:

$$t^3 - I_1 t^2 + I_2 t - I_3 E = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^3 - 9\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^2 + 23\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} - 15\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 13 & 0 \\ 13 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 125 \end{pmatrix} - 9\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} + 23\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} - 15\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 13 & 0 \\ 13 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 125 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 45 & 36 & 0 \\ 36 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & 225 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 46 & 23 & 0 \\ 23 & 46 & 0 \\ 0 & 0 & 115 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Знаходимо необхідні величини:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 13 & 0 \\ 13 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 125 \end{pmatrix}$$

Індивідуальні завдання до теми 5

k-номер у журналі академгрупи

I. Знайти власні числа та відповідні їм власні вектори тензора $T = \left\| t_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 3 & 2 & k \\ 2 & 3 & -1 \\ k & -1 & -4 \end{pmatrix}$. Знайти інваріанти тензора I_1, I_2, I_3.

Перевірити виконання теореми Гамільтона-Келі: $t^3 - I_1 t^2 + I_2 t - I_3 E = 0$.

II. *Задачі на доведення*

1. Довести, що власні значення симетричного тензора другого рангу – дійсні, а власні вектори, що відповідають різним власним значенням, – ортогональні.
2. Довести, що другий інваріант тензора t другого рангу можна подати у вигляді $I_2 = \frac{1}{2}\left(\left(t_{ii} \right)^2 - t_{ij} t_{ji} \right)$.
3. Довести, якщо $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – власні значення симетричного тензора t другого рангу, то

$$I_1^2 - 2I_2 = \sum_i \lambda_i^2 = t_{ij} t_{ij}, \quad \sum_i \lambda_i^3 = t_{ij} t_{jk} t_{ki}.$$

<u>Тема 6</u>: ***Тензори деяких фізичних величин***

Приклад 1. У точці M тіла тензор напружень має матрицю компонентів $T = \begin{pmatrix} 18 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, МПа.

Для площадки, що задана нормаллю $\vec{n} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$, знайти а) вектор напруження $\vec{\sigma}$, б) нормальну σ_{nn} і дотичну $\sigma_{n\tau}$ складові $\vec{\sigma}$, повне напруження σ_n.

Розв'язання. Вектор напруження на обраній площадці обчислюється за формулою $\vec{\sigma} = T\vec{n}$, або за співвідношеннями Коші

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 &= T_{11} \cdot n_1 + T_{12} \cdot n_2 + T_{13} \cdot n_3 \\
\sigma_2 &= T_{21} \cdot n_1 + T_{22} \cdot n_2 + T_{23} \cdot n_3 \, . \\
\sigma_3 &= T_{31} \cdot n_1 + T_{32} \cdot n_2 + T_{33} \cdot n_3
\end{aligned}
$$

Маємо

$$\sigma_1 = 18 \cdot 0 + 6 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}, \text{ МПа.}$$

$$\sigma_2 = 6 \cdot 0 + 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}, \text{ МПа.}$$

$$\sigma_3 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ МПа.}$$

Вектор напруження

$$\vec{\sigma} = -3\sqrt{2} \cdot \vec{i} - \sqrt{2} \cdot \vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}, \text{ МПа.}$$

Нормальне напруження на площадці

$$\sigma_{nn} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \sigma_1 \cdot n_1 + \sigma_2 \cdot n_2 + \sigma_3 \cdot n_3 .$$

Повне напруження на площадці

$$\sigma_n = \left|\vec{\sigma}\right| = \sqrt{\sigma_1^{\;2} + \sigma_2^{\;2} + \sigma_3^{\;2}} .$$

Дотичне напруження на площадці

$$\sigma_{n\tau} = \sqrt{\sigma_n^{\;2} - \sigma_{nn}^{\;2}} .$$

Остаточно маємо

$\sigma_{nn} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$ МПа, $\sigma_n = \sqrt{20{,}5} \approx 4{,}53$ МПа, $\sigma_{n\tau} = \sqrt{18{,}25} \approx 4{,}27$ МПа.

Приклад 2. Тензор питомої електропровідності кристала дорівнює (в одиницях 10^{-7} *Ом*$^{-1}$*м*$^{-1}$):

$$T = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3\sqrt{3} \\ 0 & -3\sqrt{3} & 8 \end{pmatrix}.$$

Для орта вектора напруженості електричного поля $\vec{e} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}$ ($E = 2$ *В*/*м*) знайти: а) вектор $\vec{j}$ густини струму та тензор питомого опору *P*.

Розв'язання. Вектор напруженості електричного поля

$$\vec{E} = E \cdot \vec{e} = 2\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(1; 0; \sqrt{3}\right), \text{ або } \vec{E} = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{k} .$$

Вектор густини струму $\vec{j} = T \cdot \vec{E}$, тоді

$$T\cdot\vec{E}=\begin{pmatrix}15 & 0 & 0\\ 0 & 7 & 3\sqrt{3}\\ 0 & -3\sqrt{3} & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\ 9\\ 8\sqrt{3}\end{pmatrix},$$

або $\vec{j}=15\cdot\vec{i}+9\cdot\vec{j}+8\sqrt{3}\cdot\vec{k}$ (в одиницях 10^{-7} *ам*$^{-2}$).

Тензор питомого опору $P=T^{-1}$, тоді

$P=\dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$, де $\Delta=\begin{vmatrix}15 & 0 & 0\\ 0 & 7 & 3\sqrt{3}\\ 0 & -3\sqrt{3} & 8\end{vmatrix}=1245$ (в одиницях 10^{-21}*Ом*$^{-3}$*м*$^{-3}$). Елементи A_{ij} матриці P, знаходимо як відповідні алгебраїчні доповнення тензора *T*:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}7 & 3\sqrt{3}\\ -3\sqrt{3} & 8\end{vmatrix}=83;\ A_{12}=0;\ A_{13}=0;$$

$$A_{21}=0;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}15 & 0\\ 0 & 8\end{vmatrix}=120;\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}15 & 0\\ 0 & -3\sqrt{3}\end{vmatrix}=45\sqrt{3};$$

$A_{31}=0;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}15 & 0\\ 0 & 3\sqrt{3}\end{vmatrix}=-45\sqrt{3},\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}15 & 0\\ 0 & 7\end{vmatrix}=105$ в одиницях 10^{-4} *Ом*$^{-2}$*м*$^{-2}$.

Остаточно маємо $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{15} & 0 & 0\\ 0 & \frac{8}{83} & -\frac{3\sqrt{3}}{83}\\ 0 & \frac{3\sqrt{3}}{83} & \frac{7}{83}\end{pmatrix}$ в одиницях 10^{7} *Ом*м*.

Індивідуальні завдання до теми 6

I. Дано тензор T питомої електропровідності кристала в одиницях 10^{-7} $Ом^{-1}м^{-1}$ і вектор напрямку електричного поля $\vec{n}$. Знайти тензор питомого опору P та вектор $\vec{j}$ густини струму, якщо електричне поле $\vec{E} = E \cdot \vec{n}$ (E = 2 $В/м$).

1. $T = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\vec{n}$ [illegible] $\left(\frac{[illegible]}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

2. $T = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; $\vec{n}$ [illegible] $\left(\frac{[illegible]}{2}; [illegible]; -\frac{1}{2}\right)$.

3. $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; $\vec{n}$ [illegible] $\left(\frac{[illegible]}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

4. $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $\vec{n}$ [illegible] $\left(\frac{[illegible]}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

5. $T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; $\vec{n}$ [illegible] $\left(\frac{[illegible]}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right)$.

6. $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; $\vec{n}$ [illegible] $\left(\frac{[illegible]}{2}; [illegible]; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

7. $T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; $\vec{n}$ [illegible] $\left(\frac{[illegible]}{2}; [illegible]; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

8. $T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; $\vec{n}$ [illegible] $\left(\frac{[illegible]}{2}; [illegible]; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

9. $T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; $\vec{n}\left(\frac{}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ 0\right)$.

10. $T = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $\vec{n}\left(\frac{}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

II. У точці M тіла тензор напруження має матрицю компонентів T. Визначити вектор напруження $\vec{c}$ у точці M на площадці з вектором нормалі $\vec{n}$, нормальне і дотичне напруження на площадці.

1. $T = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\vec{n}\left(\frac{}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

2. $T = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; $\vec{n}\left(\frac{}{2};\ 0;\ -\frac{1}{2}\right)$.

3. $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; $\vec{n}\left(\frac{}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

4. $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $\vec{n}\left(\frac{}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

5. $T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; $\vec{n}\left(\frac{}{2};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{2}\right)$.

6. $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; $\vec{n}\left(\frac{}{2};\ -;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

7. $T=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; $\vec{n}\ \text{[illegible]}\left(\frac{\text{[illegible]}}{2};\ \text{[illegible]};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

8. $T=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; $\vec{n}\ \text{[illegible]}\left(\frac{\text{[illegible]}}{2};\ \text{[illegible]};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

9. $T=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; $\vec{n}\ \text{[illegible]}\left(\frac{\text{[illegible]}}{2};\ \frac{\text{[illegible]}3}{2};\ 0\right)$.

10. $T=\begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $\vec{n}\ \text{[illegible]}\left(\frac{\text{[illegible]}}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

<u>Тема 7</u>: *Скалярні поля*

Геометричною характеристикою скалярного поля є *поверхні рівня* – геометричне місце точок, в яких скалярна функція поля приймає одне і те ж значення. Поверхні рівня заданого поля визначаються рівнянням

$$f\left(x,y,z\right)=C, \text{ де } C=const.$$

Приклад 1. Знайти поверхню рівня скалярного поля $u=arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Розв'язання. Область визначення даного скалярного поля знаходимо із нерівності

$$\left|\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le 1, \text{ тобто } 0\le\frac{z^2}{x^2+y^2}\le 1,$$

звідки $0\le z^2\le x^2+y^2$. Ця подвійна нерівність показує, що поле визначено ззовні кругового конуса $z^2=x^2+y^2$, а також не визначене у вершині конуса $O(0, 0, 0)$. Поверхні рівня визначаються рівнянням

$$arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=C, \text{ де } -\frac{\pi}{2}\le C\le\frac{\pi}{2},$$

тобто $\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=sin\,C$, або $z^2=\left(x^2+y^2\right)sin^2 C$. Це є сімейство кругових конусів, розташованих ззовні конуса зі спільною віссю симетрії Oz та спільною вершиною $O(0, 0, 0)$, в якій поле не визначене, причому сам конус $z^2=x^2+y^2$ також входить в це сімейство.

Приклад 2. Знайти поверхню рівня скалярного поля $u = 2x^2 + 3y^2 - 6z^2 - 8x - 6y - 12z - 7$, що проходить через точку $M(1,1,-1)$.

Розв'язання. Знайдемо значення функції в даній точці:

$$u(M) = 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1^2 - 6\cdot(-1)^2 - 8\cdot 1 - 6\cdot 1 - 12\cdot(-1) - 7 =$$
$$= 2 + 3 - 6 - 8 - 6 + 12 - 7 = -10.$$

Поверхню рівня шукаємо серед розв'язку рівняння $u(x,y,z) = u(M)$:

$$2x^2 + 3y^2 - 6z^2 - 8x - 6y - 12z - 7 = -10.$$

Виділяємо повні квадрати у рівнянні:

$$2(x-2)^2 - 8 + 3(y-1)^2 - 3 - 6(z+1)^2 + 6 - 7 = -10$$

$$2(x-2)^2 + 3(y-1)^2 - 6(z+1)^2 = 2$$

$$\frac{(x-2)^2}{1} + \frac{(y-1)^2}{2/3} - \frac{(z+1)^2}{1/3} = 1.$$

Отже, поверхнею рівня скалярного поля, що проходить через задану точку є однопорожнинний гіперболоїд.

Приклад 3. Знайти поверхню рівня скалярного поля $u = e^{(\vec{a},\vec{r})}$, де $\vec{a}$ – постійний (сталий) вектор, $\vec{r}$ – радіус-вектор точки.

Розв'язання. Тут $\vec{r} = (x, y, z)$ та нехай $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Тоді скалярний добуток $(\vec{a},\vec{r}) = a_1x + a_2y + a_3z$. Рівняння поверхонь рівня буде

$$e^{(\vec{a},\vec{r})} = C,\ C > 0.$$

Звідси

$$(\vec{a},\vec{r}) = \ln C, \text{ або } a_1x + a_2y + a_3z = lnC.$$

Це є сімейство паралельних площин.

Градієнтом скалярного поля $u(x,y,z)$ в даній точці M називається вектор, що позначається символом $\overrightarrow{grad\,u}$ та визначається рівністю

$$\overrightarrow{grad\,u}\Big|_M = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_M \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_M \vec{k}.$$

Нехай $\vec{l} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ – вектор напрямку, а $cos\,\alpha = \frac{a_1}{|\vec{l}|}$, $cos\,\beta = \frac{a_2}{|\vec{l}|}$, $cos\,\gamma = \frac{a_3}{|\vec{l}|}$, де $|\vec{l}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ – напрямні косинуси цього вектора. Тоді *похідна за напрямком* $\vec{l}$ функції $u(x,y,z)$ в точці M_0 визначається як

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(\overrightarrow{grad\,u}, \vec{l}_0\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0} \cdot cos\,\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0} \cdot cos\,\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{M_0} \cdot cos\,\gamma.$$

Приклад 4. Знайти градієнт скалярного поля $u = ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ у точці $M(1,1,-1)$.

Розв'язання. Знайдемо значення частинних похідних даної функції у точці $M(1,1,-1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M = \frac{\partial\left(ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right)}{\partial x}\Big|_M = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}\Big|_M = \frac{2}{3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_M = \frac{\partial\left(ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right)}{\partial y}\Big|_M = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}\Big|_M = \frac{2}{3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_M = \frac{\partial\left(ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right)}{\partial z}\Big|_M = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}\Big|_M = -\frac{2}{3}.$$

Підставимо знайдені величини у формулу $\overrightarrow{grad\,u}\Big|_M = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_M \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_M \vec{k}$:

$$\overrightarrow{grad\,u}\Big|_M = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Приклад 5. Визначити кут θ між градієнтами функцій $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ та $v = x + y + 2\sqrt{xy}$ в точці $M(1,1)$.

Розв'язання. Знаходимо градієнти даних функцій в точці $M(1,1)$. Маємо

$$\overrightarrow{grad\,u}\Big|_M = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\Bigg|_M = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j},$$

$$\overrightarrow{grad\,v}\Big|_M = \left[\left(1 + \sqrt{\frac{y}{x}}\right)\vec{i} + \left(1 + \sqrt{\frac{x}{y}}\right)\vec{j}\right]\Bigg|_M = 2\vec{i} + 2\vec{j}.$$

Кут θ між градієнтами функцій в точці *M* визначається з рівності

$$cos\,\theta = \frac{\left(\overrightarrow{grad\,u}, \overrightarrow{grad\,v}\right)\Big|_M}{\left|\overrightarrow{grad\,u}\right|_M \cdot \left|\overrightarrow{grad\,v}\right|_M} = \frac{2/\sqrt{2} + 2/\sqrt{2}}{1 \cdot 2\sqrt{2}} = 1.$$

Звідси $\theta = 0^\circ$.

Приклад 6. Знайти похідну скалярного поля $u = ln\left(x + \sqrt{y^2 + z^2}\right)$ в точці *M* (1; -3; 4) за напрямком вектора $\vec{l} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

Розв'язання. Знайдемо напрямні косинуси вектора $\vec{l} = (-2, -1, 1)$, довжина якого дорівнює $\left|\vec{l}\right| = \sqrt{6}$. Маємо

$$cos\,\alpha = \frac{-2}{\sqrt{6}},\ cos\,\beta = \frac{-1}{\sqrt{6}},\ cos\,\gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Значення частинних похідних функції $u = ln\left(x + \sqrt{y^2 + z^2}\right)$ в точці *M* (1; -3; 4) дорівнюють

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = \left.\frac{\partial\left(ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)\right)}{\partial x}\right|_M = \left.\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\right|_M = \frac{1}{6},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = \left.\frac{\partial\left(ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)\right)}{\partial y}\right|_M = \left.\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)}\right|_M = -\frac{1}{10},$$

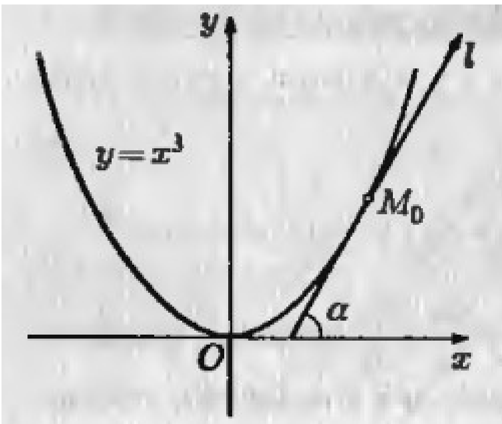
$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = \left.\frac{\partial\left(ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)\right)}{\partial z}\right|_M = \left.\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)}\right|_M = \frac{2}{15}.$$

За формулою $\frac{\partial u}{\partial l} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M \cdot cos\,\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M \cdot cos\,\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M \cdot cos\,\gamma$, маємо

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right) - \frac{1}{10}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \frac{2}{15}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{10\sqrt{6}}.$$

Приклад 7. Знайти похідну скалярного поля $u = arctg\,xy$ в точці $M\,(1;\,1)$, що належить параболі $y = x^2$ за напрямком цієї кривої (у напрямку зростання абсциси).

