УДК 539.375

М. В. Дудик , канд. фіз.-мат. наук
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

КОМПЛЕКСНА МОДЕЛЬ ЗОНИ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ БІЛЯ ВЕРШИНИ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ У ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОМУ ТІЛІ ПРИ ЗСУВІ

В умовах плоскої деформації методом Вінера-Хопфа виконано розрахунок вузької маломасштабної зони передруйнування у пружно-пластичному кусково-однорідному тілі при зсуві біля вершини міжфазної тріщини, береги якої контактують з тертям. Зона передруйнування, що виходить з вершини тріщини під кутом до плоскої межі поділу середовищ, містить у прилеглій до вершини частині область деструкції матеріалу і моделюється прямою лінією розриву переміщення. Виконано числовий аналіз структури і напружено-деформованого стану з'єднання матеріалів у привершинної області.

Ключові слова: міжфазна тріщина, комплексна модель зони передруйнування, зона деструкції.

Експериментальні дослідження процесів руйнування в твердих тілах виявили, що зони передруйнування біля гострокінцевих концентраторів напружень у пружно-пластичному тілі мають складну структуру і складаються з достатньо розвиненої пластичної зони та прилеглої безпосередньо до вершини концентратора порівняно малої області деструкції матеріалу з дуже високим рівнем деформацій [5, 10]. В комплексній моделі зони передруйнування в кінці міжфазної тріщини з контактуючими берегами [7] дана обставина враховується припущенням про розвиток зони у два етапи [9]. На першому етапі після навантаження тіла і утворення контактної зони у більш пластичному матеріалі виникає вузька бічна пластична зона. Оскільки її поява не усуває концентрацію напружень біля вершини тріщини, це призводить на другому етапі розвитку до зародження в прилеглій до вершини тріщини частині пластичної зони області підвищеної деформації матеріалу – області деструкції. Їх визначення в умовах плоскої деформації в рамках моделі Леонова-Панасюка-Дагдейла зведене до розв’язання наступних двох задач.

У першій задачі методом Вінера-Хопфа виконано розрахунок початкової пластичної зони, яка моделювалася бічною лінією розриву дотичного переміщення, що виходить з вершини міжфазної тріщини з берегами, взаємодіючими за законом сухого тертя. Умови навантаження і конфігурація тіла враховувалися через коефіцієнт інтенсивності напружень у вершині тріщини, який передбачався відомим. Орієнтація пластичної зони визначалась з умови максимуму швидкості дисипації енергії [15]. Отримані результати використані при розв’язанні другої задачі – про область деструкції, що моделюється додатковим розривом нормального переміщення в прилеглій до вершини тріщини частині пластичної зони.

У завершальній частині роботи подано результати числових розрахунків параметрів зони передруйнування в частинному випадку кусково-однорідної площини з міжфазною тріщиною скінченої довжини, навантаженої на нескінченності однорідним дотичним напруженням. Проаналізовано вплив тертя на параметри зони.

Визначення початкової пластичної зони в кінці контактної зони. В умовах плоскої деформації розглядається задача про початковий етап розвитку зони передруйнування з вершини тріщини, розташованої у кусково-однорідній площині

на прямолінійній межі поділу двох різних ізотропних пружно-пластичних матеріалів з модулями зсуву G_1, G_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2, що перебувають під дією довільного зсувного навантаження, яке забезпечує суттєвий контакт берегів. Даний етап полягає в утворенні біля вершини вузької бічної пластичної зони у матеріалі з пружними сталими G_1, ν_1, який припускається більш пластичним. Пластичну зону моделюватимемо прямою лінією розриву дотичного переміщення [14], що виходить з вершини тріщини під кутом α до межі поділу матеріалів. На лінії розриву дотичне напруження дорівнює границі текучості першого матеріалу τ_{1s}.

Згідно [1; 13; 16; 18; 20], довжина s контактної зони при зсуві біля однієї з вершин має один порядок з довжиною тріщини L, тому вона, як і довжина тріщини, є значно більшою за розмір початкової пластичної зони l. Це дозволяє при визначенні пластичної зони міжфазну тріщину з контактуючими берегами, що взаємодіють за законом сухого тертя, вважати півнескінченною, а умову на нескінченності сформулювати у вигляді вимоги можливості зшивання при $l << r << s$ шуканого розв'язку задачі, яка зображена на рис. 1, з розв'язком відповідної задачі теорії пружності про міжфазну тріщину скінченої довжини з контактною зоною біля вершини за відсутності бічної лінії розриву [4; 17]. В результаті приходимо до статичної задачі теорії пружності з крайовими умовами у вигляді (рис. 1):

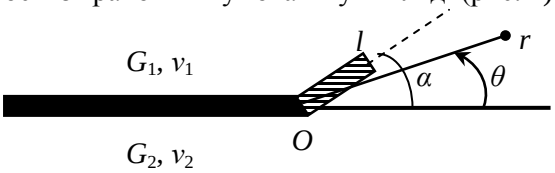

Рис. 1. Розрахункова схема

$$\theta = 0, \quad <\sigma_\theta> = <\tau_{r\theta}> = 0, \quad <u_\theta> = <u_r> = 0;$$

$$\theta = \alpha, \quad <\sigma_\theta> = <\tau_{r\theta}> = 0, \quad <u_\theta> = 0;$$

$$\theta = \pm\pi, \quad <\sigma_\theta> = <\tau_{r\theta}> = 0, \quad <u_\theta> = 0, \quad \tau_{r\theta} = -\mu\sigma_\theta; \tag{1}$$

$$\theta = \alpha, \quad r < l, \quad \tau_{r\theta} = \tau_1; \quad \theta = \alpha, \quad r > l, \quad <u_r> = 0; \tag{2}$$

$$\theta = \alpha, \quad r \to \infty, \quad \tau_{r\theta} = k_{II} F(\alpha) r^\lambda + o(1/r); \tag{3}$$

$$F(\alpha) = \frac{(2\pi)^\lambda}{2}\left\{\left[2 + \lambda(1+\beta)\right]cos(2+\lambda)\alpha - \lambda(1+\beta)cos\,\lambda\alpha\right\};$$

$$\beta = \frac{(1+e\kappa_2) - (e+\kappa_1)}{(1+e\kappa_2) + (e+\kappa_1)}, \quad e = \frac{G_1}{G_2} \quad (G_1 < G_2), \quad \kappa_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)};$$

