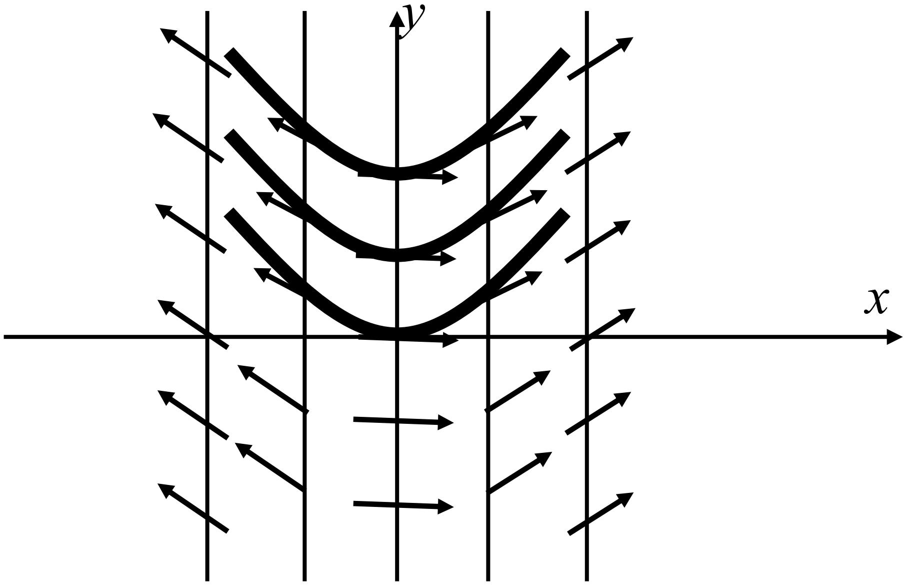
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

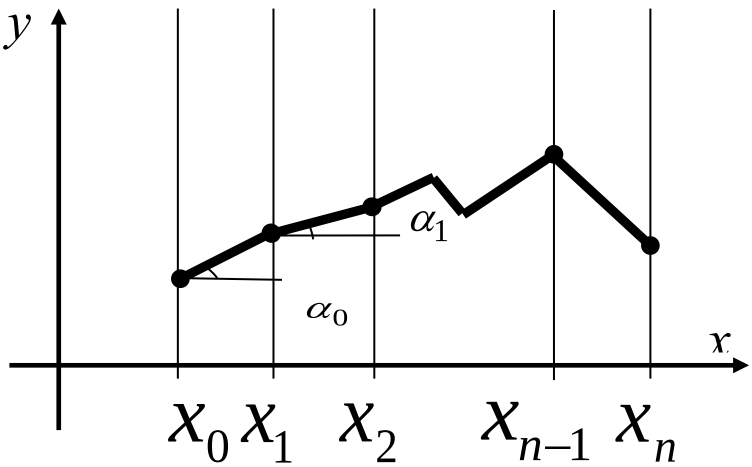
Г.А. Хазін

І.М. Тягай



Диференціальні рівняння

Навчальний посібник



Умань – 2019

УДК 517.9
ББК 22.161.6
Х 15

Рецензенти:
Махомета Т.М. кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики та методики навчання математики, декан факультету фізики, математики та інформатики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини;
Дякон В.М. кандидат фізико-математичних наук, доцент, директор Уманської філії ПВНЗ «Європейський університет»

Г.А. Хазін, І.М. Тягай Диференціальні рівняння. Курс лекцій : навчальний посібник для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів. – Умань : Візаві, – 2019. – 120 с.

Навчальний посібник охоплює теоретичний матеріал дисципліни «Диференціальні рівняння», що включає питання теорії звичайних диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння представлено класами елементарних, лінійних, неявних рівнянь та систем.

Посібник є доступним для широкого кола студентів усіх форм навчання. Посібник також може бути корисним для тих, хто у своїй діяльності використовує математику або нею цікавиться.

Рекомендовано до друку вченою радою факультету фізики, математики та інформатики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини (протокол №2 від 26 вересня 2019 року)

ЗМІСТ

ВСТУП...5

І. Теоретичні відомості ……..6

Тема 1. Основні поняття теорії звичайних диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння І порядку.............................6

1.1 Означення. Класифікація диференціальних рівнянь............6

1.2 Загальний, частинний і особливий розв‘язки звичайного диференціального рівняння...7

1.3 Поняття про диференціальні рівняння І порядку. Інтегральна крива. Задача Коші. Теорема існування та єдиності розв’язку задачі Коші...9

1.4 Геометрична інтерпретація. Поле напрямків. Ізокліни. Ламані Ейлера...15

Питання для самоконтролю ………………………………..…..20

Тема 2. Методи розв’язування диференціального рівняння І порядку ……………………………………………………….....21

2.1 Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними..21

2.2 Однорідні диференціальні рівняння. Диференціальні рівняння, які зводяться до однорідних....................................26

2.3 Лінійні диференціальні рівняння І порядку (метод варіації довільної сталої – метод Лагранжа; метод Бернулі; метод інтегрального множника – метод Ейлера)................................32

2.4 Диференціальні рівняння, що зводяться до лінійних..........40

2.5 Рівняння у повних диференціалах. Інтегральний множник…………………………………………………………47

2.6 Найпростіші типи диференціальних рівнянь, не розв’язаних відносно похідної. Рівняння Лагранжа і Клеро.........................54

Питання для самоконтролю ……………………………..……..62

Тема 3: Диференціальні рівняння вищих порядків...................64

3.1 Рівняння, інтегровні у квадратурах....................................64

3.2 Деякі типи рівнянь вищих порядків, інтегровних у квадратурах..69

3.3 Деякі типи диференціальних рівнянь вищих порядків, які допускають зниження порядку..74

Питання для самоконтролю ……………………………….82
Тема 4. Лінійні диференціальні рівняння n - го порядку...........84
4.1 Основні означення. Поняття про комплексний розв’язок однорідного лінійного рівняння. Поняття про лінійний диференціальний оператор n-го порядку..............................84
4.2 Властивості розв’язків однорідного лінійного рівняння....86
4.3 Фундаментальна система розв’язків. Визначник Вронського…………………………………………………..…87
4.4 Структура загального розв'язку неоднорідного лінійного рівняння..90
4.5 Принцип накладання...91
4.6 Метод варіації довільної сталої. Метод Лагранжа.............92
4.7 Інтегрування однорідного лінійного рівняння n - го порядку з сталими коефіцієнтами (метод Ейлера)................................94
4.8 Розв’язування лінійно-неоднорідних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною (метод невизначених коефіцієнтів).........................100
4.9. Рівняння Ейлера...103
Питання для самоконтролю ……………………………….104
Тема 5. Системи лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами...106
5.1 Основні поняття та означення..106
5.2 Задача Коші. Теорема існування та єдиності розв’язку задачі Коші 107
5.3. Загальний, частинний і особливий розв’язки …………...109
5.4. Лінійні системи звичайних диференціальних рівень …..113
Питання для самоконтролю ……………………………117
ІІ. ЗРАЗОК ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ………...……………………118
ЛІТЕРАТУРА...120

ВСТУП

Навчальний посібник створено у відповідності до типової навчальної програми дисципліни «Диференціальні рівняння» з метою організації аудиторної і самостійної роботи студентів педагогічних університетів.

Користування посібником повинно допомогти студентам у досягненні нормативного рівня теоретичних знань, а також у розширенні та поглибленні їх наукового світогляду, у оволодінні ними умінь працювати самостійно, застосовувати набуті знання у подальшій діяльності.

Посібник охоплює теоретичний матеріал дисципліни «Звичайні диференціальні рівняння» для спеціальності Математика.

Він включає теоретичні відомості, які супроводжуються розглядом прикладів, розв’язання яких полегшує розуміння теоретичного матеріалу. В кінці кожної теми наведено питання для самоперевірки. Також, у посібнику наведено приклад тестових завдань для перевірки теоретичних знань.

Така деталізація сприятиме якіснішому засвоєнню студентами навчального матеріалу, особливо при самостійному його опрацюванні.

Посібник рекомендується використовувати разом з іншими підручниками і посібниками, зокрема тими, що наведено у списку рекомендованої літератури.

І.Теоретичні відомості

Тема1: Основні поняття теорії звичайних диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння І порядку.

1.1 Означення. Класифікація диференціальних рівнянь.
1.2 Загальний, частинний і особливий розв‘язки звичайного диференціального рівняння.
1.3 Поняття про диференціальні рівняння І порядку. Інтегральна крива. Задача Коші. Теорема існування та єдиності розв‘язку задачі Коші.
1.4 Геометрична інтерпретація. Поле напрямків. Ізокліни. Ламані Ейлера.

1.1 Означення. Класифікація диференціальних рівнянь

Означення. *Рівняння, в яких невідома функція входить під знаком похідної або диференціала, називають* ***диференціальними.***

Означення. *Рівняння, в яких невідома функція під знаком похідної є функцією однієї змінної (залежить тільки від одного аргументу), називається* ***звичайним диференціальним рівнянням****.*

Приклад: $y' + y = xy^3, \quad x\dfrac{dy}{dx} - 3y + x^4y^2 = 0$

Означення. *Порядком диференціального рівняння називають максимальний порядок похідної (або диференціала), що входить до цього рівняння.*

Звичайне диференціальне рівняння n-го порядку в загальному випадку має вигляд

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1.1.1)$$

x – незалежна змінна, $y = y(x)$ - шукана функція.

Означення. *Якщо невідома функція, яка входить у диференціальне рівняння, є функцією багатьох змінних, то таке диференціальне рівняння називають рівнянням з частинними похідними.*

Загальний вигляд: $F\left(y, x_1, x_2, ..., x_n, \dfrac{\partial y}{\partial x}, ..., \dfrac{\partial y}{\partial x_n}, \dfrac{\partial^2 y}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \dfrac{\partial^m y}{\partial x_m}\right) = 0 \qquad (1.1.2)$

Приклад: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

Означення. *Розв'язком диференціального рівняння (1.1.1) називають n-разів диференційовану функцію $y = \varphi(x)$ на проміжку $< a;b >$ (a,b можуть бути і невласними числами), яка при підстановці в це рівняння перетворює його на цьому проміжку у тотожність, тобто*

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), ..., \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0 \qquad (1.1.3)$$

Зауваження: *Якщо проміжок $< a;b >$ є відрізком $[a,b]$, то під похідною у кінцевих точках розуміють відповідно однобічні похідні.*

Означення. *Степенем диференціального рівняння називають найвищий степінь похідної найвищого порядку.*

Приклад: $a\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 - (x+b)\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - x^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 0$ – звичайне диференціальне рівняння 2-го порядку, 3-го степеня.

1.2 Загальний, частинний і особливий розв‘язки звичайного диференціального рівняння

З найпростішими диференціальними рівняннями доводилось мати справу ще на початку вивчення інтегрального числення.

Припустимо задано функцію $\varphi(x)$ і треба знайти її невизначений інтеграл (первісну). Ця задача у формі рівняння записана буде таким чином:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x), \text{ або } dy = \varphi(x)dx \qquad (1.2.1)$$

Данні рівняння є еквівалентні і їх спільний розв'язок – найбільш загальний розв'язок –

$$y = \int \varphi(x)dx + C \qquad (1.2.2)$$

(1.2.2) – називається **загальним розв'язком рівняння** (1.2.1) або загальним інтегралом.

Розв'язки, що дістаємо з загального інтеграла, надаючи довільній сталі С певних значень, називаються частинними розв'язками (частинними інтегралами).

Величину С можна знайти, коли заздалегідь відома пара відповідних значень аргументу і функції, підставляючи ці значення в (1.2.2), визначаємо довільну сталу.

Поняття загального і частинного інтегралу відноситься і до рівняння типу (1.1.1), причому число довільних сталих, що входять до загального розв'язку диференціального рівняння дорівнює порядкові рівняння.

Означення: *Розв'язком диференціального рівняння називається будь-яке співвідношення між функцією і незалежною змінною, в якому немає диференціалів і похідних і яке перетворює задане рівняння в тотожність.*

Крім загального і частинного інтегралів диференціальне рівняння може мати ще **особливий розв'язок.**

Означення: *Особливим називається такий розв'язок диференціального рівняння, якого не можна дістати з загального інтеграла при жодному значенні сталої С.*

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння $y' = \dfrac{y}{x+1}$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x+1} \quad \Leftrightarrow \int \frac{y'dx}{y} = \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1} \;\Rightarrow \ln|y| = \ln|x+1| + \ln|c_1| \quad c_1 \neq 0$$

$$|y| = |c_1| + |x+1| \Rightarrow \quad y = C(x+1) \quad\; C \neq 0$$

$y = C(x+1)$ - загальний розв'язок.

Але y=0 – також є розв'язком рівняння, який не випливає з загального. Отже, y=0 – особливий розв'язок.

Розв'язати диференціальне рівняння – означає знайти всі його розв'язки. При знаходженні диференціального рівняння, як правило, доводиться мати справу з операцією інтегрування.

Тому процес знаходження розв'язків диференціального рівняння називають інтегрування цього рівняння.

Якщо шуканий розв'язок представлено як інтеграл від елементарної функції, то кажуть, що розв'язок даного диференціального рівняння знайдено **у квадратурах**, а самі такі розв'язки називають квадратурами.

Розглянемо задачу, при розв'язуванні якої одержується диференціальне рівняння.

Задача.

Матеріальна точка масою m вільно падає під дією гравітаційної сили. Нехтуючи опором повітря, визначити закон руху точки.

y

Положення точки визначається координатою $y(t)$ - відстанню її від фіксованої точки O в момент часу t. Точка падає під дією гравітаційної сили $F_r = mg$. Тому згідно з другим законом Ньютона: $ma = F$.

Маємо $ma = mg \Rightarrow m\frac{d^2y}{dt^2} = mg,\ \frac{d^2y}{dt^2} = g \Rightarrow \frac{dy}{dt} = gt + c_1 \Rightarrow y(t) = \frac{gt^2}{2} + c_1t + c_2$, c_1, c_2 - довільні сталі.

$t = 0 \Rightarrow\ y(0) = c_2\ \Rightarrow$ отже, $[c] = \frac{m}{c}\ c_1 = V_0$ - початкова швидкість.

Закон руху: $y(t) = \frac{gt^2}{2} + V_0t + y_0$

1.3 Поняття про диференціальне рівняння I порядку. Інтегральна крива. Задача Коші. Теорема існування та єдності розв'язку задачі Коші

Означення. *Диференціальним рівнянням I порядку, розв'язаним відносно похідної, називають співвідношення виду*:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ або } y' = f(x, y), \qquad (1.3.1)$$

де $f(x, y)$ - задана і неперервна в деякій області двовимірного простору R_2 функція двох змінних *x, y*.

У диференціальному рівнянні (1.3.1) невідома функція $y = y(x)$, а також аргумент *x* можуть явно і не входити.

Означення. *Диференціальне рівняння I порядку, не розв'язаним відносно похідної називають співвідношення вигляду*

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (1.3.2)$$

де $F(x, y, y')$ задана функція трьох змінних x, y, y', які змінюються в деякій області тривимірного простору R_3.

Будемо поки що розглядати диференціальне рівняння, розв'язані відносно похідної.

Нехай функція $f(x,y)$ визначена і неперервна в деякій області $D \subset R_2$

Область D називають областю визначення диференціального рівняння (1.3.1).

Якщо $f(x,y)$ в околі точки $(x_0, y_0) \in D$ є необмеженою, тобто $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = \infty$, то розглядають диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)} \qquad (1.3.3)$$

Множину цих точок, а також точки, де функція $f(x,y)$ не визначена, але може бути доозначена за неперервністю (існує границя функції в цих точках), приєднують до області визначення диференціального рівняння (1.3.1).

Диференціальне рівняння (1.3.1) можна записати ще й так:

$$dy - f(x,y)dx = 0 \qquad (1.3.4)$$

Помноживши обидві частини цього рівняння на функцію $N(x,y) \neq 0$ дістанемо

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1.3.5)$$

де

$$M(x,y) = -N(x,y) \cdot f(x,y) \;\Rightarrow\; f(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

$M(x,y)$ і $N(x,y)$ - називають коефіцієнтами диференціального рівняння.

А рівняння (1.3.5) називають диференціальним рівнянням I порядку, записаним у симетричній формі.

Знаходження невідомої функції, що входить в диференціальне рівняння, називають розв'язанням або інтегруванням цього рівняння. (Якщо не виникатиме непорозумінь, замість терміну «диференціальне рівняння» іноді використовуватимемо термін «рівняння».)

Означення. *Розв'язком диференціального рівняння* (1.3.1) *на деякому інтервалі (a;b) називається диференційовна на цьому інтервалі функція* $y = \varphi(x)$, *яка при підстановці в рівняння* (1.3.1) *перетворює його у тотожність на (a;b), тобто*

$$\forall x \in (a;b) : \varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)).$$

Наприклад, функція *y=x ln x, xϵ*(0;+∞), є розв'язком рівняння

$xy' - x - y = 0$. Дійсно, підставляючи цю функцію та її похідну $y' = \ln x + 1$ в дане рівняння, дістаємо тотожність
$x(\ln x + 1) - x - x \ln x \equiv 0; \quad x \in (0; +\infty)$.

Неважко переконатися, що розв'язком даного рівняння є також функція $y = x \ln x + Cx$, де C — довільна стала. Надаючи C довільного дійсного значення, щоразу дістаємо розв'язок даного рівняння, тобто маємо нескінченну множину розв'язків.

Графік розв'язку диференціального рівняння називається *інтегральною кривою* цього рівняння.

Означення. *Розв'язком диференціального рівняння (1.3.1) на проміжку* $<a;b>$ *називають будь яку функцію*

$$y = \varphi(x, c), \tag{1.3.6}$$

що задовольняє такі умови:

1) *функція* $\varphi(x,c)$ *має на вказаному проміжку неперервну похідну і при* $x \in <a;b>$ *не виходить з області визначення* D.
2) $\forall x \in <a;b>$ *виконується рівність (тотожність)* $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.

Розв'язок диференціального рівняння (1.3.1) можна також записати у параметричній формі

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in <\alpha, \beta>,$$

якщо при цьому виконується тотожність

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} \equiv f(x(t), y(t)) \quad t \in <\alpha, \beta>,\ x'(t) \neq 0.$$

Як бачимо, при розв'язуванні диференціального рівняння ми одержуємо нескінчену множину розв'язків. Проте на практиці часто доводиться знаходити не всі розв'язки, тобто не загальний розв'язок диференціального рівняння, а розв'язок, що задовольняє певні додаткові умови. Однією з таких задач є задача Коші[1].

Для диференціального рівняння (1.3.1) **задача Коші** формулюється так:

Серед усіх розв'язків диференціального рівняння (1.3.1) знайти такий розв'язок $y = y(x)$, *який при заданому значенні незалежної змінної* $x = x_0$ *дорівнює заданому значенню* y_0, *тобто*

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.3.7}$$

[1] Огюстен Луї Коші (1789-1857) – французький математик

При цьому числа x_0, y_0 називають **початковими даними** , а умову (1.3.7) – **початковою умовою.**

З геометричної точки зору знайти розв'язок задачі Коші означає знайти інтегральну криву цього рівняння, яка проходить через задану точку (x_0, y_0).

Приклад. З усіх розв'язків диференціального рівняння $y' = -\frac{y}{x}$ знайти розв'язок, який задовольняє початкову умову $y(1) = 2$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \quad \ln|y| = -\ln|x| + \ln|c_1| \;\; c_1 \neq 0 \quad \Rightarrow \; |y| = \frac{|c_1|}{|x|} \Rightarrow \; y = \frac{c}{x} \quad (c \neq 0)$$

Задовольняємо початкову умову $2 = \frac{c}{1} \Rightarrow c = 2$.

Отже, розв'язком задачі Коші є розв'язок $y = \frac{2}{x}$.

З геометричної точки зору ми знайшли інтегральну криву вихідного рівняння (гіпербола), яка проходить через задану точку (1;2).

Задача Коші, або задача з початою умовою для диференціального рівняння (1.3.1), не завжди є розв'язною. Може бути, що не існує жодної функції $y = y(x)$, яка б на заданому проміжку $< a;b >$ задовольняла диференціальне рівняння і відповідну початкову умову. У цьому випадку кажуть, що задача Коші розв'язків не має.

Може бути також, що диференціальне рівняння і початкову умову задовольняє не тільки дана функція. В цьому випадку кажуть, що задача Коші має не єдиний розв'язок.

Вперше доведення існування розв'язку диференціального рівняння (1.3.1) з початковою умовою (існування розв'язку задачі Коші) було побудовано Джузепе Пеано[2] .

Теорема Пеано. *Якщо функція* $f(x,y)$ *неперервна в області D площини xOy, то існує неперервна разом із своєю похідною першого порядку функція* $y = \varphi(x)$, *яка є розв'язком диференціального рівняння* $y' = f(x,y)$, *що задовольняє початкову умову* $y(x_0) = y_0$, *де* (x_0, y_0).

Але теорема доводить лише існування розв'язку, який задовольняє початкову умову, а не єдиність такого розв'язку.

Теорема Коші (про існування та єдиність розв'язку задачі Коші).

Нехай для диференціального рівняння (1.3.1) *виконуються такі умови:*

[2] Джузепе Пеано (1858-1932) – італійський математик.

1) *функція* $f(x,y)$ *є неперервною в замкненому прямокутнику* $\overline{R} = \{(x,y) \| x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$, *де* a *і* b *– деякі додатні числа. Тоді, внаслідок того, що* $f(x,y)$ *неперервна в замкненій області, вона у цій області є обмеженою, тобто*

$$|f(x,y)| \le M \;;$$

2) *функція* $f(x,y)$ *за змінною у у прямокутнику* $\overline{R}$ *задовольняє умову Ліпшіца*[3]

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|,$$

де L *– стала (Ліпшіца),* (x,y_1) *і* (x,y_2) *довільні точки з прямокутника* $\overline{R}$.

Тоді на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$, *де* $h = \min\{a, \dfrac{b}{M}\}$, *існує єдиний розв'язок* $y = y(x)$ *диференціального рівняння (1.3.1), який при* $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$ *не виходить за межі прямокутника* $\overline{R}$ *і який при* $x = x_0$ *дорівнює* y_0, *тобто* $y(x_0) = y_0$.

Перевіряти в кожному випадку умову Ліпшіца досить складно. Тому користуються достатньою ознакою виконання умови Ліпшіца, а саме:

Теорема. *Якщо функція* $f(x,y)$ *у прямокутнику* $\overline{R}$ *має обмежену частинну похідну по у,*

$$|f'_y(x,y)| \le A,$$

де A *– додатне число, то умова Ліпшіца для такої функції виконується.*

Нехай

$$y = \varphi(x,c) \tag{1.3.8}$$

загальний розв'язок диференціального рівняння (1.3.1). Нехай також початковими умовами для нього є $y_0 = y(x_0)$ (тобто x_0, y_0 – довільні початкові дані). Тоді за теоремою Коші із загального розв‘язку можна одержати єдиний розв'язок, що задовольняє задану початкову умову. При цьому потрібно знайти значення *С*, що відповідає початковим даним x_0, y_0.

Таким чином, співвідношення (1.3.8) має допускати розв'язання відносно *С*, і знайдене значення *С* має гарантувати єдиність розв'язку задачі Коші.

---

[3] Рудольф Ліпшіц (1832-1903) – німецький математик.

Враховуючи це, можна дати таке означення загального розв'язку диференціального рівняння (1.3.1).

Означення. *Нехай область* $D \subset R_2$ *є тією областю, в кожній точці якої диференціальне рівняння (1.3.1) має єдиний розв'язок. Тоді функцію* (1.3.8)*, що визначена в деякій області змінних* x, C *і має в цій області неперервну похідну по х, називають загальним розв'язком диференціального рівняння* (1.3.1)*, якщо:*

1) *співвідношення* (1.3.8) *допускає розв'язання відносно С,* $\forall (x, y) \in D$*, тобто* $C = \Psi(x, y)$
2) $\forall (x, y) \in D$ *формула* $C = \Psi(x, y)$ *дає таке значення С, включаючи* $\pm\infty$*, при якому функція* (1.3.8) *є розв'язком диференціального рівняння* (1.3.1).

Якщо відомо загальний розв'язок диференціального рівняння, то маючи початкові дані з області D, можна знайти для цих початкових даних розв'язок задачі Коші.

Означення. *Розв'язок диференціального рівняння (1.3.1), в кожній точці якого виконується умова єдиності, називається частинним.*

Таким чином при кожному конкретному значенні сталої С, включаючи $\pm\infty$, ми будемо одержувати частинний розв'язок.

Зауважимо, що загальним розв'язком (1.3.8) є сім'я кривих, залежних від параметра *С*. Цю сім'ю називають інтегральною сім'єю кривих.

Частинним розв'язком є окрема крива із сім'ї інтегральних кривих. Цю криву називають інтегральною кривою диференціального рівняння (1.3.1).

Отже, якщо задача Коші для диференціального рівняння (1.3.1) в області D має єдиний розв'язок, то через кожну точку області D проходить тільки одна крива цього диференціального рівняння.

<u>Приклад.</u> Довести, що через кожну точку області $D = \{(x, y) | x \in R,\ y \in R, |x| \le a, |y| \le b\}$ проходить тільки одна інтегральна крива диференціального рівняння: $y' = x^2 + y^2$

Перевіримо виконання умови теореми Коші

1) Функція $f(x, y) = x^2 + y^2$ в області неперервна (очевидно). Отже, перша умова теореми виконується.

2)Функція $f(x,y)$ має частинну похідну по y: $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = 2|y| \le 2b \quad \forall (x,y) \in D$. Друга умова теореми виконується. Тому через кожну точку області проходить єдина інтегральна крива диференціального рівняння.

1.4 **Геометрична інтерпретація. Поле напрямків. Ізокліни. Ламані Ейлера**.

Нехай задано рівняння першого порядку (1.3.1) $y' = f(x,y)$. Будемо вважати, що $f(x,y)$ - неперервна в деякій області $D \subset R_2$ і D – є областю визначення даного диференціального рівняння. Виберемо точку $(x_0, y_0) \in D$ і підставимо її в праву частину рівняння (1.3.1)

$$\frac{dy}{dx} = f(x_0, y_0) \tag{1.4.1}$$

Таким чином, точці (x_0, y_0) за допомогою диференціального рівняння (1.3.1) ставиться у відповідність певне значення, а саме значення (1.4.1) похідної.

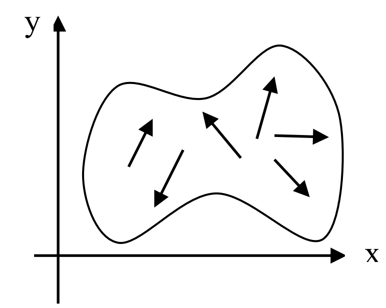
Якщо через точку (x_0, y_0) проходить певна інтегральна крива диференціального рівняння (1.3.1), то $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = f(x_0, y_0) = tg\alpha_0$, де α_0 – кут, утворений дотичною, що проведена до інтегральної кривої в точці (x_0, y_0), з додатним напрямом осі Ox, тобто

$$\alpha_0 = arctg\left(\frac{dy}{dx}\right) = arctg\, f(x_0, y_0) \tag{1.4.2}$$

Таким чином, за допомогою диференціального рівняння (1.3.1) кожній точці (x_0, y_0) ставиться у відповідність певний напрямок (кут), що визначається формулою (1.4.2). Тоді

$$\forall (x,y) \in D \quad \exists \alpha,\ \alpha = arctg\, f(x,y) \tag{1.4.2$'$}$$

Тому диференціальне рівняння можна інтерпретувати геометрично як таке, що задає в області D поле напрямків.



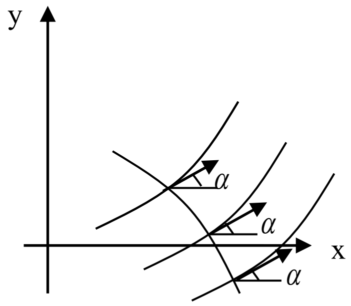
Поле можна задавати стрілками. Напрям кожної стрілки визначається за формулою (1.4.2$'$).

Таким чином, інтегральна крива, що проходить через точку $(x,y) \in D$ відрізняється від інших кривих, що проходять через задану точку тим, що напрямок дотичної до цієї кривої в точці (x, y) збігається з напрямком поля, заданим диференціальним рівнянням (адже $\alpha = arctg\, f(x,y)$ – рівняння напрямків поля, але з іншого боку $tg\alpha = \frac{dy}{dx} = k$ - кутовий коефіцієнт дотичної до інтегральної кривої).

Тому геометрично задачу інтегрування диференціального рівняння можна сформулювати так: *знайти такі криві, дотичні до яких в кожній точці збігаються з напрямком поля в цій точці*.

Для побудови поля напрямків використовують метод ізоклін.

Означення: ***Ізокліною*** *називається крива на площині xOy, у кожній точці якої поле має однаковий напрямок.*



Таким чином, в кожній точці перетину інтегральних кривих з певною ізокліною дотичні до цих кривих складають з віссю *Ox* один і той самий кут (один напрямок).