Розв'язання. Напрямом $\vec{\iota}$ параболи $y = x^2$ в точці $M\,(1;\,1)$ вважається напрям дотичної до параболи в цій точці



Нехай дотичний вектор $\vec{\iota}$ до кривої у точці $M\,(1;\,1)$ утворює з віссю Ox кут α. Маємо

$$y' = 2x;\ tg\alpha = y'\big|_{x=1} = 2,$$

звідки напрямні косинуси дотичної

$$cos\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$cos\,\beta = sin\,\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Значення частинних похідних даної функції $u = arctg\,xy$ в точці $M\,(1;\,1)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = \left.\frac{y}{1+x^2y^2}\right|_M = \frac{1}{2},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = \left.\frac{x}{1+x^2y^2}\right|_M = \frac{1}{2}.$$

Отже, похідна за напрямом

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}.$$

Індивідуальні завдання до теми 7

I. Знайти поверхню рівня скалярного поля, що проходить через вказану точку.

1. $u = 6x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 24x - 6y - 4z + 20;\quad M\left(-2,1,-1\right).$
2. $u = 3x^2 + 4y^2 - 12x + 8y - 24z + 114;\quad M\left(2,-1,5\right).$
3. $u = 2x^2 - 3y^2 + 12x + 12y - 12z - 36;\quad M\left(-3,2,4\right).$
4. $u = 3x^2 - 4y^2 - 6z^2 - 18x - 8y - 12z + 17;\quad M\left(3,-1,-1\right).$
5. $u = 3x^2 + 2z^2 + 6x + 4y - 8z - 9;\quad M\left(-1,3,2\right).$
6. $u = z^2 - 2y^2 - 2z - 4y - 8x + 16;\quad M\left(3,-1,1\right).$

Знайти поверхню рівня скалярного поля:

7. $u = 3^{x+2y-z}$.

8. $u = ln\left|\vec{r}\right|$, де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки.

9. $u = ln\sqrt{\dfrac{y}{2x}}$.

10. $u = \dfrac{\left(\vec{a}, \vec{r}\right)}{\left(\vec{b}, \vec{r}\right)}$ ($\vec{a}$ та $\vec{b}$ – постійні (сталі) вектори).

II. Знайти градієнт функції у вказаних точках:

1. $u = \dfrac{xy^2}{x+1}$ в т. $M(0, 1)$;
2. $u = arccos\left(xy\right)$ в т. $M(1, 0)$;
3. $u = e^{xyz}$ в т. $M(1, 1, 0)$;
4. $u = a^{\frac{3x^2}{y}}$ в т. $M(1, 0)$;
5. $u = ze^{x^2+y^2+z^2}$ в т. $M(0, 0, 0)$.

Визначити кут θ між градієнтами скалярного поля u в точках M і N:

6. $u = arctg\, {}^{x}\!/_{y}$ $M(1, 1), N(-1, -1)$;
7. $u = cos\dfrac{1}{x^2 + y^2}$ $M(1, 1), N(-1, -1)$;
8. $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ $M(1, 2, 2), N(-3, 1, 0)$.
9. $u = arctg\dfrac{x+z}{y}$ $M(1, 1, 1), N(-1, -1, -1)$;
10. $u = \left(x + y\right) \cdot e^{x+y}$ $M(0, 0), N(1, 1)$.

III. Знайти похідну скалярного поля $u(x,y,z)$ в точці M за напрямком вектора $\vec{l}$:

1. $u=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}$; $\vec{l}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$; M (1; 1; 1).

2. $u=x+ln\left(z^2+y^2\right)$; $\vec{l}=-2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$; M (2; 1; 1).

3. $u=x^2y-\sqrt{xy+z^2}$; $\vec{l}=2\vec{j}-2\vec{k}$; M (1; 5; -2).

4. $u=y\,ln\left(1+x^2\right)-arctg\,z$; $\vec{l}=2\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}$; M (0; 0; -1).

5. $u=x\left(ln\,y-arctgz\right)$; $\vec{l}=8\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k}$; M (-2; 1; -1).

6. $u=ln\left(3-x^2\right)+xy^2z$; $\vec{l}=-\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$; M (1; 3; 2).

7. $u=sin\left(x+2y\right)+\sqrt{xyz}$; $\vec{l}=4\vec{i}+3\vec{j}$; $M\left(\pi/2;3\pi/2;3\right)$.

8. $u=x^2y^2z-ln\left(z-1\right)$; $\vec{l}=3\vec{i}-6\vec{j}+2\sqrt{3}\vec{k}$; M (1; 1; 2).

9. $u=x^3+\sqrt{y^2+z^2}$; $\vec{l}=\vec{j}-\vec{k}$; M (1; -3; 4).

10. $u=\dfrac{\sqrt{x}}{y}-\dfrac{yz}{x+\sqrt{y}}$; $\vec{l}=2\vec{i}+\vec{k}$; M (4; 1; -2).

IV. Виконати завдання:

1. Знайти похідну скалярного поля $u=arctg\,\dfrac{y}{x}$ в точці $M\left(2,-2\right)$ кола $x^2+y^2-4x=0$ вздовж дуги цього кола.

2. Знайти похідну скалярного поля $u=xz^2+2yz$ в точці $M\left(1,0,2\right)$ вздовж кола $\begin{cases} x=1+cos\,t \\ y=sin\,t-1 \\ z=1 \end{cases}$.

3. Знайти похідну скалярного поля $u=ln\left(x^2+y^2\right)$ в точці $M\left(1,2\right)$ параболи $y^2=4x$ за напрямком цієї кривої.

4. Знайти похідну скалярного поля $u = x^2 + y^2$ в точці $M\left(x, y\right)$ кола $x^2 + y^2 = R^2$ за напрямком цього кола

5. Знайти похідну скалярного поля $u = 2xy + y^2$ в точці $\left(\sqrt{2}, 1\right)$ еліпса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ за напрямком зовнішньої нормалі до еліпса в цій точці.

6. Знайти похідну скалярного поля $u = x^2 - y^2$ в точці $\left(5, 4\right)$ гіперболи $x^2 - y^2 = 9$ за напрямком цієї кривої.

7. Знайти похідну скалярного поля $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точці M, якій відповідає значення параметра $t = \frac{\pi}{2}$ за напрямком гвинтової лінії $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = at$.

8. Знайти похідну функції $u = \frac{1}{r}$, де $r = |\vec{r}|$ за напрямком вектора $\vec{l} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$.

9. Знайти похідну функції $u = \frac{1}{r}$, де $r = |\vec{r}|$ за напрямком її градієнта.

10. Знайти похідну функції $u = yze^x$, в точці M (0, 0, 1) за напрямком її градієнта.

<u>Тема 8</u>: ***Векторні функції скалярного аргументу***

Похідні від векторних величин за числовими змінними виникають у задачах класичної механіки, де положення матеріальної точки у деякий момент часу *t* задається векторною функцією скалярного аргументу $\vec{r}(t)$ (радіус-вектором). Перша та друга похідні від неї за часом – це швидкість і прискорення матеріальної точки, відповідно. Геометрично функція $\vec{r}(t)$ при $t \in [a,b]$ визначає ділянку деякої тривимірної кривої, яка є траєкторією матеріальної точки.

Лінійні операції аналізу над вектор-функцією $\vec{r}(t)$ (граничні переходи, диференціювання та інтегрування за параметром *t*) можна побудувати прямими узагальненнями відповідних операцій над скалярними функціями. Зокрема, похідна за часом *t* від вектор-функції $\vec{r}(t)$ визначається як

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\delta t) - \vec{r}(t)}{\delta t}$$

(у класичній механіці похідну за часом позначають крапкою над відповідною величиною).

Зауважимо, що диференціювання за числовим параметром є скалярною операцією, яка не змінює типу об’єкта (похідна зберігає всі його геометричні властивості – аксіальність, полярність тощо). У декартовій системі координат розкладання радіус-вектора $\vec{r}(t)$ за базисом $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ має вигляд

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z,$$

де орти є сталими, отже похідна за часом від $\vec{r}(t)$ має вигляд

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z.$$

Правило Лейбніца для похідної від добутку векторних функцій має вигляд

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}(t)\cdot\vec{B}(t)\right)=\frac{d\vec{A}(t)}{dt}\cdot\vec{B}(t)+\vec{A}(t)\cdot\frac{d\vec{B}(t)}{dt}$$

для скалярного множення, і

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}(t)\times\vec{B}(t)\right)=\frac{d\vec{A}(t)}{dt}\times\vec{B}(t)+\vec{A}(t)\times\frac{d\vec{B}(t)}{dt}$$

– для векторного відповідно. Узагальнення цих формул для більшої кількості множників аналогічне правилу Лейбніца для добутку функцій.

Для розв'язування задач цього розділу можна застосувати ті самі прийоми, що використовуються у темі 1-2. Відмінність полягає лише в тому, що після запису диференціальних інваріантних співвідношень або проектування векторів на осі декартової системи координат буде отримано алгебраїчні вирази із похідними. У задачах, де задано виділений напрямок (сталий вектор), зручно ввести систему координат таким чином, щоб цей напрямок збігався з однією із координатних осей (традиційно вибирають вісь Oz). Якщо у задачі немає виділених напрямків, явно вводити конкретну систему координат здебільшого недоцільно.

Приклад 1. Знайти похідну за часом від функції $\vec{r}^{\,2}$.

Розв'язання. Розглянемо подання радіус-вектора у ПДСК $\vec{r}(t)=x(t)\vec{e}_x+y(t)\vec{e}_y+z(t)\vec{e}_z$. Далі, за формулою скалярного добутку при координатному підході, маємо

$$\vec{r}^{\,2}=\vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t)=x^2(t)+y^2(t)+z^2(t).$$

Тоді, похідна за часом t:

$\ldots \big) + y^2(t) + z^2(t)\big)'_t = 2x(t)\cdot x'(t) + 2y(t)\cdot y'(t) + 2z(t)\cdot z'(t)$

Отже, [illegible]. Також, можна було б одразу скористатися правилом Лейбніца для похідної від добутку векторних функцій:

$$[illegible]$$

Приклад 2. Довести рівність $\int$ [illegible], де [illegible] – функція часу, [illegible] – сталий вектор.

Розв'язання. Рівність буде доведена, якщо показати, що похідна правої частини рівності збігається з підінтегральною функцією. За правилом Лейбніца, маємо:

$$[illegible]$$

Рівність доведено.

Індивідуальні завдання до теми 8

1. Знайти похідну за часом від функції [illegible].
2. Знайти похідну за часом від функції [illegible].
3. Знайти похідну за часом від функції $\sqrt{\ldots}$ [illegible].
4. Знайти похідну за часом від функції $\sqrt{(\ldots)}$ [illegible].
5. Знайти похідну за часом від функції [illegible].
6. Знайти похідну за часом від функції [illegible].

7. Довести, що умова $|\vec{r}| = \mathrm{const}$ еквівалентна тому, що $\vec{r} \perp \vec{r}'$.

8. Довести рівність [illegible], якщо [illegible].

9. За якої умови рівність $\left|\dfrac{d}{dr}\vec{r}(t)\right| = \dfrac{d}{dr}\left|\vec{r}(t)\right|$ є правильною? Відповідь обґрунтувати.

10. Довести, якщо $\left(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}''\right) = 0$, то вектор $\vec{r}(t)$ залишається паралельним деякій площині.

<u>Тема 9</u>: ***Векторні поля***

Векторною лінією векторного поля $\vec{a}$ називається крива, в кожній точці *M* якої вектор $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ напрямлений по дотичній до цієї кривої. Диференціальні рівняння векторних ліній мають вигляд

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}$$

Для векторних ліній плоского поля:

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{0}$$

або

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a_y}{a_x}, \\ z = const. \end{cases}$$

Звідси видно, що векторні лінії плоского поля є плоскими кривими, які лежать в площинах, паралельних площині *xOy*.

Приклад 1. Знайти векторні лінії магнітного поля, створеного лінійним нескінченним провідником, по якому протікає струм $\vec{I}(0,0,I)$.

Розв'язання. За законом Біо-Савара-Лапласа, напруженість магнітного поля такого провідника дорівнює

$$\vec{H} = \frac{2}{x^2 + y^2}\left[\vec{I}, \vec{r}\right] = \left(-\frac{2Iy}{x^2 + y^2}, \frac{2Ix}{x^2 + y^2}, 0\right).$$

Диференціальні рівняння векторних ліній, мають вигляд

$$\frac{\left(x^2+y^2\right)dx}{-2Iy}=\frac{\left(x^2+y^2\right)dy}{2Ix}=\frac{dz}{0},$$

Або

$$xdx=-ydy,\ dz=0.$$

Їх інтеграли

$$\frac{x^2+y^2}{2}=C_1,\ z=C_2,$$

де C_1, C_2 – константи інтегрування. Отже, векторні лінії – перетин поверхні циліндра радіусом $R=\sqrt{2C_1}$ та площиною $z=C_2$, тобто це концентричні кола з центрами на осі z.

Потік векторного поля через *замкнуту поверхню*, можна знаходити за *теоремою Остроградського-Гауса*:

$$П=\iint\limits_S(\vec{a},\vec{n})dS=\iiint\limits_V div\,\vec{a}\,dV$$

В найпростіших випадках, коли дивергенція векторного поля є сталою $div\,\vec{a}=C$*, то потік за цією формулою є добутком цієї сталої на об'єм замкнутої поверхні, потік по якій ми знаходимо, тобто:*

$$П=\iint\limits_S(\vec{a},\vec{n})dS=\iiint\limits_V div\,\vec{a}\,dV=\iiint\limits_V C\,dV=C\iiint\limits_V dV=C\cdot V$$

Приклад 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ поля через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a}=(\ldots y)\vec{i}+\ldots x\vec{j}+(\ldots z+\ldots x)\vec{k}\qquad \begin{array}{c}\left(x^2+y^2\right)=z^2\\ z=2\end{array}$$

Розв'язання. Знайдемо дивергенцію нашого векторного поля, нагадаємо цю формулу:

$$div\vec{a} \quad \frac{}{\partial x} \quad \frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\frac{\partial\left(\sqrt{z}+y\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(3x\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(3z+5x\right)}{\partial z}=0+0+3=3$$

Замкнута поверхня є конусом з основою, що є кругом радіуса

$$R=\frac{\sqrt{2}}{2}:$$

$$8\left(x^2+y^2\right)=2^2,\ x^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

Знайдемо об'єм конуса за відомою формулою: $V=\frac{1}{3}\pi R^2 H=\frac{1}{3}\pi\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{1}{3}\pi$.

Отже, потік векторного поля $П=\iint\limits_S(\vec{a} \ \vec{n}) \quad \cdot V=3\cdot\frac{1}{3}\pi=\pi$.