$<f>$ – стрибок величини f; $\tau_1 = \tau_{1s}\, sgn\left(k_{II} F(\alpha)\right)$; μ – коефіцієнт тертя між берегами тріщини; β – параметр Дундурса [4], $|\beta| \le 0{,}5$; λ – корінь рівняння $ctg\,\lambda\pi + \mu\beta = 0$ на інтервалі (–1, 0). При зсуві верхнього матеріалу у напрямку $\theta = \pi$ коефіцієнт тертя повинен бути від'ємним. Коефіцієнт інтенсивності напружень в кінці міжфаз-

ної тріщини k_{II} визначається з розв'язку зовнішньої задачі і вважається заданим за умовою. Для забезпечення стискувального напруження на берегах тріщини в контактній зоні ($\theta = \pi,\ \sigma_\theta < 0$) на k_{II} накладається умова $\beta k_{II} > 0$ [19].

В кінці лінії розриву згідно з загальними положеннями про поведінку напружень біля кутових точок пружних тіл реалізується асимптотика

$$\theta = \alpha,\ r \to l + 0,\ \tau_{r\theta} \sim \frac{k}{\sqrt{2\pi(r-l)}}, \tag{4}$$

де k – коефіцієнт інтенсивності напружень в кінці лінії розриву, який має бути визначений в ході розв'язання задачі.

Розв'язок сформульованої крайової задачі (1) – (4) шукатимемо у вигляді суми розв'язків наступних двох задач. Перша відрізняється від неї тим, що в (2) замість першої умови покладаємо

$$\theta = \alpha,\ r < l,\ \tau_{r\theta} = \tau_1 - k_{II} F(\alpha) r^{\lambda}, \tag{5}$$

а на нескінченності напруження затухають як $o(1/r)$. Друга задача – аналогічна задача без лінії розриву, розв'язок якої відомий [4, 17], тому достатньо знайти розв'язок першої задачі.

Застосувавши до рівнянь рівноваги, умови сумісності деформацій, закону Гука і крайових умов (1) перетворення Мелліна і враховуючи другу умову (2) і умову (5), приходимо до функціонального рівняння Вінера-Хопфа першої задачі у смузі $-\delta_1 < Re\, p < \delta_2$ ($\delta_1,\ \delta_2$ – достатньо малі додатні числа):

$$\Phi^+(p) + \frac{\tau_1}{p+1} + \frac{\tau_2}{p+\lambda+1} = ctg^2\, p\pi \cdot tg(p-\lambda)\pi \cdot G(p)\Phi^-(p), \tag{6}$$

$$\Phi^+(p) = \int_1^\infty \tau_{r\theta}(\rho l, \alpha)\rho^p d\rho, \qquad \Phi^-(p) = \frac{G_1}{2(1-\nu_1)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \Bigg|_{\substack{r=\rho l \\ \theta=\alpha}} \rho^p d\rho,$$

$$\tau_2 = -k_{II} F(\alpha) l^{\lambda},\ G(p) = \frac{\sin p\pi \cos(p-\lambda)\pi\sqrt{1+\mu^2\beta^2}\, D_1(p)}{\cos^2 p\pi (1+e\kappa_2)(e+\kappa_1)(1+e\kappa_2+e+\kappa_1) D_0(p)},$$

$$D_0(p) = \left(1-\mu^2\beta^2\right) + \left(1+\mu^2\beta^2\right)\cos 2p\pi;\ D_1(p) = D_{10}(p) + \mu D_{11}(p),$$

$$\begin{aligned} D_{10}(p) = {} & (1+\kappa_1)^2\left[(1+\kappa_1)\delta_1(p) + e(1+\kappa_2)\delta_2(p) + (1-e)\delta_3(p)\right] + \\ & + (1+\kappa_1)\left[(1-e)^2\delta_4(p) + e^2(1+\kappa_2)^2\delta_5(p)\right] + \\ & + e(1+\kappa_2)(1-e)\left[(1+e\kappa_2)\delta_6(p) + (1+\kappa_1)\delta_7(p)\right], \end{aligned}$$

$$\delta_1(p) = \sin^2\alpha - \sin^2 p(\pi-\alpha),$$

$$\delta_2(p) = p\sin 2\alpha \sin 2p\alpha + 2\left(\sin^2\alpha\cos 2p\alpha + \sin^2 p\alpha - \sin^2 p\pi\right),$$

$$\delta_3(p) = \sin 2p\alpha\left[p\sin 2\alpha - \sin 2p(\pi-\alpha)\right] - 4\sin^2 p\alpha\,\delta_1(p),$$