«ізоклін» – (лінія однакового напрямку)

Рівняння ізоклін може бути записане з диференціального рівняння. Так, для диференціального рівняння (1.3.1) рівняння ізоклін матиме вигляд

$$f(x,y) = a \qquad (1.4.3)$$

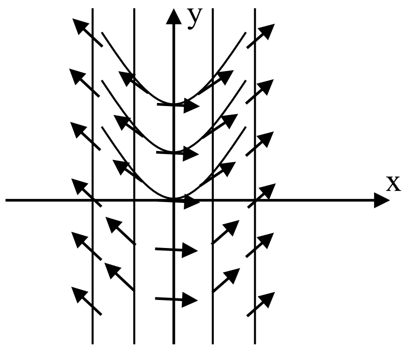
a – параметр. Кожному значенню a – відповідає своя ізокліна.

Напрямок поля (кожної ізокліни) визначається формулою:

$$\alpha = arctg a \qquad (1.4.4)$$

Приклад. Побудувати поле напрямків, що задане диференціальним рівнянням $y' = 2x$. За результатами побудови схематично зобразити сім‘ю інтегральних кривих - розв’язків заданого рівняння.

Розв’язування.



Складаємо рівняння сім‘ї ізоклін: $2x = a \;\Rightarrow\; x = \frac{a}{2}$

Використовуючи досить густу сім‘ю ізоклін, можна уявити сім‘ю інтегральних кривих.

$$x=0\Rightarrow y'=0 \quad \alpha=0$$
$$x=\frac{1}{2}\Rightarrow y'=1 \quad \alpha=\frac{\pi}{4}$$
$$x=1\Rightarrow y'=2 \quad \alpha=arctg2$$
$$x=-\frac{1}{2}\Rightarrow y'=-1 \quad \alpha=\frac{3\pi}{4}$$
$$x=-1\Rightarrow y'=-2 \quad \alpha=-arctg2$$

Матимемо сім‘ю парабол. З іншого боку: $\frac{dy}{dx}=2x\Rightarrow y=\int 2xdx=x^2+c$.

Якщо у рівнянні (1.3.1) права частина зберігає свій знак, то:

у випадку $f(x,y)>0\Rightarrow y'>0\Rightarrow$ будь-який розв’язок рівняння зростає у кожній своїй точці перетину з ізокліною.

у випадку $f(x,y)<0\Rightarrow y'<0\Rightarrow$ будь-який розв’язок рівняння спадає у кожній своїй точці перетину з ізокліною.

у випадку $f(x,y)=0\Rightarrow y'=0$ будь-який розв’язок рівняння або має екстремум, або точки перегину у кожній своїй точці перетину з ізокліною.

Відповідна ізокліна називається *лінією екстремумів*, якщо на ній $y'=0$, а ліворуч і праворуч від неї y' має різні знаки.

В прикладі лінією екстремумів є лінія x=0, (Oy) – лінія мінімумів.

Якщо друга похідна y'' розв’язку рівняння (1.3.1), тобто

$$y''=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dy}{dx}\Rightarrow$$
$$y''=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}y'\Rightarrow$$
$$y''=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}f(x,y)$$

зберігає свій додатний (від’ємний) знак, то будь-яка інтегральна крива вгнута (опукла). Ізокліни, в яких інтегральні криві мають перегин називають *лініями перегину*.

В прикладі $y''=2>0$. Отже всі інтегральні криві є вгнутими (див. малюнок).

Ми розглядали рівняння (1.3.1) $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ у припущені, що $f(x,y)$ скінчена у будь-які точці області визначення D диференціального рівняння. Тим самим ми виключили напрями дотичних (напрями поля), паралельні осі Oy. Геометрично це виключення не є виправданим. Тому в цьому випадку замість рівняння (1.3.1) будемо розглядати, як ми вже зазначили, рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)},$$

використовуючи його в околі тих точок, в яких $f(x,y) \to \infty$. (І далі, як вже зазначалося, до розв'язків $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ приєднати розв'язки рівняння $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$, а також розглядаються відповідні ізокліни).

У точках в яких $y' = \frac{\infty}{\infty}$, або $\frac{0}{0}$ кажуть, що поле має невизначений напрям і в цих точках не проходить жодна інтегральна крива. Але не виключається можливість існування кривих $y = \varphi(x)$ або $x = \psi(y)$, що мають таку властивість $y \to y_0$ при $x \to x_0$ або $x \to x_0$ при $y \to y_0$. Про такі криві (розв'язки рівняння) кажуть, що вони примикають до точки (x_0, y_0).

Розглянемо ще один метод (наближений) знаходження інтегральних кривих диференціального рівняння (1.3.1) – метод Ейлера.

Нехай необхідно знайти розв'язок диференціального рівняння (1.3.1) $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ з початковою умовою

$$y(x_0) = y_0 \qquad (1.4.5)$$

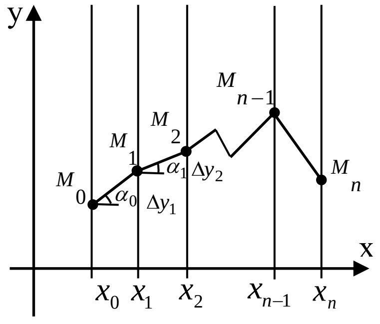
Нехай права частина рівняння (1.3.1) задовольняє умови теореми Коші про існування та єдиність розв'язку.

Тоді на відрізку $[x_0 - h, x_0 + h]$, h>0 існує єдиний розв'язок y=y(x), що задовольняє початкову умову (1.4.5).

Розіб'ємо відрізок $[x_0, x_0 + h]$ на n частин (необов'язково різних) точками

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = x_0 + h$$

Через точку поділу проведемо прямі, паралельні осі Oy



Із точки M_0 (x_0, y_0) проведемо відрізок прямої, нахиленої до осі Ox під кутом, що дорівнює напрямку поля в точці M_0 (x_0, y_0), до перетину з прямою $x = x_1$. У результаті дістанемо точку $M_1(x_1, y_1)$, де $y_1 = y_0 + \Delta y_1$

$\Delta y_1 = tg\alpha_0(x_1 - x_0) = f(x_0, y_0)(x - x_0)$

Отже, ординатою точки $M_1(x_1, y_1)$ є

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

Аналогічно, із точки $M_1(x_1, y_1)$ проведемо відрізок прямої, нахиленої до осі Ox під кутом, що дорівнює напрямку поля в цій точці до перетину з прямою $x = x_2$.

Матимемо точку $M_2(x_2, y_2)$

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$$

За методом індукції можна довести, що

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \qquad (1.4.6)$$

Внаслідок такої побудови одержимо ламану, яка носить назву ламаної Ейлера[4]. А метод її побудови називається методом Ейлера.

Кожна ламана Ейлера дає уявлення про розміщення на площині відповідної інтегральної кривої(що проходить через дану точку).

В теорії диференціальних рівнянь доведено, що при виконанні умов теореми Коші можна вибрати таку послідовність ламаних Ейлера, яка наближається до інтегральної кривої.

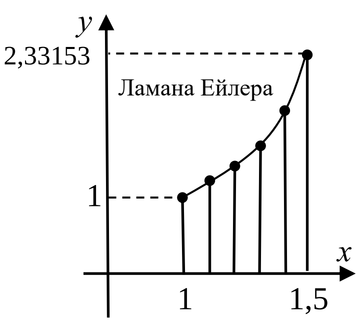
Процес побудови ламаних Ейлера здійснюється аналогічно і на відрізку $[x_0 - h; x_0]$. Взагалі, на практиці відрізок $[x_0; x_0 + h]$ розбивають на рівні частини. Тоді довжина кожного частинного відрізка $[x_k; x_{k+1}]$ дорівнює $\frac{h}{n}$. Звідси формула (1.4.6) матиме вигляд

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1}) \cdot \frac{h}{n} \qquad (1.4.7)$$

<u>Приклад.</u> Методом Ейлера побудувати наближено інтегральну криву диференціального рівняння $y' = x + y$, що проходить через точку (1;1) на відрізку [1; 1,5] Розіб'ємо відрізок [1; 1,5] на 5 рівних частин:

$\frac{1{,}5 - 1}{5} = 0{,}1 \quad x_0 = 1;\ x_1 = 1{,}1;\ x_2 = 1{,}2;\ x_3 = 1{,}3;\ x_4 = 1{,}4;\ x_5 = 1{,}5$

Скориставшись формулою (1.4.7): вважаючи, що $f(x, y) = x + y$ складаємо таблицю



k	x_k	y_k	$f(x_k, y_k)\frac{h}{n}$	y_{k+1}
0	1	1	0,2	0,2
1	1,1	1,2	0,23	1,43
2	1,2	1,43	0,263	1,693
3	1,3	1,693	0,2923	1,9923
4	1,4	1,9923	0,33923	2,33153
5	1,5	2,33153		

[4] Леонард Ейлер (1707-1783) – швейцарський математик і механік

Питання для самоконтролю

1. Яке рівняння називають звичайним диференціальним рівнянням? Чим звичайні диференціальні рівняння відрізняються від рівнянь з частинними похідними?

2. Як визначити порядок диференціального рівняння?

3. Що таке частинний та загальний розв'язок диференціального рівняння?

4. Яку функцію називають розв'язком диференціального рівняння?

5. Як називають операцію знаходження розв'язків диференціального рівняння?

6. Яку криву називають інтегральною кривою диференціального рівняння?

7. У чому полягає основна задача теорії інтегрування диференціальних рівнянь?

8. Який вигляд має рівняння сім'ї кривих, залежних від одного параметра (n параметрів)?

9. Який загальний вигляд має звичайне диференціальне рівняння першого порядку? Яку функцію називають розв'язком цього рівняння на інтервалі (a, b)?

10. Як формулюється задача Коші для диференціального рівняння першого порядку? Який її геометричний і механічний зміст?

11. Сформулюйте теорему Пеано про існування розв'язку задачі Коші.

Тема2: Методи розв’язування диференціального рівняння I порядку.

2.1 Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

2.2 Однорідні диференціальні рівняння. Диференціальні рівняння, які зводяться до однорідних.

2.3 Лінійні диференціальні рівняння I порядку (метод варіації довільної сталої – метод Лагранжа; метод Бернулі; метод інтегрального множника – метод Ейлера).

2.4 Диференціальні рівняння, що зводяться до лінійних:

- рівняння Бернуллі
- рівняння $f'(y)y' + f(y)a(x) = b(x)$
- рівняння $y' = \dfrac{A(y)}{B(y)x + C(y)}$
- рівняння Міндінга – Дарбу
- рівняння Рікатті

2.5 Рівняння у повних диференціалах. Інтегральний множник.

2.6 Найпростіші типи диференціальних рівнянь, нерозв’язних відносно похідної. Рівняння Лагранжа і Клеро.

2.1 Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Означення. *Диференціальне рівняння типу*

$$y' = f(x)g(y) \quad \left(\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)\right) \tag{2.1.1}$$

*де $f(x),\ g(y)$ - неперервні функції в області $D_0=\{(x,y)\in R_2 | x\in(a;b);\ y\in(c;d)\}$ називають **рівнянням з відокремлюваними змінними.***

Якщо $g(c_0) = 0$, то, очевидно, стала функція $y = c_0$ є розв’язком рівняння (2.1.1).

Нехай $g(y) \neq 0\ y \in (c;d)$. Відокремлюючи змінні в рівнянні (2.1.1), (враховуємо, що рівняння $\dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ і $dy = f(x)g(y)dx$ є еквівалентними), маємо $\dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx \Rightarrow$ – диференціальне рівняння, в якому коефіцієнт при dx є функцією від x, а коефіцієнт при dy – функцією від y, називають рівнянням з відокремленими змінними.

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} - f(x)dx = 0 \Rightarrow \Phi(x,y) = \int \frac{dy}{g(y)} - \int f(x)dx = c \qquad (2.1.2)$$

або $\Phi(x,y) = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{dy}{g(y)} - \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx = 0$ у припущені, що $g(y_0) \neq 0$.

Покажемо, що (2.1.2) є загальним інтегралом рівняння (2.1.1) в області $D_0 = \{(x,y) \in R_2 \mid x \in (a;b),\ y \in (c;d)\}$.

Знайдемо повну похідну від (2.1.2) (повинні одержати $\frac{d\Phi}{dx} \equiv 0$):

$$\frac{d\Phi}{dx} = \left[\int \frac{dy}{g(y)}\right]_x' - \left[\int f(x)dx\right]_x' = \frac{1}{g(y)} \cdot \frac{dy}{dx} - f(x) = \frac{1}{g(y)} \cdot f(x) \cdot g(y) - f(x) \equiv 0$$

(що і потрібно було показати).

Рівність $\int\limits_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{dy}{g(y)} - \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx = 0$ визначає розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (2.1.1) з початковою умовою $y_0 = \varphi(x_0)$ ($y_0 \in (c;d)$).

Покажемо, що (2.1.2) визначає єдиний розв'язок диференціального рівняння (2.1.1) з початковою умовою $y_0 = \varphi(x_0)$. Дійсно функція $\Phi(x;y)$ задовольняє умови теореми про існування неявної функції:

1. частинні похідні: $\Phi_x' = -f(x),\ \Phi_y' = \frac{1}{g(y)}$ (випливає з (2.1.2)), як функції двох незалежних змінних *x* і *y,* неперервні в області D_0;

2. $\Phi_y' = \frac{1}{g(y)} \neq 0$ (за припущенням – дивись початок цього пункту);

3. якщо (x_0, y_0), то константу С (в рівнянні (2.1.2)) можна вибрати так, що $\Phi(x_0, y_0) = 0$.

Тоді за теоремою про існування та диференційованість неявної функції рівняння (2.1.2) визначає у деякому околі точки x_0 єдину функцію $y = \varphi(x)$ таку, що $y_0 = \varphi(x_0)$, причому

$$y' = -\frac{\Phi_x(x,y)}{\Phi_y(x,y)} = -\frac{-f(x)}{\frac{1}{g(y)}} = f(x) \cdot g(y)$$

Отже, знайдена функція $y = \varphi(x)$ є розв'язком рівняння (2.1.1) і при зроблених припущеннях (2.1.1) відносно функцій $f(x)$ і $g(y)$ диференціальне рівняння (2.1.1) має єдиний розв'язок, що задовольняє наперед задану початкову умову $y_0 = \varphi(x_0)$. Тобто через кожну $(x_0, y_0) \in D_0$ проходить єдина інтегральна крива диференціального рівняння (2.1.1). А відповідна задача Коші має єдиний розв'язок.

<u>Приклад</u>. $y' = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow$

$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{x} = c_1 \Rightarrow \ln|y| + \ln|x| = c_1 \Rightarrow \ln|y| + \ln|x| = \ln|c| \Rightarrow y = \frac{c}{x}$ – загальний інтеграл.

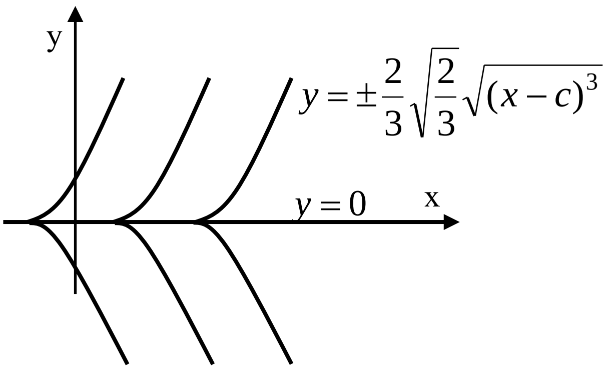
Випадок, коли $g(y) = 0$ при $y = C_0$ ми вже розглядали.

Очевидно, що $y = C_0$ - розв'язок диференціального рівняння (2.1.1). Якщо цей розв'язок одержується з загального інтегралу (2.1.2) при певному значенні С, то цей розв'язок буде частинним. Якщо розв'язок $y = C_0$ не одержується з загального інтегралу при жодному значенні С, то розв'язок $y = C_0$ вважатимемо **особливим розв'язком**.

Приклад. $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{y}$. Нехай $y \neq 0$, тоді $\frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = dx \Rightarrow x = \int \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} + C \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{y^2} = \frac{2}{3}(x - c) \Rightarrow y^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 (x - c)^3 \Rightarrow y = \pm \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(x-c)^3},\ x > c \quad (*)$$

Очевидно, що і $y = 0$ - є розв'язком вихідного диференціального рівняння, але $y = 0$ не одержується з (*) при жодному значенні С. Отже, розв'язок $y = 0$ - є особливим.



До рівнянь з відокремлюваними змінними відноситься рівняння виду

$$P(x)Q(y)dx + P_1(x)Q_1(y)dy = 0 \qquad (2.1.3)$$

Воно має більш загальний вигляд ніж (2.1.1).

Нехай $P(x), Q(y), P_1(x), Q_1(y)$ - неперервні при всіх розглядуваних значеннях x і y. Помножимо обидві частини рівняння (2.1.3) на $\frac{1}{Q(y)P_1(x)}$ (у припущенні, що $P_1(x) \neq 0, Q(y) \neq 0$)

$$\frac{P(x)}{P_1(x)}dx + \frac{Q_1(y)}{Q(y)}dy = 0 \qquad (2.1.4)$$

Загальним інтегралом рівняння (2.1.4), а отже і (2.1.3) буде

$$\int \frac{P(x)}{P_1(x)}dx + \int \frac{Q_1(y)}{Q(y)}dy = C \qquad (2.1.5)$$

або

$$\int_{x_0}^{x} \frac{P(x)}{P_1(x)}dx + \int_{y_0}^{y} \frac{Q_1(y)}{Q(y)}dy = C \qquad (2.1.6)$$

де $P_1(x) \neq 0, Q(y) \neq 0$.

Покладаючи в (2.1.6) $C = 0$ і те що $P_1(x) \neq 0, Q(y) \neq 0$ - одночасно, одержуємо розв'язок відповідної задачі з початковими даними (x_0, y_0)

$$\int_{x_0}^{x} \frac{P(x)}{P_1(x)}dx + \int_{y_0}^{y} \frac{Q_1(y)}{Q(y)}dy = 0 \qquad (2.1.7)$$

Зауваження.

Розв'язки (2.1.5) - (2.1.7) одержані у припущенні, що $P_1(x) \neq 0, Q(y) \neq 0$. При цьому корені рівнянь $P_1(x) = 0, Q(y) = 0$ – є розв'язками диференціального рівняння (2.1.3).

Дійсно, нехай $P_1(b) \equiv 0$ ($x = b$ – корінь рівняння $P_1(x) = 0$). Тоді $x = b$ – корінь відповідного диференціального рівняння.

$$P(b) \cdot Q(y) \cdot db + P_1(b) \cdot Q_1(y) \cdot dy = 0 \quad db = 0, \; P_1(b) = 0 \Rightarrow$$

$$0 = 0 - \text{тотожність.}$$

Аналогічно, якщо $Q(C_0) = 0$ ($y = C_0$ - корінь рівняння $Q(y) = 0$), то $y = C_0$ – корінь відповідного диференціального рівняння.

Якщо ці розв'язки не одержуються з (2.1.5) або (2.1.6), при певних числових значеннях C, то вони являють **особливі розв'язки** рівняння (2.1.3).

Якщо вони одержуються з (2.1.5) або (2.1.6), при деяких значеннях C, то вони є частинними розв'язками.

З розв'язку $y = C_0$ треба виключити точку з абсцисою $x = b$, оскільки в т. (b, C_0) рівняння (2.1.3) не визначає напрям:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x)Q(y)}{P_1(x)Q_1(y)} \sim \frac{0}{0}$$

Аналогічно, з розв’язку $x=b$ потрібно виключити точку з ординатою $y=C_0$.

Таким чином, розв’язки виду $y=C_0$ $(x\neq b)$; $x=b\ (y\neq C_0)$ примикають в точці (b,C_0) і можуть виявитись особливими. Інших особливих розв’язків не існує.

Приклад. $\begin{cases} x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$

$$\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=0 \qquad (x\neq\pm1,\ y\neq\pm1)$$

Загальний інтеграл: $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=C$

$\left.\begin{array}{l} y=1\ (-1<x<1) \\ y=-1\ (-1<x<1) \\ x=1\ (-1<y<1) \\ x=-1\ (-1<y<1) \end{array}\right\}$ – розв'язки, які примикають відповідно в точках (-1;1), (-1;-1), (1;-1), (1;1),.

$y=1,\ y=-1,\ x=1,\ x=-1$ – **особливі розв'язки**!!! – оскільки не одержуються з загального інтегралу при жодному значенні C

Розв’яжемо відповідну задачу Коші:
Покладемо у загальному інтегралі $x=0,\ y=1$

$\sqrt{1-0^2}+\sqrt{1-1^2}=C\ \Rightarrow C=1$

$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=1$ - розв’язок задачі Коші.

Але через точку (0;1) проходить і особливий розв’язок $y=1$. Остаточно одержали дві інтегральні криві, що проходять через точку (0;1):

$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=1$, і $y=1$ $(-1<x<1)$.

Зауваження. Рівняння $\frac{dy}{dx}=f(x),\ \frac{dy}{dx}=f(y),$

$$X(x)dx+Y(y)dy=0$$

можна вважати частинними випадками рівняння (2.1.3)

До рівняння з відокремленими змінними можна віднести рівняння

$$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c), \tag{2.1.8}$$

$a,b,\ c$ – деякі сталі величини.

Покладемо $z(x)=ax+by+c\ \Rightarrow$

$$y=\frac{1}{b}(z(x)-ax-c),\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}(\frac{dz}{dx}-a)$$

Дістаємо рівняння

$$\frac{1}{b}(\frac{dz}{dx}-a)=f\left[z(x)\right] \Rightarrow \frac{dz}{dx}=bf(z)+a \quad \text{або} \quad \frac{dz}{dx}=a+bf(z)$$

Якщо $a+bf(z)\neq 0$, то одержуємо $\dfrac{dz}{a+bf(z)}=dx.$

Загальний інтеграл останнього рівняння має вигляд

$$\int\frac{dz}{a+bf(z)}=x+C$$

Якщо $\Phi(z)$ - первісна для $\dfrac{1}{a+bf(z)}$, то маємо

$$\Phi(z)=x+C \text{ або}$$

$\Phi(ax+by+c)=x+C$ – загальний інтеграл для вихідного диференціального рівняння.

Якщо $a+bf(z)=0 \Rightarrow f(z)=-\frac{a}{b} \Rightarrow \frac{df(z)}{dx}=0 \Rightarrow f(z)=const \Rightarrow f(ax+by+c)=const$

Таким чином, матимемо ще розв'язки (особливі !!!) вигляду $f(ax+by+c)=const$

2.2 Однорідні диференціальні рівняння. Диференціальні рівняння, які зводяться до однорідних

Означення. *Функцію* $f(x,y)$ *називають* ***однорідною функцією*** *степеня* m, *якщо* $\forall x,y,t\neq 0$ *справджується тотожність*

$$f(tx,ty)=t^m f(x,y)$$

(2.2.1)

Наприклад.

1) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ - однорідна функція 1^го^ степеня. Дійсно,

$$f(tx,ty)=\sqrt[3]{(tx)^3+(ty)^3}=\sqrt[3]{t^3(x^3+y^3)}=tf(x,y)$$

2) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y};\ f(tx,ty)=\dfrac{tx+ty}{tx-ty}=\dfrac{t(x+y)}{t(x-y)}=\dfrac{x+y}{x-y}=f(x,y)$

$f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3-2xy^2}{x^2y-xy^2+2x^3-y^3}=......$ - аналогічно . . $\Big\}$.однорідні функції нульового степеня ($m=0$).

а) Однорідні диференціальні рівняння

Означення. Диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad (2.2.2)$$

називають однорідним, якщо $f(x,y)$ - є однорідною функцією нульового степеня.

Покажемо, що однорідне рівняння зводиться до рівнянь з відокремлюваними змінними.

За означенням $f(tx,ty)=f(x,y)$.

Покладемо $t=\frac{1}{x},\ x\neq 0 \ \Rightarrow \ f(x,y)=f(1,\frac{y}{x})$ (тобто $f(x,y)=\varphi(\frac{y}{x})$)

Тоді диференціальне рівняння можна записати так: $\frac{dy}{dx}=f(1,\frac{y}{x})$.

Позначимо $\frac{y}{x}=u \Rightarrow y=xu \quad (y=y(x),\ u=u(x))$.

Отже,

$$\frac{dy}{dx}=f(1,u) \text{ або } \frac{dy}{dx}=\varphi(u) \qquad (2.2.3)$$

$$y'=u'x+u \ \Rightarrow \ \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}x+u$$

Підставляємо одержаний вираз для похідної у вихідне диференціальне рівняння (2.2.3):

$$\frac{du}{dx}x+u=f(1,u) \qquad (2.2.4)$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Після відокремлення змінних одержимо:

$$\frac{du}{f(1,u)-u}=\frac{dx}{x} \qquad (f(1,u)-u\neq 0) \qquad (2.2.4а)$$

Звідси:

$$\int\frac{du}{f(1,u)-u}=\ln|x|+C \qquad (2.2.5)$$

Після інтегрування треба замість u підставити в одержаний вираз $\frac{y}{x}$. Тоді одержимо або загальний інтеграл або загальний розв’язок вихідного диференціального рівняння.

Зауваження. Розв’язок диференціального рівняння ми шукали у припущенні (2.2.4а): $f(1,u)-u\neq 0$.

Нехай умова (2.2.4а) не виконується, тобто

$f(1,u)-u\equiv 0$ або $f(1,u)\equiv u=\dfrac{y}{x}$.

Тоді диференціальне рівняння матиме вигляд $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$

$\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{x}\ \Rightarrow\ \ln|y|=\ln|x|+\ln|C|\ \Rightarrow\ y=Cx\ (x\neq 0)$ – сім'я півпрямих, що проходить через початок координат.

Ці розв'язки можуть випливати з формули для загального інтеграла, а можуть бути і особливими.

<u>Приклад</u>. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$

$f(tx,ty)=\dfrac{t^2xy}{t^2(x^2-y^2)}=\dfrac{xy}{x^2-y^2}=f(x,y)$ – однорідна функція нульового степеня.

$f(x,y)=f(1,\dfrac{y}{x})\ \Rightarrow$ фактично робимо заміну $y=ux\ (u=\dfrac{y}{x})$

Матимемо $\left.\begin{array}{l}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ux^2}{x^2-u^2x^2}\ \Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{u}{1-u^2}\\ \dfrac{dy}{dx}=u'x+u\end{array}\right\}\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ u'x+u=\dfrac{u}{1-u^2}\ \Rightarrow\ \dfrac{du}{dx}x=\dfrac{u-u+u^3}{1-u^2}\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\dfrac{1-u^2}{u^3}du=\dfrac{dx}{x}\ \Rightarrow\ \left(\dfrac{1}{u^3}-\dfrac{1}{u}\right)du=\dfrac{dx}{x}$

Після інтегрування знаходимо

$-\dfrac{1}{2u^2}-\ln|u|=\ln|x|+\ln|C|$ або

$-\dfrac{1}{2u^2}=\ln|uxC|$.

Підставляємо $u=\dfrac{y}{x}\ \Rightarrow\ -\dfrac{1}{2\dfrac{y^2}{x^2}}=\ln|Cy|\ \Rightarrow\ -\dfrac{x^2}{2y^2}=\ln|Cy|$

Виразити y як явну функцію від x через елементарні функції у даному випадку неможливо. Тут можна x виразити через y:

$x=y\sqrt{-2\ln|Cy|}$

До цього розв'язку потрібно приєднати півпрямі $y=0, x\neq 0$. Ці розв'язки особливі. Інших особливих бути не може.

Приклад.

$$y'=\left(\frac{y}{x}\right)^2 \qquad y=ux \;\Rightarrow\; y'=u'x+u \;\Rightarrow\; u'x+u=u^2 \;\Rightarrow\; u'x=u^2-u \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{du}{dx}x=u^2-u \;\Rightarrow\; \frac{du}{u^2-u}=\frac{dx}{x}\;(u^2-u\neq 0) \;\Rightarrow\; \int\frac{du}{u(u-1)}=\ln|x|+\ln|C| \;\Rightarrow$$

$$\int\frac{du}{u-1}-\int\frac{du}{u}=\ln|x|+\ln|C| \;\Rightarrow\; \ln|u-1|-\ln|u|=\ln|Cx| \;\Rightarrow\; \ln\left|\frac{u}{u-1}\right|=\ln|Cx| \;\Rightarrow$$

$$\frac{u}{u-1}=Cx \;\Rightarrow u=\frac{1}{1-Cx}$$

Таким чином, оскільки $y=ux$, то загальний розв’язок має вигляд

$$y=\frac{x}{1-Cx} \text{ (у припущені, що } u^2-u\neq 0\text{).}$$

Нехай тепер $u^2-u=0$, тобто $u=0$ або $u=1$.

Тоді, виходячи з того, що $y=ux,\ y=0$ або $y=x$.

Розв’язок $y=x$, якщо покласти у загальному розв'язку $C=0$. Функцію $y=0$ не можна одержати з загального розв'язку, тому це є особливий розв’язок.

б) Розглянемо рівняння, що зводиться до однорідного:

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right), \tag{2.2.6}$$

де $a_i,b_i,c_i\in R$, $(i=\overline{1,2})$, f - неперервна функція.

1)Якщо $c_1=c_2=0$, то дане рівняння є однорідним.