Циркуляцією Ц векторного поля $\vec{a}$ називається лінійний інтеграл, взятий вздовж замкнутої орієнтованої кривої L. Отже

$$Ц=\oint$$

Якщо векторне поле $\vec{a}$ задано в координатній формі

$\vec{a} \quad (x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$, то циркуляція

$$Ц=\oint \qquad \oint \qquad dz.$$

Якщо вдається параметризувати лінію (контур) L:

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$ *, $\alpha \le t \le \beta$ то циркуляція буде звичайним визначеним*

інтегралом Рімана по змінній t:

$$Ц = \bigcirc \qquad \bigcirc \qquad dz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left[P\left(x(t), y(t), z(t)\right) \cdot x'(t) + Q\left(x(t), y(t), z(t)\right) \cdot y'(t) + R\left(x(t), y(t), z(t)\right) \cdot z'(t) \right] dt$$

Приклад 3. Знайти модуль циркуляції векторного поля $\vec{a}$ вздовж контура *Г*:

$$\vec{a} \quad (- \quad y)\vec{i} \quad y2\vec{j} \quad x2k \qquad Г: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Розв'язання. Параметризуємо контур: $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 1 - 2\cos t - 2\sin t \end{cases}$ $, 0 \le t \le 2\pi$. Знайдемо похідні $x'(t) = -2\sin t$, $y'(t) = 2\cos t$, $z'(t) = 2\sin t - 2\cos t$. Підставимо ці значення у формулу (2):

$$Ц = \int_{\alpha}^{\beta} \left[P\left(x(t), y(t), z(t)\right) \cdot x'(t) + Q\left(x(t), y(t), z(t)\right) \cdot y'(t) + R\left(x(t), y(t), z(t)\right) \cdot z'(t) \right] dt =$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \left[(2 - 4\cos t \sin t) \cdot (-2\sin t) - \left(2\sin t(1 - 2\cos t - 2\sin t)\right) \cdot 2\cos t - \left(2\cos t(1 - 2\cos t - 2\sin t)\right) \cdot (2\sin t - 2\cos t) \right] dt =$$

$$= -2\int_{0}^{2\pi}\left[\sin t + 2\sin 2t - \sin 3t - \cos 2t + 4\cos 3t - 1\right]dt =$$

$$= -2\left(-\cos t - \cos 2t + \frac{1}{3}\cos 3t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{4}{3}\sin 3t - t\right)\Bigg|_{0}^{2\pi} = 4\pi$$

Індивідуальні завдання до теми 9

I. Векторні лінії.

1. Знайти векторні лінії у векторному полі $\vec{a}$:

[illegible]

2. Знайти векторні лінії у векторному полі $\vec{a}$:

[illegible]

3. Знайти векторні лінії у векторному полі $\vec{a}$:

[illegible]

4. Знайти векторні лінії у векторному полі $\vec{a}$:

[illegible]

5. Знайти векторні лінії у векторному полі $\vec{a}$:

[illegible]

6. Знайти векторні лінії у векторному полі $\vec{a}$:

[illegible]

7. Знайти векторні лінії у векторному полі $\vec{a}$:

[illegible]

8. Знайти векторні лінії у векторному полі $\vec{a}$:

[illegible]

9. Знайти векторні лінії у векторному полі $\vec{a}$:

[illegible]

10. Знайти векторні лінії у векторному полі $\vec{a}$:

[illegible]

II. Потік векторного поля.

1. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

$\vec{a}$ [illegible] $2x)\vec{i}$ [illegible] $\vec{j}$ [illegible] $\vec{k}$

$$S = x + y + z = 1,$$
$$x = 0,$$
$$y = 0,$$
$$z = 0.$$

2. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

$\vec{a}$ [illegible] $x)\vec{i}$ [illegible] $\vec{j}$ [illegible] $\vec{k}$

$$S : x^2 + y^2 = z^2$$
$$z = 1,$$
$$z = 4.$$

3. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

$\vec{a}$ [illegible] $7x)\vec{i}$ [illegible] $\vec{j}$ [illegible] $\vec{k}$

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y + 2z - 2$$

4. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

$\vec{a}$ [illegible] $+ 3x)\vec{i}$ [illegible] $\vec{j}$ [illegible] $\vec{k}$

$$S :\ 36(x^2 + y^2) = z^2$$
$$z = 6$$

5. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

$\vec{a}$ [illegible] $5x)\vec{i}$ [illegible] $\vec{j}$ [illegible] $2z)\vec{k}$

$$S :\ 2x + 2y - z = 4$$
$$x = 0;\ y = 0;\ z = 0$$

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

$\vec{a}$ [illegible] $\vec{i}$ [illegible] $\vec{j}$ [illegible] $\vec{k}$

$$S :\ 4(x^2 + y^2) = z^2$$
$$z = 3$$

7. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

$\vec{a} = (\ldots + 2x)\vec{i} + (\sin x - 3y)\vec{j} + (\sin y + 2z)\vec{k}$ $\quad S:\ (x^2 + y^2) = z^2$

$z = 3,\ z = 0$

8. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

$\vec{a} = (\ldots 1)\vec{i} + (2x \ldots 4y)\vec{j} + (e^{\ldots} \ldots z)\vec{k}$ $\quad S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 2y$

9. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

$\vec{a} = (\ldots 2x)\vec{i} + (\sin x + y)\vec{j} + (x \ldots 2z)\vec{k}$ $\quad S:\ x + 2y - 3z = 6$

$x = 0;\ y = 0;\ z = 0$

10. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через замкнуту поверхню S (нормаль зовнішня):

$\vec{a} = (\ldots y)\vec{i} + 3x\vec{j} + (3z + 3x)\vec{k}$ $\quad S:\ 8(x^2 + y^2) = z^2$

$z = 2$

III. Циркуляція векторного поля.

1. Знайти модуль циркуляції векторного поля $\vec{a}$ вздовж контура $Г$:

$\vec{a} = \ldots y\vec{j} + y\vec{k}$ $\quad Г:\ \begin{cases} z = 5\left(x^2 + y^2\right) - 1 \\ z = 4 \end{cases}$

2. Знайти модуль циркуляції векторного поля $\vec{a}$ вздовж контура $Г$:

$\vec{a} = y\ldots + 2xz\vec{j} + xy\vec{k}$ $\quad Г:\ \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ x^2 + y^2 = 9\ (z > 0) \end{cases}$

3. Знайти модуль циркуляції векторного поля $\vec{a}$ вздовж контура $Г$:

$\vec{a} = \ldots yz\vec{j} - x\vec{k}$ $\quad Г:\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

4. Знайти модуль циркуляції векторного поля $\vec{a}$ вздовж контура $Г$:

$\vec{a}$ [illegible] $\qquad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 3x - 3y - 2z = 1 \end{cases}$

5. Знайти модуль циркуляції векторного поля $\vec{a}$ вздовж контура Γ:

$\vec{a}$ [illegible] $\qquad \Gamma: \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 1 \end{cases}$

6. Знайти модуль циркуляції векторного поля $\vec{a}$ вздовж контура Γ:

$\vec{a}$ [illegible] $\qquad \Gamma: \begin{cases} z = 3\left(x^2 + y^2\right) + 1 \\ z = 4 \end{cases}$

7. Знайти модуль циркуляції векторного поля $\vec{a}$ вздовж контура Γ:

$\vec{a}$ [illegible] $\qquad \Gamma: \begin{cases} x = cos\, t \\ y = sin\, t \\ z = 2 \end{cases}$

8. Знайти модуль циркуляції векторного поля $\vec{a}$ вздовж контура Γ:

$\vec{a}$ [illegible] $\qquad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 - 4z^2 = 0 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

9. Знайти модуль циркуляції векторного поля $\vec{a}$ вздовж контура Γ:

$\vec{a}$ [illegible] $\qquad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ x^2 + y^2 = 16 \quad z > 0. \end{cases}$

10. Знайти модуль циркуляції векторного поля $\vec{a}$ вздовж контура Γ:

$\vec{a}$ [illegible] $\qquad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

Тема 10: *Диференціальні операції над скалярними та векторними полями*

Диференціальні операції над скалярними та векторними функціями точки простору (полями) визначають без використання конкретної системи координат; вони мають інваріантний зміст і виражаються через символічний векторний диференціальний оператор набла, який у прямокутних декартових координатах має вигляд

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{k}.$$

Наприклад, дивергенцію векторного поля $\vec{A}$ формально можна розглядати як скалярний добуток символічного вектора $\vec{\nabla}$ на вектор $\vec{A}$, ротор векторного поля – як векторний добуток символічного вектора $\vec{\nabla}$ на вектор $\vec{A}$. Застосування оператора $\vec{\nabla}$ виявляється надзвичайно зручним у багатьох питаннях векторного аналізу. За домовленістю в одночлені за участю оператора $\vec{\nabla}$ він діє на всі величини праворуч від нього (якщо не вказано інше). У прямокутних декартових координатах диференціальні операції першого порядку мають явний вигляд:

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\vec{k},$$

$$\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\varphi = v_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + v_z\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$div\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$rot\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix},$$

$$\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} = v_x \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}.$$

Для розв’язування більшості задач цього розділу можна використовувати символічний метод. Усі диференціальні операції виражають через символічний оператор $\vec{\nabla}$, який, з одного боку – є диференціальним оператором, оскільки містить похідні за координатами, а з іншого – є вектором. Кожен доданок у виразі повторюють буквально таку кількість разів, скільки в ньому є множників праворуч від $\vec{\nabla}$ і на які цей оператор діє. У кожному із таких розписаних доданків домовимося підкреслювати величини, на які діятиме оператор $\vec{\nabla}$, а всі інші множники відносно дії $\vec{\nabla}$ вважатимемо сталими. Далі, оскільки оператор $\vec{\nabla}$ – вектор, то формально використовуючи правила векторної алгебри, але пам’ятаючи, що $\vec{\nabla}$ діє лише на підкреслені величини, робимо відповідні перестановки співмножників так, щоб у кожному доданку праворуч оператора $\vec{\nabla}$ залишилися лише підкреслені величини, після чого підкреслення можна опустити та повернутися від виразів через $\vec{\nabla}$ до стандартних позначень для отриманих диференціальних операцій.

Описаний символічний метод для диференціальних операцій над скалярними та векторними об’єктами є узагальненням відомого з математичного аналізу правила Лейбніца для диференціювання добутків функцій. У математичному аналізі у випадку функцій однієї змінної правило Лейбніца записують у вигляді

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = f(x)\frac{dg(x)}{dx} + g(x)\frac{df(x)}{dx},$$

або, керуючись введеною раніше домовленістю,

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right)=\frac{d}{dx}\left[\underline{f(x)}g(x)+f(x)\underline{g(x)}\right]$$

(кількість доданків у правій частині збігається з кількістю множників у лівій). У такій формі запису непідкреслений множник вважається сталим, і його можна винести за оператор похідної.

Приклад 1. Довести тотожність у безкоординатному підході, використовуючи символічний метод:

$$div\left(\varphi\vec{A}\right)=\varphi div\vec{A}+\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\varphi$$

Розв'язання.

$$div\left(\varphi\vec{A}\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\varphi\vec{A}\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\underline{\varphi}\vec{A}+\varphi\underline{\vec{A}}\right)=\vec{\nabla}\underline{\varphi}\cdot\vec{A}+\varphi\left(\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{A}}\right)=$$
$$=\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\varphi+\varphi div\vec{A}$$

Пошук градієнта, ротора, дивергенції та їх комбінацій від явно заданих функцій можна проводити, записуючи їх у декартових координатах і здійснюючи диференціювання безпосередньо. Однак для об'єктів, які можна подати у вигляді добутків, доцільно спочатку скористатися символічним методом (або відповідними векторними тотожностями) і звести задачу пошуку диференціальних операцій до явного диференціювання невеликого числа максимально простих функцій.

За такого підходу процедура пошуку градієнта, ротора та дивергенції аналогічна звичайному диференціюванню з використанням таблиці похідних елементарних функцій. Останні обчислюються попередньо, згідно із прямим означенням диференціальних операцій у декартових координатах. До "елементарних" операцій можна зарахувати, наприклад

$$\vec{\nabla}\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)=\vec{a},\ \left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{r}=\vec{a},\ \vec{\nabla}r=\frac{\vec{r}}{r},\ div\vec{r}=3,\ rot\vec{r}=0,$$

а також деякі вирази, коли функція під похідною залежить лише від $r = |\vec{r}|$, а саме

$$\vec{\nabla}\Phi(r) = \frac{d\Phi(r)}{dr}\cdot\frac{\vec{r}}{r},\ div\vec{A}(r) = \frac{d\vec{A}(r)}{dr}\cdot\frac{\vec{r}}{r},\ rot\vec{A}(r) = \frac{\vec{r}}{r}\times\frac{d\vec{A}(r)}{dr}.$$

Приклад 2. Обчислити $\vec{\nabla}\ln r$.

Розв'язання.

$$\vec{\nabla}\ln r = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\ln\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(ln\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial x}\left(ln\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\right)\vec{j} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left(ln\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\right)\vec{k} =$$

$$= \frac{1}{2\left(x^2+y^2+z^2\right)}\left(2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}\right) = \frac{\vec{r}}{r^2}$$

Другий спосіб: за формулою $\vec{\nabla}\Phi(r) = \frac{d\Phi(r)}{dr}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$, маємо:

$$\vec{\nabla}\ln r = \frac{d(\ln r)}{dr}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{r}}{r^2}.$$

Приклад 3. Для векторного поля $\vec{A} = \vec{a}\times\vec{r}$ обчислити $div\vec{A}$, $rot\vec{A}$.

Розв'язання.

$$div\vec{A} = \vec{\nabla}\left(\vec{a}\times\vec{r}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0,$$

$$rot\vec{A} = rot(\vec{a} \ldots \vec{r}) \ldots (\vec{a} \ldots \vec{r}) \ldots \vec{a}(\ldots \vec{r}) \ldots \vec{r}(\ldots \vec{a})$$

$$= 3\vec{a} \ldots \vec{a} \ldots 2\vec{a}$$

При обчисленнях застосували формулу мішаного добутку трьох векторів та формулу подвійного векторного добутку.

Від скалярних і векторних полів за допомогою градієнта, дивергенції, ротора можна утворити шість диференціальних операцій другого порядку, що мають зміст:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) = grad\left(div\vec{A}\right),$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = div\left(rot\vec{A}\right) = 0,$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = rot\left(rot\vec{A}\right),$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\Phi = \left(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\right)\Phi = rot\left(grad\Phi\right) \equiv 0,$$

оператор Лапласа (лапласіан) від скалярної функції

$$\Delta\Phi = \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\Phi = div\left(grad\Phi\right),$$

то оператор Лапласа від векторної функції, який можна обчислювати також за формулою

$$\Delta\vec{A} = \vec{\nabla}^2\vec{A} = \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) - \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right).$$

Індивідуальні завдання до теми 10

I. Довести тотожність у безкоординатному підході, використовуючи символічний метод.

1. $rot\left(\varphi\vec{A}\right) = \varphi\, rot\vec{A} - \vec{A}\times grad\varphi.$

2. $div\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \vec{B}\cdot rot\vec{A} - \vec{A}\cdot rot\vec{B}.$

3. $rot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \vec{A}\,div\vec{B} - \vec{B}\cdot div\vec{A} + \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} - \left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}.$

4. $\vec{\nabla}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) = \vec{A}\times rot\vec{B} + \vec{B}\times rot\vec{A} + \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} + \left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}.$

5. $\vec\nabla A^2 = 2(\vec A\cdot\vec\nabla)\vec A + 2\vec A\times rot\vec A$.

6. $(\vec\nabla\cdot\vec A)\vec B = (\vec A\cdot\vec\nabla)\vec B + \vec B\,div\vec A$.

7. $\vec C\cdot\vec\nabla(\vec A\cdot\vec B) = \vec A(\vec C\cdot\vec\nabla)\vec B + \vec B(\vec C\cdot\vec\nabla)\vec A$.

8. $(\vec A\times\vec B)\,rot\vec C = \vec B(\vec A\cdot\vec\nabla)\vec C - \vec A(\vec B\cdot\vec\nabla)\vec C$.

9. $(\vec A\times\vec\nabla)\times\vec B = (\vec A\cdot\vec\nabla)\vec B + \vec A\times rot\vec B - \vec A\,div\vec B$.

10. $(\vec\nabla\times\vec A)\times\vec B = \vec A\,div\vec B - (\vec A\cdot\vec\nabla)\vec B - \vec A\times rot\vec B - \vec B\times rot\vec A$.

II.Обчислити:

1. $\vec\nabla r$.
2. $\vec\nabla(\vec a\ \vec r)$.
3. $(\vec a\ \ )\vec r$.
4. $\vec\nabla(\vec a\ \vec r)(\ \vec r)$.
5. $\vec\nabla(\vec a\ \vec r)f(r)$.
6. $\vec\nabla(\vec a\ \vec r)$.
7. $\vec\nabla(\vec a\ \vec r)$.
8. $\vec\nabla\left(\frac{\vec a\ }{r^3}\right)$.
9. $\vec\nabla\left(\frac{\ }{r}\right)$.
10. $\vec\nabla(\vec a\ \vec r)$.

III. Для векторних полів $\vec A$ обчислити $div\vec A$, $rot\vec A$:

1. $\vec A$.
2. $\frac{\vec{\ }}{r^3}$.

3. [illegible].

4. [illegible].

5. [illegible].

6. [illegible].

7. [illegible].

8. $\frac{[illegible]}{r^3}$.

9. [illegible].

10. [illegible].