$$\delta_4(p)=4\Big[\sin^2\alpha\sin^2 p\alpha+\sin p\alpha\sin p(\pi-\alpha)\cos p\pi-$$
$$-p^2\sin^2\alpha\cos^2 p(\pi-\alpha)\Big]-p\sin 2\alpha\big[\sin 2p\alpha-\sin 2p(\pi-\alpha)\big],$$
$$\delta_5(p)=\sin^2\alpha\left(1-4p^2\sin^2 p\alpha\right)+p\sin 2\alpha\sin 2p\alpha-$$
$$-\sin p(\pi-\alpha)\big[\sin p(\pi+\alpha)+2\cos p\pi\sin p\alpha\big],$$
$$\delta_6(p)=2\cos p\pi\big[2\sin p(\pi-\alpha)\sin p\alpha+p\sin 2\alpha\sin p(\pi-2\alpha)-$$
$$-2p^2\sin^2\alpha\cos p(\pi-2\alpha)\big],$$
$$\delta_7(p)=4\sin^2\alpha\Big[\left(1-p^2\right)\sin^2 p\alpha-p^2\cos^2 p(\pi-\alpha)\Big]+p\sin 2\alpha\sin 2p(\pi-\alpha);$$
$$D_{11}(p)=-(1+\kappa_1)\bar{D}_{11}(p)-2(1-e)\tilde{D}_{11}(p),$$
$$\bar{D}_{11}(p)=(1+\kappa_1)^2\bar{\delta}_1+e^2(1+\kappa_2)^2\bar{\delta}_2+4(1-e)^2\sin p\pi\bar{\delta}_3+$$
$$+(1+\kappa_1)e(1+\kappa_2)2\bar{\delta}_4+(1-e)(1+\kappa_1)2\bar{\delta}_5+e(1+\kappa_2)(1-e)\bar{\delta}_6,$$
$$\tilde{D}_{11}(p)=(1+\kappa_1)^2\tilde{\delta}_1+\Big[e^2(1+\kappa_2)^2+2(1-e)^2+3e(1+\kappa_2)(1-e)\Big]\sin p\pi\tilde{\delta}_2+$$
$$+(1+\kappa_1)\big[e(1+\kappa_2)\tilde{\delta}_3+2(1-e)\tilde{\delta}_4\big],$$
$$\bar{\delta}_1(p)=0{,}5\big[\sin 2\alpha-\sin 2p(\pi-\alpha)\big],$$
$$\bar{\delta}_2(p)=2p^2\sin^2\alpha\sin 2p\alpha+(1-2p\cos 2p\alpha)\sin\alpha\cos\alpha+$$
$$+\sin p(\pi-\alpha)\big[\cos p(\pi+\alpha)-2\sin p\pi\sin p\alpha\big],$$
$$\bar{\delta}_3(p)=p\sin\alpha\big[2p\sin\alpha\sin p(\pi-\alpha)\sin p\alpha-\cos p\alpha\sin\big(p(\pi-\alpha)-\alpha\big)\big]+$$
$$+\sin p\alpha\big[\sin\alpha\cos\big(p(\pi-\alpha)+\alpha\big)-\sin p(\pi-\alpha)\big],$$
$$\bar{\delta}_4(p)=-p\sin\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha\sin 2p\alpha)+\sin\alpha\cos\alpha\cos 2p\alpha+$$
$$+2\sin p\alpha\sin p\pi\sin p(\pi-\alpha),$$
$$\bar{\delta}_5(p)=-p\sin\alpha\big[\sin\alpha\sin 2p\alpha+\sin p(\pi-\alpha)\sin\big(p(\pi-\alpha)+\alpha\big)\big]-\sin 2\alpha\sin^2 p\alpha+$$
$$+\sin p(\pi-\alpha)\big[2\sin p\alpha\sin p\pi+\sin\alpha\sin\big(p(\pi-\alpha)+\alpha\big)\big],$$
$$\bar{\delta}_6(p)=2p^2\sin^2\alpha\sin p\alpha\big[2\cos p\alpha-\cos p(2\pi-\alpha)\big]+$$
$$+p\sin\alpha\Big[2\cos\alpha\left(\sin^2 p\alpha-\sin^2 p(\pi-\alpha)\right)-\sin p(\pi+\alpha)\sin\big(p(\pi-\alpha)-\alpha\big)\Big]+$$
$$+\sin\alpha\big[\cos\alpha-\cos\big(p(\pi-\alpha)+\alpha\big)\big]-4\sin p\alpha\sin p\pi\sin p(\pi-\alpha);$$
$$\tilde{\delta}_1(p)=\cos\big(p(\pi-\alpha)+\alpha\big)\big[\cos\alpha\sin p(\pi-\alpha)-p\sin\alpha\cos p(\pi-\alpha)\big],$$
$$\tilde{\delta}_2(p)=p\sin 2\alpha\sin p(\pi-2\alpha)-2p^2\sin^2\alpha\cos p(\pi-2\alpha)+2\sin p\alpha\sin p(\pi-\alpha),$$
$$\tilde{\delta}_3(p)=+p\sin\alpha\Big[2\cos\alpha\sin^2 p\alpha-\cos p(\pi+\alpha)\cos\big(p(\pi-\alpha)-\alpha\big)\Big]+p^2\sin^2\alpha\times$$
$$\times(\sin 2p\alpha+\sin 2p\pi)+\sin p(\pi-\alpha)\Big[\cos\alpha\cos\big(p(\pi+\alpha)+\alpha\big)-2\sin p\pi\sin p\alpha\Big],$$

$$\tilde{\delta}_4(p)=0{,}5p^2\sin^2\alpha\left(\sin 2p\alpha+\sin 2p\pi\right)+p\sin\alpha\left[\cos p\pi\sin p(\pi-\alpha)\sin(p-1)\alpha+\right.$$
$$\left.+2\cos\alpha\sin^2 p\alpha\right]-\sin p(\pi-\alpha)\sin p\alpha\left[\sin p\pi+\cos\alpha\sin(p\pi+\alpha)\right].$$

Використовуючи факторизацію функції $G(p)$ за формулою [3]:

$$G(p)=\frac{G^+(p)}{G^-(p)}\ \left(Re\,p=0\right),\ exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\ln G(z)}{z-p}dz\right]=\begin{cases}G^+(p)\ \left(Re\,p<0\right),\\ G^-(p)\ \left(Re\,p>0\right);\end{cases}$$