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right) \text{ - це, очевидно, однорідне рівняння.}$$

2.а) Нехай хоча б одне з чисел c_1 або c_2 не дорівнює нулю, а також $\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$

Здійснимо лінійну заміну обох змінних, ввівши нові змінні $x_1,\ y_1$:

$$\begin{aligned} x&=x_1+\alpha\\ y&=y_1+\beta \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Підставляємо в диференціальне рівняння (2.2.6). Очевидно, що $\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx_1}$, тоді матимемо:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2x_2 + b_2y_2 + a_2\alpha + b_2\beta + c_2}\right) \qquad (2.2.8)$$

Сталі α і β завжди можна вибрати в цьому випадку так, що $\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$ - ця система має єдиний розв'язок (визначник системи не дорівнює нулю).

Таким чином, матимемо

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{a_1x_1 + b_1y_1}{a_2x_1 + b_2y_1}\right), \qquad (2.2.9)$$

де функція f є однорідною нульового степеня.

2.б) Якщо ж виконується умова

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ тобто } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda, \text{ то} \qquad (2.2.10)$$

$a_1 = \lambda a_2;\ b_1 = \lambda b_2 \Rightarrow$ диференціальне рівняння (2.2.6) набуде вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{\lambda a_2x + \lambda b_2y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \qquad (2.2.11)$$

Застосовуємо підстановку

$$a_2x + b_2y = z(x) \Rightarrow y = \frac{1}{b_2}\left[z(x) - a_2x\right] \Rightarrow \ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_2}\left(\frac{dz}{dx} - a_2\right)$$

Тоді одержимо з (2.2.11):

$$\frac{1}{b_2}\left(\frac{dz}{dx} - a_2\right) = f\left(\frac{\lambda z(x) + c_1}{z(x) + c_2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = b_2\ f\left(\frac{\lambda z(x) + c_1}{z(x) + c_2}\right) + a_2 .$$

Останнє диференціальне рівняння допускає відокремлення змінних. Треба знайти його загальний інтеграл і підставити $z(x) = a_2x + b_2y$. Таким чином, одержимо загальний інтеграл диференціального рівняння (2.2.6) у випадку

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 .$$

в) Розглянемо рівняння

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (2.2.12)$$

Рівняння (2.2.12) буде однорідним, якщо функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ - є однорідними одного і того ж степеня m.

Якщо коефіцієнти рівняння (2.2.12) задовольняють умови $P(tx,t^k y)=t^m P(x,y),\ Q(tx,t^k y)=t^{m-k+1}Q(x,y)$, то його називають **узагальнено-однорідним**.

Покажемо, що узагальнено-однорідне рівняння інтегрується у квадратурах. Покладемо $t=\frac{1}{x},\ x\neq 0$

$$P\left(1,\frac{y}{x^k}\right)=\frac{1}{x^m}P(x,y);\ \ Q\left(1,\frac{y}{x^k}\right)=\frac{1}{x^{m-k+1}}Q(x,y)\Rightarrow$$

$$P(x,y)=x^m P(1,\frac{y}{x^k});\ \ Q(x,y)=x^{m-k+1}Q(1,\frac{y}{x^k})$$

Таким чином рівняння (2.2.12) матиме вигляд

$$x^m P(1,\frac{y}{x^k})dx+x^{m-k+1}Q(1,\frac{y}{x^k})dy=0 \qquad (2.2.12а)$$

Покладемо $y=z^k\Rightarrow dy=kz^{k-1}dz$ та поділимо обидві частини (2.2.12а) на x^m: $\qquad P(1,\frac{z^k}{x^k})dx+k\frac{x^{1-k}}{z^{1-k}}Q(1,\frac{z^k}{x^k})dz=0$

Одержане рівняння є однорідним, оскільки воно не зміниться, якщо x і z відповідно змінити на tx,tz.

Таким чином, узагальнено-однорідне рівняння підстановкою $y=z^k$ зводиться до однорідного.

Зауваження. Поділимо обидві частини (2.2.12а) на x^m:

$$P(1,\frac{y}{x^k})dx+\frac{1}{x^{k-1}}Q(1,\frac{y}{x^k})dy=0$$

Оскільки $t=\frac{1}{x},\ x\neq 0$, то, порівнявши з (2.2.12), можна показати, що якщо існує таке число k, що при підстановці в рівняння (2.2.12) замість x,y,dy відповідно $tx,t^k y,t^{k-1}dy$ ($P(tx,t^k y)dx+t^{k-1}Q(tx,t^k y)dy=0$) дістанемо теж саме рівняння, то диференціальне рівняння (2.2.12) називається **узагальнено-однорідним**.

Приклад. $4xydx+(y-x^2)dy=0$

Замість x,y,dy підставляємо $tx,t^k y,t^{k-1}dy$

$$4t^{1+k}xydx+(t^k y-t^2x^2)\cdot t^{k-1}dy=0$$

$$4t^{k+1}xydx+(t^{2k-1}y-t^{k+1}x^2)dy=0$$

Щоб рівняння не змінилось, необхідно

$$k+1=2k-1=k+1,\quad k=2$$

Отже, маємо узагальнено-однорідне рівняння і $k = 2$. За допомогою підстановки $y=z^2$ диференціальне рівняння можна звести до однорідного.

2.3 Лінійні диференціальні рівняння I порядку (метод варіації довільної сталої – метод Лагранжа; метод Бернуллі; метод інтегрального множника – метод Ейлера)

Означення. *Рівняння виду*

$$A(x)\frac{dy}{dx} + B(x)y = C(x), \tag{2.3.1}$$

де $A(x), B(x), C(x)$ *– неперервні функції на деякому проміжку* $< a,b >$*, причому* $\forall x \in < a,b >$ $A(x) \neq 0$*, називається* ***лінійним диференціальним рівнянням першого порядку*****.**

Якщо поділити обидві частини рівняння (2.3.1) на $A(x)$ то одержимо такий вигляд лінійного диференціального рівняння I порядку:

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{2.3.2}$$

Перепишемо рівняння (2.3.2) у вигляді:

$$y' = -p(x)y + q(x) \equiv f(x, y) \tag{2.3.3}$$

Легко довести, що, якщо $p(x)$, $q(x)$ в області $D = \{(x, y) \in R_2 | a < x < b, -\infty < y < +\infty\}$ є неперервними функціями, то рівняння (2.3.3) має єдиний розв'язок $y = y(x)$, що задовольняє початкові умови $y = y_0$ при $x = x_0$, де x_0 – будь-яке число в інтервалі (a,b), а y – довільне (виконуються умови теореми Коші).

Таким чином, через

$$\forall M_0(x_0, y_0) \in D = \{(x, y) \in R_2 | a < x < b, -\infty < y < +\infty\} \tag{2.3.4}$$

проходить одна і тільки одна інтегральна крива рівняння (2.3.3).

Зокрема, якщо $p(x)$, $q(x)$ неперервні в інтервалі $(-\infty;+\infty)$, то через кожну точку площини xOy проходить одна і тільки одна інтегральна крива даного рівняння. За цих умов диференціальне рівняння (2.3.3.), а отже, і (2.3.2.), і (2.3.1.) <u>особливих розв'язків немає</u>!

Розглянемо випадок, коли в рівнянні (2.3.2.) $q(x) \equiv 0$ на розглядуваному проміжку $< a,b >$.

Тоді матимемо

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \qquad (2.3.5)$$

Рівняння (2.3.5.) називається **лінійним однорідним диференціальним рівнянням.**

Очевидно, що $y = 0$ є розв'язком даного рівняння. Але оскільки дане рівняння не має особливих розв'язків, то $y = 0$ є одним з частинних розв'язків .

Це означає, що якщо який-небудь розв'язок лінійного однорідного рівняння перетворюється в нуль хоча б в одній точці інтервалу (a,b), то він тотожно дорівнює нулю на всьому інтервалі. Якщо ж він відмінний від нуля хоча б в одній точці інтервалу (a,b), то він не перетворюється в нуль в жодній точці цього інтервалу.

Лінійне однорідне диференціальне рівняння (2.3.5.) допускає відокремлення змінних.

Якщо $y \neq 0$, то з (2.3.5.) можна одержати:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)dx + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \pm e^{-\int p(x)dx + C_1} \Rightarrow y = \pm e^{C_1} e^{-\int p(x)dx} \Rightarrow$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \qquad (2.3.6)$$

де C – довільне стале $(C = \pm e^{C_1})$

Можна показати, що (2.3.6.) є загальним розв'язком диференціального рівняння (2.3.5.).

Дійсно,

1) співвідношення (2.3.6.) допускає розв'язання відносно C (див. означення загального розв'язку) :

$$C = ye^{\int P(x)dx} \qquad (2.3.7)$$

де вираз $ye^{\int p(x)dx}$ визначено в області D.

2) $\forall x \in (a;b)$ формула (2.3.7.) дає таке значення C, при якому функція (2.3.6.) є розв'язком рівняння (2.3.5.).

Якщо первісною для $\int p(x)dx$ вибрати інтеграл із змінною верхньою межею – функцію $\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx$, то формула (2.3.6.) набере вигляду

$$y = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx}$$

Тоді $y(x_0) = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x_0} P(x)dx} = Ce^0 = C \Rightarrow y(x_0) = C = y_0$.

Тому розв'язок рівняння (2.3.5), який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$ можна записати так:

$$y = y_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(x)dx} \qquad (2.3.8)$$

Звідси також випливає, що, якщо $y_0 = 0$, то $y \equiv 0 \;\; \forall x \in (a;b)$;
Якщо $y_0 \neq 0$, то розв'язок $y = y(x)$ не перетворюється в нуль у жодній точці інтервалу $(a;b)$.

Замітимо, що якщо $a = -\infty,\ b = +\infty$ то область буде мати вигляд $-\infty < x < +\infty,\ -\infty < y < +\infty$ і формула (2.3.8) дає розв'язок задачі Коші з будь – якими наперед заданими початковими даними x_0, y_0 причому кожен розв'язок буде визначено при всіх значеннях *x*.

<u>Приклад.</u> Розглянемо рівняння $y' + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} y = 0$

$p(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ - функція, що визначена і неперервна в інтервалі $(-1;1)$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \ln|y| = \sqrt{1-x^2} + C_1 \Rightarrow y = Ce^{\sqrt{1-x^2}}$ - загальний розв'язок рівняння в області $-1 < x < 1,\ -\infty < y < +\infty$

<u>Приклад.</u> $y' + 2xy = 0$

$p(x) = 2x$ - не має точок розриву. Будь-який розв'язок визначено при всіх x

$$y = Ce^{-\int 2xdx} \Rightarrow y = Ce^{-x^2}$$

<u>Приклад.</u> Знайти розв'язок рівняння $y' - y\cos x = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 1$.

Користуючись формулою (2.3.8) одержуємо

$$y = Ce^{\int\limits_{x_0}^{x} \cos x dx} \qquad C = y_0 = 1$$

$$y = e^{\int\limits_{0}^{x} \cos x dx} \qquad \text{або} \qquad y = e^{\sin x}$$

Властивості розв’язків однорідного лінійного рівняння

1. Якщо y_1 – частинний розв’язок рівняння (2.3.5) тобто має місце тотожність $y_1'+p(x)y_1 \equiv 0 \quad (a<x<b)$,

то функція $y = Cy_1$,

де C - довільна стала, теж є розв’язком цього рівняння.

Дійсно, $[Cy_1]' + p(x)Cy_1 = C\left[y_1' + p(x)y_1\right] \equiv 0 \quad (a<x<b)$

Отже, $y = Cy_1$ - є розв’язком рівняння (2.3.5).

2. Якщо y_1 - ненульовий частинний розв’язок (2.3.5), то формула $y = Cy_1$, де C- довільна стала, дає загальний розв’язок рівняння (2.3.5)

Дійсно,

1. Це рівняння є розв’язним відносно C: $C = \dfrac{y}{y_1}$;
2. Функція $y = Cy_1$ є розв’язком рівняння при всіх значеннях C.

Таким чином, для побудови загального розв'язку однорідного лінійного рівняння досить знайти який - небудь один ненуьовий розв’язок.

З властивостей випливає, що будь – яких два ненульових частинних розв'язка y_1, y_2 рівняння (2.3.5) зв’язані співвідношенням:

$$y_2 \equiv \alpha\, y_1 \quad (a<x<b),$$

де α - деяка стала, відмінна від нуля.

Структура загального розв'язку неоднорідного лінійного рівняння

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{2.3.2}$$

Припустимо, відомий деякий розв’язок y_1 цього рівняння, тоді

$$y_1' + p(x)y_1 \equiv q(x) \quad (a<x<b) \tag{2.3.9}$$

Введемо нову функцію z за формулою

$$y = y_1 + z \tag{2.3.10}$$

Підставляючи (2.3.10) в (2.3.2), матимемо

$$y_1' + z' + p(x)y_1 + p(x)z \equiv q(x)$$

Тоді згідно з тотожністю (2.3.9)

$$z' + p(x)z = 0 \tag{2.3.11}$$

Отже, для визначення z одержимо лінійне однорідне диференціальне рівняння I порядку. Загальний розв’язок цього рівняння має вигляд:

$$z = Ce^{-\int p(x)dx}, \tag{2.3.12}$$

де C - довільна стала.

Підставляючи (2.3.12) у (2.3.10) одержимо

$$y = y_1 + Ce^{-\int p(x)dx} \tag{2.3.13}$$

Одержана формула дає загальний розв‘язок рівняння (2.3.2) у смузі $D = \{(x, y) \in R_2 | a < x < b, -\infty < y < +\infty\}$.

Таким чином, приходимо до теореми:

Теорема. *Якщо y_1 – частинний розв’язок неоднорідного лінійного рівняння $y' + p(x)y = q(x)$, то загальний розв’язок цього рівняння дається формулою $y = y_1 + z$, де $z = Ce^{-\int p(x)dx}$ – загальний розв’язок відповідного однорідного лінійного рівняння $z' + p(x)z = 0$.*

Таким чином, якщо знаємо хоча б один частинний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння, то загальний розв’язок можна одержати за допомогою однієї квадратури.

Якщо відомий не один, а два частинних розв'язки y_1 і y_2 неоднорідного лінійного диференціального рівняння, то загальний розв’язок можна одержати без квадратур, а саме

$$y = y_1 + C(y_2 - y_1) \tag{2.3.14}$$

Дійсно, з формули (2.3.10) маємо $z = y - y_1$.

Заміняємо y на y_2 і одержуємо – частинний розв’язок відповідного однорідного рівняння

Тоді загальний розв’язок однорідного лінійного диференціального рівняння: $z = C(y_2 - y_1)$, а загальний розв’язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння згідно з останньою теоремою буде мати вигляд (2.3.14).

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа[5])

Будемо шукати розв’язок рівняння (2.3.2) у вигляді загального розв'язку відповідного однорідного лінійного рівняння, але C будемо

[5] Жозеф Луї Лагранж (1736-1813) – французький математик

вважати не сталою, а деякою неперервно-диференційовною функцією від x, тобто y будемо шукати у вигляді

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{2.3.15}$$

Підставляємо (2.3.15) у (2.3.2):

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$C'(x) - C(x)p(x) + p(x)C(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

Отже, $C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$.

Звідки $C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$ (2.3.16)

Підставляючи це значення в (2.2.15), одержимо

$$y = e^{-\int p(x)dx}[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C] \tag{2.3.17}$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx \tag{2.3.18}$$

$Ce^{-\int p(x)dx}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного лінійного диференціального рівняння;

$e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$ – частинний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння.

Таким чином, загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння є лінійною функцією від довільної сталої C

$$y = a(x)\cdot C + b(x)$$

Загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння у формі Коші випливає з (2.3.17) :

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}\left[\int_{x_0}^{x} q(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(x)dx}dx + y_0\right]$$

Тут $C = y(x_0) = y_0$.

<u>Зауваження.</u> За умови неперервності функцій $p(x)$ та $q(x)$ розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння буде також неперервною (і навіть неперервно-диференційовною функцією).

Метод інтегруючого множника (метод Ейлера)

Дано: $y' + p(x)y = q(x)$ (2.3.2). Помножимо обидві цього рівняння на функцію

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Одержимо,

$$y'e^{\int p(x)dx} + p(x)ye^{\int p(x)dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$y'e^{\int p(x)dx} + p(x)ye^{\int p(x)dx} = \left[ye^{\int p(x)dx}\right]'$$

Отже, матимемо $\left[ye^{\int p(x)dx}\right]' = q(x)e^{\int p(x)dx}$

Звідки

$$ye^{\int p(x)dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx} + C$$

$$y = e^{-\int p(x)dx}[\int q(x)e^{\int p(x)dx} + C]$$

Зауваження. Якщо в лінійному рівнянні (2.3.2) $q(x) = kp(x)$ $(k = const)$, то $y' + p(x)y = kp(x)$ - рівняння з відокремленими змінними і тоді

$$y' = -p(x)[y-k]$$

$$\frac{dy}{y-k} = -p(x)dx \Rightarrow \ln|y-k| = -\int p(x)dx + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y-k| = e^{-\int p(x)dx + C_1} \quad \Rightarrow \quad y = k + Ce^{-\int p(x)dx}$$

$(тут\ C = \pm e^{C_1})$

Приклад. $y' - \frac{2}{x}y = x$

Методом варіації довільної сталої

$z' - \frac{2}{x}z = 0$ - відповідне однорідне рівняння

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x} \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \ln|z| = 2\ln|x| + \ln C_1,$$

$\ln|z| = \ln C_1 x^2 \Rightarrow z = Cx^2$ – загальний розв’язок однорідного рівняння

Загальний розв'язок неоднорідного шукаємо у вигляді

$$y = C(x)x^2;\;\; C'(x)x^2 + C(x)2x - \frac{2}{x}\cdot C(x)x^2 = x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(x)x^2 + C(x)2x - 2\cdot C(x)x = x \;\Rightarrow C'(x)x^2 = x \;\Rightarrow$$

$$C'(x) = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; C(x) = \ln|x| + C$$

$y = (\ln|x| + C)x^2 \;\Rightarrow y = Cx^2 + x^2\ln|x|$ – загальний розв'язок вихідного рівняння

(Самостійно знайти розв'язок методом інтегруючого множника).

Помножимо рівняння (обидві частини) на $\mu(x) = e^{-\int\frac{2}{x}dx} = e^{-2\int\frac{dx}{x}} = e^{-\ln x^2} = \frac{1}{x^2}$

Матимемо $y'\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}y\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow \quad y'\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}y = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \left(y\cdot\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1}{x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y\cdot\frac{1}{x^2} = \ln|x| + C \Rightarrow\; y = x^2(\ln|x| + C)$$

Метод Бернуллі[6]

(Розв'язування лінійних диференціальних рівнянь I порядку).

Дано: $y' + p(x)y = q(x)$ (2.3.2)

Шукаємо розв'язок у вигляді $y = u(x)v(x)$, де $u(x), v(x)$ - невідомі, неперервні функції разом із своїми похідними першого порядку (на інтервалі (a;b))

Тоді $y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ - підставляємо в рівняння (2.3.2)

$$u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + p(x)u(x)v(x) = q(x)$$

$$u'(x)v(x) + u(x)\left[v'(x) + p(x)v(x)\right] = q(x) \qquad (2.3.19)$$

Вибираємо $v(x)$ так, щоб $v'(x) + p(x)v(x) = 0$

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v(x) \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v} = -p(x)dx \;\Rightarrow\; \ln|v| = -\int p(x)dx$$

$v = e^{-\int p(x)dx}$ - підставляємо в (2.3.19)

[6] Якоб Бернуллі (1654-1705), Йоганн Бернуллі (1667-1748) – швейцарські математики

$$u'e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow u' = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow$$
$$u = \int q(x)e^{\int p(x)dx} + C$$

Тоді $y = uv = e^{-\int p(x)dx}[\int q(x)e^{\int p(x)dx} + C]$

2.4 Диференціальні рівняння І порядку, які зводяться до лінійних

– **Рівняння Бернуллі**

Означення. *Рівняння виду*

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \qquad (2.4.1)$$

де n *– будь-яке дійсне число називається рівнянням Бернуллі.*

Будемо вважати, що $n \neq 0$ і $n \neq 1$, бо інакше рівняння (2.4.1) є лінійним. Функції $p(x)$ і $q(x)$ вважаємо неперервними.

З (2.4.1) матимемо

$$y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x) \qquad (2.4.2)$$

Покладемо

$$z = y^{1-n} \qquad (2.4.3)$$

Звідси $\dfrac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1-n}y^n\dfrac{dz}{dx}$ - підставляємо в (2.4.2)

$$y^{-n}\frac{1}{1-n}y^n\frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x) \Rightarrow \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x) \Rightarrow$$

$\dfrac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = q(x)(1-n)$ - є лінійним рівнянням.

Інтегруючи і повертаючись до змінної *y*, одержимо загальний розв‘язок рівняння Бернуллі у вигляді

$$y = \left[e^{\int (n-1)p(x)dx}[C + \int (1-n)q(x)e^{\int (1-n)p(x)dx}dx]\right]^{\frac{1}{1-n}} \qquad (2.4.3а)$$

Рівняння Бернуллі вперше розглянув Якобі Бернуллі (у 1695р.), а через два роки (1697р.) розв’язок його представив Йоганн Бернуллі. (Також цим рівнянням займався Г. Лейбніц[7]).

Для розв’язування рівнянь Бернуллі також часто користуються методом Бернуллі $z = uv$.

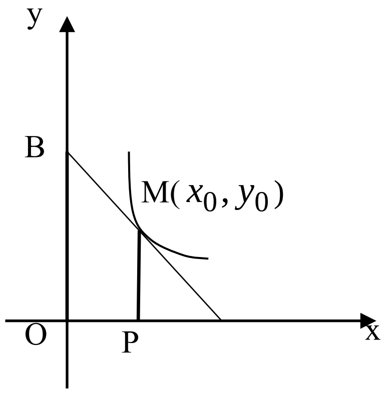
[7] Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646-1716) – німецький математик, фізик і філософ

Аналіз рівняння Бернуллі (2.4.1.) та його загального розв‘язку (2.4.3а) дає можливість зробити висновок, що

при $n>0$ $y=0$ - є розв'язком рівняння.

Якщо $0<n<1$ – $y=0$ є особливим розв'язком.

Якщо n >1 - $y=0$ є частинним розв'язком рівняння.



<u>Приклад.</u> Знайти криві, в яких відрізок OB, що відтинає дотична на осі Oy дорівнює квадрату ординати PM точки дотику.

Рівняння дотичної: $y-y_0=y'(x-x_0)$.

Для т. $B(0;y)$ $y=y_0-y'x_0$

Для будь-якої точки дотику (x,y) матимемо $OB=y-y'x$

$y^2=OB$ (за умовою). Отже,

$y^2=y-y'x \Rightarrow y'x-y=-y^2 \Rightarrow$

$y'-\frac{1}{x}y=-\frac{1}{x}y^2$ - рівняння Бернуллі ($\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=-\frac{1}{x}y^2$)

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y^{-1}=-\frac{1}{x}$$

$z=y^{-1} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx} \Rightarrow \left[\frac{dy}{dx}=-y^2\frac{dz}{dx}\right]$

$\Rightarrow -\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z=-\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dz}{dx}+\frac{1}{x}z=\frac{1}{x} \Rightarrow$- рівняння допускає відокремлення змінних $q(x)=kp(x)$

$\Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}(1-z) \Rightarrow \frac{dz}{1-z}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{d(z-1)}{z-1}+\int\frac{dx}{x}=\ln C_1$, $(C_1>0)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \ln|z-1|+\ln|x|=\ln C_1 \Rightarrow x(z-1)=C$, $(C=\pm C_1)$ $\Rightarrow$

$z=\frac{C}{x}+1 \Rightarrow \frac{1}{y}=\frac{C+x}{x} \Rightarrow y=\frac{x}{x+C}$ – загальний розв'язок.

$y=0$ $(x\neq 0)$ - є частинним розв'язком (при $C=\infty$)

$1-z=0 \Rightarrow z=1 \Rightarrow \frac{1}{y}=1 \Rightarrow y=1$ - є частинним розв'язком (при $C=0$).

- ***Рівняння*** $f'(y)y' + f(y)p(x) = q(x)$ (2.4.4)

зводиться до лінійного за допомогою заміни $z = f(y)$ $(z' = f'(y)\cdot y')$, то матимемо $z' + p(x)z = q(x)$ - лінійне.

3) ***Рівняння*** $y' = \dfrac{A(y)}{B(y)x + C(y)}$ (2.4.5)

є лінійним відносно функції $x = x(y)$

Дійсно, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{A(y)}{B(y)x + C(y)} \Rightarrow$ (можна пригадати зв'язки між оберненими функціями $y' = \dfrac{1}{x'}$)

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{B(y)x}{A(y)} + \frac{C(y)}{A(y)} \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{B(y)x}{A(y)} = \frac{C(y)}{A(y)}$$

Матимемо, $x'(y) + p(y)x = q(y)$ - лінійне диференціальне рівняння, де $p(y) = -\dfrac{B(y)}{A(y)}$, $q(y) = \dfrac{C(y)}{A(y)}$.

<u>Приклад.</u>

$$\frac{dy}{dx}x^3\sin y + 2y = x\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}(x - x^3\sin y) = 2y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x - x^3\sin y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy}\cdot 2y = x - x^3\sin y \Rightarrow 2y\frac{dx}{dy} - x = -x^3\sin y \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{dx}{dy} - \dfrac{x}{2y} = -\dfrac{x^3\sin y}{2y}$ – рівняння Бернуллі відносно функції $x = x(y)$ $\left(p(y) = -\dfrac{1}{2y},\ q(y) = -\dfrac{\sin y}{2y}\right)$

$$\frac{1}{x^3}\frac{dx}{dy} - \frac{1}{2y}\frac{1}{x^2} = -\frac{\sin y}{2y}; \qquad z = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \qquad \frac{dz}{dy} = -2\frac{1}{x^3}\frac{dx}{dy} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{x^3}{2}\frac{dz}{dy}$$

Матимемо:

$$\frac{1}{x^3}\frac{dx}{dy} - \frac{1}{2y}\frac{1}{x^2} = -\frac{\sin y}{2y} \Rightarrow \frac{1}{x^3}\left(-\frac{x^3}{2}\right)\frac{dz}{dy} - \frac{1}{2y}\frac{1}{x^2} = -\frac{\sin y}{2y} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{dz}{dy} + \dfrac{z}{y} = \dfrac{\sin y}{y}$, $y \neq 0$ - лінійне рівняння. Розв'язуємо за методом Бернуллі.

$$z = uv,\ z' = u'v + v'u \Rightarrow u'v + v'u + \frac{uv}{y} = \frac{\sin y}{y} \Rightarrow$$

$$u'v+u\left(v'+\frac{v}{y}\right)=\frac{\sin y}{y} \qquad v'+\frac{v}{y}=0$$

$$\frac{dv}{dy}=-\frac{v}{y} \Rightarrow \frac{dv}{v}+\frac{dy}{y}=0 \Rightarrow \ln|vy|=\ln|C_1| \Rightarrow$$

$$v=\frac{C}{y},\ v=\frac{1}{y} \qquad (C=\pm C_1)$$

$$u'v=\frac{\sin y}{y} \Rightarrow \frac{u'}{y}=\frac{\sin y}{y} \Rightarrow u'=\sin y$$

$$u=-\cos y+C$$

$$z=-\frac{\cos y}{y}+\frac{C}{y} \Rightarrow x^2=\frac{1}{z} \Rightarrow x^2=\frac{y}{C-\cos y} \Rightarrow$$

(x=0 – частинний розв'язок при C→∞) $\Rightarrow\ y=x^2(C-\cos y)$.

Зазначимо, що $y=0$ також є розв'язком вихідного рівняння – особливим.

– ***Рівняння Міндінга[8] – Дарбу[9]***

Так називається рівняння виду

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy+P(x,y)(xdy-ydx)=0,$$

(2.4.6)

де M і N - однорідні функції степеня m, а P – однорідна функція степеня l.

Якщо $l=m-1$, то рівняння (2.4.6) є однорідним рівнянням (в цьому можна пересвідчитись, розкривши дужки та звівши подібні доданки за dx і dy).

В інших випадках рівняння зводиться до рівняння Бернуллі.

$$\left.\begin{array}{r} M(tx,ty)dx=t^mM(x,y)\\ N(tx,ty)dx=t^mN(x,y)\\ P(tx,ty)dx=t^lP(x,y)\end{array}\right] \Rightarrow t=\frac{1}{x} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(1,\frac{y}{x})=\frac{1}{x^m}M(x,y),\\ N(1,\frac{y}{x})=\frac{1}{x^m}N(x,y)\\ P(1,\frac{y}{x})=\frac{1}{x^l}P(x,y)\end{array}\right.$$

Підставляємо в (2.4.6)

$$x^mM(1,\frac{y}{x})dx+x^mN(1,\frac{y}{x})dy+x^lP(1,\frac{y}{x})(xdy-ydx)=0 \qquad (2.4.7)$$

[8] Міндінг Фердинанд Готлібович (1806-1885) – російський математик

[9] Дарбу Жак Гастон (1842-1917) – французький математик

Покладемо,

$y = ux \Rightarrow dy = xdu + udx,\ xdy - ydx = d(\frac{y}{x})x^2 \quad xdy - ydx = x^2 du$

Підставляємо в (2.4.7) і ділимо на $x^m \quad (x \neq 0)$

$$M(1,u)dx + N(1,u)[xdu + udx] + x^{l-m}P(1,u)x^2 du = 0$$
$$M(1,u)dx + N(1,u)[xdu + udx] + x^{l-m+2}P(1,u)du = 0$$

Зберемо все при dx і все при du:

$$[M(1,u) + uN(1,u)]dx + [xN(1,u) + x^{l-m+2}P(1,u)]du = 0$$

Ділимо обидві частини цього рівняння на $[M(1,u) + uN(1,u)]$ і du:

$$\frac{dx}{du} + \frac{N(1,u)}{M(1,u) + uN(1,u)}x = -\frac{P(1,u)}{M(1,u) + uN(1,u)}x^{l+2-m} \qquad (2.4.7a)$$

рівняння Бернуллі з невідомою функцією $x(u)$

Зауваження. З (2.4.7а) випливає, що якщо $l = m - 2$, то рівняння (2.4.6) – Міндінга-Дарбу зводиться до лінійного рівняння.