<u>Тема 11</u>: ***Інтегральні теореми векторного аналізу***

Нехай задано деяку кусково-гладку поверхню. Це означає, що вона склеєна зі скінченного числа обмежених кусків, на кожному з яких (включаючи межу куска) вона має дотичну площину, яка неперервно змінюється при переході від однієї точки поверхні до іншої. У цьому випадку при відповідному виборі системи координат кожний з кусків можна задати рівнянням $z = f(x, y)$, де $f(x, y)$ – функція, яка визначена в деякій області D на площині xOy та має неперервні частинні похідні першого порядку.

Крім того, вважаємо, що поверхня двостороння. Поверхня називається *двосторонньою* або *орієнтованою*, якщо при неперервному переносі вектора $\vec{n}$ одиничної нормалі по будь-якому замкненому контуру на поверхні повернення у вихідну точку M відбувається з тим же напрямком вектора $\vec{n}(M)$. Зокрема, кожна поверхня, що задана рівнянням $z = f(x, y)$ має верхню і нижню сторони. Звертаємо увагу на те, що вектор $\vec{n}(M)$ змінюється неперервно при переході від точки M до іншої точки поверхні.

Якщо поверхня обмежує деяке просторове тіло, то вектор $\vec{n}$ вважаємо спрямованим по зовнішній нормалі, в іншому випадку $\vec{n}$ вибираємо одним із двох способів.

Якщо поверхня σ знаходиться в області V простору, де є векторне поле $\vec{a}(M)$, то для цієї поверхні можна визначити важливе поняття потоку векторного поля.

Потоком П векторного поля $\vec{a}(M)$ через двосторонню поверхню σ називається поверхневий інтеграл

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} \left(\vec{a}(M), \vec{n}(M)\right) d\sigma ,$$

де векторне поле $\vec{a}(M)$ беруть в точках поверхні σ, а $\vec{n}(M)$ – одиничний вектор нормалі в точках поверхні σ, який вказує вибрану сторону цієї поверхні.

Оскільки $\vec{n}(M)$ – одиничний вектор, то скалярний добуток

$\left(\vec{a}(M), \vec{n}(M)\right)$ є проекцією вектора $\vec{a}(M)$ на нормаль до цієї поверхні. Подвійний інтеграл по поверхні σ треба розуміти як суму відповідних інтегралів по гладких кусках цієї поверхні.

Потік векторного поля має наступні властивості:

1) $\iint\limits_{\sigma'} \left(\vec{a}(M), \vec{n}(M)\right) d\sigma$ [illegible] $\iint\limits_{\sigma''} \left(\vec{a}(M), \vec{n}(M)\right) d\sigma$, де σ' і σ'' – дві сторони поверхні σ;

2) $$\iint\limits_{\sigma} \left(c_1\vec{a}_1(M) + c_2\vec{a}_2(M), \vec{n}(M)\right) d\sigma = c_1 \iint\limits_{\sigma} \left(\vec{a}_1(M), \vec{n}(M)\right) d\sigma +$$
$$+ c_2 \iint\limits_{\sigma} \left(\vec{a}_2(M), \vec{n}(M)\right) d\sigma ,$$

3) якщо σ складається з частин σ_1, σ_2, …, σ_m, то
$$\iint\limits_{\sigma} \left(\vec{a}(M), \vec{n}(M)\right) d\sigma = \iint\limits_{\sigma_1} \left(\vec{a}(M), \vec{n}(M)\right) d\sigma + \iint\limits_{\sigma_2} \left(\vec{a}(M), \vec{n}(M)\right) d\sigma +$$
$$+ \ldots + \iint\limits_{\sigma_m} \left(\vec{a}(M), \vec{n}(M)\right) d\sigma .$$

Ці властивості випливають безпосередньо з означення потоку векторного поля та властивостей поверхневих інтегралів.

Таким чином, обчислення потоку векторного поля зводиться до обчислення поверхневих інтегралів. Зокрема, в декартових координатах маємо:

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{e}_1 + Q(x, y, z)\vec{e}_2 + R(x, y, z)\vec{e}_3,$$

$$\vec{n}(M) = \cos\alpha\,\vec{e}_1 + \cos\beta\,\vec{e}_2 + \cos\gamma\,\vec{e}_3,$$

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma \right) d\sigma .$$

Для знаходження інтеграла, що визначає потік, поверхню σ проектують на одну з координатних площин. Нехай, наприклад, σ взаємно однозначно проектується на площину *xOy*. Тоді

$$d\sigma = \frac{dxdy}{\left|\cos\gamma\right|} .$$

Позначимо σ_{xy} проекцію σ на площину *xOy*, одержимо подвійний інтеграл

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma_{xy}} \frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{\left|\cos\gamma\right|} dxdy ,\ z = z\left(x, y\right),$$

де $z = z\left(x, y\right)$ знаходиться з рівняння поверхні σ.

Аналогічно, коли σ проектується на *yOz* або на *xOz*:

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma_{yz}} \frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{\left|\cos\alpha\right|} dydz ,\ x = x\left(y, z\right),$$

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma_{xz}} \frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{\left|\cos\beta\right|} dxdz ,\ y = y\left(x, z\right).$$

Інколи проектування проводиться на всі три координатні площини. Тоді

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy .$$

Тут кожний доданок обчислюють окремо. Наприклад,

$$\iint\limits_{\sigma} Pdydz = \pm \iint\limits_{\sigma_{yz}} P\left(x\left(y, z\right), y, z\right) dydz ,$$

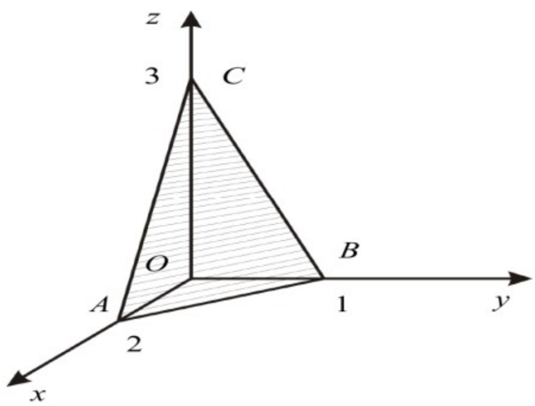
де $x = x\left(y, z\right)$ обчислюється з рівняння поверхні, а знак перед інтегралом – це знак напрямного косинуса $\left(\cos\alpha\right)$ нормалі до поверхні σ.

Для знаходження $\vec{n}(M)$, використовуються відповідні методи за формулою:

$$\vec{n}(M) = \pm\frac{\overrightarrow{grad\,F(M)}}{\left|\overrightarrow{grad\,F(M)}\right|},$$

де $F(x, y, z) = 0$ – рівняння поверхні σ.

Приклад 1. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = z\vec{e}_1 - x\vec{e}_2 + y\vec{e}_3$ через плоский трикутник σ, який утворюється при перетині площини $3x + 6y + 2z - 6 = 0$ з координатними площинами (взяти верхню сторону трикутника).



Розв'язання.

А) Побудуємо трикутник *ABC*, що задає поверхню *S*. Оскільки поверхня *S* взаємно однозначно проектується на одну з координатних площин, то можна обчислити так. Спроектуємо поверхню *S*, наприклад, на площину *xOy*. За умовою $P(x, y, z) = z$, $Q(x, y, z) = -x$, $R(x, y, z) = y$, $F(M) = 3x + 6y + 2z - 6$. Знайдемо одиничний вектор нормалі:

$$\vec{n}(M) = \frac{\overrightarrow{grad\,F(M)}}{\left|\overrightarrow{grad\,F(M)}\right|} = \frac{3\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3}{\sqrt{9+36+4}} = \frac{1}{7}\left(3\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3\right).$$

Отже, $\vec{a}\ \vec{n}\quad {}_{7}\,{}^{-}\ \frac{6}{7}x+\frac{2}{7}y$. З рівняння поверхні $z=-\frac{3}{2}x-3y+3$

Тоді $\vec{a}\ \vec{n}\quad {}_{7}\Big(\ \frac{3}{2}x-3y+3\Big)-\frac{6}{7}x+\frac{2}{7}y=-\frac{3}{2}x-y+\frac{9}{7}$. За формулою потоку після проекції на координатну площину *xOy*, маємо

$$\Pi=\iint\limits_{\sigma_{xy}}\frac{\vec{a}\ \vec{n}}{|\cos\gamma|}dxdy=\iint\limits_{\Delta AOB}\frac{7\left(-\frac{3}{2}x-y+\frac{9}{7}\right)}{2}dxdy=$$

$$=\frac{7}{2}\int_0^2 dx\int_0^{1-\frac{x}{2}}\left(-\frac{3}{2}x-y+\frac{9}{7}\right)dy=\frac{7}{2}\int_0^2\frac{1}{56}\left(44-92x+35x^2\right)dx=$$

$$=\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{1}{21}\right)=-\frac{1}{6}$$

Б) Обчислимо потік, проектуючи трикутник на всі три координатні площини. Перед інтегралами буде знак відповідного косинуса (в цьому прикладі скрізь „+”). Матимемо

$$\Pi=\iint\limits_{\sigma}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=\iint\limits_{\sigma_{yz}}P\big(x(y,z),y,z\big)dydz+$$

$$+\iint\limits_{\sigma_{xz}}Q\big(x,y(x,z),z\big)dxdz+\iint\limits_{\sigma_{xy}}R\big(x,y,z(x,y)\big)dxdy.$$

Обчислимо кожний доданок окремо. Одержимо

$$\iint\limits_{\sigma_{yz}}P\big(x(y,z),y,z\big)dydz=\iint\limits_{BOC}zdydz=\int_0^1 dy\int_0^{3-3y}zdz=$$

$$=\int_0^1\frac{(3-3y)^2}{2}dy=\frac{9}{2}\int_0^1\left(1+y^2-2y\right)dy=\frac{9}{2}\left(y+\frac{y^3}{3}-y^2\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{2}.$$

$$\iint\limits_{\sigma_{xz}} Q\left(x, y(x,z), z\right)dxdz = -\iint\limits_{AOC} xdxdz = -\int\limits_0^2 xdx \int\limits_0^{3-\frac{3}{2}x} dz =$$

$$= -\int\limits_0^2 \left(3x - \frac{3}{2}x^2\right)dx = -\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{2}\right)\Bigg|_0^2 = -2.$$

$$\iint\limits_{\sigma_{xy}} R\left(x, y, z(x,y)\right)dxdy = \iint\limits_{AOB} ydxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{1-\frac{x}{2}} ydy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

В результаті одержимо: $\varPi = \frac{3}{2} - 2 + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$.

Приклад 2. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ через зовнішню сторону частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, розташованої в першому октанті ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).

Розв'язання.

А) Оскільки поверхня S однозначно проектується на одну з координатних площин, то потік можна обчислити так. Спроектуємо поверхню S, наприклад, на площину xOy. Проекція елемента dS дорівнює

$$dS = \frac{dxdy}{|cos\,\gamma|}.$$

Тоді

$$\varPi = \iint\limits_{S_{xy}} \left(\vec{a}, \vec{n}\right)\Big|_{z=f(x,y)} \frac{dxdy}{|cos\,\gamma|},$$

де $f(x,y) = \sqrt{r^2 - \left(x^2 + y^2\right)}$. $F(M) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$.

Нормаль $\quad \vec{n}(M) = \pm\dfrac{\overrightarrow{grad\,F(M)}}{\left|\overrightarrow{grad\,F(M)}\right|} = \dfrac{x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + \sqrt{r^2-\left(x^2+y^2\right)}\,\vec{e}_3}{r}.$

Знак перед дробом вибираємо таким, щоб відповідав гострому куту між нормаллю до поверхні *S* та віссю *Oz*. Оскільки

$\vec{a}\,\vec{n} \ldots$, $\quad cos\,\gamma = \dfrac{\sqrt{r^2-\left(x^2+y^2\right)}}{r}$ $\quad$ і $\quad \varPi = r^2\iint\limits_{S_{xy}}\dfrac{dxdy}{\sqrt{r^2-\left(x^2+y^2\right)}}$, що

після елементарного інтегрування приводить до результату $\varPi = \dfrac{\pi r^3}{2}$.

Б) Знайдемо потік, проектуючи на всі три координатні площини за формулою:

$$\varPi = \varPi_x + \varPi_y + \varPi_z = \iint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$$

$$= \pm\iint\limits_{\sigma_{yz}} P\left(x\left(y,z\right),y,z\right)dydz \pm \iint\limits_{\sigma_{xz}} Q\left(x,y\left(x,z\right),z\right)dxdz \pm$$

$$\pm\iint\limits_{\sigma_{xy}} R\left(x,y,z\left(x,y\right)\right)dxdy.$$

Обчислимо $\varPi_x$:

$$\varPi_x = \iint\limits_{\sigma_{yz}} x\left(y,z\right)dydz = \iint\limits_{\sigma_{yz}}\sqrt{r^2-\left(y^2+z^2\right)}dydz,$$

де враховано, що $cos\,\gamma > 0$.

В області інтегрування $0 \le y \le \sqrt{r^2-z^2}$, $0 \le z \le r$, отже

$$\varPi_x = \int\limits_0^r dz \int\limits_0^{\sqrt{r^2-z^2}} \sqrt{r^2-\left(y^2+z^2\right)}dy.$$

Як легко переконатись,

$$\int\limits_0^{\sqrt{r^2-z^2}} \sqrt{r^2-\left(y^2+z^2\right)}dy = \frac{\pi\left(r^2-z^2\right)}{4},$$

і після елементарного інтегрування за z одержимо

$$П_x = \frac{\pi r^3}{6}.$$

Аналогічно $П_y = П_z = \dfrac{\pi r^3}{6}$,

і остаточно

$$П = \frac{\pi r^3}{2}.$$

В) Оскільки $\vec{n}(M) = \dfrac{\overrightarrow{grad\,F(M)}}{\left|\overrightarrow{grad\,F(M)}\right|} = \dfrac{x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3}{r} = \dfrac{\vec{r}}{r}$ і $\vec{a} = \vec{r}$,

тобто $П = \iint\limits_S rdS = r\iint\limits_S dS = rS$, де $S = \dfrac{\pi r^2}{2}$ – площа частини сфери,

по якій ведеться інтегрування. Остаточно $П = \dfrac{\pi r^3}{2}$.

Запис $W = \int\limits_{AB} \vec{a}\,d\vec{r} = \int\limits_{AB} a_x dx + a_y dy + a_z dz$ називається *лінійним інтегралом* векторного поля кривої $AB = L$. Тут вектор $d\vec{r}$ є дотичним до кривої AB в кожній її точці, модуль дорівнює диференціалу дуги:

$$\left|d\vec{r}\right| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dL.$$

Якщо $\vec{a}(M) = \vec{f}(M)$ – силове поле, то $W = \int\limits_L \vec{f} \cdot d\vec{r}$ – робота поля вздовж кривої L.

Особливий інтерес представляють лінійні інтеграли по замкненому контур L. Нагадаємо, що лінійний інтеграл по замкненому контуру називається *циркуляцією векторного поля*:

$Ц = \bigcirc$

Основні властивості лінійного інтеграла:

1) $\int\limits_L \left(c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2, d\vec{r}\right) = c_1\int\limits_L \left(\vec{a}_1, d\vec{r}\right) + c_2\int\limits_L \left(\vec{a}_2, d\vec{r}\right)$;

2) $\int\limits_{L_1+L_2} \left(\vec{a}, d\vec{r}\right) = \int\limits_{L_1} \left(\vec{a}, d\vec{r}\right) + \int\limits_{L_2} \left(\vec{a}, d\vec{r}\right)$;

3) $\int\limits_{AB} \left(\vec{a}, d\vec{r}\right) = -\int\limits_{BA} \left(\vec{a}, d\vec{r}\right)$.

Доведення цих властивостей випливає безпосередньо з означення лінійного інтеграла. В декартовій системі координат

$$\vec{a}(M) = P(M)\vec{e}_1 + Q(M)\vec{e}_2 + R(M)\vec{e}_3,$$

$$d\vec{r} = dx\vec{e}_1 + dy\vec{e}_2 + dz\vec{e}_3.$$

Тому

$$W = \int\limits_L P\left(x, y, z\right)dx + Q\left(x, y, z\right)dy + R\left(x, y, z\right)dz .$$

Кінцевий інтеграл обчислюють підстановкою x, y, z з рівняння L. При цьому одержуємо визначений інтеграл по параметру, нижня межа інтегрування якого дорівнює значенню параметра в початковій точці, а верхня – в кінцевій точці дуги (шляху) L.