та подання $z\,ctg\,z\pi=\dfrac{\Gamma(1-z)}{\Gamma(1/2-z)}\dfrac{\Gamma(1+z)}{\Gamma(1/2+z)}$, ($\Gamma(z)$ – гамма-функція Ейлера), приведемо рівняння (6) до вигляду

$$\frac{\Phi^+(p)}{K^+(p)G^+(p)}+\frac{\tau_1}{p+1}\left[\frac{1}{K^+(p)G^+(p)}-\frac{1}{K^+(-1)G^+(-1)}\right]+\frac{\tau_2}{p+\lambda+1}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{K^+(p)G^+(p)}-\frac{1}{K^+(-\lambda-1)G^+(-\lambda-1)}\right]=\frac{\Phi^-(p)(p-\lambda)K^-(p)}{p^2G^-(p)}- \qquad (7)$$
$$-\frac{\tau_1}{(p+1)K^+(-1)G^+(-1)}-\frac{\tau_2}{(p+\lambda+1)K^+(-\lambda-1)G^+(-\lambda-1)},\quad \left(Re\ p=0\right)$$

$$K^{\pm}(p)=\left[\frac{\Gamma(1\mp p)}{\Gamma(1/2\mp p)}\right]^2\frac{\Gamma(1\mp p\pm\lambda)}{\Gamma(1/2\mp p\pm\lambda)}.$$

Функція у лівій частині (7) аналітична у півплощині $Re\ p<0$, а функція в його правій частині аналітична в півплощині $Re\ p>0$. Тоді відповідно до принципу аналітичного продовження повинна існувати єдина функція, аналітична у всій площині комплексної змінної, яка дорівнюватиме лівій і правій частинам (7) у відповідних півплощинах. Для її визначення застосуємо теорему абелева типу [12] до асимптотики (4) і знайдемо

$$\Phi^+(p)=\frac{k}{\sqrt{-2pl}}\quad \left(p\to\infty,\ Re\,p<0\right). \qquad (8)$$

З урахуванням (8) знаходимо, що ліва і права частини (7) прямують до нуля при $p\to\infty$. Тоді згідно з теоремою Ліувілля єдина аналітична функція тотожно дорівнює нулю, що одразу дає розв'язок рівняння (6):

$$\Phi^+(p)=-K^+(p)G^+(p)\left\{\frac{\tau_1}{p+1}\left[\frac{1}{K^+(p)G^+(p)}-\frac{1}{K^+(-1)G^+(-1)}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\tau_2}{p+\lambda+1}\left[\frac{1}{K^+(p)G^+(p)}-\frac{1}{K^+(-\lambda-1)G^+(-\lambda-1)}\right]\right\}\ \left(Re\,p<0\right),$$

$$\Phi^{-}(p)=\frac{p^2G^{-}(p)}{(p-\lambda)K^{-}(p)}\left[\frac{\tau_1}{(p+1)K^{+}(-1)G^{+}(-1)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\tau_2}{(p+\lambda+1)K^{+}(-\lambda-1)G^{+}(-\lambda-1)}\right]\quad(Re\,p>0). \tag{9}$$

З (9) знайдемо асимптотику

$$\Phi^{+}(p)\sim\frac{-1}{\sqrt{-p}}\left[\frac{\tau_1}{K^{+}(-1)G^{+}(-1)}+\frac{\tau_2}{K^{+}(-\lambda-1)G^{+}(-\lambda-1)}\right]\quad(p\to\infty),$$

порівнюючи яку з (8), визначимо коефіцієнт інтенсивності напружень в кінці лінії розриву

$$k=-\sqrt{2l}\left[\frac{\tau_1}{K^{+}(-1)G^{+}(-1)}+\frac{\tau_2}{K^{+}(-\lambda-1)G^{+}(-\lambda-1)}\right]. \tag{10}$$

Прирівнюючи праву частину (10) до нуля через вимогу обмеженості напружень в кінці пластичної зони, прийдемо до наступного виразу для її довжини:

$$l=\left(\frac{k_{II}F(\alpha)K^{+}(-1)J(0)}{\tau_1K^{+}(-\lambda-1)J(\lambda)}\right)^{-1/\lambda}, \tag{11}$$

$$J(x)=exp\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(x+1)ln\left|G(it)\right|+t\cdot arg\left(G(it)\right)}{t^2+(x+1)^2}dt\right].$$

Для визначення кута нахилу початкової пластичної зони використовуємо умову максимуму швидкості дисипації енергії в зоні [15], яка дорівнює

$$\frac{dW(t)}{dt}=\frac{1-\nu_1}{G_1}\frac{\tau_{1s}^2}{(1-\lambda)(2+\lambda)}\frac{1}{K^{-}(1)K^{+}(-1)}\left(\frac{|k_{II}|}{\tau_{1s}}\right)^{-2/\lambda}\frac{1}{k_{II}}\frac{dk_{II}}{dt}w(\alpha), \tag{12}$$

$$w(\alpha)=\frac{J_1(0)}{J(0)}\left(\frac{|F(\alpha)|K^{+}(-1)J(0)}{K^{+}(-\lambda-1)J(\lambda)}\right)^{-2/\lambda},$$

$$J_1(x)=exp\left[\frac{-1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(x+1)ln\left|G(it)\right|-t\cdot arg\left(G(it)\right)}{t^2+(x+1)^2}dt\right].$$

Приймаючи, що k_{II} є додатною зростаючою або від'ємною спадаючою функцією часу, приходимо до умови $w(\alpha)\to max$.

Згідно (11), довжина пластичної зони нелінійно зростає зі збільшенням зовнішнього навантаження, що входить до коефіцієнта інтенсивності напружень k_{II}. Крім того, довжина пластичної зони тим більша, чим менша границя текучості матеріалу, в якому відбувається її розвиток.