Приклад. $\quad xdx + ydy + x(xdy - ydx) = 0$

$m = 1,\ l = 1$ - рівняння Міндінга-Дарбу.

$y = ux,\ xdy - ydx = x^2 du,\ \ dy = xdu + udx$

Тоді $xdx + ux(xdu + udx) + x^3 du = 0$

$xdx + ux^2 du + u^2 xdx + x^3 du = 0$

$x(1 + u^2)dx + x^2(u + x)du = 0$

$(1 + u^2)dx + x(u + x)du = 0$

Ділимо на $du, 1 + u^2$

$\frac{dx}{du} + \frac{u}{1 + u^2}x = -\frac{x^2}{1 + u^2}$ або $x'(u) + \frac{u}{1 + u^2}x = -\frac{1}{1 + u^2}x^2$

Одержали рівняння Бернуллі відносно $\quad x = x(u)$

Розв‘язуючи і повертаючись до змінної y, знайдемо:

$\frac{1}{x} = -2 + C(1 + u^2)$

$$\frac{1}{x} = -2 + C(1 + \frac{y^2}{x^2}) \qquad x = -2x^2 + C(x^2 + y^2).$$

- *Рівняння Ріккаті*[10]

Так називається рівняння виду:

$$y' + p(x)y^2 + q(x)y = r(x) \qquad (2.4.8)$$

де $p(x), q(x), r(x)$ - неперервні функції на проміжку $(a;b)$, причому $p(x) \neq 0$, $r(x) \neq 0$, (оскільки в протилежному випадку рівняння зводиться до лінійного, або до рівняння Бернуллі).

У загальному випадку у квадратурах не інтегрується. Але якщо відомий частинний розв'язок цього рівняння y_1, то дане рівняння можна звести до рівняння Бернуллі.

Дійсно виконуючи заміну $y = z + y_1$, дістаємо

$$z' + y_1' + p(x)\left[z^2 + 2zy_1 + y_1^2\right] + q(x)\left[z + y_1\right] = r(x)$$

$$z' + y_1' + p(x)y_1^2 + q(x)y_1 + p(x)(2zy_1 + z^2) + q(x)z = r(x)$$

$y_1' + p(x)y_1^2 + q(x)y_1 \equiv r(x)$, тоді

$$z' + p(x)(z^2 + 2zy_1) + q(x)z = 0$$

$$z' + p(x)z^2 + z\left[2p(x)y_1 + q(x)\right] = 0$$

$z' + \left[2p(x)y_1 + q(x)\right]z = -p(x)z^2$ - рівняння Бернуллі відносно функції $z(x)$.

Теорема: ***Якщо відомий один частинний розв'язок рівняння Ріккаті, то останнє завжди можна звести до рівняння Бернуллі.***

Приклад. $y' + y^2 = \frac{2}{x^2} \quad (q(x) = 0,\ p(x) = 1,\ r(x) = \frac{2}{x^2})$

Очевидним розв'язком цього рівняння є функція $y_1 = -\frac{1}{x}$. Заміна: $y = z - \frac{1}{x}$

Підставляємо:

$z' + \frac{1}{x^2} + z^2 - 2\frac{z}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x^2} \;\Rightarrow\; z' + (-\frac{2}{x})z = -z^2$ - рівняння Бернуллі.

Застосуємо метод Бернуллі

$z = uv,\ z' = u'v + v'u$

---

[10] Ріккаті Якопо Франческо (1676-1754) – італійський математик

$$u'v+v'u-\frac{2}{x}uv=-u^2v^2$$

$$v'u+v(u'-\frac{2}{x}u)=-u^2v^2 \Rightarrow u'-\frac{2}{x}u=0 \ \ (\frac{du}{dx}=\frac{2u}{x},\ \frac{du}{2u}=\frac{dx}{x} \qquad \frac{1}{2}\ln|u|=\ln|x|$$

$$u=x^2$$

$$v'x^2=-x^4v^2$$

$$\frac{dv}{dx}=-x^2v^2 \quad (x\neq 0)\Rightarrow \frac{dv}{v^2}=-x^2dx \Rightarrow -\frac{1}{v}=-\frac{x^3}{3}-\frac{C}{3} \Rightarrow \frac{1}{v}=\frac{x^3+C}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v=\frac{3}{x^3+C}.$$

Тоді $z=uv=\dfrac{3x^2}{x^3+C}$, а $y=z-\dfrac{1}{x}=\dfrac{3x^2}{x^3+C}-\dfrac{1}{x}$; $y=\dfrac{3x^2}{x^3+C}-\dfrac{1}{x}$

$$y=\frac{2x^3-C}{x(x^3+C)}$$

Прості випадки інтегрованості рівняння Ріккаті у квадратурах:

1) $y'=\varphi(x)(ay^2+by+c)$ - рівняння з відокремленими змінними;

2) $y'=a\dfrac{y^2}{x^2}+b\dfrac{y}{x}+c$ - однорідне рівняння a,b,c - сталі, $a^2+c^2\neq 0$

3) $y'=a\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{y}{x}+c$ або $xy'=ay^2+\dfrac{1}{2}y+cx,$

треба покласти $y=z\sqrt{x}$ (і одержимо рівняння з відокремленими змінними)

4) $y'=Ay^2+\dfrac{B}{x}y+\dfrac{C}{x^2}$, де A,B,C – сталі.

Треба покласти $y=\dfrac{z}{x}$ і прийдемо до рівняння з відокремленими змінними.

Структура загального розв'язку рівняння Ріккаті:

$y=y_1+\dfrac{1}{A(x)C+B(x)}$. – дробово-лінійна функція від сталої C.

Теорема. *Якщо для рівняння Ріккаті відомі два частинних розв'язки, то рівняння розв’язується за допомогою однієї квадратури, якщо три – то розв’язується без квадратур*

2.5 Рівняння у повних диференціалах. Інтегрувальний множник

Означення. *Рівняння першого порядку в симетричній формі*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \qquad (2.5.1)$$

де P,Q *- неперервні функції, називають рівнянням у повних диференціалах, якщо існує функція* $u = u(x,y)$ *така, що*

$$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad ((x,y) \in D) \qquad (2.5.2)$$

Припустимо, що $P^2 + Q^2 \neq 0 \ \forall (x,y) \in D$. Тоді з (2.5.1) та (2.5.2) випливає, що $du = 0$ і загальним інтегралом рівняння (2.5.1) в області D є рівність

$$u(x,y) = c \qquad (2.5.3)$$

Рівняння (2.5.3) в області будь-якої точки (x_0, y_0, c_0) $((x_0, y_0) \in D,\ c_0 = u(x_0, y_0))$ неявно задає єдиний розв'язок рівняння (2.5.1) вигляду $y = \varphi(x, c_0)$ або $x = \varphi(y, c_0)$, для якого $\varphi(x_0, c_0) = y_0$ або $\varphi(y_0, c_0) = x_0$ відповідно.

Процес інтегрування рівняння у повних диференціалах можна вважати завершеним, якщо відома функція $u = u(x,y)$.

<u>Приклад 1</u>. $xdx + ydy = 0$

Ліва частинна цього рівняння являє повний диференціал функції

$$u = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

Тому загальний інтеграл розглядуваного рівняння має вигляд

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c_1 \Rightarrow x^2 + y^2 = c^2 \quad (c^2 = 2c_1).$$

<u>Приклад 2.</u>

$$(x^3 + y)dx + (x - y)dy = 0$$

$$x^3dx + ydx + xdy - ydy = 0$$

$$d(\frac{x^4}{4}) + d(yx) - d(\frac{y^2}{2}) = 0$$

$$d(\frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2}) = 0 \Rightarrow u(x,y) = \frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2}$$

Загальний інтеграл: $\frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2} = c$

Слід відмітити, що при розв‘язувані диференціального рівняння (2.5.1)

1) не завжди відомо, що функція в лівій частині є повним диференціалом
2) не завжди вдається групуванням побудувати функцію $u = u(x,y)$

Тому для розв’язання такого рівняння потрібно:

1) знати, що ліва частина рівняння (2.5.1) – повний диференціал деякої функції;
2) якщо це так, то треба знати загальний підхід до побудови функції $u = u(x,y)$, а , отже, і побудови загального інтегралу диференціального рівняння.

Теорема. *Нехай частинні похідні* $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ *неперервні в області* D.

Рівняння (2.5.1) є рівнянням у повних диференціалах тоді й лише тоді (необхідно і достатньо), коли виконується умова

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad ((x, y) \in D) \qquad (2.5.4)$$

Доведення

Необхідність. Якщо (2.5.1) – рівняння у повних диференціалах, то, внаслідок (2.5.2), $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y),\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Оскільки частинні похідні $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ неперервні за умовою, то виходячи з відомої теореми про мішані похідні матимемо

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}, \text{ тобто } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Достатність. (Метод відшукання функції u)

Нехай умова (2.5.4) виконується. Покажемо, що вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $u = u(x, y)$, тобто функцію $u = u(x, y)$ можна знайти так, щоб

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) \qquad (2.5.5)$$

Інтегруючи (по x) першу з рівностей (2.5.5), дістанемо

$$u(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y), \qquad (2.5.6)$$

де $\varphi(y)$ – довільна диференційовна функція.

Виберемо тепер функцію $\varphi(y)$ так, щоб функція $u(x,y)$, що визначена формулою (2.5.6), задовольняла й другу умову з рівностей (2.5.5).

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\,(\int P(x,y)dx + \varphi(y)) = Q(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\,(\int P(x,y)dx) + \varphi'(y) = Q(x,y)$$

Звідки

$$\varphi'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}(\int P(x,y)dx) \qquad (2.5.7)$$

Знайдемо:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi'(y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y)dx\right]\right] = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\int P(x,y)dx)\right] =$$

$$= \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\int P(x,y)dx)\right] = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

оскільки виконується умова (2.5.4).

Отже, $\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi'(y)\right] = 0$. Це означає, що права частина рівняння (2.5.7) не залежить від x і вибір функції $\varphi(y)$ - завжди можливий з точністю до сталої величини.

Таким чином, за умови (2.5.4) з рівностей (2.5.7) завжди можна знайти функцію $\varphi(y)$. Підставляючи знайдене значення $\varphi(y)$ у формулу (2.5.6), дістанемо $u(x,y)$, а тому і загальний інтеграл диференціального рівняння у повних диференціалах (2.5.1).

Приклад. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$(x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)dy = 0$$

$$P(x,y) = x^2 - 4xy - 2y^2; \;\; Q(x,y) = y^2 - 4xy - 2x^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -4x - 4y; \;\; \frac{\partial Q}{\partial x} = -4y - 4x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Отже, вихідне рівняння – рівняння у повних диференціалах.

Визначимо функцію $u(x,y)$. $P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow$

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y) = \int (x^2 - 4xy - 2y^2)dx + \varphi(y) = \frac{x^3}{3} - 2x^2y - 2y^2x + \varphi(y)$$

Тоді $\frac{\partial u}{\partial y} = -2x^2 - 4yx + \varphi'(y)$.

Але $Q(x)=\frac{\partial u}{\partial y}$. Отже, $-2x^2-4yx^2+\varphi'(y)=y^2-4xy-2x^2$

Таким чином, $\varphi'(y)=y^2 \Rightarrow \varphi(y)=\frac{y^3}{3}+C_1$.

Отже, $u(x,y)=\frac{x^3}{3}-2x^2y-2y^2x+\varphi(y) \Rightarrow u(x,y)=\frac{x^3}{3}-2x^2y-2y^2x+\frac{y^3}{3}+C_1$

А тому $\frac{x^3}{3}-2x^2y-2y^2x+\frac{y^3}{3}=C$ – загальний інтеграл вихідного диференціального рівняння.

Іноді рівняння, яке не є рівнянням у повних диференціалах, можна звести до такого.

Приклад.

$ydx-xdy$ - не є рівнянням у повних диференціалах.

$\frac{\partial P}{\partial y}=1,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-1 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Якщо обидві частини вихідного рівняння помножити на функцію $\mu=\frac{1}{y^2}$, то дістанемо диференціальне рівняння

$\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy=0.$

$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}$ (рівняння у повних диференціалах).

Означення. *Функцію $\mu=\mu(x,y)$, після множення на яку обох частин диференціального рівняння останнє зводиться до диференціального рівняння у повних диференціалах, називають **інтегрувальним множником**.*

Теорема. *Для будь-якого диференціального рівняння* (2.5.1) *з неперервними коефіцієнтами існує інтегрувальний множник.*

Нехай

$$u(x,y)=c \tag{2.5.8}$$

загальний інтеграл диференціального рівняння (2.5.1), і функція $u(x,y)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно.

Знайдемо повний диференціал обох частин тотожності (2.5.8)

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy=0 \tag{2.5.9}$$

з (2.5.1): $\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$.

Тоді враховуючи (2.5.9), матимемо:

$$-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = -\frac{\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}} \Rightarrow \frac{\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}}{P(x,y)} = \frac{\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}}{Q(x,y)} = \mu(x,y) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = P(x,y)\mu(x,y), \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)\mu(x,y)$$

Помноживши ліву частину рівняння (2.5.1) на $\mu(x,y)$, одержимо

$$\mu(Pdx + Qdy) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du(x,y).$$

Нехай у рівнянні (2.5.1) $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$

Припустимо, що $\mu(x,y)$ - інтегрувальний множник цього рівняння.

Тоді для рівняння $\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$ виконується умова

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x,y)P(x,y)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x,y)Q(x,y)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu(x,y)\frac{\partial P}{\partial y} = Q(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu(x,y)\frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(x,y)\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y} \qquad (2.5.10)$$

$\mu(x,y)$ - є розв’язком рівняння (2.5.10).

Таким чином, кожен розв’язок рівняння (2.5.10) буде інтегрувальним множником рівняння (2.5.1) . Але розв’язати рівняння (2.5.10) (рівняння у частинних похідних відносно $\mu(x,y)$) досить складно. Розглянемо випадки:

а) нехай $\mu(x,y) = \mu(x)$, тоді у рівнянні (2.5.10) $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$. Отже, матимемо

$$\mu(x)\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\frac{d\mu}{dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx, \; Q(x,y) \neq 0 \qquad (2.5.11)$$

Якщо функція у правій частині (2.5.11) залежить тільки від *x*, тобто

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\varphi(x)\,, \qquad (2.5.12)$$

то $\mu(x)=e^{\int \varphi(x)dx}$.

Таким чином (2.5.12) є необхідною умовою того, щоб рівняння (2.5.1) мало інтегрувальний множник, який залежить тільки від *x*.

Покажемо, що умова (2.5.12) є достатньою умовою.
Дійсно, в цьому випадку з (2.5.11) матимемо

$$\frac{d\mu}{dx}=\varphi(x)\mu(x)\,.$$

Підставивши сюди значення $\mu(x)=e^{\int \varphi(x)dx}$, одержимо

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int \varphi(x)dx}\right]=\varphi(x)e^{\int \varphi(x)dx}$$

$$\varphi(x)e^{\int \varphi(x)dx}\equiv\varphi(x)e^{\int \varphi(x)dx}$$

Одержана тотожність доводить, що функція $\mu(x)=e^{\int \varphi(x)dx}$ є розв'язком диференціального рівняння (2.5.11) і рівняння (2.5.1) має інтегрувальний множник, який залежить тільки від *x*.

Приклад.

Перевірити, чи є диференціальне рівняння

$$\left(1+\frac{5y^2}{x^2}\right)dx=\frac{2y}{x}dy$$

рівнянням у повних диференціалах. Якщо ні, то знайти інтегрувальний множник.

$$P(x,y)=\left(1+\frac{5y^2}{x^2}\right);\ \ Q(x,y)=-\frac{2y}{x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{5}{x^2}\cdot 2y=\frac{10y}{x^2},\ \ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2y}{x^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\varphi(x)=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{\frac{10y}{x^2}-\frac{2y}{x^2}}{-\frac{2y}{x}}=\frac{8y}{x^2}:\left(-\frac{2y}{x}\right)=-\frac{4}{x}$$

Тому інтегрувальний множник має вигляд:

$$\mu(x)=e^{\int\varphi(x)dx}=e^{\int-\frac{4}{x}dx}=e^{-4\ln x}=e^{\ln\frac{1}{x^4}}=\frac{1}{x^4}$$

Якщо рівняння (2.5.1) має інтегрувальний множник, який залежить від y, то аналогічно можна показати, що умова $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{-P}=\varphi(y)$ є необхідною і достатньою умовою того, що дане рівняння має інтегрувальний множник, який залежить тільки від y і $\mu(y)=e^{\int\varphi(y)dy}$.

Можна довести, що, якщо інтегрувальний множник є функцією від деякої відомої функції $\omega=\omega(x,y)$ (загальний випадок $\mu=\mu(\omega)$), то умова $\varphi(\omega)=\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\frac{\partial\omega}{\partial x}-P\frac{\partial\omega}{\partial y}}$- є необхідною і достатньою умовою існування для даного диференціального рівняння інтегрувального множника, який залежить від відомої функції $\omega=\omega(x,y)$, $\mu(\omega)=e^{\int\varphi(\omega)d\omega}$.

<u>Приклад.</u> З'ясувати, чи має рівняння $xy^2dx+(x^2y-x)dy=0$ інтегрувальний множник $\mu(\omega),\ \omega=xy$.

Якщо $\omega=xy$, то $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}=y,\ \dfrac{\partial\omega}{\partial y}=x,$ тоді

$\varphi(\omega)=\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Qy-Px}$, або $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Qy-Px}=\dfrac{2xy-2xy+1}{x^2y^2-xy-x^2y^2}=-\dfrac{1}{xy}=-\dfrac{1}{\omega}=\varphi(\omega)$

залежить від ω.

$$\omega=xy,\ \ \varphi(\omega)=-\frac{1}{\omega},\ \ \mu(\omega)=e^{-\int\frac{d\omega}{\omega}}=e^{-\ln\omega}=e^{\ln\frac{1}{\omega}}=\frac{1}{\omega}=\frac{1}{xy}$$

2.6 Найпростіші типи диференціальних рівнянь, нерозв'язані відносно похідної. Рівняння Лагранжа і Клеро

Диференціальне рівняння

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (2.6.1)$$

не завжди можна розв'язати відносно похідної (виразити явно y' з рівняння 2.6.1).

I. <u>*До таких рівнянь перш за все належить рівняння виду*</u>

$$a_0(x, y)(y')^n + a_1(x, y)(y')^{n-1} + ... + a_{n-1}(x, y)(y') + a_n(x, y) = 0, \qquad (2.6.2)$$

де $a_i(x, y),\ i = 0,1,2,...,n$ - функції, що неперервні в деякій області $D_1 \subset R_2$ (рівняння 1[го] порядку степеня n).

За основною теоремою алгебри рівняння (2.6.2) визначає n значення для y'.

Викидаючи уявне значення матимемо m, ($m \le n$), диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідної

$$y' = f_k(x, y) \quad k = 1,2,...,m \qquad (2.6.3)$$

Кожне з рівнянь (2.6.3) задає в деякій області $D_1 \subset R_2$ своє поле напрямків.

<u>Приклад.</u> $xy'^2 - 2yy' - x = 0 \quad x \ne 0$

$$y'^2 - 2\frac{y}{x}y' - 1 = 0$$

$\frac{D}{4} = \frac{y^2}{x^2} + 1 \ \Rightarrow\ y' = \frac{y}{x} \pm \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1}$ - однорідне рівняння.

II. *Припустимо, що функція* $F(x, y, y')$ *залежить тільки від* y', *тобто*

$$F(y') = 0 \qquad (2.6.4)$$

Нехай це рівняння має деяке число дійсних коренів

$y' = k_i,\ \ i = 1,2...,n,$ де $k_i = const$, тоді

$y' = k_i x + C,$ або $k_i = \frac{y - C}{x}$

Таким чином, загальний інтеграл рівняння (2.6.4) має вигляд

$$F\left(\frac{y-C}{x}\right)=0$$

Приклад. $y'^4-2y'^2+1=0$

$$(y'^2-1)^2=0$$

$$(y'-1)(y'-1)=0$$

$$y'=1 \quad y'=-1$$

$$y=x+C \quad y=-x+C$$

$$y=-x+C \Rightarrow -\frac{y-C}{x}=1 \Rightarrow \frac{y-C}{x}=-1 \Rightarrow y'=-\frac{y-C}{x}$$

$$y=x+C \Rightarrow y'=\frac{y-C}{x},$$

Отже, $y'=\pm\frac{y-C}{x}$

Загальний інтеграл $\left(\frac{y-C}{x}\right)^4-2\left(\frac{y-C}{x}\right)^2+1=0$

III. *<u>Якщо рівняння</u>* <u>(2.6.1)</u> *<u>явно не містить</u>* ***<u>y</u>*** *<u>то приходимо до такого рівняння</u>*

Рівняння $F(x,y')=0$ (2.6.5)

а) Якщо дане рівняння можна розв’язати відносно y', то матимемо

$$y'=f_k(x),\ k=1,2,3... \Rightarrow y=\int f_k(x)dx+C,\ k=1,2,3...$$

Сукупність одержаних, таким чином розв’язків є загальним інтегралом (2.6.5).

б) Якщо рівняння (2.6.5) можна розв’язати відносно x, то розглянемо з (2.6.5):

$$x=\varphi(y') \tag{2.6.6}$$

Позначимо в останньому рівнянні $y'=p$. Тоді матимемо

$$x=\varphi(p),\ dy=y'dx \Rightarrow dy=p\varphi'(p)dp \Rightarrow y=\int p\varphi'(p)dp+C$$

Таким чином, загальним розв’язком диференціального рівняння (2.6.5) в параметричній формі має вигляд

$$\begin{cases} x=\varphi(p), \\ y=\int p\varphi'(p)dp+C \end{cases} \tag{2.6.7}$$

Якщо з системи рівняння (2.6.7) вдається виключити параметр p, то маємо загальний розв'язок

$y=\psi(x,C)$ або загальний інтеграл $\Phi(x,y,C)=0$.

Зазначимо, що не завжди доцільно за параметр брати y'.
Іноді доцільніше покладати $p=\omega(y')$.

в)Припустимо, що рівняння (2.6.5) записано у параметричній формі

$x=\varphi(t),\ y'=\psi(t),\ t\in(\alpha,\beta) \Rightarrow \quad F(\varphi(t),\psi(t)\equiv 0 \Rightarrow \quad dy=y'dx=\psi(t)\varphi'(t)dt$

Тому загальний розв'язок рівняння у параметричній формі матиме вигляд:

$$x=\varphi(t),\quad y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+C.$$

Приклад. $y'\sin y'-x=0 \quad x=y'\sin y'$.

Покладемо $y'=p \ \Rightarrow x=p\sin p,\ dy=y'dx \Rightarrow$

$$dy=p\cdot d(p\sin p)=p(\sin p+p\cos p)dp \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y=\int(p\sin p+p^2\cos p)dp=(p^2-1)\sin p+p\cos p+C$$

(тут було застосовано метод інтегрування частинами)

IV. *Нехай диференціальне рівняння* (2.6.1) *явно не містить* ***x****, тобто маємо*

$$\textbf{\textit{Рівняння}}\ F(y',y)=0 \qquad (2.6.8)$$

а) Якщо це рівняння можна розв'язати відносно y', то

$y'=f_k(y)\ \ k=1,2,...,$ де $f_k(y)$ - дійсний корінь рівняння (2.6.8).

Якщо $f_k(y)\neq 0$, то $\dfrac{dy}{dx}=f_k(y) \Rightarrow dx=\dfrac{dy}{f_k(y)} \Rightarrow x=\displaystyle\int\frac{dy}{f_k(y)}+C,\ k=1,2,...$

Якщо $f_k(y)=0$, то розв'язками вихідного рівняння будуть також функції $y=b_m,\ m=1,2,...$, де b_m - корені рівняння $f_k(y)=0$ (ці розв'язки можуть бути як частинними, так і особливими).

б) Якщо ж рівняння (2.6.8) можна записати у вигляді

$$y=\varphi(y')\quad ,$$

то покладемо

$$\left.\begin{array}{l} y'=p \Rightarrow dy=y'dx=pdx \\ y=\varphi(p) \Rightarrow dy=\varphi'(p)dp \end{array}\right] \Rightarrow dx=\frac{dy}{p}=\frac{\varphi'(p)dp}{p}.$$

Якщо $p \neq 0$, то загальний розв'язок диференціального рівняння (2.6.8) можна записати у параметричній формі:

$$x = \int \frac{\varphi'(p)}{p} dp + C, \; y = \varphi(p)$$

$p = 0$ - породжує також розв'язки $y = \alpha_i$ (особливі чи частинні)

<u>Приклад.</u> Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y = y'^2 + \ln y'$$

Покладемо $y' = p \Rightarrow y = p^2 + \ln p$

$$dy = y'dx = pdx \Rightarrow dx = \frac{dy}{p} = \frac{d(p^2 + \ln p)}{p} = \frac{2p + \frac{1}{p}}{p} dp = \left(2 + \frac{1}{p^2}\right) dp.$$

$$dx = \left(2 + \frac{1}{p^2}\right) dp \Rightarrow x = 2p - \frac{1}{p} + C$$

Отже, $x = 2p - \frac{1}{p} + C, \; y = p^2 + \ln p$ - загальний розв'язок у параметричній формі

V. <u>*Розглянемо загальний випадок. У рівнянні*</u> $F(x, y, y') = 0$ <u>(2.6.1)</u> <u>*вважатимемо*</u> x, y, y' <u>*- координатами деякої точки простору*</u> R_3. Тоді рівняння (2.6.1) визначає деяку поверхню у просторі.

Запишемо рівняння поверхні у параметричній формі:

$x = \varphi(u,v); \; y = \psi(u,v); \; y' = \omega(u,v),$

де u,v - параметри. Причому $F[\varphi(u,v), \psi(u,v), \omega(u,v)] = 0$.

Припускаємо, що функції $\varphi(u,v), \psi(u,v)$ в області зміни параметрів u,v диференційовні. Тоді

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv, \; dy = \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv$$

Враховуючи, що $y' = \frac{dy}{dx}$, дістанемо диференціальні рівняння: $dy = y'dx \Rightarrow$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = \omega(u,v)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv\right) \qquad (2.6.9)$$

Вважаючи v – незалежною змінною, а u шуканою функцією і припускаючи, що $\frac{\partial \psi}{\partial u} du - \omega \frac{\partial \varphi}{\partial u} \neq 0$, дістаємо рівняння:

$$\frac{du}{dv}=\frac{\omega\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}}{\frac{\partial\psi}{\partial u}-\omega\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}} \text{ (з рівняння (2.6.9))} \qquad (2.6.10)$$

Нехай $u=u(v,C)$ – загальний розв’язок рівняння (2.6.10). тоді загальний розв’язок рівняння (2.6.1) у параметричній формі матиме вигляд:

$$x=\varphi(u(v,C),v);\ y=\psi(u(v,C),v).$$

Тут v – параметр, C – довільна стала.

Даний спосіб можна також застосовувати, якщо рівняння (2.6.1) може бути розв’язаним відносно x або y (тоді за параметри можна взяти y та y' або x та y').

VI. <u>*Нехай рівняння* (2.6.1) *розв’язується відносно* **y.**</u>

Тоді матимемо

$$y=f(x,y'),\quad \text{покладемо } p=y' \Rightarrow y=f(x,p),$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} \Rightarrow p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx}=\frac{p-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial p}} \qquad (2.6.11)$$

Нехай $p=\varphi(x,C)$ - загальний розв’язок диференціального рівняння (2.6.11). Тоді загальний розв’язок початкового рівняння (2.6.1) має вигляд

$$y=f(x,\varphi(x,C))$$

Аналогічно розглядається випадок $x=f(y,y'),\quad p=y'$.

Загальний розв’язок початкового рівняння в цьому випадку має вигляд $x=f(y,\psi(y,C))$.