Приклад 3. Знайти роботу силового поля $\vec{F}(M) = x\vec{e}_1 +$ [illegible] $\vec{e}_2$ [illegible] $\vec{e}_3$ вздовж одного витка гвинтової лінії L: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

Розв'язання. Маємо

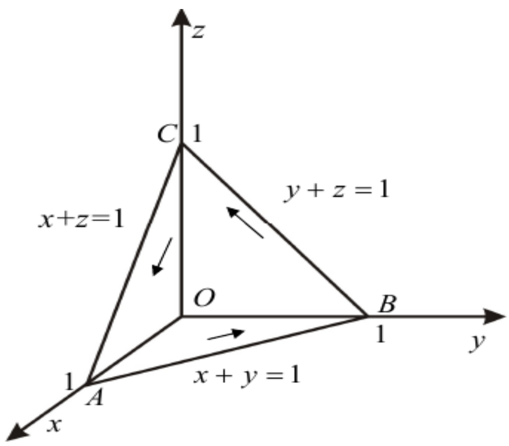
$$W = \int_L \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_L \text{[illegible]}\; - xdy - dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(a\,cos\,t\cdot\left(-a\,sin\,t\right) + a\,cos\,t\cdot a\,cos\,t - b\Big)dt =$$

$$= -a^2\,\frac{sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} + a^2\left(\frac{t}{2}+\frac{sin^2 t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} - bt\Bigg|_0^{2\pi} = \pi\left(a^2 - 2b\right).$$

Приклад 4. Знайти циркуляцію векторного поля [illegible] $\vec{e}_1$ [illegible] $\vec{e}_2$ [illegible] $\vec{e}_3$ по контуру трикутника ABC з вершинами: $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.

Розв'язання. Побудуємо названий в умові трикутник ABC



Контур L є сумою трьох частин: $\overset{\cup}{AB} + \overset{\cup}{BC} + \overset{\cup}{CA}$. Тому за властивостями лінійного інтеграла (циркуляції)

$$Ц = \oint \text{[illegible]} + \int_{BC} \vec{a}\cdot d\vec{r} + \int_{CA} \vec{a}\cdot d\vec{r}.$$

Кожний з доданків правої частини обчислимо окремо. На відрізку AB: $z = 0$, $dz = 0$. Тому $\vec{a}\cdot d\vec{r} =$ [illegible] $(x+3y)dy$. З рівняння $x + y = 1$ прямої AB маємо $y = 1 - x$, $dy = -dx$ і тому

$$\vec{a}\cdot d\vec{r} = \text{[illegible]}\,(x + 3 - 3x)(-dx) = (3x-3)\,dx.$$

$$\int_{AB} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 (\text{[illegible]} - 3)\,dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - 3x\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{3}{2}.$$

На відрізку BC маємо: $x = 0$, $dx = 0$, $z = 1 - y$, $dz = -dy$.

$$\vec{a}\,d\vec{r} = (y + z)\,dy + y\,dz = (y+1)\,dy,$$

$$\int_{BC} \vec{a}\,d\vec{r} = \int_0^1 (y+1)\,dy = \left(\frac{y^2}{2} + y\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

На відрізку *CA* маємо: $y = 0,\ dy = 0,\ z = 1 - x,\ dz = -dx$.

$$\vec{a}\,d\vec{r} = (\ldots z)\,dx + 5x\,dz = (-2x - 2)\,dx,$$

$$\int_{CA} \vec{a}\,d\vec{r} = \int_0^1 (-2x - 2)\,dx = \left(-x^2 - 2x\right)\Big|_0^1 = -3.$$

Отже, циркуляція $Ц = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 3 = -3$.

Теорема Стокса. Нехай в деякій області *V* простору задано неперервно-диференційовне векторне поле $\vec{a}(M)$ і незамкнену кусково-гладку поверхню σ, обмежену кусково-гладким контуром *L*. Сторона поверхні вибрана так, щоб напрямок обходу по контуру з кінця одиничного вектора $\vec{n}$ нормалі σ було видно таким, що здійснюється проти годинникової стрілки. Тоді має місце формула Стокса:

$$\iint_{\sigma} rot\,\vec{a}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \oint_L \vec{a}\,d\vec{r},$$

або в декартових координатах

$$\iint_{\sigma}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)cos\,\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)cos\,\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)cos\,\gamma\right]d\sigma =$$

$$= \oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Таким чином, потік ротора векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхню σ дорівнює циркуляції поля $\vec{a}(M)$ по границі *L* цієї поверхні.

Теорема Стокса дає можливість довести інваріантність ротора векторного поля, тобто його незалежність від вибору системи координат.

Приклад 5. За допомогою теореми Стокса знайти циркуляцію векторного поля по заданому контуру за умовою прикладу 4.

Розв'язання. За умовою $\vec{a} = (x - 2z)\vec{e}_1 + (x + 3y + z)\vec{e}_2 + (5x + y)\vec{e}_3$.

В ролі поверхні σ візьмемо частину площини, обмежену трикутником *ABC*. Знайдемо одиничний вектор нормалі до площини. Рівняння поверхні $F(x,\ y,\ z)$ (тобто площини) буде $x + y + z = 1$. Тоді

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{grad\,F}}{\left|\overrightarrow{grad\,F}\right|} = \frac{\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3}{\sqrt{3}}.$$

Отже, $cos\,\alpha = cos\,\beta = cos\,\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}} > 0$. Тому $\vec{n}$ утворює з вісями координат гострі кути і забезпечує потрібну орієнтацію поверхні.

Обчислимо ротор заданого поля:

$$rot\,\vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x - 2z & x + 3y + z & 5x + y \end{vmatrix} = \vec{e}_1 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x + 3y + z & 5x + y \end{vmatrix} -$$

$$-\vec{e}_2 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x - 2z & 5x + y \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ x - 2z & x + 3y + z \end{vmatrix} = -7\vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Обчислюємо скалярний добуток ротора і орта нормалі:

$$rot\,\vec{a}(M)\cdot\vec{n} = -\frac{7}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{6}{\sqrt{3}}.$$

Обчислюємо циркуляцію за формулою Стокса:

$$Ц = \iint\limits_{\sigma} rot\,[illegible] \quad \frac{[illegible]}{\sqrt{3}} \iint\limits_{\sigma} d\sigma = -\frac{6}{\sqrt{3}} \cdot S_{ABC}.$$

Оскільки ABC – рівносторонній трикутник: $AB = BC = AC = \sqrt{2}$,

то площу знайдемо за формулою $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Отже, $Ц = -\frac{6}{\sqrt{3}} \cdot S_{ABC} = -\frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3$. Одержали той же результат, що і в прикладі 4.

Індивідуальні завдання до теми 11

1. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = [illegible]\vec{e}_1 + [illegible]\vec{e}_2 + [illegible]\vec{e}_3$ через замкнену поверхню σ, яка складається з частини параболоїда $x^2 + z^2 = 1 - 2y$, де $y \geq 0$ і площини xOz.

2. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = [illegible]\vec{e}_1 + [illegible]\vec{e}_2 + [illegible]\vec{e}_3$ через поверхню піраміди з вершинами $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(0,1,0)$, $D(0,0,2)$.

3. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = [illegible]\vec{e}_1 [illegible]\vec{e}_2 [illegible]\vec{e}_3$ через зовнішню сторону півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (при $z \geq 0$).

4. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = [illegible]\vec{e}_1 + [illegible]\vec{e}_2 + [illegible]\vec{e}_3$ через зовнішню сторону частини параболоїда S: $x^2 + y^2 = 4 - z$ (при $z \geq 0$).

Вказівка: поверхня незамкнена, тому теорему Остроградського застосувати не можна. Тому треба поверхню S доповнити поверхнею основи S_1. Тоді $\sigma = S + S_1$ і $П_S = П_\sigma - П_{S_1}$.

5. Обчислити двома способами (безпосередньо і за теоремою Остроградського) потік векторного поля $\vec{a}$ через замкнену поверхню σ:

$\vec{a}$ [illegible] $\vec{e}_1$ [illegible] $\vec{e}_2$ [illegible] $\vec{e}_3$, σ: $\{3x+2y+z=6, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$.

6. Обчислити лінійний інтеграл плоского поля $\vec{a}$ [illegible] $\vec{e}_1$ [illegible] $\vec{e}_2$ вздовж дуги $L = OA$ параболи $x^2 = y$, якщо $O(0,0)$, $A(1,1)$.

7. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}$ [illegible] $\vec{e}_1$ [illegible] $\vec{e}_2$ [illegible] $\vec{e}_3$ вздовж замкненого контура, утвореного при перетині циліндра $x^2+y^2=1$ і площини $x+y+z=1$.

8. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}$ [illegible] $\vec{e}_1$ [illegible] $\vec{e}_2$ [illegible] $\vec{e}_3$ вздовж контура C, утвореного при перетині поверхні $y^2 = 4-x-z$ з координатними площинами.

9. Користуючись теоремою Стокса, дати відповідь на питання задачі 8, враховуючи додаткову умову $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$.

10. Обчислити циркуляцію векторного поля двома способами (безпосередньо і за теоремою Стокса):

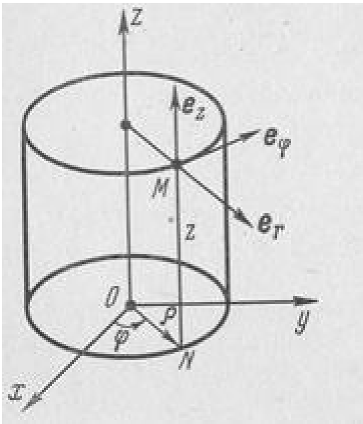
$\vec{a}$ [illegible] $\vec{e}_1$ [illegible] $\vec{e}_2$ [illegible] $\vec{e}_3$,

$$C: \{x+y=5, x-y=5, x+y=-5, x-y=-5\}.$$

Тема 12: ***Скалярні та векторні поля в циліндричних та сферичних координатах***

Основними часто застосовними типами криволінійними координатами є циліндрична та сферична системи координат.
В *циліндричних* координатах положення точки M простору визначається трьома координатами:

$$q_1 = \rho, \quad 0 \le \rho < +\infty$$
$$q_2 = \varphi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$
$$q_3 = z, \quad -\infty < z < +\infty$$

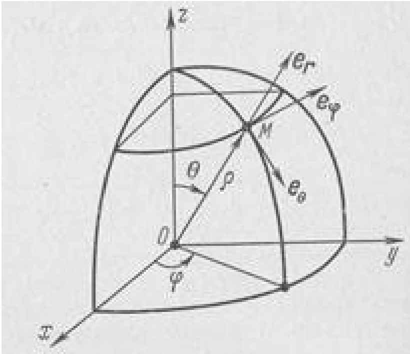


Зв’язок декартових координат з циліндричними визначається формулами

$$x = \rho \cos \varphi,$$
$$y = \rho \sin \varphi,$$
$$z = z.$$

В *сферичних* координатах положення точки M простору визначається трьома координатами:

$$q_1 = r, \quad 0 \le r < +\infty$$
$$q_2 = \theta, \quad 0 \le \theta \le \pi$$
$$q_3 = \varphi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$



Зв'язок декартових координат з сферичними визначається формулами

$$x = r\cos\varphi\sin\theta,$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta,$$
$$z = r\cos\theta.$$

Основні операції векторного аналізу в криволінійних координатах

$\vec{a}=\vec{a}(q_1,q_2,q_3)$ $u=u(q_1,q_2,q_3)$	Циліндрична	Сферична
Градієнт	$\overrightarrow{grad\,u}=\frac{\partial u}{\partial\rho}\cdot\vec{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z$	$\overrightarrow{grad\,u}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\vec{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$
Дивергенція	$div\,\vec{a}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho a_1)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial a_2}{\partial\varphi}+\frac{\partial a_3}{\partial z}$	$div\,\vec{a}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 a_1)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial(\sin\theta\cdot a_2)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\varphi}\cdot\frac{\partial a_3}{\partial\varphi}$
Ротор	$rot\,\vec{a}=\begin{vmatrix}\frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{\rho}\vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_1 & \rho a_2 & a_3\end{vmatrix}$	$rot\,\vec{a}=\begin{vmatrix}\frac{1}{r^2\sin\theta}\vec{e}_r & r\sin\theta\,\vec{e}_\theta & r\,\vec{e}_\varphi\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi}\\ a_1 & ra_2 & r\sin\theta a_3\end{vmatrix}$

Коли виконуємо ці операції, то необхідно, щоб скалярне поле $u=u(q_1,q_2,q_3)$ *та векторне поле* $\vec{a}=\vec{a}(q_1,q_2,q_3)$ були виражені у відповідних криволінійних координатах, *якщо маємо їх декартові координати, то необхідно їх перевести в криволінійні.* Для скалярного поля необхідно замінити декартові координати за вищезгаданими формулами переходу від декартових координат до циліндричних або сферичних. Для векторного поля відповідні криволінійні координати знаходимо за наступними формулами:

1) для циліндричних координат:

$$a_1 = a_\rho\left(\rho,\varphi,z\right) = A_x\left(M\right)cos\,\varphi + A_y\left(M\right)sin\,\varphi$$
$$a_2 = a_\varphi\left(\rho,\varphi,z\right) = -A_x\left(M\right)sin\,\varphi + A_y\left(M\right)cos\,\varphi$$
$$a_3 = a_z\left(\rho,\varphi,z\right) = A_z\left(M\right);$$

2) для сферичних координат:

$$a_1 = a_r\left(r,\theta,\varphi\right) = A_x\left(M\right)sin\,\theta\,cos\,\varphi + A_y\left(M\right)sin\,\theta\,sin\,\varphi + A_z\left(M\right)cos\,\theta$$
$$a_2 = a_\theta\left(r,\theta,\varphi\right) = A_x\left(M\right)cos\,\theta\,cos\,\varphi + A_y\left(M\right)cos\,\theta\,sin\,\varphi - A_z\left(M\right)sin\,\theta$$
$$a_3 = a_\varphi\left(r,\theta,\varphi\right) = -A_x\left(M\right)sin\,\varphi + A_y\left(M\right)cos\,\varphi.$$

Приклад 1. Знайти дивергенцію, ротор векторного поля $\vec{a} = \rho\vec{e}_\rho + \frac{\varphi}{\rho}\vec{e}_\varphi + z\vec{e}_z$ в циліндричних координатах.

Розв’язання. Знайдемо дивергенцію, використавши формулу $div\,\vec{a} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\left(\rho a_1\right)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial a_2}{\partial\varphi} + \frac{\partial a_3}{\partial z}$ з таблиці. За умовою задачі маємо:

$a_1 = \rho$, $a_2 = \dfrac{\varphi}{\rho}$, $a_3 = z$. Тоді

$$div\,\vec{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho^2\right)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\varphi}{\rho}\right)}{\partial\varphi}+\frac{\partial z}{\partial z}=\frac{2\rho}{\rho}+\frac{1}{\rho^2}+1=3+\frac{1}{\rho^2}.$$

Знайдемо ротор, використавши формулу $rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \rho\,\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & \rho a_2 & a_3 \end{vmatrix}$ з таблиці. За умовою задачі маємо: $a_1=\rho$, $a_2=\dfrac{\varphi}{\rho}$, $a_3=z$. Тоді

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \rho\,\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & \rho a_2 & a_3 \end{vmatrix} \left(\ \ \rho\,\partial\varphi \quad \partial z\right)\vec{e}_\rho \left(\ \ \partial z \quad \partial\rho\right)\vec{e}_\varphi\ \rho\left(\ \ \partial\rho \quad \partial\varphi\right)\vec{e}_z$$

$$=0\cdot\vec{e}_\rho\ \ \vec{e}_\varphi\ \ \vec{e}_z\ \ (\ ,\ ,\ )$$

Приклад 2. Обчислити градієнт скалярного поля $u=sin\left(x+y+z\right)$ в циліндричних та сферичних координатах:

Розв'язання.