Використовуючи (9), за допомогою зворотного перетворення Мелліна можна знайти поле напружень біля вершини тріщини, що змінилося внаслідок утворення

пластичної зони. Зокрема, нормальне напруження на лінії розриву, необхідне нижче для визначення області деструкції, дорівнює

$$\sigma_\theta(r,\alpha)=\tau_1\left[\frac{N(-1)}{D_1(-1)}+\right.$$
$$\left.+\sum_i\frac{N(-1-\lambda_i)}{D_1'(-1-\lambda_i)}\frac{K^+(-1-\lambda_i)}{K^+(-1)}\frac{J(\lambda_i)}{J(0)}\frac{\lambda}{\lambda_i(\lambda_i-\lambda)}\left(\frac{r}{l}\right)^{\lambda_i}\right]\quad(r\to 0), \tag{13}$$

$$D_1'(p)=dD_1(p)/dp,\qquad N(p)=N_1(p)+\mu N_2(p),$$

$$N_1(p)=(1+\kappa_1)\left[(1+\kappa_1)^2u_{11}+e^2(1+\kappa_2)^2u_{12}-(1+\kappa_1)e(1+\kappa_2)u_{13}\right]+$$
$$+(1-e)\left[(1+\kappa_1)^2v_{11}+2e(1+\kappa_2)(1+e\kappa_2)v_{12}+(1+\kappa_1)\left(e(1+\kappa_2)v_{13}+(1-e)v_{14}\right)\right],$$
$$u_{11}(p)=0{,}5\left[\sin 2\alpha-\sin 2p(\pi-\alpha)\right],$$
$$u_{12}(p)=2p(p-1)\sin^2\alpha\sin 2p\alpha-p\sin 2\alpha+0{,}5\left[\sin 2\alpha+\sin 2p(\pi-\alpha)\right],$$
$$u_{13}(p)=(p-1)\sin 2\alpha\cos 2p\alpha,$$
$$v_{11}(p)=2(p-1)\sin 2\alpha\sin^2 p\alpha-p\sin 2\alpha+\sin 2p(\pi-\alpha),$$
$$v_{12}(p)=2p(p-1)\sin^2\alpha\sin p(\pi-2\alpha)\cos p\pi,$$
$$v_{13}(p)=4(p-1)\left[p\sin^2\alpha\sin p\pi\cos p(\pi-2\alpha)-\sin 2\alpha\sin^2 p\alpha\right]+v_{11}(p),$$
$$v_{14}(p)=2(p-1)\left[p\sin^2\alpha\sin 2p(\pi-\alpha)-\sin 2\alpha\sin^2 p\alpha\right];$$

$$N_2(p)=(1+\kappa_1)\left[(1+\kappa_1)^2u_{21}+e^2(1+\kappa_2)^2u_{22}-2(1+\kappa_1)e(1+\kappa_2)u_{23}\right]-$$
$$-4(1-e)\left[(1+\kappa_1)^2v_{21}+(1+e\kappa_2)\left(e(1+\kappa_2)+2(1-e)\right)v_{22}-\right.$$
$$\left.-(1+\kappa_1)\left(e(1+\kappa_2)v_{23}+(1-e)\right)v_{24}\right].$$
$$u_{21}(p)=\sin^2\alpha-\sin^2 p(\pi-\alpha),\quad u_{22}(p)=4p(p-1)\sin^2\alpha\cos^2 p\alpha+u_{21}(p),$$
$$u_{23}(p)=2(p-1)\sin^2\alpha\cos^2 p\alpha+u_{21}(p),$$
$$v_{21}(p)=\left(p\cos^2 p\alpha+\sin^2 p\alpha\right)\sin^2\alpha-\sin^2 p(\pi-\alpha),$$
$$v_{22}(p)=p(p-1)\sin^2\alpha\sin p(\pi-2\alpha)\sin p\pi,$$
$$v_{23}(p)=v_{21}(p)+v_{22}(p)+2p(p-1)\sin^2\alpha\cos^2 p\alpha,$$
$$v_{24}(p)=p^2\sin^2\alpha\left(\cos 2p\alpha+\sin^2 p(\pi-\alpha)\right)+\sin^2\alpha\sin^2 p\alpha-$$
$$-p\sin^2\alpha\sin p\pi\sin p(\pi-2\alpha)-\sin^2 p(\pi-\alpha).$$

В (13) λ_i є коренями рівняння

$$D_1(-1-x)=0, \tag{14}$$

що задовольняють умову $Re\,\lambda_i>-1$.

На першому етапі розвитку зони передруйнування, коли область деструкції ще не з'явилася, розкриття тріщини в її вершині згідно з прийнятими в (1) граничними умовами ($<u_\theta(r,\pm\pi)>=0,\ <u_\theta(r,\alpha)>=0$) дорівнює нулю, тому відповідно до деформаційного критерію руйнування поява початкової пластичної зони не впливає безпосередньо на умови зрушення тріщини.

Визначення параметрів області деструкції. Як свідчать обчислення, рівняння (14) має корені у смузі $-1<Re\,x<0$, що вказує на збереження концентрації напружень у вершині тріщини і передбачає подальший розвиток зони передруйнування шляхом виникнення в ній області деструкції матеріалу з високим рівнем як зсувних, так і відривних деформацій. У зв'язку з цим моделюватимемо область деструкції лінією довжини *d*, на якій зазнає розрив не лише дотичне, але і нормальне переміщення, а нормальне напруження дорівнює опору відриву матеріалу σ_1.

Згідно експериментальним даним [5, 10] передбачається, що довжина області деструкції набагато менша від довжини контактної зони і всієї зони передруйнування, тому досліджуване тіло можна розглядати (рис. 2) як кусково-однорідну площину, що містить на межі поділу півнескінченну тріщину з контактуючими за законом сухого тертя берегами, з вершини *O* якої під кутом α до межі поділу виходить півнескінченна пряма лінія розриву, що складається з двох ділянок.