<u>Приклад.</u> Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$y'^3-4xyy'+8y^2=0$$

Дане рівняння можна розв’язати відносно x

$$x=\frac{y'^2}{4y}+\frac{2y}{y'},\quad y'=p \Rightarrow x=\frac{p^2}{4y}+\frac{2y}{p},\ p=y',\ (y\neq 0)$$

Вважаючи, що $p=p(y)$, продиференціюємо обидві частини рівняння по y

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2p\frac{dp}{dy}\cdot 4y-4p^2}{16y^2}+\frac{2p-2y\frac{dp}{dy}}{p^2},\quad \frac{dy}{dx}=p\ \Rightarrow\ \frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{p}=\frac{p}{2y}\frac{dp}{dy}-\frac{p^2}{4y^2}+\frac{2}{p}-\frac{2y}{p^2}\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{1}{p}=\left(\frac{p}{2y}-\frac{2y}{p^2}\right)\frac{dp}{dy}-\frac{p^2}{4y^2}+\frac{2}{p}$$

$$\frac{1}{p}=\frac{p^3-4y^2}{2yp^2}\frac{dp}{dy}-\frac{p^3-8y^2}{4y^2p}\ \Rightarrow\ \frac{p^3-4y^2}{2yp^2}\frac{dp}{dy}=\frac{p^3-4y^2}{4y^2p}\qquad (p^3-4y^2\neq 0)$$

$$\frac{1}{2yp^2}\frac{dp}{dy}=\frac{1}{4y^2p}\ \Rightarrow\ \frac{dp}{p}=\frac{dy}{2y}\ \Rightarrow\ p=C\sqrt{y}\ \Rightarrow\ y'=C\sqrt{y}\ .$$

Тоді загальний інтеграл матиме вигляд:

$$C^3y^{\frac{3}{2}}-4Cy^{\frac{3}{2}}x+8y^2=0\ \Rightarrow\ 8y^2=4Cy^{\frac{3}{2}}x-C^3y^{\frac{3}{2}}\quad\Rightarrow\quad 8\sqrt{y}=4Cx-c^3\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 64y=(4Cx-C^3)^2$$

Розв'язок $y=0$ можна одержати при $C=0$.

Нехай тепер $p^3-4y^2=0\ \Rightarrow\ p=\sqrt[3]{4y^2}$.Розв'язуючи вихідне рівняння відносно p матимемо $y=\frac{4}{27}x^3$ (особливий розв'язок).

Рівняння Лагранжа і Клеро

Означення. *Диференціальне рівняння*

$$y=x\varphi(y')+\psi(y'),\tag{2.6.12}$$

де φ та ψ - функції, які мають неперервні похідні на деякому проміжку зміни y', називається рівнянням Лагранжа.

Теорема. *Рівняння Лагранжа інтегрується у квадратурах.*

Покладемо $y'=p\ \Rightarrow\ y=x\varphi(p)+\psi(p)$ (2.6.13)

Продиференціюємо обидві частини рівняння (2.6.13) по x.

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(p)+x\varphi'(p)p'+\psi'(p)p'$$

Враховуючи, що $\frac{dy}{dx}=y'=p$, матимемо:

$$p=\varphi(p)+\left[x\varphi'(p)+\psi'(p)\right]p'$$

$$p-\varphi(p)=\left[x\varphi'(p)+\psi'(p)\right]\frac{dp}{dx}$$

Нехай $p-\varphi(p)\neq 0$

Тоді матимемо лінійне диференціальне рівняння I порядку з неперервними коефіцієнтами:

$$\frac{dx}{dp}+x\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}$$

Інтегруючи останнє рівняння, знаходимо

$$x=A(p)\cdot C+B(p),$$

де $A(p),\ B(p)$ - відомі функції, С – довільна стала.

Таким чином, загальний розв’язок рівняння Лагранжа можна записати у параметричній формі (враховуючи (2.6.13)):

$$x=A(p)\cdot C+B(p);\ \ y=A_1(p)\cdot C+B_1(p)$$

Нехай тепер умова $p-\varphi(p)\neq 0$ порушується, тобто $p-\varphi(p)=0$ при деяких значеннях $p=p_i,\ \ i=1,2,...,m$.

Тоді функції $y=x\varphi(p_i)+\psi(p_i)$ - є розв’язками рівняння Лагранжа (див. (2.6.13)), тобто

$$y=x(p_i)+\psi(p_i)$$

Ці розв'язки можуть бути як частинними так і особливими.

<u>Приклад.</u> $y=\frac{1}{2}x(y'+\frac{4}{y'})$

$$y'=p\ \Rightarrow\ y=\frac{1}{2}x(p+\frac{4}{p})\ \Rightarrow\ p=\frac{p}{2}+\frac{x}{2}\frac{dp}{dx}+\frac{2}{p}+2x\left(-\frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dx}$$

$$p=\frac{p}{2}+\frac{2}{p}+\left(\frac{x}{2}-\frac{2x}{p^2}\right)\frac{dp}{dx}\ \Rightarrow\ \frac{p^2-4}{2p}=\frac{\left(p^2-4\right)x}{2p^2}p'$$

Нехай $p^2-4\neq 0\ \Rightarrow\ \frac{1}{2p}=\frac{x}{2p^2}p'\ \Rightarrow\ p=xp'\ \Rightarrow\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}$

$x=Cp,\ y=\frac{1}{2}x(p+\frac{4}{p})$ - загальний розв’язок у параметричній формі. Вилучивши параметр p, дістаємо

$p=\frac{x}{C}\ \Rightarrow\ y=\frac{1}{2}x\left(\frac{x}{C}+\frac{4C}{x}\right)\ \Rightarrow\ y=\frac{x^2}{2C}+2C$ – загальний розв’язок

Якщо $p^2-4=0\ \Rightarrow\ p=\pm 2\ \Rightarrow\ y'=\pm 2\ \Rightarrow\ y=\pm 2x$

Нехай тепер в рівняння Лагранжа $\varphi(y') = y' \quad \Rightarrow \quad \varphi(p) = y'$.

Тобто рівняння Лагранжа набере вигляду

$$y = xy' + \psi(y') \qquad (2.6.14)$$

Рівняння (2.6.14) називається рівнянням Клеро[11].

Рівняння Клеро розв'язуємо також як і рівняння Лагранжа

$$y' = p \Rightarrow y = xp + \psi(p) \Rightarrow p = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}\left(x + \psi'(p)\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1)\frac{dp}{dx} = 0 \quad \text{або} \quad 2)\, x + \psi'(p) = 0$$

$1)\dfrac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = const \Rightarrow p = C \Rightarrow y = xC + \psi(C)$ загальний розв'язок.

$2)\, x + \psi'(p) = 0$. Припустимо, що це рівняння можна розв'язати відносно p (для цього досить, що $\psi''(p) \neq 0$ тобто $\psi'(p) \neq const$).

Розв'язавши дане рівняння відносно p, одержимо:

$$p = \omega(x)$$

Таким чином, $y = x\omega(x) + \psi[\omega(x)]$.

Можна показати, що цей розв'язок є розв'язком рівняння Клеро.

Приклад. $y = xy' - y'^2$

$$y' = p \Rightarrow y = xp - p^2 \Rightarrow p = p + x\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx}(x - 2p) = 0 \Rightarrow$$

Тому $1)\dfrac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = C$ Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд $y = Cx + C^2$

$$2)\, x - 2p = 0 \Rightarrow p = \frac{x}{2}$$

Підставляємо в рівняння:

$\Rightarrow y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^2}{4} \Rightarrow y = \dfrac{x^2}{4}$ – особливий розв'язок.

[11] Алексі Клеро (1713-1765) – італійський математик.

Питання для самоконтролю

1. Яке диференціальне рівняння називають рівнянням з відокремленими змінними? Як знайти загальний інтеграл такого рівняння?

2. Як інтегруються диференціальні рівняння з відокремленими змінними? Які функції можуть виявитися особливими розв'язами?

3. За допомогою яких замін рівняння $y' = f(ax + by + c)$ можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними?

4. Коли функція $f(x, y)$ буде однорідною виміру m? Наведіть приклади однорідних та неоднорідних функцій.

5. Яке диференціальне рівняння першого порядку називають однорідним?

6. За допомогою якої заміни однорідне диференціальне рівняння першого порядку зводиться до рівняння з відокремленими змінними?

7. Якою має бути права частина рівняння $y' = f(x, y)$, щоб воно було однорідним?

8. Якщо функції $M(x, y)$, $N(x, y)$ однорідні, то чи досить цього, для того, щоб рівняння $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ було однорідним?

9. Які рівняння називають узагальнено-однорідними? Яка заміна використовується для інтегрування таких рівнянь?

10. Який загальний вигляд має лінійне диференціальне рівняння першого порядку?

11. Яка різниця між лінійним неоднорідним і однорідним рівняннями?

12. У чому полягає метод варіації довільної сталої інтегрування лінійного неоднорідного рівняння?

13. За допомогою скількох квадратур у загальному випадку інтегрується лінійне неоднорідне рівняння?

14. У чому полягає метод підстановки інтегрування лінійного неоднорідного рівняння?

15. Який загальний вигляд рівняння Бернуллі?

16. У чому полягає метод варіації довільної сталої інтегрування рівняння Бернуллі?

17. Чи може рівняння Бернуллі мати особливі розв'язки?

18. Який вигляд має рівняння Ріккаті?

19. За якої умови рівняння Ріккаті інтегрується у квадратурах?

20. Якими повинні бути функції $M(x, y)$ і $N(x, y)$, щоб рівняння $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ було рівнянням у повних диференціалах?

21. Як формулюється необхідна і достатня ознака того, щоб рівняння було рівнянням у повних диференціалах?
22. Як зінтегрувати рівняння у повних диференціалах?
23. Що називають інтегрувальним множником?
24. Який загальний вигляд має неявне диференціальне рівняння першого порядку?
25. Яку функцію називають розв’язком неявного диференціального рівняння першого порядку?
26. Як формулюється задача Коші для неявного диференціального рівняння першого порядку?
27. Який вигляд має рівняння Лагранжа?
28. Яку заміну використовують для інтегрування рівняння Лагранжа?
29. Який вигляд має рівняння Клеро?
30. Як знайти загальний і особливий розв’язки рівняння Клеро?

Тема 3: Диференціальні рівняння вищих порядків

3.1 Рівняння, інтегровні у квадратурах.
3.2 Деякі типи рівнянь вищих порядків, інтегровних у квадратурах.
3.3 Деякі типи диференціальних рівнянь вищих порядків, які допускають зниження порядку.

3.1 Рівняння, інтегровні у квадратурах.

Означення 1. *Рівняння*

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \qquad (3.1.1)$$

де x *– незалежна змінна,* y *– шукана функція, а функція* F *– визначена й неперервна в деякій області* $G \subseteq R^{n+2}$, $n \geq 1$ *та залежна від* $y^{(n)}$*, називають звичайним диференціальним рівнянням* $n-$*го порядку.*

Диференціальне рівняння $n-го$ порядку, яке розв‘язне відносно похідної, має вигляд

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (3.1.2.)$$

Тут функція f також неперервна функція в області $D \subseteq R^{n+1}$ зміни своїх аргументів.

Означення 2. *Розв'язком рівняння* (3.1.2.) *на інтервалі* $(a;b)$ *називається функція* $y = y(x)$*, яка задовольняє умови:*

1) $y(x)$ *неперервно диференційована* $n-$*разів на* $(a;b)$
2) $\left(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)\right) \in D \forall x \in (a;b)$
3) $y(x)$ *перетворює рівняння* (3.1.2) *на тотожність, тобто* $y^{(n)}(x) \equiv f\left(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}\right) \forall x \in (a;b)$

Аналогічно можна сформулювати дане означення для розв'язку (3.1.1)

Означення 3. *Задачею Коші для рівняння* (3.1.2) *називають задачу відшукання розв'язку* $y(x)$ *рівняння* (3.1.2), *який задовольняє початкові умови*

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0{}', ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0{}^{(n-1)}, \qquad (3.1.3)$$

де $x_0 \in (a;b), y_0, y_0{}', ..., y_0{}^{(n-1)}(x_0) = y_0{}^{(n-1)}$ – задані числа.

Теорема Пеано: *Якщо функція* f *неперервна в області* D*, то для будь-якої точки* $(x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}) \in D$ *існує розв'язок рівняння* (3.1.2)*, визначений у деякому околі точки* $x_0 \in (a;b)$*, котрий задовольняє початкові умови* (3.1.3).

Теорема Коші – Пікара (теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші) *Якщо функція* f *неперервна в області* D *і задовольняє умову Ліпшица по змінних* $y, y', ..., y^{(n-1)}$*, то для будь-якої точки* $(x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}) \in D$ *існує єдиний розв'язок рівняння* (3.1.2)*, визначений у деякому околі точки* $x_0 \in (a;b)$*, котрий задовольняє початкові умови* (3.1.3).

Зауваження. *Умови теореми Коші-Пікара виконується, зокрема, якщо функція* f *неперервна на* D *і має в околі точки* $(x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)})$ *обмежені частинні похідні по* $y, y', ..., y^{(n-1)}$.

Нехай D - область, у кожній точці якої задана задача Коші для рівняння (3.1.2) має єдиний розв'язок.

Означення. *Функцію*

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n), \tag{3.1.4}$$

де $C_1, C_2, ...C_n$ *– довільні сталі, називають загальним розв'язком рівняння (3.1.2) в області, якщо:*

1)функція φ *має неперервні частинні похідні по* x *до* n*-го порядку включно;*

2)для будь-якої точки $(x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}) \in D$ *система*

$$\begin{aligned} &y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2, ..., C_n), \\ &y'_0 = \varphi'(x_0, C_1, C_2, ..., C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, ..., C_n), \end{aligned}$$

має єдиний розв'язок відносно $C_1, C_2, ..., C_n$

$$
\begin{aligned}
&C_1^0=\psi_1(x_0,y_0,y_0',\dots,y_0{}^{(n-1)}),\\
&C_2^0=\psi_2(x_0,y_0,y_0',\dots,y_0{}^{(n-1)}),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&C_n^0=\psi_n(x_0,y_0,y_0',\dots,y_0{}^{(n-1)})
\end{aligned}
\tag{3.1.5}
$$

3) *функція* $\varphi(x,C_1^0,C_2^0,\dots,C_n^0)$ *є розв'язком рівняння* (3.1.2) *при будь-яких допустимих значеннях* $C_1^0,C_2^0,\dots,C_n^0$, *які визначаються рівностями* (3.1.5), *за умови, що точка* $(x_0,y_0,y_0',\dots,y_0{}^{(n-1)})\in D$.

4) Якщо загальний розв'язок (3.1.4) в області D заданий неявно співвідношенням

$$\Phi(x,y,C_1,C_2,\dots,C_n)=0, \tag{3.1.6}$$

то це співвідношення називають **загальним інтегралом рівняння** (3.1.2) в області D.

Розв'язок, який можна знайти з (3.1.4) при певних значеннях C_i $(i=1,2,\dots,n-1)$ називають **частинним розв'язком рівняння** (3.1.2). Аналогічно вводиться поняття частинного інтеграла.

Якщо відомий загальний розв'язок (3.1.4) або загальний інтеграл (3.1.6), то задачу Коші розв'язують так:

1) зі співвідношення (3.1.4) або (3.1.6) і тих, які дістають із них за допомогою $n-1$ - кратного диференціювання по x із використанням початкових умов (3.1.3) складають систему рівнянь відносно $C_1,C_2,\dots,C_n$;

2) розв'язують систему $\Rightarrow$ одержують значення $C_1^0,C_2^0,\dots,C_n^0$;

3) підставляють значення $C_1^0,C_2^0,\dots,C_n^0$ в (3.1.4) або (3.1.6) і дістають розв'язок задачі Коші.

$$y=\varphi(x,C^0{}_1,\,C^0{}_2,\dots,C^0{}_n) \tag{3.1.7}$$

або частинний інтеграл $\Phi(x,\,C^0{}_1,C^0{}_2,\dots,C^0{}_n)=0$, яким неявно задається розв'язок задачі Коші.

Якщо у рівності (3.1.7) врахувати залежність $C_1^0,C_2^0,\dots,C_n^0$ від $(x_0,y_0,y_0',\dots,y_0{}^{(n-1)})$ в явному вигляді, то дістаємо загальний розв'язок у формі Коші:

$$y=\psi(x,x_0,y_0,y_0',\dots,y_0{}^{(n-1)})$$

Якщо співвідношення (3.1.4) або (3.1.6) задано у вигляді

$$
\begin{aligned}
&x=x(t,C_1,C_2,\dots,C_n)\\
&y=y(t,C_1,C_2,\dots,C_n),
\end{aligned}
\tag{3.1.8}
$$

то (3.1.8) називають **загальним інтегралом у параметричній формі.**

Для рівняння (3.1.1), нерозв’язаного відносно похідної $y^{(n)}$, задача Коші ставиться аналогічно такій задачі для рівняння (3.1.2). При цьому, якщо заданим числам $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ і кожному зі значень $y_0^{(n)}$,які визначаються з рівняння

$$F(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}, y_0^{(n)}) = 0,$$

відповідає лише один розв’язок, то кажуть, що задача Коші має єдиний розв’язок.

Теорема. (*існування єдиності розв'язку задачі Коші рівняння* (3.1.1))

Нехай функція F *неперервна в області* G *і має неперервні частинні похідні по* $y, y', ..., y^{(n)}$. *Тоді для будь-якої точки* $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}) \in G$ *такої, що* $F(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n)}) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n)}) \neq 0$ *існує єдиний розв’язок рівняння* (3.1.1), *визначений у деякому околі точки* $x_0 \in X$, *котрий задовольняє початкові умови* (3.1.3).

Поняття загального розв'язку й загального інтеграла рівняння (3.1.1) вводяться аналогічно цим поняттям для рівняння (3.1.2).

Якщо $y(x)$ - розв’язок рівняння (3.1.1), то множину точок $\{(x, y(x)) | x \in X\}$, тобто графік розв’язку $y = y(x)$, називають **інтегральною кривою** рівняння (3.1.1).

Геометрично розв’язок (загальний інтеграл) є сім‘єю інтегральних кривих на площині, яка залежить від n параметрів $C_1, C_2, ..., C_n$.

Означення. *Співвідношення типу*

$$\psi = (x, y, y', ..., y^{(n-k)}, C_1, C_2, ..., C_k) = 0 \qquad (3.1.9)$$

де y *- розв’язок рівняння* (3.1.1) *або* (3.1.2), *добутий у наслідок інтегрування рівняння* (3.1.1), *називають проміжним інтегралом* k*-го порядку рівняння* (3.1.1).

Якщо відомий проміжний інтеграл k-го порядку, то задача інтегрування рівняння n-го порядку (3.1.1) зводиться до простішої задачі інтегрування рівняння порядку $(n-k)$.

Проміжний інтеграл

$$\psi(x, y, y', ..., y^{(n-1)}, C_1) = 0 \qquad (3.1.10)$$

називається **першим інтегралом**.

Означення. *Функцію* $\xi(x)$ *називають особливим розв'язком диференціального рівняння* (3.1.1)*, якщо:*

1) $\xi(x)$ *перетворює диференціальне рівняння на тотожність;*

2) $\forall x_0 \in X$ *задача Коші з початковими умовами* $y(x_0) = \xi(x_0),\ y'(x_0) = \xi'(x_0), ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = \xi^{(n-1)}(x_0)$ *має більше ніж один розв'язок.*

Крім задачі Коші існують такі, в яких умови задаються в різних точках. Такі умови називають крайовими або граничними. А відповідна задача – крайовою.

Для рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y')$$

самі простіші граничні умови мають вигляд

$$y(a) = A,\ y(b) = B.$$

Знаходиться розв'язок на $[a, b]$, який задовольняє умовам.

Геометрично – на площині *(x, y)* розв'язати задачу Коші означає знайти інтегральні криві диференціального рівняння $y'' = f(x, y, y')$, які проходять через точки $(a, A), (b, B)$.

В більш загальній постановці для диференціального рівняння другого порядку крайові умови можуть мати вигляд

$$\begin{cases} h_1 y(a) + h_2 y'(a) = A \\ h_3 y(b) + h_4 y'(b) = B \end{cases},$$

де h_1, h_2, h_3, h_4, A, B числа, $|h_1| + |h_2| \neq 0, |h_3| + |h_4| \neq 0$.

<u>Приклад.</u> Розв'язати крайову задачу

$$y'' + y = 0,$$
$$y(0) = 0,\ y(\pi) = 1.$$

Маємо загальний розв'язок нашого рівняння $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Згідно крайовим умовам

$$c_1 1 + c_2 0 = 0,$$
$$-c_1 1 + c_2 0 = 1.$$

Оскільки система не сумісна, то крайова задача не має розв'язку, тобто поставлена не коректно.

Якщо $y(0)=0,\ y(\pi)=0$, то $c_1=0$, c_2 – будь-яка стала. Тобто крайова задача має безліч розв'язків $y=c_2\sin x$.

Тобто крайова задача може не мати розв'язку, мати безліч розв'язків, мати єдиний розв'язок.

Приклад**.** Розв'язати крайову задачу

$$y''=6x,\ y(0)=0,\ y'(1)=0.$$

Маємо $y'=3x^2+c_1$, $y=x^3+c_1x+c_2$. Звідки $c_2=0, c_3=-3$. $y=x^3-3x$ – єдиний розв'язок.

Необхідно відмітити, що крайові умови можуть мати інший вигляд, наприклад

$$y(a)=y(b),\ y'(a)=y'(b).$$

3.2 Деякі типи рівнянь вищих порядків, інтегрованих у квадратурах

а) ***Рівняння, які містять лише похідну*** n***-го порядку шуканої функції та незалежну змінну***

$$F(x,y^{(n)})=0 \qquad (3.2.1)$$

Параметризація: $x=\varphi(t), y^{(n)}=\psi(t)$, де $\varphi(t)$ – диференційовна функція.

Загальний інтеграл також будемо шукати у параметричній формі

$dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx=\psi(t)\cdot\varphi'(t)dt \Rightarrow y^{(n-1)}=\int\psi(t)\cdot\varphi'(t)dt+C_1\equiv\psi_1(t,C_1)$.

Аналогічно знаходимо $y^{(n-2)}$ і т.д.. Для y дістаємо вираз виду типу

$y=\Psi_n(t,C_1,C_2,...,C_n)$.

Тому система

$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\Psi_n(t,C_1,C_2,...,C_n) \end{cases}$ є загальним інтегралом рівняння (3.2.1) у параметричній формі.

Окремим випадком (3.2.1) є рівняння

$$y^{(n)}=f(x), \qquad (3.2.2)$$

де $f(x)$ неперервна на $X=(a;b)$ функція.

Якщо вважати $x \in X$ параметром, то загальний розв'язок рівняння (3.2.2) дістанемо у вигляді:

$$y = \int(\int(...(\int f(x)dx)dx)...)dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + ... + C_{n-1}x + C_n$$

Загальний розв'язок рівняння (3.2.2) у формі Коші:

$$y = \int_{x_0}^{x}(\int_{x_0}^{x}(...(\int_{x_0}^{x} f(x)dx)dx)...)dx + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} + ... + y_0'(x-x_0) + y_0$$

де $x_0 \in X$; $y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ - будь-які числа.

<u>Приклад.</u> $y''^3 - 2y'' - x = 0 \Rightarrow \quad x = y''^3 - 2y''$

Покладемо $y'' = t \Rightarrow$

$$x = t^3 - 2t; \quad dy' = y''dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dy' = t(3t^2 - 2)dt \Rightarrow$$ Отже,

$$y' = \int t(3t^2 - 2)dt = \frac{3}{4}t^4 - t^2 + C_1.$$

$$y = \int\left(\frac{3}{4}t^4 - t^2 + C_1\right)dx = \int\left(\frac{3}{4}t^4 - t^2 + C_1\right)(3t^2 - 2)dt =$$

$$= \frac{9}{28}t^7 - \frac{9}{10}t^5 + \frac{2+3C_1}{3}t^3 - 2C_1 t + C_2$$

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння у параметричній формі має вигляд

$$\begin{cases} x = t^3 - 2t \\ y = \frac{9}{28}t^7 - \frac{9}{10}t^5 + \frac{2+3C_1}{3}t^3 - 2C_1 t + C_2 \end{cases}$$

<u>Приклад.</u> $y'' = \sin x \Rightarrow dy' = \sin x dx \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = \int \sin x dx = -\cos x + C_1$

$\Rightarrow y = \int(-\cos x + C_1)dx = -\sin x + C_1 x + C_2$

$$y = -\sin x + C_1 x + C_2$$

б) ***Рівняння типу***

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \tag{3.2.3}$$

Якщо його можна розв'язати відносно $y^{(n)}$, тобто

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}), \tag{3.2.4}$$

то вводять нову невідому функцію $u = y^{(n-1)}$.

Тоді рівняння (3.2.4) зводиться до вигляду:

$$u' = f(u)$$

Загальним інтегралом цього рівняння є

$$x + C_1 = \int \frac{du}{f(u)}, \quad f(u) \neq 0 \tag{3.2.5}$$

Припустимо, що рівняння (3.2.5) можна розв'язати відносно u:

$$u = \psi(x, C_1), \quad y^{(n-1)} = \psi(x, C_1) \tag{3.2.6}$$

Оскільки (3.2.6) є рівнянням типу $y^{(n)} = f(x)$ (3.2.2), то загальний розв'язок рівняння (3.2.3) дістаємо у вигляді:

$$y = \underbrace{\int(\int(...(\int}_{n}\psi(x, C_1)dx)dx)...)dx + C_2 x^{n-2} + ... + C_{n-1}x + C_n$$

<u>Приклад.</u> Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'''y'' - \sqrt{1 + y''^2} = 0$$

$$y'' = u \;\Rightarrow\; u'u = \sqrt{1 + u^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}u = \sqrt{1 + u^2} \;\Rightarrow\; \frac{udu}{\sqrt{1 + u^2}} = dx \;\Rightarrow\; \int \frac{udu}{\left(u^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}} = x + C_1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \left(u^2 + 1\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(u^2 + 1\right) = x + C_1 \;\Rightarrow\; \sqrt{u^2 + 1} = x + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; u^2 = (x + C_1)^2 - 1,\; u = \pm\sqrt{(x + C_1)^2 - 1} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y'' = \pm\sqrt{(x + C_1)^2 - 1}$$

$$y' = \pm\int \sqrt{(x + C_1)^2 - 1}\,dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} \int \sqrt{x^2 - 1}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right| \\ x := x + C_1 \;\; x - \textit{заміняємо на } x + C_1 \end{array}\right] =$$

Формула одержується методом інтегрування частинами

$$= \pm\left(\frac{1}{2}(x + C_1)\sqrt{(x + C_1)^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln\left|x + C_1 + \sqrt{(x + C_1)^2 - 1}\right|\right) + C_2,$$

$$y = \pm\int\left[\frac{1}{2}(x + C_1)\sqrt{(x + C_1)^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln\left|x + C_1 + \sqrt{(x + C_1)^2 - 1}\right| + C_2\right]dx =$$

$$= \pm\left[\frac{1}{6}\sqrt{\left((x + C_1)^2 - 1\right)^3} - \frac{1}{2}(x + C_1)\cdot\ln\left|x + C_1 + \sqrt{(x + C_1)^2 - 1}\right| + \frac{1}{2}\sqrt{(x + C_1)^2 - 1}\right] +$$

$$+ C_2 x + C_3,$$

C_1, C_2, C_3 - довільні сталі.

Якщо рівняння (3.2.3) задано в параметричній формі

$$y^{(n)} = \varphi(t), y^{(n-1)} = \psi(t),$$

де $\psi(t)$ - диференційовна функція, то його інтегрують так:

$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx \Rightarrow dx = \dfrac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \dfrac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)}$, звідки

$$x = \int \frac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)} + C_1 = \xi(t, C_1) \qquad (3.2.6)$$

Далі

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = \frac{\psi(t)\psi'(t)dt}{\varphi(t)}$$

$$y^{(n-2)} = \int \frac{\psi(t)\psi'(t)dt}{\varphi(t)} + C_2$$

$$dy^{(n-3)} = y^{(n-2)}dx, ..., dy = y'dx$$

$$y = \int y'dx + C_n = \eta(t, C_1, C_2, ..., C_n) \qquad (3.2.7)$$

Сукупність (3.2.6) і (3.2.7) є загальним інтегралом (3.2.3) у параметричній формі.

<u>Приклад.</u> Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' = \sqrt{1 + y'^2}$$

Параметризація:

$y' = t, \ y'' = \sqrt{1 + t^2}$

$dy' = y''dx \Rightarrow dx = \dfrac{dy'}{y''} = \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \Rightarrow$

$dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \Rightarrow x + C_1 = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \Rightarrow \quad t + \sqrt{1+t^2} = e^{x+C_1}$

$\sqrt{1+t^2} = e^{x+C_1} - t$

$1 + t^2 = e^{2(x+C_1)} - 2te^{x+C_1} + t^2 \Rightarrow 2te^{x+C_1} = e^{2(x+C_1)} - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^{2(x+C_1)} - 1}{e^{x+C_1}}\right) \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}\left(e^{x+C_1} - e^{-(x+C_1)}\right) = sh(x + C_1)$

Звідси $y' = sh(x + C_1) \Rightarrow y = ch(x + C_1) + C_2$

в) рівняння типу

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0 \tag{3.2.8}$$

Заміна: $y^{(n-2)} = u \Rightarrow F(u, u'') = 0$. Таким чином, рівняння (3.2.8) звелося до рівняння 2^го^ порядку. Припустимо, що його можна розв'язати відносно u'':

$$u'' = f(u)$$

Помноживши останнє рівняння на інтегрувальний множник $\mu = 2u'$, дістанемо

$$2u'u'' = 2f(u)u' \Rightarrow 2u'u'' = 2f(u)\frac{du}{dx} \Rightarrow 2u'u''dx = 2f(u)du \Rightarrow$$

$$2u'du' = 2f(u)du \Rightarrow du'^2 = 2f(u)du \Rightarrow u'^2 = \int 2f(u)du + C_1 \Rightarrow$$

$$u' = \pm\sqrt{\int 2f(u)du + C_1} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \pm\sqrt{\int 2f(u)du + C_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{\pm\sqrt{\int 2f(u)du + C_1}} = x + C_2 \Rightarrow \psi(x, u, C_1, C_2) = 0$$

Врахувавши заміну, одержимо проміжний інтеграл:

$$\psi(x, y^{(n-2)}, C, C_2) = 0,$$

тобто диференціальне рівняння порядку $(n-2)$, яке інтегрується в квадратурах (типу (3.2.1))!!!