а) За таблицею для циліндричних координат, маємо $\overrightarrow{grad\,u} = \frac{\partial u}{\partial\rho}\cdot\vec{e}_\rho \ \ \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi \ \ \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z$. Виразимо скалярне поле у циліндричних координатах: $u=sin\left(\rho cos\varphi+\rho sin\varphi+z\right)$. Тоді $\overrightarrow{grad\,u} = cos\left(\rho cos\varphi+\rho sin\varphi+z\right)\cdot\left(\left(cos\varphi+sin\varphi\right)\vec{e}_\rho \ \ (\ \ \ \ )\vec{e}_\varphi\ \ \vec{e}_z\right)$

б) За таблицею для сферичних координат, маємо $\overrightarrow{grad\,u} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\vec{e}_r \ \ \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\vec{e}_\theta \ \ \frac{1}{r\,sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$. Виразимо скалярне поле у сферичних координатах: $u=sin\left(r\,cos\varphi\,sin\theta+r\,sin\varphi\,sin\theta+r\,cos\theta\right)$. Тоді

$$\overrightarrow{grad\,u} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\,sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$$
$$= cos\left(r\,cos\varphi\,sin\theta + r\,sin\varphi\,sin\theta + r\,cos\theta\right)\cdot\left(cos\varphi\,sin\theta + sin\varphi\,sin\theta + cos\theta\right)\cdot\vec{e}_r$$
$$+cos\left(r\,cos\varphi\,sin\theta + r\,sin\varphi\,sin\theta + r\,cos\theta\right)\cdot\left(cos\varphi\,cos\theta + sin\varphi\,cos\theta - sin\theta\right)\cdot\vec{e}_\theta$$
$$+cos\left(r\,cos\varphi\,sin\theta + r\,sin\varphi\,sin\theta + r\,cos\theta\right)\cdot\left(-sin\varphi + cos\varphi\right)\cdot\vec{e}_\varphi$$

Індивідуальні завдання до теми 12

І. Знайти дивергенцію, ротор векторного поля $\vec{a}$ в циліндричних (1-5), сферичних (6-10) координатах:

1) $\vec{a}$ [illegible] $\vec{e}_\rho$ [illegible] ρ [illegible] $\vec{e}_\varphi$ [illegible] $\vec{e}_z$;

2) $\vec{a}$ [illegible] $\vec{e}_\rho$ [illegible] $\vec{e}_\varphi$ [illegible] $\vec{e}_z$;

3) $\vec{a}$ [illegible] $\vec{e}_\rho$ [illegible] $\vec{e}_\varphi$ [illegible] $\vec{e}_z$;

4) $\vec{a}$ [illegible] $\vec{e}_\rho$ [illegible] $\vec{e}_\varphi$ [illegible] $\vec{e}_z$;

5) $\vec{a}$ [illegible] $\vec{e}_\rho$ [illegible] $\vec{e}_\varphi$ [illegible] $\vec{e}_z$;

6) $\vec{a}$ [illegible] r^2 [illegible] $\vec{e}_r$ [illegible] r^3 [illegible] $\vec{e}_\theta$;

7) $\vec{a}$ [illegible] $\vec{e}_r$ [illegible] $\vec{e}_\theta$ [illegible] $\vec{e}_\varphi$;

8) $\vec{a}$ [illegible] 2 [illegible] $\vec{e}_\theta$ [illegible] $\vec{e}_\varphi$;

9) $\vec{a}$ [illegible] $\vec{e}_r$ [illegible] $\vec{e}_\theta$ [illegible] $\vec{e}_\varphi$;

10) $\vec{a}$ [illegible] r [illegible] $\vec{e}_r$ [illegible] $\vec{e}_\theta$.

II. Обчислити градієнт скалярного поля u в циліндричних та сферичних координатах:

1) $u = e^{\sqrt{xyz}}$;

2) $u = ln(xyz)$;

3) $u = arctg(xz)$;

4) $u = arcsin\frac{x}{y}$;

5) $u = cos(x^2 + y + z)$;

6) $u = ln(x^2 + z^2)$;

7) $u = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$;

8) $u = e^x + ln z$;

9) $u = sin x + ln z$;

10) $u = cos y - sin x$.

<u>Тема 13</u>: ***Потік та циркуляція в циліндричних та сферичних координатах***

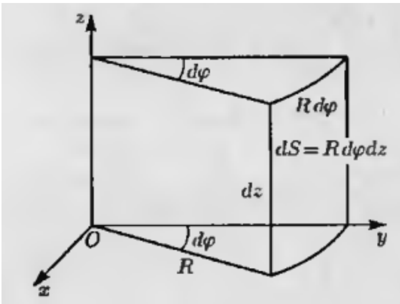
Розглянемо спочатку застосування криволінійних координат до обчислення потоку векторного поля, заданого в декартових координатах у деяких випадках.

Випадок 1. Нехай поверхня S є частиною кругового циліндра $x^2+y^2=R^2$, обмеженого поверхнями $z=f_1(x,y)$ і $z=f_2(x,y)$, причому $f_1(x,y)\le f_2(x,y)$. Покладаючи $x=R\cos\varphi$, $y=R\sin\varphi$, $z=z$, будемо мати для даної поверхні

$$0\le\varphi\le 2\pi;\ f_1(R\cos\varphi,R\sin\varphi)\le z\le f_2(R\cos\varphi,R\sin\varphi),$$

а для елемента dS одержимо наступний вираз:

$$dS=Rd\varphi dz.$$



Тоді потік векторного поля $\vec{a}$ через зовнішню сторону поверхні S обчислюється за формулою

$$\Pi=R\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{f_1(R\cos\varphi,R\sin\varphi)}^{f_2(R\cos\varphi,R\sin\varphi)}(\vec{a},\vec{n}_0)dz,$$

де

$$\vec{n}_0=\frac{\overrightarrow{grad\left(x^2+y^2-R^2\right)}}{\left|\overrightarrow{grad\left(x^2+y^2-R^2\right)}\right|}=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}}{R}.$$

Приклад 1. Знайти потік векторного поля $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через зовнішню сторону бічної поверхні кругового циліндра $x^2 + y^2 = R^2$, обмеженого площинами $z = 0$ і $z = H$ $(H > 0)$.

Розв'язання. В даному випадку маємо:

$$0 \le \varphi \le 2\pi\,;\ f_1\left(R\cos\varphi, R\sin\varphi\right) = 0,\ f_2\left(R\cos\varphi, R\sin\varphi\right) = H\,.$$

Введемо циліндричні координати

$$x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ z = z\,.$$

Тоді шуканий потік векторного поля $\vec{r}$ буде рівний

$$\Pi = R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H \left(\vec{r}, \vec{n}_0\right) dz\,.$$

Так як

$$\left(\vec{r}, \vec{n}_0\right) = \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{R}\right) = \frac{1}{R}\left(x^2 + y^2\right) = R\,.$$

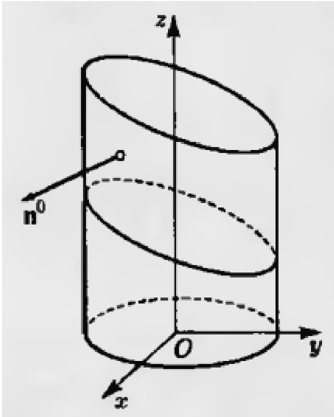
Остаточно знаходимо

$$\Pi = R^2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dz = 2\pi R^2 H\,.$$

Приклад 2. Знайти потік векторного поля $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через бічну поверхню кругового циліндра $x^2 + y^2 = 1$, обмеженого знизу площиною $x + y + z = 1$, а зверху – площиною $x + y + z = 2$.

Розв'язання. В даному випадку маємо:

$$R = 1;\ f_1\left(x, y\right) = 1 - x - y\,,\ f_2\left(x, y\right) = 2 - x - y\,.$$



Переходячи до циліндричних координат

$$x = cos\,\varphi,\; y = sin\,\varphi,\; z = z,$$

будемо мати

$$f_1\left(R\,cos\,\varphi, R\,sin\,\varphi\right) = 1 - cos\,\varphi - sin\,\varphi,$$

$$f_2\left(R\,cos\,\varphi, R\,sin\,\varphi\right) = 2 - cos\,\varphi - sin\,\varphi.$$

Тоді шуканий потік векторного поля $\vec{F}$ буде рівний

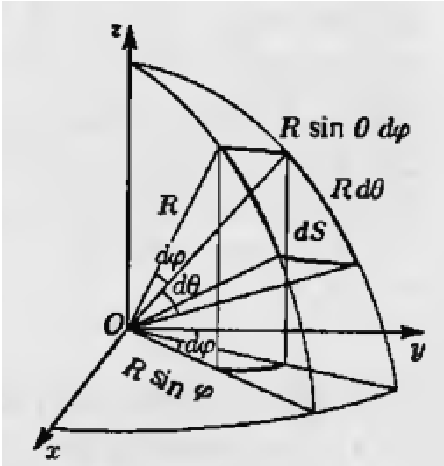
$$\Pi = R\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{1-cos\,\varphi-sin\,\varphi}^{2-cos\,\varphi-sin\,\varphi} \left(\vec{F},\vec{n}_0\right)dz.$$

$$\left(\vec{F},\vec{n}_0\right) = \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{R}\right) = \frac{1}{R}\left(x^2 + y^2\right) = R = 1.$$

Остаточно,

$$\Pi = R\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{1-cos\,\varphi-sin\,\varphi}^{2-cos\,\varphi-sin\,\varphi} dz = R\cdot 2\pi = 2\pi.$$

Випадок 2. Нехай поверхня S є частиною сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, обмеженої конічними поверхнями, рівняння яких у сферичних координатах мають вигляд $\theta = f_1(\varphi)$ і $\theta = f_2(\varphi)$ та на півплощинами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$.



Покладемо для точок даної сфери

$$x = R\cos\varphi\sin\theta,\ y = R\sin\varphi\sin\theta,\ z = R\cos\theta,$$

де $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$. Тоді для елемента dS одержимо наступний вираз:

$$dS = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi.$$

В цьому випадку потік векторного поля $\vec{a}$ через зовнішню частину S сфери обчислюється за формулою

$$\Pi = R^2 \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\vec{a}, \vec{n}_0\right) \sin\theta d\theta,$$

де

$$\vec{n}_0 = \frac{\overrightarrow{grad\left(x^2+y^2+z^2-R^2\right)}}{\left|\overrightarrow{grad\left(x^2+y^2+z^2-R^2\right)}\right|} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{R}.$$

Приклад 3. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = \left(x - 2y + 1\right)\vec{i} + \left(2x + y - 3z\right)\vec{j} + \left(3y + z\right)\vec{k}$ через частину поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, розміщеної в першому октанті.

Розв'язання. В даному випадку маємо:

$$R = 1;\ \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = \frac{\pi}{2},$$

$$\theta_1 = 0,\ \theta_2 = \frac{\pi}{2},\ \vec{n}_0 = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},\ \left(\vec{a},\vec{n}_0\right) = x^2 + y^2 + z^2 + x.$$

Перейдемо до сферичних координат

$$x = cos\,\varphi\, sin\,\theta,\ y = sin\,\varphi\, sin\,\theta,\ z = cos\,\theta.$$

Тоді матимемо

$$\left(\vec{a},\vec{n}_0\right) = 1 + cos\,\varphi\, sin\,\theta.$$

За формулою потоку через зовнішню сторону сфери, у цьому випадку, маємо:

$$\Pi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + cos\,\varphi\, sin\,\theta\right) sin\,\theta d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\,\theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\,\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2\,\theta d\theta = \frac{3}{4}\pi.$$

Тепер розглянемо випадки обчислення потоку у криволінійних (циліндричних або сферичних) координатах.

Нехай S – частина координатної поверхні $q_1 = C$, де $C = const$, обмежена координатними лініями

$$q_2 = \alpha_1,\ q_2 = \alpha_2 \quad (\alpha_1 < \alpha_2);$$

$$q_3 = \beta_1,\ q_3 = \beta_2 \quad (\beta_1 < \beta_2).$$

Тоді потік векторного поля

$$\vec{a} = a_1(q_1,q_2,q_3)\vec{e}_1 + a_2(q_1,q_2,q_3)\vec{e}_2 + a_3(q_1,q_2,q_3)\vec{e}_3$$

через поверхню S за напрямком вектора $\vec{e}_1$ обчислюється за формулою

$$\Pi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{\beta_1}^{\beta_2} a_1\left(C,q_2,q_3\right) H_2\left(C,q_2,q_3\right) H_3\left(C,q_2,q_3\right) dq_3 dq_2,$$

де $H_i\left(q_1,q_2,q_3\right)$ $\left(i = 1,2,3\right)$ – так звані коефіцієнти Ламе. Для циліндричних координат:

$$H_1 = 1,\ H_2 = \rho,\ H_3 = 1.$$

У сферичних координатах:

$$H_1 = 1,\ H_2 = r,\ H_3 = r\sin\theta.$$

Аналогічно обчислюється потік через частину поверхні $q_1 = C$ або $q_3 = C$.

Приклад 4. Знайти потік векторного поля, заданого у сферичних координатах $\vec{a} = r^2\theta\,\vec{e}_r +$ [illegible] $\vec{e}_\theta$ через зовнішню сторону верхньої напівсфери S радіуса R з центром у початку координат.

Розв'язання. Напівсфера S є частиною координатної поверхні $r = const$, а саме $r = R$. На поверхні S маємо

$$q_1 = r = R;\ q_2 = \theta,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2};\ q_3 = \varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Враховуючи значення коефіцієнтів Ламе у сферичній СК $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = r\sin\theta$, маємо

$$\Pi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} r^2\theta \cdot r \cdot r\sin\theta\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} R^4\theta\sin\theta\, d\varphi =$$

$$= 2\pi R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\sin\theta\, d\theta = 2\pi R^4.$$

Далі розглянемо випадки обчислення лінійного інтеграла та циркуляції векторного поля у криволінійних (циліндричних або сферичних) координатах.

Нехай векторне поле

$$\vec{a}(M) = a_1(q_1,q_2,q_3)\vec{e}_1 + a_2(q_1,q_2,q_3)\vec{e}_2 + a_3(q_1,q_2,q_3)\vec{e}_3$$

визначене та неперервне в області Ω зміни ортогональних криволінійних координат q_1, q_2, q_3.

Диференціал $d\vec{r}$ радіус-вектора $\vec{r}$ будь-якої точки $M(q_1,q_2,q_3) \in \Omega$ дорівнюватиме

$$d\vec{r} = H_1 dq_1 \vec{e}_1 + H_2 dq_2 \vec{e}_2 + H_3 dq_3 \vec{e}_3.$$

Тому лінійний інтеграл вектора $\vec{a}(M)$ по орієнтовній гладкій або кусково-гладкій кривій $L \subset \Omega$ буде дорівнювати

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_L a_1 H_1 dq_1 + a_2 H_2 dq_2 + a_3 H_3 dq_3 .$$

Зокрема, для циліндричних координат $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$ будемо мати

$$\vec{a} = a_\rho(\rho,\varphi,z)\vec{e}_\rho + a_\varphi(\rho,\varphi,z)\vec{e}_\varphi + a_z(\rho,\varphi,z)\vec{e}_z,$$

$$d\vec{r} = d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\, d\varphi\,\vec{e}_\varphi + dz\,\vec{e}_z,$$

тому

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_L a_\rho d\rho + a_\varphi \rho d\varphi + a_z dz ;$$

для сферичних координат $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$ будемо мати

$$\vec{a} = a_r(r,\theta,\varphi)\vec{e}_r + a_\theta(r,\theta,\varphi)\vec{e}_\theta + a_\varphi(r,\theta,\varphi)\vec{e}_\varphi,$$

$$d\vec{r} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\, d\varphi\,\vec{e}_\varphi,$$

і отже

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_L a_r dr + r a_\theta d\theta + r a_\varphi \sin\theta d\varphi .$$

Приклад 5. Обчислити лінійний інтеграл від векторного поля, заданого у циліндричних координатах $\vec{a} = 4\rho\sin\varphi\,\vec{e}_\rho + ze^\rho\,\vec{e}_\varphi + (\rho+\varphi)\,\vec{e}_z$ вздовж прямої L: $\left\{\varphi = \frac{\pi}{4}, z = 0\right\}$ від точки $O\left(0, \frac{\pi}{4}, 0\right)$ до точки $A\left(1, \frac{\pi}{4}, 0\right)$.