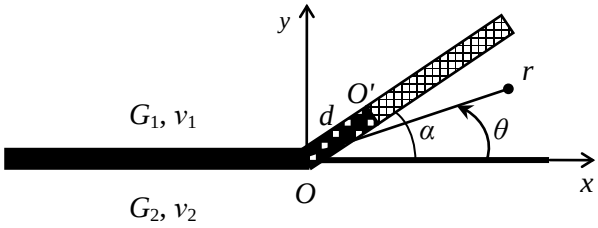

Рис. 2. Уточнена розрахункова схема

На ділянці, яка примикає до вершини тріщини, зазнають розрив дотичне і нормальне переміщення, а дотичне і нормальне напруження дорівнюють τ_1 і σ_1. На другій ділянці зазнає розрив лише дотичне переміщення, а дотичне напруження дорівнює τ_1. Даній моделі відповідає статична задача теорії пружності з крайовими умовами:

$$\theta=0,\quad <\sigma_\theta>=<\tau_{r\theta}>=0,\quad <u_\theta>=<u_r>=0;$$

$$\theta=\pm\pi,\quad <\sigma_\theta>=<\tau_{r\theta}>=0,\quad <u_\theta>=0,\quad \tau_{r\theta}=-\mu\sigma_\theta;$$

$$\theta=\alpha,\quad <\sigma_\theta>=<\tau_{r\theta}>=0;\quad \theta=\alpha,\quad \tau_{r\theta}=\tau_1; \tag{15}$$

$$\theta=\alpha,\quad r<d,\quad \sigma_\theta=\sigma_1;\quad \theta=\alpha,\quad r>d,\quad <u_\theta>=0. \tag{16}$$

При $r\to\infty$ головні члени розвинень напружень в асимптотичні ряди співпадають з головними членами розвинень напружень в асимптотичні ряди при $r\to 0$ в задачі, що зображена на рис. 1, розв'язок якої знайдено у попередній частині роботи. Зокрема, згідно (13) маємо

$$\theta=\alpha,\ r\to\infty,\ \sigma_\theta=f_1(\alpha,e,\nu_1,\nu_2)\tau_1+\sum_{i=1}^{2}C_i f_{2i}(\alpha,e,\nu_1,\nu_2)r^{\lambda_i}+o(1/r), \tag{17}$$

де $C_i = \tau_1 l^{-\lambda_i}$, l – знайдена вище довжина всієї пластичної зони; λ_i – корені рівняння (14) у смузі $-1 < Re\, x < 0$, яких виявляється два і які є дійсними;

$$f_1 = \frac{N(-1)}{D_1(-1)}, \qquad f_{2i} = \frac{N(-1-\lambda_i)}{D_1'(-1-\lambda_i)} \frac{K^+(-1-\lambda_i)}{K^+(-1)} \frac{J(\lambda_i)}{J(0)} \frac{\lambda}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)}.$$

Передбачається, що на тому етапі розвитку зони передруйнування, коли область деструкції ще не з'явилась, нормальне напруження біля вершини тріщини при $\theta=\alpha$ є розтягувальним ($\sigma_\theta>0$).

У вершині O' області деструкції має місце коренева особливість напружень

$$\theta = \alpha,\ r \to d+0,\ \sigma_\theta \sim \frac{K}{\sqrt{2\pi(r-d)}} \tag{18}$$

з коефіцієнтом інтенсивності K, що визначається в ході розв'язання задачі.

За допомогою перетворення Мелліна розв'язання сформульованої крайової задачі (15)-(18) зводиться до функціонального рівняння Вінера-Хопфа:

$$\Phi_1^+(p) + \frac{\sigma_1 - f_1\tau_1}{p+1} - \sum_{i=1}^{2} \frac{C_i f_{2i} d^{\lambda_i}}{p+\lambda_i+1} = -tg\, p\pi \cdot H(p)\Phi_1^-(p) \quad (-\varepsilon_1 < Re\, p < \varepsilon_2), \tag{19}$$

$$\Phi_1^+(p) = \int_1^\infty \sigma_\theta(\rho d, \alpha)\rho^p d\rho,\ \Phi_1^-(p) = \frac{G_1}{2(1-\nu_1)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \Bigg|_{\substack{r=\rho d \\ \theta=\alpha}} \rho^p d\rho,$$

$$H(p) = -\frac{\cos p\pi D_2(p)}{2\sin^2 p\pi D_1(p)}, \qquad D_2(p) = D_{20}(p) + 4\mu D_{21}(p),$$

$$D_{20}(p) = 2s_1(p)s_4(p) - (1+\kappa_1)e(1+\kappa_2)d_2(p)s_5(p) +$$
$$+e(1+\kappa_2)\cos p\pi\Big[(1+\kappa_1)^2 d_3(p)d_5(p) - 4e^2(1+\kappa_2)^2 d_1(p)d_4(p) -$$
$$-2(1+\kappa_1)e(1+\kappa_2)\cos p\pi\, s_3(p)\Big],$$

$$D_{21}(p) = e^2(1+\kappa_2)^2\Big\{\big[2(1-e)+e(1+\kappa_2)\big]\sin p\pi\, d_1(p)d_4(p) +$$
$$+(1+\kappa_1)s_2(p)\Big\} + s_6(p)\big[\sin p\pi\, s_1(p) + (1+\kappa_1)e(1+\kappa_2)\cos p\pi \sin 2p\alpha\big],$$

$$s_1(p) = (1+\kappa_1)^2 - 2(1+\kappa_1)\big[e(1+\kappa_2)+2(1-e)\big]\sin^2 p\alpha -$$
$$-\big[e(1+\kappa_2)+2(1-e)\big]^2 d_4(p),$$