Якщо рівняння (3.2.8) задано у параметричному вигляді $y^{(n)} = \varphi(t), y^{(n-2)} = \psi(t)$, то його інтегрують так:

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx,\ dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx \Rightarrow$$

$$y^{(n-1)}dx \cdot dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx \cdot dy^{(n-2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^{(n-1)} \cdot dy^{(n-1)} = y^{(n)} \cdot dy^{(n-2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^{(n-1)} \cdot dy^{(n-1)} = \varphi(t)\psi'(t)dt$$

$$\frac{1}{2}d\left[y^{(n-1)}\right]^2 = \varphi(t)\psi'(t)dt$$

$$d\left[y^{(n-1)}\right]^2 = 2\varphi(t)\psi'(t)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int \varphi(t)\psi'(t)dt + C_1} = \xi(t, C_1)$$

Таким чином, матимемо для $y^{(n-1)}, y^{(n)}$ параметричне зображення у вигляді

$$\left[\begin{array}{l} y^{(n)} = \varphi(t) \\ y^{(n-1)} = \xi(t, C_1), \end{array}\right.$$

яке вже розглянуте для рівняння (3.2.3).

3.3 Деякі типи диференціальних рівнянь вищих порядків, які допускають зниження порядку.

а) ***Рівняння, які не містять шуканої функції та кількох послідовних похідних***

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)},..., y^{(n)}) = 0, \quad 1 \le k \le n \tag{3.3.1}$$

За допомогою заміни $y^{(k)} = u$, де u - нова невідома функція, (3.3.1) можна звести до рівняння $(n-k)$- го порядку:

$$F(x,u,u',..., u^{(n-k)}) = 0 \tag{3.3.2}$$

Якщо рівняння (3.3.2) інтегрується у квадратурах, то повертаючись до змінної y, дістанемо проміжний інтеграл рівняння (3.3.1)

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1,...,C_{n-k}) = 0$$

або

$$\Phi(x, y^{(k)}, C_1,...,C_{n-k}) = 0 \tag{3.3.3}$$

Рівняння (3.3.3) є рівнянням типу (3.2.1).

Приклад. $y'' - xy''' + y''^2 = 0$

Нехай $y'' = u \Rightarrow u - xu' + u^2 = 0 \Rightarrow u^2 + u = \dfrac{xdu}{dx} \Rightarrow \dfrac{dx}{x} = \dfrac{du}{u(u+1)}$ $(u \ne 0,\, u \ne -1)$

$$\int \frac{du}{u(u+1)} = \int \frac{dx}{x} + \ln C,\ C > 0, \quad \ln|u| - \ln|u+1| = \ln C|x|,$$

$$\left|\frac{u}{u+1}\right| = C|x| \Rightarrow \frac{u}{u+1} = C_1 x,\ C_1 \ne 0 \quad \Rightarrow u = \frac{C_1 x}{1 - C_1 x} \Rightarrow u = y'' = \frac{C_1 x}{1 - C_1 x}$$

Послідовним інтегруванням знаходимо:

$$y' = \int \frac{C_1 x}{1 - C_1 x} dx + C_2 = -x - \frac{1}{C_1} \ln|1 - C_1 x| + C_2$$

$$y = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{C_1} x \ln|1 - C_1 x| + \frac{1}{C_1} x + \frac{1}{C_1^2} \ln|1 - C_1 x| + C_2 x + C_3,$$

де C_1, C_2, C_3 - довільні сталі, $C_1 \ne 0$.

Якщо $u = 0,$ то $y = ax + b$.

Якщо $u = -1,$ то $y = -\dfrac{x^2}{2} + Cx + d$.

За допомогою підстановки переконуємося в тому, що ці функції є також розв’язками рівняння.

б) ***Рівняння, які явно не містять незалежної змінної***

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (3.3.4)$$

Заміна $y' = p$, де $p = p(y)$, y - нова незалежна змінна.
Порядок рівняння (3.3.4) можна знизити на одиницю, оскільки

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = pp' \qquad (3.3.5)$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \left(pp'\right)' \cdot p = \left(p'p' + pp''\right)p = \left(p'^2 + pp''\right)p$$

....

$$y^{(n)} = g(p, p', ..., p^{(n-1)})$$

$$(p^i = \frac{d^i p}{dy^i}, \ \ i = 1, 2, ..., n-1)$$

Підставивши підстановку $y' = p$ у (3.3.4), дістанемо рівняння $(n-1)$ - го порядку відносно нової шуканої функції p:

$$F_1(p, p', ..., p^{(n-1)}) = 0 \qquad (3.3.6)$$

Якщо відомий загальний інтеграл рівняння (3.3.5):

$$\Phi_1(y, p, C_1, ..., C_{n-1}) = 0$$

то співвідношення

$$\Phi_1(y, y', C_1, ..., C_{n-1}) = 0 \qquad (3.3.7)$$

є проміжним інтегралом $(n-1)$ - го порядку рівняння (3.3.4).

Загальний інтеграл рівняння (3.3.7), який має вигляд $\Phi(x, y, C_1, ..., C_n) = 0$, де $C_1, C_2, ..., C_n$ - довільні сталі є загальним інтегралом (3.3.4).

Внаслідок заміни $y' = p$ можлива втрата розв’язків типу $y = const$. Безпосередньо перевіркою необхідно перевірити, чи справді рівняння (3.3.4) має такі розв'язки.

<u>Приклад.</u> Зінтегрувати рівняння.

$$yy'' - y'^2 = y^2 \ln y \text{ в області } y > 0, \ y' > 0.$$

Рівняння явно не містить незалежної змінної x

$$y' = p, \ \ p = p(y) \Rightarrow yp\frac{dp}{dy} - p^2 = y^2 \ln y \text{ (множимо на } \frac{2}{y})$$

$$(y'' = (y')' = (p)' = p'\frac{dy}{dx} = pp')$$

$$2p\frac{dp}{dy}-\frac{2}{y}\cdot p^2=2y\ln y$$

$$(p^2)'-\frac{2}{y}\cdot p^2=2y\ln y$$

(лінійне рівняння першого порядку відносно p^2)

$$p^2=e^{\int\frac{2}{y}dy}(C_1+\int 2y\ln y e^{-\int\frac{2}{y}dy}dy);$$

$$p^2=y^2(C_1+\ln^2 y).\quad y>0,\ p>0\Rightarrow$$

$$p=y\sqrt{C_1+\ln^2 y}\ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=y\sqrt{C_1+\ln^2 y}\ \Rightarrow\ \frac{dy}{y\sqrt{C_1+\ln^2 y}}=dx\Rightarrow$$

$$\ln\left|\ln y+\sqrt{C_1+\ln^2 y}\ \right|=x+\ln C,\ \ C>0$$

$$\ln y+\sqrt{C_1+\ln^2 y}=C_2e^x,\ C_2\neq 0\ \Rightarrow\ C_1+\ln^2 y=C_2{}^2e^{2x}-2C_2e^x\ln y+\ln^2 y,$$

$$\ln y=\frac{C_2{}^2e^{2x}-C_1}{2C_2{}^2e^{2x}}\ \Rightarrow y=e^{\frac{C_2{}^2e^{2x}-C_1}{2C_2{}^2e^{2x}}}.$$

Приклад. Розв’язати рівняння

$$4y''\sqrt{y}=1\quad.$$

Вводимо змінну $y'=z$, $y''=\frac{dz}{dy}z$, тоді

$$4\frac{dz}{dy}z\sqrt{y}=1,\ z^2=\sqrt{y}+c_1.$$

Звідки $z=\pm\sqrt{\sqrt{y}+c_1}$, отже, $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\sqrt{y}+c_1}$, $x+c_2=\pm\int\frac{dy}{\sqrt{\sqrt{y}+c_1}}$

– загальний інтеграл рівняння.

в) ***Рівняння, однорідні відносно*** $y,y',...,y^{(n)}$.

Розглянемо рівняння типу

$$F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0,\qquad(3.3.8)$$

де функція F є однорідною відносно $y,y',...,y^{(n)}$ із показником однорідності m, тобто

$$F(x,\lambda^t y,\lambda^t y',...,\lambda^t y^{(n)})=\lambda^{mt}F(x,y,y',...,y^{(n)}),\ \ \lambda>0$$

За допомогою заміни

$$y'=yu,\qquad(3.3.9)$$

де u - нова невідома функція, порядок рівняння (3.3.8) можна зменшити на одиницю.

Маємо:

$$\begin{aligned} &y' = yu, \\ &y'' = y(u^2 + u') \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &y^{(n)} = yg(u, u', ..., u^{(n-1)}) \end{aligned} \qquad (3.3.10)$$

$$(y'' = (y')' = (yu)' = y'u + yu' = yu^2 + yu' = y(u^2 + u'))$$

Підставимо (3.3.10) у (3.3.8)

Оскільки функція F є однорідною то матимемо $(\lambda^t = y)$

$$y^m F(x, 1, u, u^2 + u', ..., g(u, u', ..., u^{(n-1)})) = 0 \qquad (3.3.11)$$

Скоротивши рівняння (3.3.11) на y^m (розв'язок $y = 0$ треба не втратити, дістанемо диференціальне рівняння $(n-1)$ - го порядку відносно функції u:

$$F(x, 1, u, u^2 + u', ..., g(u, u', ..., u^{(n-1)})) = 0 \qquad (3.3.12)$$

Якщо відомий загальний розв'язок $u = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$ рівняння (3.3.12), то, як випливає з (3.3.9)- (заміна), загальний розв'язок рівняння (3.3.8) має вигляд:

$$y = C_n e^{\int \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) dx}, \qquad (3.3.13)$$

де $C_1, C_2, ..., C_n$ - довільні сталі.

Дійсно, оскільки з (3.3.9) $y' = yu \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = yu \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = udx \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \ln y - \ln C = \int udx \;\Rightarrow\; \ln\frac{y}{C} = \int udx \;\Rightarrow\; y = Ce^{\int udx}$$

<u>Приклад.</u> Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$xyy'' + xy'^2 - yy' = 0.$$

Це диференціальне рівняння є однорідним відносно шуканої функції і її похідних, тому

$$\frac{y'}{y} = z, y' = yz, y'' = y(z^2 + z'), xy^2(z^2 + z') + xy^2 z^2 - y^2 z = 0.$$

Маємо $xz' + 2xz^2 - z = 0$ – диференціальне рівняння Бернуллі. Інтегруючи, отримаємо

$$z = \frac{x}{x^2 + c_1}, \; \frac{y'}{y} = \frac{x}{x^2 + c_1}.$$

Звідки $y = c_2\sqrt{x^2 + c_1}$.

Наше диференціальне рівняння Бернуллі має розв'язок $y = c$, який не міститься в знайденому загальному інтегралі.

г) ***Узагальнено-однорідні рівняння.***

Розглянемо рівняння типу

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{3.3.14}$$

Рівняння (3.3.14) називають узагальнено-однорідним, якщо існують числа k і m такі, що

$$F(\lambda^t x, \lambda^{tk} y, \lambda^{(k-1)t} y', ..., \lambda^{(k-m)t} y^{(n)}) = \lambda^{mt} F(x, y, y', ..., y^{(n)})$$

Вводимо заміну

$$x = e^t, \; y = ue^{kt} \tag{3.3.15}$$

де t - нова незалежна змінна, u - нова шукана функція. Тоді рівняння (3.3.14) можна звести до рівняння, яке явно не містить незалежної змінної t.

Матимемо:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \left(\frac{du}{dt} e^{kt} + kue^{kt}\right) e^{-t} = (u' + ku) e^{(k-1)t},$$

$$\begin{aligned} y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy'}{dt} e^{-t} &= \left[(u'' + ku')e^{(k-1)t} + (u' + ku)(k-1)e^{(k-1)t}\right] e^{-t} = \\ &= e^{kt-t} \cdot e^{-t} \left[u'' + ku' + ku' + k^2 u - u' - ku\right] = \\ &= e^{kt-2t} \left[u'' + (2k-1)u' + (k^2 - k)u\right] = \\ &= \left[u'' + (2k-1)u' + (k^2 - k)u\right] e^{(k-2)t}; \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

....

$$y^{(n)} = g(u, u', ..., u^{(n)}) e^{(k-2)t}$$

Підставивши (3.3.15) і (3.3.16) в (3.3.14) дістанемо рівняння вигляду

$$e^{mt} F_1(1, u, u', ..., u^{(n)}) = 0, \qquad \lambda^t = e^t$$

яке після скорочення на e^{mt} одержимо рівняння (3.3.4).

<u>Приклад.</u> Зінтегрувати рівняння

$$x^2 yy'' - (y - xy')^2 = 0$$

Ліва частина цього рівняння є однорідною функцією відносно змінних y, y', y'' з показником однорідності 2.

$$F(x,\lambda^t y,\lambda^t y',...,\lambda^t y'')=\lambda^{2t}\left[x^2yy''-(y-xy')^2\right]=\lambda^{2t}F(x,y,y',...,y^{(n)})$$

Виконаємо заміну $y'=yu,\ y''=y'u+u'y=yu^2+u'y=y(u^2+u')$, де u - нова невідома функція.

Тоді

$$x^2y^2(u^2+u')-(y-xyu)^2=0$$

$$y^2\left(x^2(u^2+u')-(1-xu)^2\right)=0$$

$y\equiv 0$ - розв'язок рівняння; якщо $y\neq 0$, то $x^2(u^2+u')-(1-xu)^2=0$

$$x^2u^2+x^2u'-1+2xu-x^2u^2=0$$

$$u'-1+2xu=0\Rightarrow$$

$u'+\dfrac{2}{x}u=\dfrac{1}{x^2}$ - лінійне рівняння.

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$u=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left(C_1^*+\int\frac{1}{x^2}e^{\int\frac{2}{x}dx}dx\right)=\frac{C_1^*}{x^2}+\frac{1}{x}$$

Враховуємо заміну $y'=yu$

$$y'=\frac{C_1}{x^2}+\frac{1}{x}\ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=y\left(\frac{C_1^*}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\ \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{y}=\left(\frac{C_1^*}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx\ \Rightarrow\ \ln y-\ln C_2=\frac{C^*}{x}+\ln x\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \ln\frac{y}{C_2}=\frac{C^*}{x}+\ln x$$

$$y=C_2e^{\frac{C}{x}+\ln x}\ \Rightarrow\ y=C_2e^{\frac{C}{x}}e^{\ln x}\ \Rightarrow\ y=C_2xe^{\frac{C}{x}}$$

$y=0$ при $C_2=0$.

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння

$$x^4y''+(xy'-y)^3$$

Нехай $F(x,y,y',y'')=x^4y''+(xy'-y)^3$. Тоді

$$F(\lambda^t x,\lambda^{tk}y,\lambda^{(k-1)t}y',\lambda^{(k-2)t}y'')=\lambda^{4t}\lambda^{(k-2)t}x^4y''+(\lambda^t x\lambda^{(k-1)t}y'-\lambda^{kt})^3=$$

$$=\lambda^{t(k+2)}x^4y''+\lambda^{3kt}(x\,y'-y)^3;$$

$$t(k+2)=3kt,\ \ kt+2t=3kt,\ k+2=3k\ \Rightarrow k=1\ \Rightarrow m=3.$$

Заміна

$$x=e^t,\ y=ue^t;\ y'(x)=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=(u'e^t+ue^t)e^{-t}=u'+u\Rightarrow y'=u'+u;\ y''=(u''+u')e^{-t}$$

Підставляємо у рівняння:

$$e^{4t}(u''+u')e^{-t}+\left(e^t(u'+u)-ue^t\right)^3=0$$
$$e^{3t}\left[u''+u'+u'^3\right]=0$$
Матимемо $u''+u'+u'^3=0$. Це рівняння явно не містить незалежної змінної t.

Покладемо $u'=p(u),\ u''=\dfrac{dp}{du}u'=\dfrac{dp}{du}p$.

Матимемо,
$$p\frac{dp}{du}+p+p^3=0\ \Rightarrow \frac{dp}{du}=-1-p^2\ \ \textit{або}\ \ p=0$$
$$p=0\Rightarrow\ u'=0\Rightarrow u=C\ \Rightarrow\ y=Ce^t\ \Rightarrow\ y=Cx$$
$$\frac{dp}{du}=-1-p^2\ \Rightarrow \frac{dp}{1+p^2}=-du\ \Rightarrow\ arctg\,p=C_1-u\ \Rightarrow\ p=tg(C_1-u)$$
Тому $u'=tg(C_1-u)\ \Rightarrow\ \dfrac{du}{dt}=tg(C_1-u)\ \Rightarrow\ ctg(C_1-u)du=dt\ \Rightarrow$
$$\Rightarrow\int ctg(C_1-u)du=t-\ln C_2,\ \ C_2>0$$
$$\ln\left|\sin(u-C_1)\right|=-t+\ln C_2$$
$$\sin(u-C_1)=C_2e^{-t}$$
$$u=C_1+\arcsin C_2e^{-t}$$
Враховуючи заміну $y=ux,\ e^{-t}=\dfrac{1}{x},\ x=e^t$, матимемо:
$$y=x(C_1+\arcsin\frac{C_2}{x})$$
Розв'язок $y=Cx$ маємо при $C_2=0,\ C_1=C.$

д) ***Рівняння з точними похідними.***

Розглянемо рівняння
$$F(x,y,y',...,y^{(n)})=0, \tag{3.3.17}$$
ліва частина якого є точною похідною від деякої функції $\Phi_1(x,y,y',...,y^{(n-1)})$, тобто
$$F(x,y,y',...,y^{(n)})=\frac{d}{dx}\Phi_1(x,y,y',...,y^{(n-1)}) \tag{3.3.18}$$
Таке рівняння називають **рівнянням із точними похідними**. Із (3.3.18) випливає, що співвідношення
$$\Phi_1(x,y,y',...,y^{(n-1)})=C_1$$

є першим інтегралом рівняння (3.3.17) – рівнянням $(n-1)$ - го порядку відносно шуканої функції. Отже, рівняння з точними похідними допускають зниження порядку на одиницю.

Приклад. $yy''-y'^2=y'$

$y=0$ - є розв’язком рівняння.

Розділимо рівняння на $y^2\neq 0$. Матимемо $\frac{yy''-y'^2}{y^2}=\frac{y'}{y^2}$, звідки

$$\frac{yy''-y'^2}{y^2}-\frac{y'}{y^2}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{y'}{y}\right)'-\left(\frac{1}{y}\right)'=0 \Leftrightarrow \left(\frac{y'}{y}-\frac{1}{y}\right)^2=0 \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y}-\frac{1}{y}=C_1 \quad y'-C_1y=-1$$

При $C_1=0 \Rightarrow y=-x+C$

При $C_1\neq 0$ дістаємо лінійне неоднорідне рівняння $1^{\underline{го}}$ прядку, загальний розв’язок якого

$$y=e^{C_1x}\left(C_2-\int e^{-C_1x}dx\right)=C_2e^{C_1x}+\frac{1}{C_1}, \quad C_1\neq 0$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціальне рівняння

$$y''y+2y^2y'^2+y'^2-\frac{2yy'}{x}=0.$$

Візьмемо $\mu=\frac{1}{yy'}$, тоді $\frac{y''}{y'}+2yy'+\frac{y'}{y}-\frac{2}{x}=0$.

При цьому $y=0$, $y=c$ – розв’язки нашого диференціального рівняння. Маємо

$$\frac{d}{dx}(\ln y'+y^2+\ln y-2\ln x)=0.$$

$\ln y'+y^2+\ln y-2\ln x=\ln c_1$ – перший інтеграл. Перепишемо його в такій формі $e^{y^2}yy'-c_1x^2=\frac{d}{dx}(\frac{1}{2}e^{y^2}-\frac{c_1}{3}x^3)=0$.

Звідки $\frac{1}{2}e^{y^2}-\frac{c_1}{3}x^3=c_2$– загальний інтеграл. Особливих розв’язків немає, так як диференціальне рівняння $yy'=0$ приводить до розв’язків $y=c$, які містяться в загальному.

Питання для самоконтролю

1. Який загальний вигляд має диференціальне рівняння n-го порядку, розв’язане відносно старшої похідної?
2. Що називають розв’язком диференціального рівняння n-го порядку на деякому інтервалі?
3. Як формулюється задача Коші для диференціального рівняння n-го порядку?
4. Яка достатня умова існування розв’язку задача Коші для диференціального рівняння n-го порядку?
5. Який геометричний і механічний зміст диференціального рівняння другого порядку, його розв’язків та відповідних задач Коші?
6. Що називають загальним розв’язком (загальним інтегралом) диференціального рівняння n-го порядку?
7. Який розв’язок диференціального рівняння n-го порядку називають частинним, особливим?
8. Чи може диференціальне рівняння n-го порядку мати безліч особливих розв’язків?
9. Який вигляд має загальний розв’язок рівняння $y^{(n)} = f(x)$ з неперервною правою частиною?
10. Яка формула дозволяє розв’язок рівняння $y^{(n)} = f(x)$ з неперервною правою частиною записати через одну квадратуру?
11. Як можна зінтегрувати рівняння, яке містить лише незалежну змінну та n-ту похідну шуканої функції, якщо розв’язати його відносно похідної шуканої функції неможливо?
12. За допомогою якої заміни можна знизити порядок диференціального рівняння n-го порядку, що не містить шуканої функції, і рівняння, що не містить шуканої функції та послідовних перших похідних? Запишіть загальний вигляд таких рівнянь.
13. Який загальний вигляд має диференціальне рівняння n-го порядку, яке не містить незалежної змінної?
14. За допомогою якої заміни можна знизити порядок диференціальне рівняння n-го порядку, яке не містить незалежної змінної?
15. Яку умову має справджувати ліва частина диференціального рівняння $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, щоб воно було однорідним відносно шуканої функції та її похідних?
16. Яка заміна виконується у диференціальному рівнянні $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$?

17. Як можна знизити порядок рівняння $F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$, якщо його ліва частина є точною похідною деякої функції?

18. Що називають першим інтегралом рівняння $F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$?

19. Яку функцію називають інтегрувальним множником рівняння $F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$?

Тема 4: Лінійні диференціальні рівняння n - го порядку

4.1 Основні означення. Поняття про комплексний розв'язок однорідного лінійного рівняння. Поняття про лінійний диференціальний оператор n- го порядку.
4.2 Властивості розв'язків однорідного лінійного рівняння.
4.3 Фундаментальна система розв'язків. Визначник Вронського.
4.4 Структура загального розв'язку неоднорідного лінійного рівняння.
4.5 Принцип накладання.
4.6 Метод варіації довільної сталої. Метод Лагранжа.
4.7 Інтегрування однорідного лінійного рівняння n- го порядку з сталими коефіцієнтами (метод Ейлера).
4.8 Розв'язування лінійно-неоднорідних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною (метод невизначених коефіцієнтів).
4.9. Рівняння Ейлера

4.1 Основні означення. Поняття про комплексний розв'язок однорідного лінійного рівняння.

Означення 1: *Рівняння вигляду*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \qquad (4.1.1)$$

називається неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням n- го порядку $p_i(x)$ - функції, що неперервні у інтегралі, в якому визначено рівняння.

Означення 2: *Рівняння вигляду*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad (4.1.2)$$

називається лінійним однорідним диференціальним рівняння n- го порядку.

Неперервність функцій $p_i(x)$ $(i = 1 \div n)$ забезпечує існування та єдиність розв'язку задачі Коші з будь-якими початковими умовами.

Зокрема, якщо $y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = 0$, то буде тільки очевидний нульовий розв'язок $y = 0$.

Поняття про лінійний диференціальний оператор n- го порядку.

Позначимо ліву частину рівняння (4.1.1) через $L(y)$

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y \qquad (4.1.3)$$

$L(y)$ - є результатом виконання над функцією y операцій, указаних у правій частині формули (4.1.3). Сукупність цих операцій позначається символом L:

$$L \equiv \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x)$$

Будемо називати його лінійним диференціальним оператором n-го порядку.

Зокрема лінійний диференціальний оператор n- го порядку має вигляд:

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + p_1(x)\frac{d}{dx} + p_2(x)$$

Приклад. Розглянемо оператор

$$L \equiv= \frac{d^2}{dx^2} - 5\frac{d}{dx} + 6$$

Обчислимо $L(e^{2x}), L(e^x)$

$$L(e^{2x}) = 2^2 e^{2x} - 5 \cdot 2e^{2x} + 6e^{2x} \equiv 0$$

$$L(e^x) = e^x - 5e^x + 6e^x = 2e^x$$

Властивості лінійного оператора:

$$L(ky) = kL(y)$$

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$$

Узагальнюючи, одержимо $L\left(\sum_{k=1}^{m} C_k y_k\right) = \sum_{k=1}^{m} C_k L(y_k)$

Поняття про комплексний розв'язок однорідного лінійного рівняння

Означення: *Функція* $y(x) = u(x) + iv(x)$ $(i = \sqrt{-1})$ *називається комплексним розв'язком однорідного лінійного рівняння* $L(y) = 0$ *в інтервалі* $(a;b)$, *якщо вона перетворює це рівняння у тотожність*

$$L(u(x) + iv(x)) \equiv 0, \qquad (4.1.4)$$

яка справедлива $\forall x \in (a;b)$.

Тотожність (4.1.4) рівносильна тотожності:

$$L(u(x)) + iL(v(x)) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} L(u(x)) \equiv 0 \\ L(v(x)) \equiv 0, \end{array}\right.$$

а це означає, що функції $u(x), v(x)$ є розв'язками однорідного рівняння $L(y) = 0$. (Отже, знання одного комплексного розв'язка дає можливість знайти два різних дійсних розв'язка.

Приклад. Розглянемо рівняння

$$L(y) = y'' + y = 0$$

Це рівняння має комплексний розв'язок

$$y = e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Дійсно, $L(e^{ix}) = (e^{ix})'' + e^{ix} = i^2 e^{ix} + e^{ix} \equiv 0$.

Тому функції $y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$ є дійсними розв'язками вихідного рівняння.

4.2 Властивості розв'язків однорідного лінійного рівняння.

1. Якщо $y_1 = y_1(x)$ - частинний розв'язок однорідного лінійного рівняння $L(y) = 0$, то

$$y = Cy_1,$$

де C - довільна стала, також є розв'язком цього рівняння. (Це випливає з властивості лінійного диференціального оператора).

Таким чином, знаючи один частинний розв'язок, можна одержати цілу (однопараметричну) сім'ю розв'язків (без квадратур). Отже, розв'язок лінійного однорідного рівняння визначається з точністю до сталого множника.

2. Якщо $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x)$ - частинний розв'язок однорідного лінійного рівняння $L(y) = 0$, то їхня сума також є розв'язком цього рівняння. Дійсно,

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) \equiv 0$$

Наявність даних двох властивостей вказує, що множина розв'язків однорідного рівняння є **лінійним простором.**

3. Якщо $y_1, y_2, ..., y_m$ – частинний розв'язок однорідного лінійного рівняння $L(y) = 0$, то

$$y = \sum_{k=1}^{m} C_k y_k ,$$

де $C_1,...,C_m$ - довільні сталі, теж є розв'язком цього рівняння. Ця властивість випливає з властивості 1 і 2.

4.3 Фундаментальна система розв'язків. Визначник Вронського.

Означення: *Нехай задано m функцій від x:*

$$y_1, y_2, ..., y_m \quad (a < x < b) \tag{4.1.5}$$

Складемо їх лінійну комбінацію із сталими коефіцієнтами $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_m y_m$. Якщо ця лінійна комбінація тотожно дорівнює нулю в інтервалі $(a;b)$: $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_m y_m \equiv 0$ тільки у випадку, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$, то функції (4.1.5) називаються ***лінійно-незалежними*** *в інтервалі $(a;b)$. В протилежному випадку функції (4.1.5) називаються* ***лінійно-залежними***.

Дві функції y_1 і y_2 лінійно-незалежні в інтервалі $(a;b)$, якщо $\frac{y_1}{y_2} \neq const$ (тотожньо не дорівнює) $(a < x < b)$.

Приклад 1. Функції $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$ лінійно-незалежні в будь-якому інтервалі. Дійсно, співвідношення $\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{-x} = 0$, в якому хоча б одно з чисел α_1, α_2 відмінні від нуля, може виконуватись не більше чим при одному значенні x:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x} \neq 0 \text{ (тотожньо не дорівнює нулю)}$$

Приклад 2. Функції $y_1 = e^x$, $y_2 = \frac{1}{2}e^x$ лінійно-залежні в будь-якому інтервалі

$$y_1 - 2y_2 \equiv 0 \quad \text{при } \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 2$$

Теорема: ***Якщо функції (4.1.5) є лінійно-залежні, то кожна з них є лінійною комбінацією решти функцій.***

Означення. *Сукупність n розв'язків $y_1, y_2, ..., y_n$ однорідного лінійного рівняння $L(y) = 0$, лінійно-незалежних в інтервалі $(a;b)$,* *називається* ***фундаментальною системою розв'язків*** *цього рівняння в інтервалі* $(a;b)$ (базис простору!!!)