Розв'язання. У даному прикладі

$$a_\rho = 4\rho\sin\varphi,\ a_\varphi = ze^\rho, a_z = \rho + \varphi .$$

Лінійний інтеграл рівний

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_L 4\rho\sin\varphi d\rho + \rho z e^\rho d\varphi + (\rho+\varphi) dz .$$

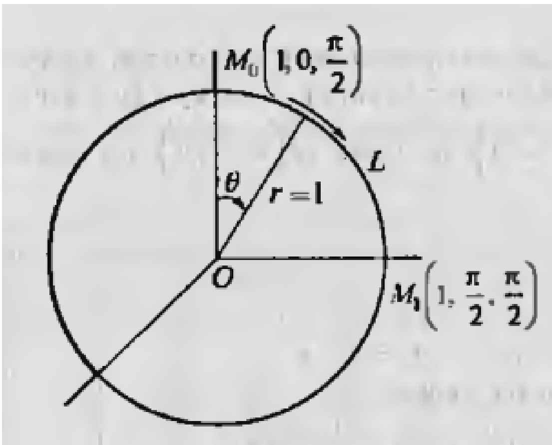
На прямій L маємо:

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, d\varphi = 0; \quad z = 0, dz = 0; \qquad 0 \le \rho \le 1.$$

Тому

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_L \sqrt{2}\rho d\rho = \sqrt{2}\int_0^1 2\rho d\rho = \sqrt{2}\rho^2 \Big|_0^1 = \sqrt{2}.$$

Приклад 6. Обчислити лінійний інтеграл від векторного поля, заданого у сферичних координатах $\vec{a} = e^r \sin\theta \vec{e}_r + 3\theta^2 \sin\varphi \vec{e}_\theta + r\varphi\theta \vec{e}_\varphi$ вздовж лінії L: $\left\{ r = 1, \varphi = \frac{\pi}{2}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \right\}$ за напрямком від точки $M_0\left(1, 0, \frac{\pi}{2}\right)$ до точки $M_1\left(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



Розв'язання. Лінія L є дугою кола з центром у початку координат і радіусом $R = 1$, яка розташована у площині yOz. Координати даного вектора дорівнюють

$$a_r = e^r \sin\theta, \quad a_\theta = 3\theta^2 \sin\varphi, \quad a_\varphi = r\varphi\theta.$$

Тоді лінійний інтеграл буде мати вигляд

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_L e^r \sin\theta dr + 3\theta^2 r \sin\varphi d\theta + r^2\varphi\theta \sin\theta d\varphi.$$

Враховуючи, що на лінії L виконуються умови:

$$r = 1, dr = 0; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, d\varphi = 0; \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},$$

одержимо

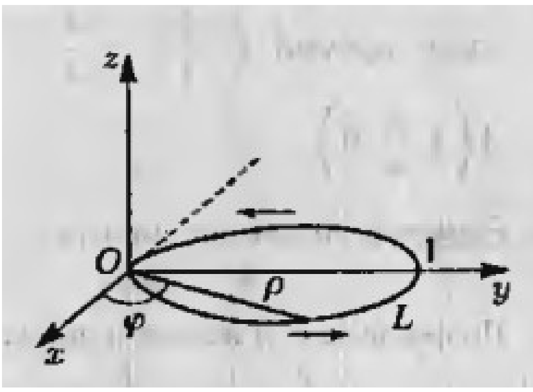
$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_L 3\theta^2 d\theta = \int_0^{\pi/2} 3\theta^2 d\theta = \frac{\pi^3}{8}.$$

Приклад 7. Обчислити циркуляцію векторного поля, заданого у циліндричних координатах $\vec{a} = \rho\, sin\varphi\, \vec{e}_\rho + \rho z \vec{e}_\varphi + \rho^3 \vec{e}_z$ по кривій $L{:}\left\{ \rho = sin\varphi, z = 0, 0 \le \varphi \le \pi \right\}$ безпосередньо та за теоремою Стокса.

Розв'язання. Координати даного вектора

$$a_\rho = \rho\, sin\varphi, \quad a_\varphi = \rho z, \quad a_z = \rho^3.$$

Контур L представляє собою замкнуту криву, розташовану в площині $z = 0$.



1) Безпосереднє обчислення циркуляції.

Підставляючи координати даного вектора у формулу лінійного інтеграла, маємо:

$$Ц = \oint_L \rho\, sin\varphi\, d\rho + \rho^2 z d\varphi + \rho^3 dz.$$

На кривій L маємо:

$$z = 0, dz = 0; \quad \rho = \sin\varphi, d\rho = \cos\varphi d\varphi; \quad 0 \le \varphi \le \pi .$$

Тому шукана циркуляція буде дорівнювати

$$Ц = \oint_L \ldots = \int_0^{\pi} \sin^2\varphi \cos\varphi d\varphi = 0 .$$

2) Безпосереднє обчислення циркуляції за допомогою теореми Стокса.

За теоремою Стокса шукана циркуляція дорівнює

$$Ц = \oint_L \ldots = \iint_S \left(rot\,\vec{a}, \vec{n}_0 \right) dS ,$$

де S – поверхня, натягнута на контур L.

Знаходимо ротор даного поля

$$rot\,\vec{a} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \rho\sin\varphi & \rho^2 z & \rho^3 \end{vmatrix} = -\rho\vec{e}_\rho - 3\rho^2\vec{e}_\varphi + (2z - \cos\varphi)\vec{e}_z .$$

В точках, де $\rho = 0$, значення $rot\,\vec{a}$ довизначимо до неперервності, покладаючи

$$rot\,\vec{a}(0, \varphi, z) = (2z - \cos\varphi)\vec{e}_z .$$

Таким чином, $rot\,\vec{a}$ визначений на всьому тривимірному просторі. Так як крива L лежить у площині $z = 0$, то в якості поверхні S, натягнутої на цю криву, візьмемо частину площини $z = 0$, обмеженої кривою L. Тоді за орт нормалі $\vec{n}_0$ до поверхні S можна взяти орт $\vec{e}_z$, тобто $\vec{n}_0 = \vec{e}_z$. Знаходимо скалярний добуток:

$$\left(rot\,\vec{a}, \vec{n}_0 \right) = 2z - \cos\varphi ,$$

Шукана циркуляція дорівнює

$$Ц = \iint_S \left(2z - \cos\varphi \right) dS .$$

Враховуючи, що $z = 0$ на S і елемент площадки dS координатної поверхні $z = 0$ дорівнює

$$dS = \rho d\rho d\varphi,$$

остаточно одержимо

$$Ц = -\iint_S \cos\varphi dS = -\iint_S \cos\varphi \cdot \rho d\rho d\varphi =$$

$$= -\int_0^{\pi} \cos\varphi d\varphi \int_0^{\sin\varphi} \rho d\rho = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^2\varphi \cos\varphi d\varphi = 0.$$

Приклад 8. Обчислити циркуляцію векторного поля, заданого у сферичних координатах [illegible] $\vec{e}_r$ [illegible] $\vec{e}_\varphi$ по колу $L: \left\{ r = R, \theta = \frac{\pi}{2} \right\}$ за напрямком зростання кута φ безпосередньо та за теоремою Стокса.

Розв'язання. У даному прикладі

$$a_r = r, \quad a_\theta = 0, \quad a_\varphi = \left(R + r\right)\sin\theta.$$

1) Безпосереднє обчислення циркуляції.

Підставляючи координати даного вектора у формулу лінійного інтеграла, маємо:

$$Ц = \oint [illegible] \oint [illegible].$$

На даному колі L, центр якого знаходиться у початку координат, маємо:

$$r = R, dr = 0; \quad \theta = \frac{\pi}{2}; \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$$

і, отже,

$$Ц = 2R^2 \oint [illegible] \varphi = 4\pi R^2.$$

2) Обчислення циркуляції за теоремою Стокса.

Шукана циркуляція за теоремою Стокса дорівнює

$$Ц = \bigcirc \quad \text{[illegible]} \; \vec{\ }, \vec{n}_0) \ldots ,$$

де S – поверхня, натягнута на коло L.

Знаходимо ротор даного вектора

$$rot\vec{a} \; \text{[illegible]} \; \frac{}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \cdot\vec{e}_\theta & \ldots\vec{e}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ r & 0 & \left(Rr + r^2\right)\sin^2\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{r}\left(R + r\right)\cos\theta\vec{e}_r \; \text{[illegible]} \; \frac{}{r}\left(\ldots\right)\ldots\vec{e}_\theta .$$

В якості поверхні S, натягнутої на контур L, візьмемо, наприклад, верхню напівсферу радіуса R: $r = R,\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le \varphi < 2\pi$. Орт $\vec{n}_0$ нормалі до зовнішньої сторони напівсфери S напрямлений по вектору $\vec{e}_r$, тому беремо $\vec{n}_0$ [illegible] $\vec{e}_r$. Знаходимо скалярний добуток

$$\left(rot\vec{a}, \vec{n}_0\right) \; \text{[illegible]} \; \left(\frac{}{r}\left(\ldots\right)\ldots\vec{e}_r \; \frac{}{r}\left(\ldots\right)\ldots\vec{e}_\theta, \vec{e}_r\right) \; \frac{}{r}\left(\ldots\right)\cos\theta .$$

Враховуючи, що $r = R$ на поверхні S для шуканого потоку отримаємо вираз

$$П = \iint_S \frac{2}{r}\left(R + r\right)\cos\theta dS = 4\iint_S \cos\theta dS .$$

У сферичних координатах елемент площадки dS координатної поверхні $r = R$, тобто напівсфери S, буде дорівнювати

$$dS = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

і, отже,

$$П = 4\iint_S \cos\theta \cdot R^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 4R^2 \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R^2 .$$

В силу теореми Стокса одержуємо $Ц = 4\pi R^2$.

Примітка. Відмітимо, що за поверхню *S*, натягнуту на контур *L*, не можна брати круг, обмежений цим колом, так як в цьому крузі маємо точку $r = 0$ (центр круга), в якій ротор даного вектора має розрив.

Індивідуальні завдання до теми 13

I. Знайти потік векторного поля, перейшовши до циліндричних або сферичних координат (1-8) або у відповідних криволінійних координатах (9-14):

1) Знайти потік векторного поля [illegible] через зовнішню сторону бічної поверхні циліндра $x^2 + y^2 = 4$, обмеженої площинами $z = 0$ та $x - y + z = 4$;

2) Знайти потік векторного поля [illegible] через зовнішню сторону циліндричної поверхні $x^2 + z^2 = R^2$, обмеженої площинами $y = 1$ та $x + y = 4$;

3) Знайти потік векторного поля [illegible] через зовнішню сторону бічної поверхні циліндра $x^2 + y^2 = 1$, обмеженої площиною $z = 0$ та гіперболічним параболоїдом $z = x^2 - y^2$;

4) Знайти потік векторного поля [illegible] через зовнішню сторону бічної поверхні циліндра $x^2 + y^2 = 1$, обмеженої еліптичним конусом $z^2 = \dfrac{x^2}{2} + y^2$;

5) Знайти потік векторного поля [illegible] через зовнішню частину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, що вирізається конічною поверхнею $z^2 = x^2 + y^2$ ($z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$);

6) Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ [illegible] $xz\vec{j} + xy\vec{k}$ через зовнішню частину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, розміщену в першому октанті;

7) Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ [illegible] $y\vec{j} + z\vec{k}$ через зовнішню частину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, обмеженої площинами $z = 0$ та $z = y$;

8) Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ [illegible] $yz\vec{j}$ [illegible] $\vec{k}$ через зовнішню частину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, відсіченої площиною $z = 0$;

9) Знайти потік векторного поля, заданого в циліндричних координатах через дану поверхню S: $\vec{a}$ [illegible] $\vec{e}_\rho$ [illegible] $\vec{e}_\varphi$ [illegible] $\vec{e}_z$, де S – замкнута поверхня, що утворена циліндром $\rho = 2$ та площинами $z = 0$ та $z = 2$;

10) Знайти потік векторного поля, заданого в циліндричних координатах через дану поверхню S: $\vec{a}$ [illegible] $\vec{e}_\rho$ [illegible] $\vec{e}_\varphi$ [illegible] $\vec{e}_z$, де S – замкнута поверхня, що утворена циліндром $\rho = 1$, напівплощинами $\varphi = 0$ та $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ та площинами $z = -1$ та $z = 1$;

11) Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ [illegible] r^2 [illegible] $\vec{e}_r$ через сферу радіуса R з центром у початку координат;

12) Знайти потік векторного поля, заданого у сферичних координатах $\vec{a}$ [illegible] $\vec{e}_r$ [illegible] $\vec{e}_\theta$ [illegible] $\vec{e}_\varphi$ через верхню напівсферу радіуса R;

13) Знайти потік векторного поля, заданого у сферичних координатах $\vec{a}$ [illegible] $\vec{e}_r$ [illegible] $\vec{e}_\varphi$ через сферу $r = R$;

14) Знайти потік векторного поля, заданого у сферичних координатах $\vec{a}$ [illegible] $\vec{e}_r$ [illegible] $\vec{e}_\varphi$ через поверхню, обмежену

напівсферою радіуса R та площиною $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, за напрямком вектора $\vec{e}_\varphi$.

II. Знайти лінійний інтеграл або циркуляцію у криволінійних координатах:

1) Обчисліть лінійний інтеграл від векторного поля $\vec{a}$ [illegible] $\vec{e}_\rho$ [illegible] $\vec{e}_\varphi$ [illegible] $\vec{e}_z$, заданого у циліндричних координатах по лінії L – відрізок прямої: $\{\rho = a, \varphi = 0, 0 \le z \le 1\}$;

2) Обчисліть лінійний інтеграл від векторного поля $\vec{a}$ [illegible] $\vec{e}_\rho$ [illegible] $\vec{e}_\varphi$ [illegible] $\vec{e}_z$, заданого у циліндричних координатах по лінії L – напівколо: $\{\rho = 1, z = 0, 0 \le \varphi \le \pi\}$;

3) Обчисліть лінійний інтеграл від векторного поля $\vec{a}$ [illegible] $\vec{e}_\rho$ [illegible] $\vec{e}_\varphi$ [illegible] $\vec{e}_z$, заданого у циліндричних координатах по лінії L – виток гвинтової лінії: $\{\rho = R, z = \varphi, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$;

4) Обчисліть лінійний інтеграл від векторного поля $\vec{a}$ [illegible] $\vec{e}_r$ [illegible] $\vec{e}_\theta$ [illegible] $\vec{e}_\varphi$, заданого у сферичних координатах по лінії L – напівколо: $\{\rho = 1, \varphi = 0, 0 \le \theta \le \pi\}$;

5) Обчисліть лінійний інтеграл від векторного поля $\vec{a}$ [illegible] 2 [illegible] $\vec{e}_r$ [illegible] $\vec{e}_\theta$ [illegible] $\vec{e}_\varphi$, заданого у сферичних координатах по лінії L – відрізок прямої: $\left\{\varphi = \dfrac{\pi}{2}, \theta = \dfrac{\pi}{4}, 0 \le r \le 1\right\}$;

6) Обчисліть лінійний інтеграл від векторного поля $\vec{a}$ [illegible] $\vec{e}_r$ [illegible] $\vec{e}_\theta$ [illegible] $\vec{e}_\varphi$, заданого у сферичних координатах по лінії L – відрізок прямої: $\left\{\varphi = \dfrac{\pi}{2}, r = \dfrac{1}{\sin\theta}, \dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$;

7) Обчисліть циркуляцію векторного поля [illegible] $\vec{e}_\rho$ [illegible] $\vec{e}_\varphi$ [illegible] $\vec{e}_z$, заданого у циліндричних координатах безпосередньо та за формулою Стокса по контуру L – коло: $\left\{\rho = 1, z = 0\right\}$;

8) Обчисліть циркуляцію векторного поля [illegible] $\vec{e}_\rho$ [illegible] $\vec{e}_\varphi$ [illegible] $\vec{e}_z$, заданого у циліндричних координатах безпосередньо та за формулою Стокса по контуру L – коло: $\left\{\rho = R, z = R\right\}$;

9) Обчисліть циркуляцію векторного поля [illegible] $\vec{e}_\rho$ [illegible] $\vec{e}_\varphi$ [illegible] $\vec{e}_z$, заданого у циліндричних координатах безпосередньо та за формулою Стокса по контуру L – петля: $\left\{\rho = sin\,\varphi, z = 1\right\}$;

10) Обчисліть циркуляцію векторного поля [illegible] $\vec{e}_r$ [illegible] $\vec{e}_\varphi$, заданого у сферичних координатах безпосередньо та за формулою Стокса по контуру L – коло: $\left\{r = 1, \theta = \dfrac{\pi}{4}\right\}$;

11) Обчисліть циркуляцію векторного поля [illegible] $\vec{e}_r$ [illegible] $\vec{e}_\theta$, заданого у сферичних координатах безпосередньо та за формулою Стокса по контуру L – петля: $\left\{r = sin\,\varphi, \theta = \dfrac{\pi}{2}, 0 \le \varphi \le \pi\right\}$;

12) Обчисліть циркуляцію векторного поля [illegible] $\vec{e}_\varphi$, заданого у сферичних координатах безпосередньо та за формулою Стокса по контуру L, що обмежений напівколом $\left\{r = R, \varphi = \dfrac{\pi}{4}, 0 \le \theta \le \pi\right\}$ та його вертикальним діаметром $\left\{\varphi = \dfrac{\pi}{2}, \theta = 0\right\}$.

Варіанти підсумкової контрольної роботи

Варіант № 1

<u>Перший рівень.</u> У завданнях 1 – 7 виберіть одну вірну на Вашу думку відповідь та позначте її у бланку (листі) відповідей.

1. При якому значенні x вектори $\vec{a}(3;0;6)$ і $\vec{b}(-8;7;x)$ будуть перпендикулярними

а) 3 **б)** -3

в) 4 **г)** -4

2. Яким рівнянням описується множина точок $(x;y)$ координатної площини, рівновіддалених від точок $A(1;-1)$ і $B(0;2)$?