$$s_2(p) = p(p-1)\sin^2\alpha \sin p(\pi-2\alpha) + \sin p\pi d_4(p)d_6(p),$$

$$s_3(p) = 2\sin p\alpha \sin p(\pi-\alpha) + p\sin 2\alpha \sin p(\pi-2\alpha) - 2p^2\sin^2\alpha \cos p(\pi-2\alpha),$$

$$s_4(p) = (1+\kappa_1)\sin p\pi\, d_3(p) - 2e(1+\kappa_2)\cos p\pi\, d_1(p),$$

$$s_5(p) = (1+\kappa_1)\cos p\pi\, d_3(p) + 2e(1+\kappa_2)\sin p\pi\, d_1(p),$$

$$s_6(p) = (1+\kappa_1)d_6(p) + \big[e(1+\kappa_2)+2(1-e)\big]d_1(p),$$

$$d_1(p) = \sin^2 p(\pi-\alpha) - p^2\sin^2\alpha, \qquad d_2(p) = p\sin 2\alpha - \sin 2p\alpha,$$

$$d_3(p) = p\sin 2\alpha - \sin 2p(\pi-\alpha), \qquad d_4(p) = p^2\sin^2\alpha - \sin^2 p\alpha,$$
$$d_5(p) = p\sin 2\alpha + \sin 2p\alpha, \qquad d_6(p) = p\sin^2\alpha - \sin^2 p(\pi-\alpha)$$

(ε_1, ε_2 – достатньо малі додатні числа). Розв'язок рівняння (19) отримано аналогічно розв'язку рівняння (6) такого ж роду в попередній частині роботи і має вигляд:

$$\Phi_1^+(p) = -\frac{pH^+(p)}{K_1^+(p)}\left\{\frac{\sigma_1 - f_1\tau_1}{p+1}\left[\frac{K_1^+(p)}{pH^+(p)} + \frac{K_1^+(-1)}{H^+(-1)}\right] - \right.$$
$$\left. -\sum_{i=1}^{2}\frac{C_i f_{2i} d^{\lambda_i}}{p+1+\lambda_i}\left[\frac{K_1^+(p)}{pH^+(p)} + \frac{K_1^+(-1-\lambda_i)}{(1+\lambda_i)H^+(-1-\lambda_i)}\right]\right\} \quad (Re\,p<0),$$
$$\Phi_1^-(p) = K_1^-(p)H^-(p)\left[\frac{(\sigma_1 - f_1\tau_1)K_1^+(-1)}{(p+1)H^+(-1)} - \right.$$
$$\left. -\sum_{i=1}^{2}\frac{C_i f_{2i} d^{\lambda_i} K_1^+(-1-\lambda_i)}{(p+1+\lambda_i)(1+\lambda_i)H^+(-1-\lambda_i)}\right] \quad (Re\,p>0), \tag{20}$$
$$exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\ln H(z)}{z-p}dz\right] = \begin{cases} H^+(p) & (Re\,p<0), \\ H^-(p) & (Re\,p>0); \end{cases} \qquad K_1^{\pm}(p) = \frac{\Gamma(1\mp p)}{\Gamma(1/2\mp p)}.$$

Застосовуючи теорему Абелева типу до асимптотики (18) і використовуючи розв'язок (20), аналогічно до (10) знаходимо коефіцієнт інтенсивності напружень в кінці лінії розриву *OO'*:

$$K = -\sqrt{2d}\left[\frac{(\sigma_1 - f_1\tau_1)K_1^+(-1)}{H^+(-1)} - \sum_{i=1}^{2}\frac{C_i f_{2i} d^{\lambda_i} K_1^+(-1-\lambda_i)}{(1+\lambda_i)H^+(-1-\lambda_i)}\right].$$

Прирівнюючи *K* до нуля, приходимо до трансцендентного рівняння для обчислення довжини області деструкції:

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{C_i f_{2i} d^{\lambda_i} K_1^+(-1-\lambda_i) J_2(0)}{(1+\lambda_i)K_1^+(-1)J_2(\lambda_i)} = \sigma_1 - f_1\tau_1,$$
$$J_2(x) = exp\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(x+1)ln\left|H(it)\right| + t\cdot arg\left(H(it)\right)}{t^2+(x+1)^2}dt\right].$$

Поява області деструкції змінює напружено-деформований стан біля вершини тріщини, який тепер характеризуватиметься показником сингулярності напружень λ_{d1}, що визначається як найменший з інтервалу (–1, 0) корінь рівняння

$$D_2(-1-x) = 0. \tag{21}$$

Якщо при відсутності області деструкції розкриття тріщини в її вершині дорівнює нулю, то її поява призводить до ненульового зсувного зміщення берегів у вершині $\delta = \lim\limits_{x\to -0}\left|\langle u\rangle_{y=0}\right|$, пов'язаного зі стрибком нормального переміщення $<u_\theta(0,\alpha)>$ співвідношенням $\delta = <u_\theta(0,\alpha)>/\sin\alpha$. Останній може бути знайде-

ний з його зв'язку з функцією $\Phi_1^-(p)$, знайденого в ході розв'язання задачі:

$$<u_\theta(0,\alpha)>=-\left\langle\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right\rangle^*\Bigg|_{p=0,\theta=\alpha}=-\frac{2(1-\nu_1)d}{G_1}\Phi_1^-(0).$$

Використовуючи (20) і умову K=0, отримаємо:

$$\delta=-\frac{2(1-\nu_1)}{G_1\sin\alpha}\frac{d}{\sqrt{\pi H(0)}}\sum_{i=1}^{2}\frac{C_i f_{2i} d^{\lambda_i} K_1^+(1+\lambda_i)}{J_2(\lambda_i)}\frac{\lambda_i}{(1+\lambda_i)^2}.$$

Зсув берегів δ вносить вклад в загальне розкриття тріщини і повинен бути врахований при дослідженні умов зрушення тріщини.