Сформулюємо ознаку лінійної незалежності n частинних розв'язків однорідного рівняння n-го порядку.

Введемо до розгляду визначник, який складається з даних частинних розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (4.1.6)$$

Цей визначник називається **визначником Вронського** розв'язків $y_1, y_2, ..., y_n$ (вронськіан) [Вронський Гьоне Юзеф Марія 1776-1853-польський математик, механік].

Теорема: ***Для того, щоб розв'язки (4.1.5) були лінійно незалежні в*** $(a;b)$***, тобто в інтервалі неперервності коефіцієнтів рівняння*** $L(y)=0$***, необхідно і достатньо, щоб*** $W(x)$ ***не перетворювався на нуль в жодній точці з*** $(a;b)$**.**

Має місце така формула Остроградського - Ліувілля (Остроградський Михайло Васильович (1801-1862), Ліувілль Жозеф (1809-1882)):

$$W(x)=W(x_0)e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx} \qquad (4.1.7)$$

З формули випливає:

1) Якщо $W(x)$ перетворюється на нуль в одній точці x_0 з інтервалу $(a;b)$, то він дорівнює нулю у всіх точках цього інтервалу.

2) Якщо $W(x)$ перетворюється на нуль в одній точці цього інтервалу $x_0 \in (a;b)$, то він відмінний від нуля у всіх точках цього інтервалу.

Таким чином, для того, щоб n розв'язків (4.1.5) утворювали фундаментальну систему розв'язків рівняння $L(y)=0$ в інтервалі $(a;b)$, достатньо, щоб їх визначник Вронського був відмінний від нуля в одній точці $x_0 \in (a;b)$.

Зокрема розв'язки (4.1.5) з початковими умовами

$$y_1(x_0)=0,...,y^{(n-1)}(0)=0,...,y_n(x_0)=0, y_n'(x_0)=0,...,y_n^{(n-1)}(x_0)=0$$

утворюють фундаментальну систему розв’язків. Така фундаментальна система називається **нормованою.**

Приклад. $y'' - 2y' + y = 0$ має розв'язки $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix}, \; W(0) = 1 \neq 0$$

Таким чином, розв'язки y_1, y_2 утворюють фундаментальну систему розв’язків в $(-\infty; +\infty)$.

Має місце теорема (без доведення)

Теорема. ***Якщо функції*** $y_1, y_2, ..., y_n$ ***утворюють фундаментальну систему розв’язків однорідного лінійного рівняння*** n***-го порядку*** $L(y) = 0$ ***в інтервалі*** $(a; b)$***, то функція***

$$y = \sum_{k=1}^{m} C_k y_k$$

є загальним розв’язком цього рівняння.

Фундаментальна система розв’язком є базисом n-вимірного лінійного простору розв’язків рівняння $L(y) = 0$.

Приклад 1. Розглянемо рівняння

$$y'' - y = 0 \qquad (4.1.7a)$$

це рівняння має фундаментальну систему розв’язків $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^{-x}$ $(-\infty; +\infty)$, тому

$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} = 0$ - загальний розв’язок

Приклад 2. Нехай задано рівняння

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Фундаментальна система розв’язків $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$.

Загальний розв’язок $y = e^x (C_1 + C_2 x)$.

Приклад 3. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y'' - y = 0$$

$y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ - є розв’язком рівняння

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0$$

Отже, y_1, y_2 – утворюють фундаментальну систему розв’язків. Тому загальний розв’язком є розв’язок

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

4.4 Структура загального розв'язку неоднорідного лінійного рівняння

Теорема: ***Загальний розв’язок неоднорідного лінійного рівняння дорівнює сумі якого-небудь частинного розв'язку цього рівняння і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння***

Доведення.

Дано: $L(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$ (4.4.1)

Нехай $y = y_1(x)$ деякий частинний розв’язок цього рівняння, тобто

$$L(y_1(x)) \equiv f(x) \qquad (a < x < b) \tag{4.4.2}$$

Покладемо $y = y_1 + z$ (4.4.3)

де z - деяка функція від x. Тоді рівняння (4.4.1) набере вигляду

$$L(y_1 + z) = f(x) \text{ або } L(y_1) + L(z) = f(x),$$

Звідки в силу тотожності (4.4.2) одержуємо

$$L(z) = 0 \tag{4.4.4}$$

Рівняння (4.4.4) називається лінійним однорідним рівнянням, що відповідає неоднорідному рівнянню (4.4.1).

Нехай $z_1(x), z_2(x), ..., z_n(x)$ $(a < x < b)$ є фундаментальною системою розв’язків однорідного рівняння (4.4.4). Тоді всі розв'язки цього рівняння містяться в формулі його загального рівняння:

$$z = \sum_{k=1}^{n} C_k z_k \tag{4.4.5}$$

Підставляючи це значення z у формулу (4.4.3), одержимо

$$y = y_1 + \sum_{k=1}^{n} C_k z_k \tag{4.4.6}$$

Ця формула містить всі розв'язки неоднорідного лінійного рівняння (4.4.1). загальний розв’язок (4.4.6) дозволяє розв’язувати задачу Коші з будь-якими початковими умовами $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ з відповідної області за рахунок вибору відповідних значень довільних сталих.

Приклад. Розглянемо рівняння $y'' - y = -x$.

За частинний розв'язок можна взяти $y_1 = x$

Відповідне однорідне рівняння

$$z'' - z = 0$$

має загальний розв'язок $z = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ (див. (4.1.17а)).

Таким чином, загальний розв'язок неоднорідного рівняння буде

$$y = x + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

4.5 Принцип накладання

Теорема. ***Якщо в рівнянні (4.4.1) права частина має вигляд*** $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ ***і відомо, що*** y_1 ***є частинний розв'язок рівняння***

$$L(y) = f_2(x),$$

то сума цих частинних розв'язків $y_1 + y_2$ ***є частинним розв'язком рівняння (4.4.1).***

Доведення

Маємо: $L(y_1) \equiv f_1(x), L(y_2) \equiv f_2(x) \Rightarrow$

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = f_1(x) + f_2(x) = f(x),$$

тобто

$$L(y_1 + y_2) = f(x),$$

а це означає, що $y_1 + y_2$ є частинними розв'язком рівняння (4.4.1).

Приклад. $y'' + y = 2e^x + 1$

Для рівняння $y'' + y = 2e^x$ (1) і рівняння $y'' + y = 1$ (2) легко знайти частинні розв'язки:

Для (1): $y_1 = e^x$, для $y'' + y = 1$: $y_2 = 1$. Тому $e^x + 1$ є частинним розв'язком вихідного рівняння. Як відомо загальний розв'язок однорідного рівняння

$$z'' - z = 0$$

має вигляд $z = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ (див. прикл. 3, п.3).

отже, загальний розв'язок вихідного рівняння має вигляд:

$$y = \underbrace{e^x + 1}_{\text{част. розв.}} + \underbrace{C_1 \cos x + C_2 \sin x}_{\text{заг. розв. відпов. однор. рівн.}}$$

4.6 Метод варіації довільної сталої. Метод Лагранжа

(для випадку рівняння $2^{\underline{го}}$ порядку)

Нехай задано неоднорідне лінійне рівняння $2^{\underline{го}}$ порядку

$$L(y) \equiv y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x), \qquad (4.6.1)$$

де $p(x), g(x), f(x)$ - неперервні в інтервалі $(a;b)$

$$L(z) \equiv z'' + p(x)z' + g(x)y = 0 \text{ -} \qquad (4.6.2)$$

відповідне однорідне рівняння.

Нехай z_1, z_2 - фундаментальна система розв'язків рівняння (4.6.2), так що

$$L(z_1) \equiv 0,\ L(z_2) \equiv 0, \qquad (4.6.3)$$

і

$$W = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (4.6.4)$$

$$z = C_1(x)z_1 + C_2(x)z_2, \qquad (4.6.5)$$

де $C_1(x), C_2(x)$ - деякі функції від x, які потрібно визначити. Підставляючи (4.6.5) у (4.6.1) одержимо умову, яку повинні задовольнити дві невідомі функції $C_1(x), C_2(x)$:

$$L(C_1(x)z_1 + C_2(x)z_2) = f(x) \qquad (4.6.6)$$

$$y' = C_1(x)z_1' + C_2(x)z_2' + C_1'(x)z_1 + C_2'(x)z_2$$

Щоб в рівняння (4.6.6) не входили похідні другого порядку від $C_1(x)$ та $C_2(x)$ покладемо

$$C_1'(x)z_1 + C_2'(x)z_2 = 0 \qquad (4.6.7)$$

Тоді

$$y' = C_1(x)z_1' + C_2(x)z_2' \qquad (4.6.8)$$

$$y'' = C_1'(x)z_1' + C_2'(x)z_2' + C_1(x)z_1'' + C_2(x)z_2'' \qquad (4.6.9)$$

Підставимо y, y', y'' з формул (4.6.5), (4.6.7), (4.6.8) в рівняння (4.6.1).

Одержимо:

$$\overbrace{C_1(x)L(z_1) + C_2(x)L(z_2)}^{=0} + C_1'(x)z_1' + C_2'(x)z_2' = f(x)$$

Тут, виходячи з (4.6.3) перші два доданки дорівнюють нулю і матимемо $C_1'(x)z_1' + C_2'(x)z_2' = f(x)$. Тоді, враховуючи (4.6.7), одержуємо систему

$$\begin{cases} C_1'(x)z_1 + C_2'(x)z_2 = 0 \\ C_1'(x)z_1' + C_2'(x)z_2' = f(x) \end{cases}$$

Ця система в силу (4.6.4) має єдиний розв'язок:
$C_1(x)=\varphi_1(x),\ C_2(x)=\varphi_2(x)$ (можна знайти за формулами Крамера)
Оскільки $z_1,\ z_2, z_1',\ z_2'$ - неперервні в $(a;b)$ то і $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ неперервні в $(a;b)$, а, отже,

$$C_1(x)=\int\varphi_1(x)dx+C_1,\quad C_2(x)=\int\varphi_2(x)dx+C_2,$$

де $C_1,\ C_2$ - довільні сталі.

Підставляючи одержані значення функції $C_1(x),\ C_2(x)$ в формулу (4.6.5), одержуємо

$$y=z_1\int\varphi_1(x)dx+z_2\int\varphi_2(x)dx+C_1z_1+C_2z_2 \tag{4.6.10}$$

Покладаючи тут $C_1=C_2=0$, одержимо частинний розв'язок

$$y_1=z_1\int\varphi_1(x)dx+z_2\int\varphi_2(x)dx$$

Таким чином формулу (4.6.10) можна записати у вигляді

$$y=y_1+C_1z_1+C_2z_2,$$

Отже, формула (4.6.10) дає загальний розв'язок вихідного рівняння.

У випадку рівняння n- го порядку всі міркування аналогічні. Приходимо в цьому випадку до системи n рівнянь з невідомим $C_1,\ C_2,...,C_n$.

Приклад. Розглянемо рівняння

$$y''+4y=\frac{1}{\cos 2x}$$

$$\cos 2x\neq 0 \Rightarrow 2x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k \Rightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$$

$$-\frac{\pi}{2}+\pi k\le 2x\le\frac{\pi}{2}+\pi k \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k\le x\le\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi}{2}\left(k-\frac{1}{2}\right)\le x\le\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)$$

$x\in\left(\frac{\pi}{2}\left(k-\frac{1}{2}\right),\ \frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)$ - область неперервності правої частини вихідного рівняння, де $k\in Z$.

Відповідне однорідне рівняння має вигляд:

$$z''+4z=0$$

це рівняння має фундаментальну систему розв'язків

$$z_1=\cos 2x,\ z_2=\sin 2x$$

Загальний розв'язок цього рівняння буде $z=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

Загальний розв'язок вихідного рівняння будемо шукати у вигляді
$y=C_1(x)\cos 2x+C_2(x)\sin 2x$

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0 \\ C_1'(x)(-2\sin 2x) + C_2'(x)(2\cos 2x) = \dfrac{1}{\cos 2x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ C_1'(x) = -\frac{\sin 2x}{2\cos 2x},\ \ C_2'(x) = \frac{1}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ C_1(x) = \frac{1}{4}\ln\left|\cos 2x\right| + C_1;\ \ C_2(x) = \frac{1}{2}x + C_2$$

Підставляючи знайдені значення $C_1(x),\ C_2(x)$, одержимо:

$$y = \frac{1}{4}\cos 2x \ln\left|\cos 2x\right| + \frac{x}{2}\sin 2x + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$$

4.7 Інтегрування однорідного лінійного рівняння n- го порядку з сталими коефіцієнтами (метод Ейлера)

Розглянемо лінійне рівняння n- го порядку

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \qquad (4.7.1)$$

якщо числа $p_i(x) = a_i$, де a_i - дійсні числа, то

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n y = f(x) \qquad (4.7.2)$$

лінійне неоднорідне рівняння n- го порядку із сталими коефіцієнтами. Його розв’язання зводиться до розв’язання відповідного однорідного рівняння:

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n y = 0 \qquad (4.7.3)$$

Ейлер довів, що для цього рівняння завжди можна побудувати фундаментальну систему розв’язків, що складається з елементарних функцій, отже, це рівняння завжди інтегрується у елементарних функціях.

Розглянемо випадок рівняння 2го порядку.

$$L(y) = y'' + py' + qy = 0, \qquad (4.7.4)$$

де p, q- дійсні числа.

За Ейлером будемо шукати розв’язок y у вигляді:

$$y = e^{\lambda x}, \qquad (4.7.5)$$

де λ - число, що підлягає визначенню (дійсне або комплексне). Функція (4.7.5) повинна перетворювати (4.7.4) у тотожність, тобто

$$L(e^{\lambda x}) \equiv 0 \qquad (4.7.6)$$

Зауважимо, що $(e^{\lambda x})^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$, $\qquad$ (4.7.7) тоді

$$L(e^{\lambda x}) = \lambda^2 e^{\lambda k} + p^{\lambda e^{\lambda k}} + qe^{\lambda k} = 0, \qquad (4.7.8)$$

або $L(e^{\lambda x}) = P(\lambda)e^{\lambda x}$, де

$P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$

З формули (4.7.8) випливає, що тотожність (4.7.6) буде виконуватись, якщо λ - є коренем рівняння

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \qquad (4.7.9)$$

Це рівняння називається характеристичним рівнянням, а його корені – характеристичними числами.

Характеристичне рівняння можна скласти по даному диференціальному рівняннях змінюючи y'', y', y на $\lambda^2, \lambda, 1$ відповідно.

Структура фундаментальної системи розв'язків залежить від виду коренів характеристичного рівняння. Розглянемо випадки:

а) Корені різні і дійсні.

Позначимо їх через $\lambda_1, \lambda_2,\ \lambda_1 \neq \lambda_2$. Тоді одержимо два частинних розв'язки диференціального рівняння (4.7.4).

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x} \qquad (4.7.10)$$

Ці розв'язки лінійно незалежні, оскільки

$\dfrac{y_2}{y_1} = \dfrac{e^{\lambda_2 x}}{e^{\lambda_1 x}} = e^{(\lambda_2 - \lambda_1)} \neq const$, а отже

$$W = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = \lambda_2 e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} - \lambda_1 e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x}(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$$

Тоді частинні розв'язки утворюють фундаментальну систему розв'язків, а отже, загальний розв'язок рівняння (4.7.4) буде

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

Приклад 1.

$$y'' - y = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1$$

Отже $y_1 = e^{-x}, y_2 = e^x \Rightarrow y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$

Приклад 2.

$$y'' - 2y = 0$$

$$\lambda^2 - 2y = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$$

$$y_1 = 1,\ y_2 = e^{2x} \Rightarrow y = C_1 + C_2 e^{2x}$$

Приклад 3.

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \qquad y_1 = e^{-x}, y_2 = e^x, y_3 = e^{2x}$$

$$\lambda(\lambda^2 - 1) - 2(\lambda^2 - 1) = 0 \qquad y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x}$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$$

в) Корені характеристичного рівняння рівні, комплексні. Оскільки коефіцієнти цього рівняння дійсні, то корені комплексні – комплексно - спряжені:

$$\lambda_1 = a + ib; \lambda_2 = a - ib$$

Підставляючи $\lambda_1 = a + ib$ в (4.7.5) , одержимо комплексний розв'язок

$$y = e^{(a+ib)x} \qquad (4.7.11)$$

$e^{(a+ib)x} = e^{ax} e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$, тому розв'язок (4.7.11) можна записати так:

$$y = e^{ax} \cos bx + i e^{ax} \sin bx \qquad (4.7.12)$$

Відділяючи у комплексному розв'язку (4.7.12) дійсну та уявну частини одержимо

$$y_1 = e^{ax} \cos bx,\ y_2 = e^{ax} \sin bx \qquad (4.7.13)$$

Ці розв'язки утворюють фундаментальну систему розв'язків $\frac{y_1}{y_2} = tgbx \neq const$. Аналітично, спряженому кореню $\lambda_2 = a - ib$ відповідає два дійсних лінійно – незалежних частинних розв'язки, які утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (4.7.4). Тому

$$y = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx$$

або

$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$ - є загальним розв'язком.

Якщо корені λ_1 і λ_2 - уявні, тобто $\lambda_{1,2} = \pm ib\ (b \neq 0)$, то їм відповідно лінійно незалежні частинні розв'язки:

$y_1 = \cos bx,\ y_2 = \sin bx$ (фундаментальна система).

Тоді загальний розв’язок $y_1 = C_1 \cos bx + C_2 \sin bx$

Приклад 1.

$y'' + y' + y = 0$

$\lambda^2 + \lambda = 1 = 0$

$\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \Rightarrow \lambda + \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} i \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Тому $y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2} x,\ y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2} x,$

$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)$

Приклад 2.

$y''' + 4y'' + 6y' + 4y = 0$

$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4 = 0$

$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1 + i, \lambda_3 = -1 - i$

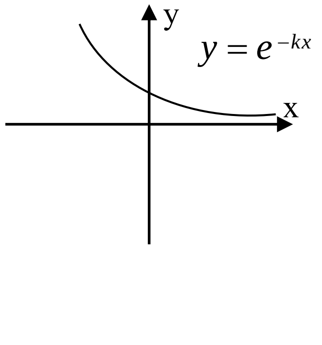
$\lambda_1 = -2 \Rightarrow y_1 = e^{-2x};\ \lambda_{2,3} = -1 \pm i \Rightarrow y_1 = e^{-x} \cos x, y_2 = e^{-x} \sin x$

Загальний розв’язок: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} \cos x + C_3 e^{-x} \sin x \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} \cos x + C_3 e^{-x} \sin x$$

З формули загального розв'язку видно, що всі розв'язки обмежені при $x \to \infty$ і всі нульові розв'язки мають таку властивість: $y \to 0, y' \to 0, y'' \to 0$ *при* $x \to +\infty$

(функції $\cos x$ і $\sin x$ - обмежені).



Приклад 3.

$y''' + y'' + y' + y = 0$	$e^{ix} = \cos x + i \sin x$
$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$	$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$
$\lambda^2(\lambda + 1) + \lambda + 1 = 0$	$y_2 = \cos x,\ y_3 = \sin x$

$(\lambda + 1)\ (\lambda^2 + 1) = 0$

$$\lambda=-1,\quad \lambda^2=-1$$
$$\lambda=\pm i$$
$$y_1=e^{-x},\ y_2=e^{-ix},\ y_3=e^{ix}$$
$$y=C_1e^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x$$

<u>Приклад4.</u>

$$y^{IV}+4y=0$$
$$\lambda^4+4=0$$
$$\lambda_{1,2}=-1\pm i,\ \lambda_{3,4}=-1\pm i.$$

Фундаментальна система має вигляд:

$$\begin{cases} y_1=e^x\cos x,\ y_2=e^x\sin x \\ y_3=e^{-x}\cos x,\ y_4=e^{-x}\sin x \end{cases}$$
$$y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^x(C_3\cos x+C_4\sin x)$$

c) Корені характеристичного рівняння – кратні, дійсні

Нехай λ_1 - дійсний корінь кратності k. Тоді рівняння має частинний розв'язок $y_1=e^{\lambda_1 x}$ і ще $k-1$ розв'язків, що одержуються з даного частинного розв'язку множенням на послідовні степені x, так що кореню λ_1 буде відповідати k - дійсних лінійно – незалежних частинних розв'язків :

$$e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x},\ x^2e^{\lambda_1 x},\ldots,x^{k-1}e^{\lambda_1 x}$$

Загальний розв'язок

$$y=e^{\lambda_1 x}(C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_kx^{k-1})$$

<u>Приклад.</u>

$$y'''-3y''+3y'-y=0$$
$$\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$$
$$(\lambda^3-1)+3\lambda(1-\lambda)=0$$
$$(\lambda-1)+(\lambda^2+\lambda+1-3\lambda)=0$$
$$(\lambda-1)^3=0$$
$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$$
$$y_1=e^x,\ y_2=xe^x,\ y_3=x^2e^x$$
$$y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3x^2e^x=e^x(C_1+C_2x+C_3x^2)$$

д) Корені характеристичного рівняння – кратні, комплексні.

Нехай $\lambda_1 = a + ib$ - корінь кратності k, тоді рівняння має спряжений корінь $\lambda_2 = a - ib$ такої ж кратності k.

Цим спряженим кореням відповідає $2k$ дійсних лінійно – незалежних частинних розв'язку виду

$$\begin{cases} e^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\cos bx, ..., x^{k-1}e^{ax}\cos bx, \\ e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\sin bx, ..., x^{k-1}e^{ax}\sin bx. \end{cases}$$

Якщо $a = 0$, то ці розв'язки, набирають більш простий вигляд

$$\begin{cases} \cos bx,\ x\cos bx, ..., x^{k-1}\cos bx, \\ \sin bx,\ x\sin bx, ..., x^{k-1}\sin bx. \end{cases}$$

<u>Приклад.</u>

$$y^{(IV)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$$

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1 + i,\ \lambda_{3,4} = -1 - i.$$

$\begin{cases} y_1 = e^{-x}\cos x,\ y_2 = e^{x}\cos x \\ y_3 = e^{-x}\sin x,\ y_4 = xe^{x}\sin x \end{cases}$ - утворюють фундаментальну систему розв'язків.

$$y = e^{-x}\left[(C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x\right]$$

Приклад:

$$y^{IV} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$$

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0$$

$$\left(\lambda^2 + 2\lambda + 2\right)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1 + i; \qquad \lambda_{3,4} = -1 - i$$

$$y_1 = e^{-x}\cos x; \qquad y_2 = xe^{-x}\cos x;$$

$$y_3 = e^{-x}\sin x; \qquad y_4 = xe^{-x}\cos x;$$

$$y = e^{-x}\left[(C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x\right]$$

4.8 Розв’язування лінійно-неоднорідних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною (метод невизначених коефіцієнтів)

Означення:

Рівняння виду

$$y'' + py' + qy = f(x) \ , \qquad (4.8.1)$$

де p і q – сталі, називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням II порядку із сталими коефіцієнтами.

Як відомо, загальний розв’язок цього рівняння являє собою суму загального розв’язку відповідного однорідного рівняння та частинного розв’язку неоднорідного рівняння 4.8.1

$$y = y_1 + z$$

В загальному випадку частинний розв’язок неоднорідного рівняння знайти досить складно, проте, в деяких випадках, коли права частина рівняння 4.8.1 має спеціальну структуру, його частинний розв’язок можна знайти без інтегрування.

Результати, щодо структури частинного розв’язку диференціальні рівняння 4.8.1 у випадках спеціальної структури його правої частини $f(x)$ можна звести у таблицю.

Вигляд правої частини	Умови	Частинний розв′язок
1. $f(x) = P_n(x)e^{kx}$, де $P_n(x)$ – многочлен *n-го* степення, *k=const*	k – не є коренем характеристичн ого рівняння	$y_1 = T_n(x)e^{kx}$, $T_n(x)$ – многочлен *n-го* степеня з невідомими коефіцієнтами
	$k = k_1 \neq k_2$	$y_1 = xT_n(x)e^{kx}$
	$k = k_1 = k_2 = ... = k_r$	$y_1 = x^r T_n(x)e^{kx}$ r – число коренів характеристичного рівняння

<table>
<tr><td rowspan="3">2.
$f(x)=e^{\alpha x}\left(A\sin\beta x+B\cos\beta x\right)$</td><td>$\alpha\pm i\beta$ – не є коренем характеристичного рівняння $=k_1\neq k_2$</td><td>$y_1=e^{\alpha x}\left(C\sin\beta x+D\cos\beta x\right)$, C, D – невідомі коефіцієнти</td></tr>
<tr><td>$\alpha\pm i\beta$ – корінь характеристичного рівняння</td><td>$y_1=xe^{\alpha x}\left(C\sin\beta x+D\cos\beta x\right)$</td></tr>
<tr><td>$\alpha\pm i\beta=k_1=k_2=...=k_r$</td><td>$y_1=x^r e^{\alpha x}\left(C\sin\beta+D\cos\beta x\right)$</td></tr>
<tr><td>3.
$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\sin\beta+P_m(x)\cos\beta\right)$</td><td>$\alpha\pm i\beta$</td><td>$y_1=x^r e^{\alpha x}(Q_s(x)\sin\beta x+$
$+L_s(x)\cos\beta x)$
$S=\max\{n,m\}$
r – число коренів характеристичного рівняння, що $=\alpha\pm i\beta$
Q_s, L_s – многочлени, які підлягають визначенню.</td></tr>
</table>

Приклади.

Знайти розв’язок рівняння:

1. $y''-y=xe^{2x}$

$$z''-z=0$$
$$k^2-1=0$$
$$(k-1)(k+1)=0$$
$$k=1 \qquad k=-1$$
$$z_1=e^{x}, \qquad z_2=e^{-x}$$
$$z=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$$

$f(x)=xe^{2x}$ – розглядаємо праву частину.

Число $k=2$, не є коренем характеристичного рівняння, тоді частинний розв’язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$y_1(x)=(Ax+B)e^{2x}$

$$y'(x) = Ae^{2x}(Ax+B)2e^{2x} = e^{2x}(A+2Ax+2B) = e^{2x}(2A+A+2B)$$

$$y''(x) = 2e^{2x}(2A+A+2B) + C^{2x}(2A) = e^{2x}(4A+4A+4B)$$

$$e^{2x}(4Ax+4A+4B) - e^{2x}(Ax+B) = xe^{2x}$$

$$4Ax+4A+4B-Ax-B = x$$

$$3Ax+4A+3B = x$$

$$\begin{cases} 3A = 1, \\ 4A+3B = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{3}, \\ B = -\dfrac{4}{9}. \end{cases}$$

$$y_1 = \left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}\right)e^{2x}$$

$$y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}\right)e^{2x} + C_1e^x + C_2e^{-x}$$

Знайти загальний розв'язок рівняння:

2. $y'' - y = xe^x$

Для цього прикладу загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $z'' - z = 0$ знайдено у попередньому прикладі $z = C_1e^x + C_2e^{-x}$.

Корені характеристичного рівняння *k=1 і k=-1*. В нашому випадку *k=1* є коренем характеристичного рівняння кратності 1, тому частинний розв'язок даного рівняння має вигляд:

$$y_1(x) = x(Ax+B)e^x = \left(A_{x^2} + B_x\right)e^x$$

$$y_1'' = \left(2Ax + B + Ax^2 + Bx\right)e^x = \left(Ax^2 + (2A+B)x + B\right)e^x$$

$$y_1'' = \left[Ax^2 + (4A+B)x + 2A + 2B\right]e^x$$

$$\left[Ax^2 + (4A+B)x + 2A + 2B\right]e^x - \left(Ax^2 + Bx\right)e^x = xe^x$$

$$4Ax + 2A + 2B = x$$

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ A+B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{4} \\ B = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$y = x\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right) + C_1e^x + C_2e^{-x}$$

4.9. Рівняння Ейлера

Частинним випадком лінійного диференціального рівняння із змінними коефіцієнтами є рівняння виду:

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_{n-1}(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2}(ax+b)^{n-2} y^{(n-2)} + ... + a_1(ax+b)y' + a_0 y = f(x), \quad (4.9.1)$$

де a_i, *a, b* – дійсні числа, *f(x)* – функція незалежної змінної *x*.

Дане рівняння називається рівнянням Ейлера, якщо *a=1, b=0*, то рівняння Ейлера набере вигляду:

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}x^{n-2}y^{(n-2)} + ... + a_1 xy' + a_0 y = f(x) \quad (4.9.2)$$

Якщо ввести заміну незалежної змінної за формулою

$$ax+b=e^t \quad (4.9.3)$$

для випадку (4.9.1) або $x=e^t$ (4.9.4) для випадку (4.9.2), то з (4.9.3) матимемо $t=\ln(ax+b)$, а з (4.9.4) – $t=\ln x$.