а) $3y = 1 + x$ **б)** $2y = 1 + x$

в) $y = 1 + x$ **г)** $y = 1 + 2x$

3. Розглянемо дві декартові системи координат O та O' зі спільним початком. Нова система координат O' отримана шляхом повороту початкової системи координат O на кут 90° навколо однієї з її вісей. Матриця даного повороту має вигляд:

$$U_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Навколо якої з вісей було здійснено поворот?

а) Навколо осі Ox **б)** Навколо осі Oy.

в) Навколо осі Oz **г)** Повороту не було

4. Знайти значення $\delta_{2j} \cdot T_{ij}$

а) $T_{11} + T_{22} - T_{33}$ **б)** $T_{11} + T_{22} + T_{33}$

в) T_{i2} **г)** $- T_{11} - T_{22} - T_{33}$

5. Знайти алгебраїчну суму компонентів $4C_{1122} - 3C_{2121}$ добутку тензорів з матрицями $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$, де $C_{ijkl} = A_{ij} \cdot B_{kl}$

а) -3 **б)** 0

в) 10 **г)** 23

6. Нижче наведено вирази, в яких всі величини з нижніми індексами є тензорами відповідніх рангів. Яка з наведених нижче операцій над тензорами є незаконною, тобто результат даної операції не визначає тензорну величину?

а) $c_{ij} = a_{ji} + b_{ij}$ **б)** $c_{ijk} = a_{ikj} + b_{kji}$

в) $c_{ijk} = a_{ijj} + b_{ijk}$ **г)** $c_{ji} = a_{ij} + b_{ij}$

7. Згорнути тензор T_{ijkl} за двома останніми індексами

а) 0 **б)** $T_{ij11} + T_{ij22} + T_{ij33}$

в) $T_{ij11} - T_{ij22} - T_{ij33}$ **г)** T_{ij}

Розв'язання задач 8 – 10 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні та математичні дії з поясненнями. Перенесіть відповідь до бланку відповідей.

Другий рівень.

8. Для неколінеарних векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ знайти число x таке, що $(x-1)\vec{a} + 2\vec{b}$ колінеарний до $\vec{a} + x\vec{b}$.

9. Знайти головний напрямок вектора $\vec{n}$ тензора T з матрицею T_{ij}, який відповідає власному значенню k: $T = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, k = -2.

Третій рівень.

10. В деякій декартовій системі координат дано компоненти тензора

$$T_{ik} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

На який кут φ навколо осі Oz необхідно повернути систему координат, щоб у новій системі координат компонента $T_{12}^{'}$ стала рівною нулю? Знайдіть решту компонент $T_{ik}^{'}$ в новій системі координат?

Варіант № 2

__**Перший рівень.**__ **У завданнях 1 – 7 виберіть одну вірну на Вашу думку відповідь та позначте її у бланку (листі) відповідей.**

1. При якому значенні параметра α вектори $\vec{a}(\sin\alpha; 2; 0)$ і $\vec{b}(2\cos\alpha; -1; 3\tan\alpha)$ будуть перпендикулярними?

а) такого значення не існує **б)** $\alpha = \frac{\pi}{10}$

в) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ **г)** $\alpha = \frac{\pi}{3}$

2. Дано квадрат *ABCD*. Укажіть правильну подвійну нерівність, якщо $a = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA}$, $b = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$, $c = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA}$.

а) $b < a < c$ **б)** $b < c < a$

в) $a < b < c$ **г)** $c < a < b$

3. Розглянемо дві декартові системи координат O та O' зі спільним початком. Нова система координат O' отримана шляхом повороту початкової системи координат O на кут 180° навколо однієї з її вісей. Матриця даного повороту має вигляд:

$$U_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Навколо якої з вісей було здійснено поворот?

а) Навколо осі Ох **б)** Навколо осі Оу.

в) Навколо осі Oz **г)** Повороту не було

4. Знайти значення $\delta_{i1} \cdot \delta_{j2} \cdot T_{ij}$

а) $T_{11} + T_{12} + T_{13}$ **б)** $T_{11} + T_{22} + T_{33}$

в) T_{12} **г)** T_{21}

5. Знайти алгебраїчну суму компонентів $C_{2112} - 3C_{2333}$ добутку тензорів з матрицями $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$, де $C_{ijkl} = A_{ij} \cdot B_{kl}$

а) 10 **б)** 0

в) -6 **г)** 4

6. Нижче наведено вирази, в яких всі величини з нижніми індексами є тензорами відповідних рангів. Використовується правило підсумовування Ейнштейна за парою однакових індексів. Яка з наведених нижче операцій над тензорами є незаконною, тобто результат даної операції не визначає тензорну величину?

а) $d_{ij} = a_{ik}b_{kj} + c_{ij}$ **б)** $d_{ijk} = a_{ijk}b_{ijk} + c_{ijk}$

в) $d_{ijk} = a_{ill}b_{jk} + c_{kji}$ **г)** $d_{ji} = a_{ikj}b_{klm}c_{lm}$

7. Згорнути тензор T_{klm} за двома останніми індексами

а) 0 **б)** $T_{k11} + T_{k22} + T_{k33}$

в) $T_{111} + T_{122} + T_{133}$ **г)** T_k

Розв'язання задач 8 – 10 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні та математичні дії з поясненнями. Перенесіть відповідь до бланку відповідей.

Другий рівень.

8. Про додатні числа a, b, c, d відомо, що $a^2 + b^2 = 12$, $c^2 + d^2 = 27$. Якого НАЙБІЛЬШОГО значення може набути вираз $ac + bd$?

9. Знайти головний напрямок вектора $\vec{n}$ тензора T з матрицею T_{ij}, який відповідає власному значенню k: $T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$, $k = 1$.

<u>Третій рівень.</u>

10. Знайти компоненту λ'_{213} тензора λ третього рангу у системі координат, отриманій поворотом на кут $\pi/2$ навколо осі Oy.

Варіант № 3

<u>Перший рівень.</u> У завданнях 1 – 7 виберіть одну вірну на Вашу думку відповідь та позначте її у бланку (листі) відповідей.

1. При якому значенні параметра m вектори $\vec{a}(1; \lg m; \lg m)$ і $\vec{b}(1; \lg m; -2)$будуть перпендикулярними?

а) такого значення не існує **б)** $m = 0{,}1$

в) $m = 10$ **г)** $m = 100$

2. Площа трикутника ABC, якщо координати точок $A(3; 2; 2)$, $B(-1; 4; 2)$, $C(-1; 2; 2)$ дорівнює…

а) 6 **б)** 4

в) 8 **г)** 10

3. Розглянемо дві декартові системи координат O та O' зі спільним початком. Нова система координат O' отримана шляхом повороту початкової системи координат O на кут 180° навколо однієї з її вісей. Матриця даного повороту має вигляд:

$$U_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Навколо якої з вісей було здійснено поворот?

а) Навколо осі Ох **б)** Навколо осі Оу

в) Навколо осі Oz **г)** Повороту не було

4. Знайти значення $\delta_{ij} \cdot T_{ijk}$

а) $T_{11k} + T_{22k} + T_{33k}$ **б)** $T_{1kk} + T_{2kk} + T_{3kk}$

в) $T_{12k} + T_{23k} + T_{31k}$ **г)** T_k

5. Знайти алгебраїчну суму компонентів $3C_{3113} - C_{2233}$ добутку тензорів з матрицями $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$, де $C_{ijkl} = A_{ij} \cdot B_{kl}$

а) 4 **б)** 12

в) -3 **г)** 6

6. Нижче наведено вирази, в яких всі величини з нижніми індексами є тензорами відповідних рангів. Використовується правило підсумовування Ейнштейна за парою однакових індексів. Яка з наведених нижче операцій над тензорами є незаконною, тобто результат даної операції не визначає тензорну величину?

а) $d_{ij} = a_{ik} b_{kj} + c_{ij}$ **б)** $d_{ijk} = a_{ijk} b_{ijk} + c_{ijk}$

в) $d_{ijk} = a_{ill} b_{jk} + c_{kji}$ **г)** $d_{ji} = a_{ikj} b_{klm} c_{lm}$

7. Згорнути тензор T_{klm} за двома першими індексами

а) 0 **б)** $T_{kl1} + T_{kl2} + T_{kl3}$

в) $T_{11m} + T_{22m} + T_{33m}$ **г)** T_m

Розв'язання задач 8 – 10 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні та математичні дії з поясненнями. Перенесіть відповідь до бланку відповідей.

Другий рівень.

8. Дано дві точки $C(-2; 2)$ і $D(4; 6)$. Знайдіть і зобразіть геометричне місце точок $M(x; y)$, для яких виконується співвідношення $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{DM} = 8$.

9. Знайти головний напрямок вектора $\vec{n}$ тензора T з матрицею T_{ij}, який відповідає власному значенню k: $T = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$, $k = 7$.

<u>Третій рівень.</u>

10. Відомо, що [illegible]. За якої умови тензор 2-го рангу t буде симетричний?

Пропонований зразок підсумкового тесту

1. Нехай $\vec{r}$ [illegible] $\vec{r}(t)$. Тоді похідна по t від векторного добутку $[\vec{a},\vec{r}]$, де $\vec{a}$ – вектор сталої довжини, дорівнює…

а) $[\vec{a},\vec{r}]$ [illegible] б) $[\vec{a},\vec{r}]+[\vec{a},\vec{r}]$ [illegible] в) $[\vec{a},\vec{r}]$ [illegible] г) інша відповідь.

2. Градієнт скалярного поля $\varphi=|\vec{r}|$ [illegible] дорівнює…

а) $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ [illegible] б) $n|\vec{r}|$ [illegible] в) $n|\vec{r}|$ [illegible] $\vec{r}$, г) інша відповідь

3. Дивергенція векторного поля $\vec{a}$ [illegible] $(\vec{r},\vec{c})\vec{c}$, где $\vec{c}$ – вектор сталої довжини, дорівнює…

а) $\vec{c}$ б) $\vec{r}$ [illegible] $\vec{c}$ в) 0 г) інша відповідь.

4. Похідна скалярного поля $\varphi=xyz$ в точці $(1;1;1)$ за напрямком радіус-вектора цієї точки дорівнює…

а) 3 б) $\sqrt{3}$ в) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ г) інша відповідь

5. Знайти потік поля $\vec{r}$ через поверхню сфери одиничного радіуса.

а) 1 б) 3 в) $4\pi/3$ г) 4π

6. Знайти потік поля $\vec{\rho}$ через поверхню сфери одиничного радіуса. (Вектор $\vec{\rho}$ має компоненти $(x, y, 0)$.)

а) 2 б) 1 в) $8\pi/3$ г) $4\pi/3$

7. Обчисліть $\operatorname{div} z\vec{r}$.

а) 3 б) $4z$ в) $3z$ г) z

8. Векторне поле

$$\vec{a} = x(\ldots y^2)\vec{i} + y(x \ldots z)\vec{j} + z(y \ldots x)\vec{k}$$

а) соленоїдальне, але не потенціальне

б) потенціальне, але не соленоїдальне

в) не соленоїдальне та не потенціальне

г) інша відповідь

9. Обчисліть $\operatorname{div}\left(\vec{a}\, sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right)$, де $\vec{a}, \vec{k} = const, \vec{r} = (x, y, z)$.

а) 3 б) $\left(\vec{a}\cdot\vec{k}\right)cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)$ в) $cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)$ г) $\left(\vec{a}\cdot\vec{k}\right)$

10. Знайти циркуляцію поля $\vec{a}\left(\vec{r}\right)(x-z, y+2x-z, x+y)$ по колу одиничного радіуса з центром у початку координат, що лежить в площині (y, z).

а) 3 б) 1 в) 2π г) π

11. Обчислити значення величини $\Delta\left(x^3+y^3+z^3\right)$.

а) 18 б) $x+y+z$ в) $6(x+y+z)$ г) 0

12. Обчислити значення величини $\Delta\left(x^2y^2z^2\right)$.

а) 0 б) 6 в) $2(y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2)$ г) $2(yz+xz+xy)$

13. Обчислити значення величини $\Delta\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)^2$, $\vec{a} = const$.

а) 2 б) $2a^2$ в) a^2 г) 0

14. Обчислити значення величини $\Delta sin\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)$, $\vec{a} = const$.

а) $a^2 sin\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)$ б) $-a^2 sin\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)$ в) $-a^2 cos\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)$ г) $a^2 cos\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)$

15. Обчислити значення величини $\Delta\dfrac{sin(kr)}{r}$, де $k = const$.

а) $k^2\dfrac{sin(kr)}{r}$ б) $-k^2\dfrac{sin(kr)}{r}$ в) $k\dfrac{sin(kr)}{r}$ г) $-k\dfrac{sin(kr)}{r}$

16. Вказати правильне значення коефіцієнта Ламе h_r для сферичної системи координат.

а) $h_r = 1$ б) $h_r = r$ в) $h_r = r^2$ г) $h_r = r\cdot sin\theta$

17. Вказати правильне значення коефіцієнта Ламе h_r для циліндричної системи координат.

а) $h_r = 1$ б) $h_r = r$ в) $h_r = r^2$ г) $h_r = z$

18. Розглядаються дві декартові системи координат O та O' зі спільним початком та базисними векторами (ортами) $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ та $(\vec{e}\,'_1,\vec{e}\,'_2,\vec{e}\,'_3)$, що утворюють праву ортонормовану трійку. Матричні елементи матриці повороту системи координат $U_{ij}=(\vec{e}_i\,\vec{e}\,'_j)$. Нова система координат O' одержана шляхом повороту початкової системи координат O на кут 90° навколо однієї з її вісей. Матриця даного повороту має вигляд:

$$U_{ij}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

Навколо якої з вісей здійснено поворот?

а) Ox б) Oy в) Oz г) Поворот не виконувався

19. Розглядаються дві декартові системи координат O та O' зі спільним початком та базисними векторами (ортами) $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ та $(\vec{e}\,'_1,\vec{e}\,'_2,\vec{e}\,'_3)$, що утворюють праву ортонормовану трійку. Матричні елементи матриці повороту системи координат $U_{ij}=(\vec{e}_i\,\vec{e}\,'_j)$. Нова система координат O' одержана шляхом повороту початкової системи координат O на кут 180° навколо однієї з її вісей. Матриця даного повороту має вигляд:

$$U_{ij}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Навколо якої з вісей здійснено поворот?

а) Ox б) Oy в) Oz г) Поворот не виконувався

20. Для дійсного симетричного тензора 2-го рангу a_{ij}, компоненти якого записані в стандартній матричній формі:

$$a_{ij}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

не розв’язуючи ріавняння: $\det\left(a_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right) = 0$, а використовуючи лише властивість інваріантності згортки тензора a_{ii}, оберіть із пропонованого списку правильні власні значення даного тензора.

а) $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1$ б) $\lambda_1 = 2 \,, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 1$

в) $\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1$ г) $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 2$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Валь О.Д., Королюк С.Л., Мельничук С.В. Основи векторного та тензорного аналізу: Навчальний посібник. – Чернівці: Книги – XXI, 2006. – 228 с.

2. Гребенюк С.М. Тензорний аналіз: навчальний посібник для студентів освітнього ступеня «бакалавр» напряму підготовки «Математика» / С.М. Гребенюк, Ю.М. Стреляєв, М.І. Клименко. – Запоріжжя: ЗНУ, 2015. – 90 с.

3. Ледней М.Ф. Збірник задач з векторного та тензорного числення: навч. посіб. для студентів фізичних факультетів університетів / М.Ф. Ледней, М.А. Разумова, О.В. Романенко, В.М. Хотяїнцев. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2010. – 129 с.

4. Лиман Ф.М. Основи векторного та тензорного аналізу: Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів. – Суми: СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2005. – 84 с.

5. Методичні вказівки до самостійної роботи за розділом курсу вищої математики "Системи координат. Елементи векторного та тензорного обчислення" (для студентів спеціальностей 1108, 1204) / Уклад.: В.О. Паламарчук, С.О. Колесніков, Л.Ф. Москаленко. – Краматорськ: КІІ, 1993. – 40 с.

6. Нікулін О.В. Основи векторного та тензорного числення: теоретичні відомості та тести / Нікулін О.В., Наконечна Т.В. Дніпропетровськ: Біла К.О., 2011. – 72 с.

7. Разумова М.А. Основи векторного і тензорного аналізу: навчальний посібник / М.А. Разумова, В.М. Хотяїнцев. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2011. – 216 с.

8. Сеньків М.Т. Векторний і тензорний аналіз: текст лекцій. – Л.: РВВ Львів. ун-ту, 1991. – 146 с.