Лифты линейных 2-геодезических диффеоморфизмов первого типа в касательные расслоения первого порядка

Филимон БЛАГОДЫР, Людмила БЛАГОДЫР

Уманский государственный педагогический университет имени Павла Тычины. Умань. Украина

blagodirla@gmail.Com

Пусть между двумя многообразиями $\overline{A_n}$ и A_n с аффинными связностями без кручения $\bar{\nabla}$ и ∇ установлен диффеоморфизм $\rho : \overline{A_n} \to A_n$ и $x^1, x^2, \ldots, x^n$ - общая по этому диффеоморфизму локальная система координат, а

$$P_{ij}^h\left(x\right) = \Gamma_{ij}^h\left(x\right) - \bar{\Gamma}_{ij}^h\left(x\right) \qquad (1)$$

тензор деформации аффинной связности $\bar{\nabla}$ пространства $\overline{A_n}$ при отображении ρ на пространство A_n. Тогда между касательными расслоениями устанавливается диффеоморфизм $d\rho : T\left(\overline{A_n}\right) \to T\left(A_n\right)$, а индуцированные координаты $x^1, x^2, \ldots, x^n, y^1, y^2, \ldots, y^n$ являются общими по этому диффеоморфизму локальными координатами. Рассмотрим на касательных расслоениях $T\left(\overline{A_n}\right)$ и $T\left(A_n\right)$ аффинные связности без кручения $\bar{\nabla}^I$ и ∇^I соответственно. Тензор $\tilde{P} = P^I$ является их тензором аффинной деформации относительно индуцированного диффеоморфизма $d\rho$, т.е.

$$\tilde{P}_{IJ}^H\left(x, y\right) = \tilde{\Gamma}_{IJ}^H\left(x, y\right) - \tilde{\bar{\Gamma}}_{IJ}^H\left(x, y\right) \qquad (2)$$

Предположим, что ρ является линейным 2-геодезическим диффеоморфизмом первого типа $\pi_1\left(2\right)$ [3]. Тогда, в соответствии с основными уравнениями этого типа в безиндексной форме, имеем

$$P\left(X,Y\right) = \frac{1}{2}\omega\left(X\right)Y + \frac{1}{2}\omega\left(Y\right)X + \frac{1}{2}\sigma\left(X\right)F\left(Y\right) + \frac{1}{2}\sigma\left(Y\right)F\left(X\right) \qquad (3)$$

$$\nabla_X F\left(Y\right) + \nabla_Y F\left(X\right) + 2F\left(P\left(X,Y\right)\right) = \mu\left(X\right)Y + \mu\left(Y\right)X + \nu\left(X\right)F\left(Y\right) + \nu\left(Y\right)F\left(X\right) \qquad (4)$$

Используя соответствующие формулы, возьмем полный лифт равенства (3)

$$\begin{aligned} \tilde{P}\left(X^I, Y^I\right) = \left[P\left(X,Y\right)\right]^I = \frac{1}{2}\omega^0\left(X^I\right)Y^I + \frac{1}{2}\omega^0\left(Y^I\right)X^I + \\ + \frac{1}{2}\sigma^0\left(X^I\right)F^I\left(Y^I\right) + \frac{1}{2}\sigma^0\left(Y^I\right)F^I\left(X^I\right) + \frac{1}{2}\omega^I\left(X^I\right)\sigma^0\left(Y^I\right) + \\ + \frac{1}{2}\omega^I\left(Y^I\right)\sigma^0\left(X^I\right) + \frac{1}{2}\sigma^I\left(X^I\right)F^0\left(Y^I\right) + \frac{1}{2}\sigma^I\left(Y^I\right)F^0\left(X^I\right) \end{aligned} \qquad (5)$$

Учитывая то, что $\nabla_X \delta = 0$ и свойства ковариантной производной по связности ∇^I, получаем

$$\nabla^I{}_{X^I}\delta^0 = \left(\nabla_X \delta\right)^0 = 0 \tag{6}$$

Используя $P\left(X,Y\right)$ из формулы (3), находим

$$2F\left(P\left(X,Y\right)\right) = F\delta\left(X\right)\omega\left(Y\right) + F\delta\left(Y\right)\omega\left(X\right) + FF\left(X\right)\sigma\left(Y\right) + FF\left(Y\right)\sigma\left(X\right) \tag{7}$$