В цьому випадку рівняння Ейлера таким чином зведеться до лінійного рівняння із сталими коефіцієнтами.

$$\begin{cases} y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{ax+b}a\dfrac{dy}{dt} = ae^{-t}\dfrac{dy}{dt}, \\ y'' = \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{dy}{dx}\right] = \dfrac{d}{dy}\left(ae^{-t}\dfrac{dy}{dt}\right) = -ae^{-t}\dfrac{dt}{dx}\dfrac{dy}{dt} + ae^{-t}\dfrac{d^2y}{dt^2}\dfrac{dt}{dx} = \\ = -ae^{-t}\dfrac{a}{ax+b}\dfrac{dy}{dt} + ae^{-t}\dfrac{d^2y}{dt^2}\dfrac{a}{ax+b} = -a^2e^{-2t}\dfrac{dy}{dt} + a^2e^{-2t}\dfrac{d^2y}{dt^2} = a^2e^{-2t}\left(\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\right), \\ y''' = a^3e^{-3t}\left(\dfrac{d^3y}{dt^3} - 3\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt}\right). \end{cases} \quad (4.9.5)$$

Підставляючи одержані вирази (4.9.5) у (4.9.1) одержимо лінійне диференціальне рівняння із сталими коефіцієнтами.

<u>Приклад:</u>

$$x^2y'' + 5xy' + 3y = 0$$

Рівняння Ейлера типу (4.9.2). Підстановка: $x=e^t$ за формулою (4.9.4). На основі (4.9.5) при *a=1* матимемо:

$$y' = e^{-t}\frac{dy}{dt}$$

$$y'' = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$e^{2t}e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+5e^{t}e^{-t}\frac{dy}{dt}+3y=0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}+5\frac{dy}{dt}+3y=0$$

$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+3y=0$ – лінійне однорідне диференціальне рівняння II порядку.

$k^2+4k+3=0$ – характеристичне рівняння.

$k_1=-1$

$k_2=-3$

$y_1=e^{-t}$

$y_2=e^{-3t}$

$y=C_1e^{-t}+C_2e^{-3t}$; $\quad t=\ln x$

$y=C_1e^{-\ln x}+C_2e^{-3\ln x} \;\Rightarrow\; y=C_1x^{-1}+C_2x^{-3}$

$y=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^3}$.

Питання для самоконтролю

1. Який вигляд має лінійне диференціальне рівняння n-го порядку?
2. Чим лінійне однорідне рівняння відрізняється від лінійного неоднорідного?
3. Що називають лінійним диференціальним оператором n-го порядку і які його основні властивості?
4. Як можна записати лінійні однорідне і неоднорідне рівняння з використанням лінійного диференціального оператора?
5. Чи є лінійна комбінація зі сталими коефіцієнтами частинних розв’язків лінійного однорідного рівняння розв’язком цього ж рівняння?
6. Які функції називають лінійно незалежними та лінійно залежними на інтервалі? Наведіть приклади таких функцій.
7. Який вигляд має лінійне диференціальне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами?
8. Що називають характеристичним рівнянням, яку назву мають корені характеристичного рівняння?

9. Який вигляд має формула загального розв’язку лінійного однорідного рівняння n-го порядку у випадку простих дійсних характеристичних чисел?

10. Які два дійсні лінійно незалежні частинні розв’язки лінійного однорідного рівняння відповідають парі комплексних характеристичних чисел $a \pm bi$?

11. Який вигляд має рівняння Ейлера?

12. За допомогою якої заміни незалежної змінної рівняння Ейлера можна звести до рівняння зі сталими коефіцієнтами?

13. Яку структуру має загальний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння n-го порядку?

14. Який вигляд має частинний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння, якщо його права частина є сумою декількох доданків?

15. У чому полягає метод варіації довільних сталих інтегрування лінійного неоднорідного рівняння n-го порядку?

16. У чому полягає метод Коші відшукання частинних розв’язків лінійного неоднорідного рівняння n-го порядку?

17. Який вигляд має формула Коші?

18. У чому полягає метод невизначених коефіцієнтів знаходження частинних розв’язків лінійного неоднорідного рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами? Якого вигляду має бути права частина рівняння, щоб можна було використати цей метод?

Тема 5. Системи лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

5.1 Основні поняття та означення.
5.2 Задача Коші. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші.

5.1. Основні поняття та означення

Означення. Нормальною системою диференціальних рівнянь називається система виду:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, ..., x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, ..., x_n) \\ .... \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, ..., x_n) \end{cases} \qquad (5.1.1)$$

В системі (5.1.1) невідомими є n функцій $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$.

Особливості нормальної системи

1. Всі рівняння першого порядку.
2. Всі рівняння розв'язні відносно похідних.

Якщо нормальна система рівнянь лінійна, а коефіцієнти при невідомих функціях сталі, то вона має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + \phi_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + \phi_2(t) \\ .... \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + \phi_n(t) \end{cases}$$

Можна записати і у матричній формі:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ ... \\ \phi_n(t) \end{pmatrix},$$

$$\text{або} \quad \frac{d}{dt}X = AX + \Phi \qquad (5.1.3)$$

Якщо матриця-стовпець Φ складається з нульових елементів, тобто $\phi_i(t) = 0$ для будь-яких *i=1…n*, то система називається однорідною.

5.2. Задача Коші. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші

Задача Коші для нормальної системи формулюється так:

За даними рівняннями і початковими значеннями $M_0\left(t_0, x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ знайти розв'язок системи, який задовольняє початковим умовам $x_1(t_0) = x_1^0, ..., x_n(t_0) = x_n^0$.

Теорема Коші: якщо в системі (5.1.1) всі функції $f_i\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right)$ неперервні разом із своїми частинними похідними по x_i в деякій *(n+1)* вимірній області *D* ($D \subset R_{n+1}$), то в цій області існує єдиний розв'язок

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(t) \\ x_2 &= x_2(t) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= x_n(t) \end{aligned} \qquad (5.2.2)$$

який задовольняє початкові умови

$$x_1(t_0) = x_1^0, ..., x_n(t_0) = x_n^0 \qquad (5.2.3)$$

Очевидно, змінюючи в області *D* точку $M_0\left(t_0, x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$, одержимо нескінченну множину розв'язків, які залежатимуть від довільних сталих

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1\left(t, C_1, C_2, ..., C_n\right), \\ x_2 &= x_2\left(t, C_1, C_2, ..., C_n\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= x_n\left(t, C_1, C_2, ..., C_n\right) \end{aligned} \qquad (5.2.4)$$

Ці функції визначають загальний розв'язок. Можна одночасно знайти сталі $C_1, C_2, ..., C_n$ із системи

$$\begin{cases} x_1(t_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = x_1^0 \\ x_2(t_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = x_2^0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n(t_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = x_n^0 \end{cases} \qquad (5.2.5)$$

Розглянемо лінійну систему (5.1.2), в якій коефіцієнти змінні $a_{i,j} = a_{i,j}(t)$.

Теорема існування і єдиності для лінійної системи із змінними коефіцієнтами: якщо коефіцієнти $a_{i,j}(t)$ неперервні на деякому відрізку $[\alpha;\beta]$, то існує єдиний і неперервний розв'язок системи $x_i = x_i(t)$, $i=1\dots n$, який задовольняється рівнянням системи і будь-яким початковим умовам (5.2.3), для довільного t_0 із проміжку $[\alpha;\beta]$.

Нормальну систему рівнянь можна звести до рівносильного для неї диференціального рівняння порядок якого дорівнює числу рівнянь системи або менше від нього.

Приклад:
Знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

Який задовольняє початкові умови $x(0) = 6; y(0) = 12$.
Розв'язок шукаємо у вигляді $x = x(t); y = y(t)$.

1. Продиференціюємо друге рівняння системи по змінній t

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$$

2. З першого рівняння підставимо вираз для похідної $\dfrac{dx}{dt}$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2(x + 2y) + \frac{dy}{dt}$$

3. З другого рівняння матимемо:

$$2x = \frac{dy}{dt} - y$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2x + 4y + \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dt} - y + 4y + \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\frac{dy}{dt} + 3y$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 3y = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda_1 = -1; \lambda_2 = 3$$

$$y = C_1e^{-t} + C_2e^{3t}$$

$$\frac{dy}{dt} = -C_1e^{-t} + 3C_2e^{3t}$$

$$2x = -C_1e^{-t} + 3C_2e^{3t} - C_1e^{-t} - C_2e^{3t}$$

$$2x = -2C_1e^{-t} + 2C_2e^{3t}$$

$$x = -C_1e^{-t} + C_2e^{3t}$$

$$\begin{cases} x = -C_1e^{-t} + C_2e^{3t} \\ y = C_1e^{-t} + C_2e^{3t} \end{cases} \text{– загальний розв'язок}$$

$$\begin{cases} 6 = -C_1e^0 + C_2e^0 \\ 12 = C_1e^0 + C_2e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = -C_1 + C_2 \\ 12 = C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3e^{-t} + 9e^{3t} \\ y = 3e^{-t} + 9e^{3t} \end{cases} \text{– розв'язок задачі.}$$

5.3. Загальний, частинний і особливий розв'язки

Нехай D – область, в кожній точці якої виконуються умови теореми існування і єдиності.

Означення. Сукупність n функцій

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, c_1, ..., c_n) \\ \quad\quad ... \\ y_n = \varphi_n(x, c_1, ..., c_n) \end{cases} \tag{5.3.1}$$

визначених в деякій області зміни змінних $x, c_1, ..., c_n$ і які мають неперервні частинні похідні за x, будемо називати загальним розв'язком системи в області D, якщо систему (5.3.1) можна розв'язати відносно $c_1, ..., c_n$

$$\begin{cases} c_1 = \psi_1(x, y_1, ..., y_n) \\ \quad ... \\ c_n = \psi_n(x, y_1, ..., y_n) \end{cases}, \tag{5.3.2}$$

а сукупність функцій (5.3.1) є розв'язком диференціального рівняння $\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, ..., y_n),\ i = 1,2,...,n$ для всіх сталих, визначених співвідношеннями (5.3.2), коли $(x, y_1, ..., y_n) \in D$.

Якщо в (5.3.1) роль сталих відіграють початкові умови

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, x_0, y_1^{(0)}, ..., y_n^{(0)}) \\ \quad ... \\ y_n = \varphi_n(x, x_0, y_1^{(0)}, ..., y_n^{(0)}) \end{cases}, \tag{5.3.3}$$

то (5.3.3) називається загальним розв'язком в формі Коші.

<u>Означення</u> Розв'язок системи диференціальних рівнянь $\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, ..., y_n),\ i = 1,2,...,n$ називається частинним якщо він складається з точок єдиності розв'язку задачі Коші. Його можна отримати при конкретних сталих, включаючи $\pm\infty$.

<u>Означення.</u> Розв'язок системи диференціальних рівнянь $\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, ..., y_n),\ i = 1,2,...,n$ називається особливим, якщо в кожній точці його порушується єдиність розв'язку задачі Коші.

Розглянемо одну з рівностей (5.3.2)

$$\psi_i(x, y_1, ..., y_n) = c_i. \tag{5.3.4}$$

Функція $\psi_i(x, y_1, ..., y_n)$ на будь-якому частинному розв′язку приймає постійні значення, тобто

$$\psi_i(x, \varphi_1(x, c_1, ..., c_n), ..., \varphi_n(x, c_1, ..., c_n) = c_i.$$

Ця функція називається інтегралом.

<u>Означення</u> (перше означення інтегралу). Функція $\psi(x, y_1, ..., y_n)$, визначена на D і яка не приводиться до сталої, називається інтегралом системи диференціальних рівнянь $\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, ..., y_n),\ i = 1,2,...,n$ в області D, якщо при заміні $y_1, ..., y_n$ будь-яким частинним розв'язком цієї системи, вона приймає постійне значення.

На частинних розв'язках системи $\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, ..., y_n),\ i = 1,2,...,n$ $d\psi \equiv 0$, тобто

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y_1}dy_1 + ... + \frac{\partial \psi}{\partial y_n}dy_n \equiv 0.$$

Це записується таким чином

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} f_1(x, y_1, ..., y_n)dx + ... + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} f_n(x, y_1, ..., y_n)dx \equiv 0. \quad (5.3.5)$$

Означення (друге означення інтегралу). Функція $\psi(x, y_1, ..., y_n)$ неперервно диференційована в області D і така, що $\frac{\partial \psi}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial \psi}{\partial y_n}$ не дорівнюють одночасно нулю в цій області, називається інтегралом системи диференціальних рівнянь $\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, ..., y_n),\ i = 1,2,...,n$ в області D, якщо $d\psi \equiv 0$.

Співвідношення (5.3.5) еквівалентне наступному

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} f_1(x, y_1, ..., y_n) + ... + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} f_n(x, y_1, ..., y_n) \equiv 0.$$

Якщо функція є інтегралом в смислі другого означення, то вона буде інтегралом і в смислі першого. Обернене не вірно – $\psi(x, y_1, ..., y_n)$ може не мати частинних похідних.

Рівність $\varphi(x, y_1, ..., y_n) = c$ називається першим інтегралом системи диференціальних рівнянь.

Теорема. Якщо інтеграли $\psi_1, ..., \psi_n$ мають неперервні частинні похідні, то для незалежності їх необхідно і достатньо, щоб якобіан від функцій $\psi_1, ..., \psi_n$ за $y_1, ..., y_n$ не перетворювався тотожно в нуль

$$\frac{D(\psi_1, ..., \psi_n)}{D(y_1, ..., y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & ... & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ . & . & . \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & ... & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (5.3.6)$$

Доведення витікає з відповідного розділу математичного аналізу: необхідною і достатньою умовою незалежності m функцій $u_1, ..., u_m$ від n змінних $x_1, .., x_n$ $(m \le n)$ заключається в тому, щоб хоча б один з функціональних визначників який можна утворити з стовпців таблиці

$$\begin{matrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ . & . & . \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{matrix}$$

не дорівнює тотожно нулю.

Якщо ми маємо k інтегралів $1 \le k \le n$, то вони будуть незалежними тоді і тільки тоді, коли хоча б один з функціональних визначників k–го порядку, складений з стовпців таблиці

$$\begin{matrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \psi_k}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \psi_k}{\partial y_n} \end{matrix}$$

не дорівнює тотожно нулю.

Припустимо, що інтеграли $\psi_1,...,\psi_n$ мають неперервні частинні похідні за $x, y_1,..., y_n$.

Теорема. Нормальна система n рівнянь не може мати більш ніж n незалежних інтегралів.

Доведення. Твердження теореми рівносильно тому, що якщо відомо $n+1$ інтеграл системи диференціальних рівнянь $\psi_1,...,\psi_n$, ψ, то вони не можуть бути незалежними. Розглянемо два випадки.

а) $\psi_1,...,\psi_n$ – залежні, то і $\psi_1,...,\psi_n$, ψ – теж залежні.

б) $\psi_1,...,\psi_n$ – не залежні. Тоді $\frac{D(\psi_1,...,\psi_n)}{D(y_1,...,y_n)} \ne 0$. Так як $\psi_1,...,\psi_n$, ψ – інтеграли системи диференціальних рівнянь, то

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} f_1 + ... + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} f_n = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial x} + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} f_1 + ... + \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} f_n = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} f_1 + ... + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} f_n = 0.$$

Ця система однорідних рівнянь показує, що вона має не нульовий розв'язок $1, f_1,..., f_n$. Тому

$$\frac{D(\psi, \psi_1,...,\psi_n)}{D(x, y_1,..., y_n)} = 0.$$

З математичного аналізу відомо, що в цьому разі $\psi = \Phi(\psi_1,...,\psi_n)$, тобто функції $\psi_1,...,\psi_n, \psi$ – залежні.

5.4. Лінійні системи звичайних диференціальних рівнянь

Розглянемо лінійну однорідну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + ... + a_{in}y_n,\ i = 1,2,...,n, \qquad (5.4.1)$$

або в матричній формі

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y,\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix},\ A(x) = \{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n}. \qquad (5.4.2)$$

Тут $A(x)$ – неперервна за $a < x < b$ матриця розмірності $n \times n$. Якщо функції $y^{(1)}(x),...,y^{(m)}(x)$ – вектор-розв'язки системи (5.4.2),то і

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i y^{(i)}(x), \qquad (5.4.3)$$

де $c_1,...,c_m$ – довільні сталі, теж є розв'язком системи (5.4.2).

Дійсно, введемо оператор

$$L = \frac{d}{dx} - A, \qquad (5.4.4)$$

який має властивості:

а) $L(cy) = cL(y)$;

б) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$.

З допомогою оператора L систему диференціальних рівнянь (5.4.2) запишемо так

$$L(y) = 0. \qquad (5.4.5)$$

Якщо $L(y^{(i)}) = 0, i = 1,2,...,m$, то в силу властивостей а), б) функція (5.4.3) також є розв'язком системи (5.4.2).

Лінійно незалежні розв'язки. Теореми про лінійно залежні і незалежні розв'язки

Означення Вектор-розв'язки $y^{(1)}(x),...,y^{(m)}(x)$ системи диференціальних рівнянь (5.4.2) називаються лінійно залежними на (a,b), якщо існують такі сталі $c_1,...,c_m$, які не дорівнюють нулю одночасно, що

$$c_1 y^{(1)}(x) + ... + c_m y^{(m)}(x) \equiv 0,\ a < x < b,$$

в противному випадку система розв'язків називається лінійно незалежною на (a,b).

Теорема. Якщо для всіх $x_0 \in (a,b)$ система векторів

$$y^{(1)}(x_0),\ldots,y^{(m)}(x_0) \qquad (5.4.6)$$

лінійно залежна, то відповідні їм розв'язки $y^{(1)}(x),\ldots,y^{(m)}(x)$ системи диференціальних рівнянь (5.4.2) також лінійно залежні.

Доведення. Припустимо, що вектори (5.4.6) лінійно залежні, тобто

$$c_1 y^{(1)}(x_0)+\ldots+c_m y^{(m)}(x_0)=0\,, \qquad (5.4.7)$$

де не всі $c_1,\ldots,c_m$ дорівнюють нулю. Розглянемо вектор-функцію з тими ж сталими

$$y(x)=c_1 y^{(1)}(x)+\ldots+c_m y^{(m)}(x)\,. \qquad (5.4.8)$$

Вектор $y(x)$ задовольняє системі диференціальних рівнянь (5.4.2) і, в силу (5.4.7), $y(x_0)=0$. На основі теореми існування і єдиності отримуємо, що

$$y(x)=c_1 y^{(1)}(x)+\ldots+c_m y^{(m)}(x)\equiv 0\,. \qquad (5.4.9)$$

Співвідношення (5.4.9) означає, що $y^{(1)}(x),\ldots y^{(m)}(x)$ лінійно залежні.

Означення. Система n лінійно незалежних розв'язків

$$y^{(1)}(x),\ldots y^{(n)}(x) \qquad (5.4.10)$$

системи диференціальних рівнянь (5.4.2) називається фундаментальною системою розв'язків або базисом цієї системи рівнянь.

Теорема. Система звичайних диференціальних рівнянь (5.4.2) має фундаментальну систему розв'язків. Якщо (5.4.10) – фундаментальна система розв'язків системи диференціальних рівнянь (5.4.2), то загальний розв'язок записується у вигляді

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i y^{(i)}(x)\,, \qquad (5.4.11)$$

де $c_1,\ldots,c_n$ – довільні сталі.

Доведення. Доведемо першу частину теореми. Задамо систему з n лінійно незалежних векторів $h^{(1)},\ldots,h^{(n)}$. Побудуємо систему розв'язків $y^{(1)}(x),\ldots,y^{(n)}(x)$ для системи диференціальних рівнянь (5.4.2) з початковими умовами $y^{(i)}(x_0)=h^{(i)},\ i=1,2,\ldots,n$. Так як вектори $h^{(1)},\ldots,h^{(n)}$ лінійно незалежні, то в вектори $y^{(i)}(x),\ i=1,2,\ldots,n$ також є лінійно незалежними, тобто складають фундаментальну систему розв'язків.

Доведемо другу частину теореми, тобто покажемо, що з допомогою формули (5.4.11) можна розв'язати будь-яку задачу Коші

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y, \quad y(x_0) = h. \tag{5.4.12}$$

Покажемо, що розв’язок задачі (5.4.12) можна записати в вигляді

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i y^{(i)}(x), \tag{5.4.13}$$

де $\bar{c}_i$ – постійні числа.

Числа $\bar{c}_i$ визначаються з системи

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y^{(i)}(x) = h, \tag{5.4.14}$$

так як вектори $y^{(i)}(x), i = 1,2,...,n$ лінійно незалежні, то вектори $y^{(i)}(x_0),\ i = 1,2,...,n$ також є лінійно незалежними. Тому визначник системи (5.4.14) відмінний від нуля. Таким чином, система (5.4.14) має єдиний розв’язок $\bar{c}_i,\ \ i = 1,2,...,n$. Теорема доведена.

<u>Приклад.</u> Розв’язати систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + ay \end{cases}.$$

Приведемо дану систему до диференціального рівняння другого порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2a\frac{dx}{dt} - (1 + a^2)x.$$

Звідки отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2a\frac{dx}{dt} + (1 + a^2)x = 0.$$

Запишемо та розв’яжемо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 2a\lambda + (1 + a^2) = 0$. Знайдемо $\lambda_{1,2} = a \pm i$. Тоді

$$x = e^{at}(c_1 \cos t + c_2 \sin t), \ y = \frac{dx}{dt} - ax = e^{at}(-c_1 \sin t + c_2 \cos t)$$

– загальний розв’язок.

<u>Приклад.</u> Розв’язати систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{y}{t} \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{x}{t} \end{cases}, \ t > 0 .$$

Складемо і віднімемо почленно два рівняння, отримаємо

$$\frac{d(x+y)}{dt} = -\frac{1}{t}(x+y) ,$$

$$\frac{d(x-y)}{dt} = \frac{1}{t}(x-y) .$$

Звідки $x + y = \dfrac{c_1}{t}$, $x - y = c_2 t$, тобто

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c_1}{t} + c_2 t\right) \\ y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c_1}{t} - c_2 t\right) \end{cases}$$

– загальний розв'язок нашої системи.

<u>Приклад.</u> Перевірити, чи є першим інтегралом системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y^2 - t}{x} \end{cases}$$

функції а) $z = t^2 + 2xy$; б) $z = x - ty^2$.

Обчислимо повні похідні по t від заданих функцій на розв’язках системи.

а) $\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{(6.66)} = 2t + 2\dfrac{dx}{dt}y + 2x\dfrac{dy}{dt} = 2t - 2y^2 + 2x\dfrac{y^2 - t}{x} = 2t - 2y^2 + 2y^2 - 2t \equiv 0$ – є інтегралом;

б) $\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{(6.66)} = \dfrac{dx}{dt} - y^2 - 2ty\dfrac{dy}{dt} = -y - y^2 - 2ty\dfrac{y^2 - t}{x} \neq 0$ – не є інтегралом.

Питання для самоконтролю

1. Який загальний вигляд має система звичайних диференціальних рівнянь першого порядку?
2. Що називають розв’язком системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку на деякому інтервалі?
3. Який вигляд має нормальна система диференціальних рівнянь першого порядку?
4. Як формулюється задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку?
5. Який геометричний та механічний зміст системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку?
6. Які сукупності функцій називають лінійно незалежними (лінійно залежними) на деякому інтервалі? Наведіть приклади таких сукупностей функцій.
7. Що називають фундаментальною системою розв’язків лінійної однорідної системи на деякому інтервалі? Яка її роль у побудові загального розв’язку лінійної однорідної системи?
8. Як знайти загальний розв’язок лінійної неоднорідної системи, якщо відомий її частинний розв’язок і загальний розв’язок відповідної однорідної системи?

IV. ЗРАЗОК ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

1.	Як називається розв'язок диференціального рівняння, якого не можна дістати з загального інтеграла при жодному значенні сталої *C*?						
A.	*Загальним розв'язком*	B.	*Частинним розв'язком*	C.	*Особливим розв'язком*	D.	*Розв'язком задачі Коші*
2.	Рівняння виду $y' + p(x)y^2 + q(x)y = r(x)$ називається …						
A.	*Рівнянням Ріккаті*	B.	*Рівнянням Міндінга - Дарбу*	C.	*Рівняння Лагранжа*	D.	*Рівняння Бернуллі*
3.	Диференціальне рівняння I порядку, не розв'язне відносно похідної називають співвідношення вигляду						
A.	$F(y, y',..., y^{(n)}) = 0$	B.	$F(x, y^{(n)}) = 0$	C.	$F(y, y') = 0$	D.	$F(x, y, y') = 0$
4.	Крива на площині *xOy,* у кожній точці якої поле має однаковий напрямок, називається …						
A.	*Інтегральною кривою*	B.	*Ламаною Ейлера*	C.	*Ізокліною*	D.	*Сім'єю кривих*
5.	Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в області *D* площини *xOy*, то існує неперервна разом із своєю похідною першого порядку функція $y = \varphi(x)$, яка є розв'язком диференціального рівняння $y' = f(x, y)$, що задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$, де (x_0, y_0)						
A.	*Теорема Коші – Пікара*	B.	*Теорема Коші*	C.	*Теорема Пеано*	D.	*Теорема Лагранжа*
6.	Рівняння виду $A(x)\dfrac{dy}{dx} + B(x)y = C(x)$, де *A(x), B(x), C(x)* – неперервні функції на деякому проміжку <*a, b*>, причому $\forall\, x \in <a, b>\ A(x) \neq 0$, називається						
A.	*Диференціальним рівнянням, що зводиться до лінійних*	B.	*Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку*	C.	*Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними*	D.	*Диференціальні рівняння, які зводяться до однорідних*
7.	*y=0* є частинним розв'язком рівняння Бернуллі при …						
A.	$n<1$	B.	$n>1$	C.	$0<n<1$	D.	$n<0$
8.	Якщо для рівняння Ріккаті відомі два частинних розв'язки, то рівняння розв'язуються за допомогою однієї квадратури, якщо три – то розв'язується						
A.	*Без квадратур*	B.	*З двома квадратурами*	C.	*З однією квадратурою*	D.	*З трьома квадратурами*
9.	Якщо у рівнянні $y' = f(x, y)$ права частина зберігає свій знак, то будь-який розв'язок рівня зростає у кожній своїй точці перетину з ізокліною при умові:						
A.	$f(x, y) = 0,$ $y' = 0$	B.	$f(x, y) < 0,$ $y' < 0$	C.	$f(x, y) > 0,$ $y' < 0$	D.	$f(x, y) > 0,$ $y' > 0$
10.	Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння має вигляд:						
A.	$y = xe^{-\int p(x)dx}$	B.	$y = Ce^{\int p(x)dx}$	C.	$y = Ce^{-\int p(x)dx}$	D.	$y = xe^{\int p(x)dx}$

11.	Якщо права частина рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$ має вигляд $f(x) = P_n(x)e^{kx}$, де $P_n(x)$ – многочлен n-го степення, $k = const$, $k = k_1 = k_2 = ... = k_n$, то частинний розв'язок має вигляд …						
A.	$y_1 = xT_n(x)e^{kx}$	B.	$y_1 = x^r T_n(x)e^{kx}$	C.	$y_1 = xT_n(x)e^{x}$	D.	$y_1 = T_n(x)e^{x}$
12.	Якщо шуканий розв'язок представлено як інтеграл від елементарної функції, то кажуть, що розв'язок даного диференціального рівняння знайдено						
A.	У квадратурах	B.	У параметричній формі	C.	Неявно	D.	Невірно
13.	Диференціальне рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$ називають однорідним, якщо $f(x, y)$						
A.	Однорідна функція нульового степеня	B.	Однорідна функція n-го степеня	C.	Дорівнює нулю	D.	Неперервна функція
14.	Якщо інтегрувальний множник $\mu(x) = e^{\int \varphi(x)dx}$, то						
A.	$\varphi(x) = \dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P}$	B.	$\varphi(x) = \dfrac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P}$	C.	$\varphi(x) = \dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$	D.	$\varphi(x) = \dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-Q}$
15.	Функція $y(x) = u(x) + iv(x)$ $(i = \sqrt{-1})$ називається комплексним розв'язком однорідного лінійного рівняння $L(y) = 0$ в інтервалі (a, b), якщо вона перетворює це рівняння у тотожність						
A.	$L(u(x) - iv(x)) \equiv 0$	B.	$L(iu(x) + v(x)) \equiv 0$	C.	$L(v(x) + iu(x)) \equiv 0$	D.	$L(u(x) + iv(x)) \equiv 0$

ЛІТЕРАТУРА

а) Основна

1. Диференціальні рівняння: Навч. посіб. для студ. мат. спец. вищ. навч. закл. / М.І. Шкіль, В.М. Лейфура, П.Ф. Самусенко. – К.: Техніка, 2003. – 366 с.
2. Диференціальні рівняння: Навч. посібник / А.М. Самойленко, М.О. Перестюк, І.О. Парасюк. – К.: Либідь, 1994. – 360 с.
3. Диференціальні рівняння в задачах: Навч. посібник / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк. – К.: Либідь, 2003. – 504 с.
4. Диференціальні та інтегральні рівняння: Підручник / С.А. Кривошея, М.О. Перестюк, В.М. Бурим. – К.: Либідь, 2004. – 408 с.
5. Шкіль М. І. Математичний аналіз: Підручник / У 2 ч. Ч.2. – К.: Вища школа, 2005. – 510 с.

б) Додаткова

6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
7. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. Ч.2. – К.: Вища шк., 1978. – 392 с.
8. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. - М.: Наука, 1979. – 720 с.
9. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1963. – 547 с.
10. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1970. – 332 с.
11. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. – Т. I. – М.: Наука, 1955. – 440с.
12. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа, Т. II. – М.: Наука, 1956. – 464 с.