Возьмем 0-лифт этого равенства

$$\left(2F\left(P\left(X,Y\right)\right)\right)^0 = F^0\delta^I\left(X^I\right)\omega^0\left(Y^I\right) + F^0\delta^I\left(Y^I\right)\omega^0\left(X^I\right) +$$
$$+F^0F^I\left(X^I\right)\sigma^0\left(Y^I\right) + F^0F^I\left(Y^I\right)\sigma^0\left(X^I\right)$$

С учетом того, что $F^0F^0 = F^0\delta^0 = 0$ из последнего равенства имеем

$$\left[F\left(P\left(X,Y\right)\right)\right]^0 = F^0\left(\tilde{P}\left(X^I,Y^I\right)\right) \tag{8}$$

Учитывая равенство (8) возьмем 0-лифт уравнений (4), получим

$$\nabla^I{}_{X^I}F^0\left(Y^I\right) + \nabla^I{}_{Y^I}F^0\left(X^I\right) + 2F^0\left(\tilde{P}\left(X^I,Y^I\right)\right) = \mu^0\left(X^I\right)\delta^0\left(Y^I\right) +$$
$$+\mu^0\left(Y^I\right)\delta^0\left(X^I\right) + \nu^0\left(X^I\right)F^0\left(Y^I\right) + \nu^0\left(Y^I\right)F^0\left(X^I\right). \tag{9}$$

Взяв 1-лифт условий (4) основных уравнений диффеоморфизма $\pi_1\left(2\right)$, имеем

$$\nabla^I{}_{X^I}F^I\left(Y^I\right) + \nabla^I{}_{Y^I}F^I\left(X^I\right) + 2F^I\left(\tilde{P}\left(X^I,Y^I\right)\right) = \mu^0\left(X^I\right)Y^I +$$
$$+\mu^0\left(Y^I\right)X^I + \mu^I\left(X^I\right)\delta^0\left(Y^I\right) + \mu^I\left(Y^I\right)\delta^0\left(X^I\right) + \nu^0\left(X^I\right)F^I\left(Y^I\right) +$$
$$+\nu^0\left(Y^I\right)F^I\left(X^I\right) + \nu^I\left(X^I\right)F^0\left(Y^I\right) + \nu^I\left(Y^I\right)F^0\left(X^I\right) \tag{10}$$

Сопоставив соотношения (5), (6), (9) и (10) с основными уравнениями p-геодезических диффеоморфизмов линейных типов видно, что они представляют основные уравнения линейного 4-геодезического диффеоморфизма первого типа $\pi_1\left(4\right)$ [1].

Таким образом, имеет место.

Теорема. Если $\rho : \overline{A_n} \to A_n$ линейный 2-геодезический диффеоморфизм 1 типа многообразий с аффинными связностями (без кручения) $\bar{\nabla}$ и ∇, то их касательные расслоения $T\left(\overline{A_n}\right)$ и $T\left(A_n\right)$ со связностями $\bar{\nabla}^I$ и ∇^I допускают в общем случае линейный 4-геодезический диффеоморфизм 1-типа $\pi_1\left(4\right)$, если кроме того, диффеоморфизм ρ обладает свойством взаимности, то и индуцированный диффеоморфизм $d\rho$ также обладает свойством взаимности.

Литература. **1.** Лейко С. Г. Линейные p-геодезические диффеоморфизмы многообразий с аффинной связностью. Известия ВУЗов,. Математика, №5 1982, с.80-83. **2.** Лейко С. Г. p-геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях, индуцированные геодезическими преобразованиями базисного многообразия // Известия ВУЗов,. Математика, 1992,- 2, - с.62-71. **3.** Синюков Н.С. Геодезические отображения римановых пространств. М., Наука,1979.