Аналіз отриманих результатів. Як випливає з попереднього розгляду, параметри маломасштабної зони передруйнування повністю визначаються пружними і непружними характеристиками з'єднаних матеріалів та коефіцієнтом інтенсивності напружень k_{II}, який може бути визначений незалежно від проблеми, що розглядається в статті, для будь-яких кусково-однорідних тіл належної будови, а також величини і конфігурації зовнішнього навантаження шляхом числового або, при можливості, аналітичного розв'язання відповідної крайової задачі теорії пружності. Оскільки останнє не входило в цілі даної роботи, для ілюстрації застосування отриманого вище розв'язку задачі про зону передруйнування і з метою аналізу його наслідків скористаємося результатами дослідження в [13] контактної зони у вершині внутрішньої міжфазної тріщини довжини L в кусково-однорідній площині при її навантаженні на нескінченності дотичним напруженням q ($\tau_{xy}\to -q$ при $x, y\to\infty$).

Умова (12) приводить до двох значень кута нахилу зони передруйнування, один з яких відповідає її поширенню вздовж межі поділу. Це узгоджується з наявністю двох екстремумів у кутовій залежності дотичного напруження (3) у досліджуваному (верхньому) матеріалі. Нижче ми обмежуємось розглядом лише бічної зони, оскільки розрахункам пластичних зон на межі поділу в рамках різних моделей присвячена досить велика кількість публікацій (див., зокрема, [2, 6, 11]).

Результати обчислень параметрів комплексної зони передруйнування (кута нахилу α до межі поділу матеріалів, відносних довжин s/L контактної зони, l/L і d/L всієї зони та області деструкції) приведені в табл. 1 для деяких значень відношення модулів зсуву G_1/G_2 з'єднаних матеріалів з однаковими коефіцієнтами Пуассона $\nu_1=\nu_2=0{,}3$ при різних значеннях коефіцієнта тертя μ і зовнішньому навантаженні $q=0{,}1\tau_1$. При обчисленнях параметрів області деструкції опір відриву першого матеріалу був прийнятий рівним $\sigma_1=5\tau_1$.

Згідно розрахункам, у прийнятих умовах навантаження довжина всієї зони передруйнування при малих відношеннях модулів зсуву матеріалів G_1/G_2 зменшується, тоді як при близьких значеннях G_1 і G_2 вона зростає зі збільшенням тертя між берегами тріщини, на відміну від довжини області деструкції, яка зменшується зі збільшенням тертя при будь-яких $G_1/G_2<1$. Довжина зони передруйнування виявляється майже на два порядки меншою від довжини контактної зони, а довжина області деструкції набагато менша від довжини всієї зони, тому при достатньо низьких навантаженнях використання розглянутої моделі цілком виправдане.

При малих відношеннях G_1/G_2 кут нахилу зони передруйнування спадає зі збільшенням тертя, тоді як при наближенні G_1 до G_2 передбачається його зростання. Відповідно до (12), величина навантаження кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною не впливає на орієнтацію зони, яка, таким чином, залежатиме лише

від пружних параметрів матеріалів композиту і коефіцієнта тертя між берегами. У незалежності кута нахилу зони від зовнішнього навантаження полягає принципова відмінність висновків, які випливають з отриманого розв'язку, від результатів аналогічного дослідження в рамках моделі відкритої міжфазної тріщини [8]. Разом з тим, значення кута нахилу зони в кінці тріщини без урахування контакту берегів, обчислені при чистому зсуві у [8], близькі до знайдених в даній роботі.

У табл. 1 наведені значення показників степеня сингулярності напружень у вершині до (λ) і після утворення початкової пластичної зони (λ_1), а також після виникнення області деструкції (λ_{d1}). Порівняння λ і λ_1 показує, що поява початкової пластичної зони призводить до підвищення концентрації напружень в околі вершини ($\lambda_1<\lambda$), неминучим наслідком чого стає подальший розвиток зони шляхом утворення в ній області деструкції. Але і поява області деструкції не усуває концентрацію напружень у вершині тріщини, а лише призводить до незначного її послаблення порівняно з початковим рівнем: найменший корінь λ_{d1} рівняння (21) з інтервалу (–1, 0) є трохи вищим за показник сингулярності λ до утворення обох зон ($\lambda_{d1}>\lambda$). Тому розвиток зони передруйнування на даному етапі не завершується і повинен супроводжуватись утворенням нових зон.

Таблиця 1.

Параметри комплексної зони передруйнування
в кінці міжфазної тріщини при зсуві

G_1/G_2	μ	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5
0,1	$\alpha°$	127,4	126,8	126,2	125,8	125,3	125,0
	s/L	0,3098	0,3133	0,3168	0,3203	0,3239	0,3276
	l/L	$1{,}270\cdot10^{-2}$	$1{,}148\cdot10^{-2}$	$1{,}038\cdot10^{-2}$	$9{,}400\cdot10^{-3}$	$8{,}524\cdot10^{-3}$	$7{,}733\cdot10^{-3}$
	d/L	$8{,}130\cdot10^{-5}$	$7{,}621\cdot10^{-5}$	$7{,}165\cdot10^{-5}$	$6{,}703\cdot10^{-5}$	$6{,}282\cdot10^{-5}$	$5{,}895\cdot10^{-5}$
	λ	-0,5	-0,4926	-0,4851	-0,4777	-0,4703	-0,4630
	λ_1	-0,6575	-0,6739	-0,6900	-0,7064	-0,7222	-0,7386
	λ_{d1}	-0,4153	-0,4148	-0,4143	-0,4140	-0,4135	-0,4132
0,9	$\alpha°$	127,8	128,2	128,6	129,1	129,8	130,7
	s/L	0,3052	0,3054	0,3056	0,3059	0,3061	0,3063
	l/L	$1{,}031\cdot10^{-2}$	$1{,}033\cdot10^{-2}$	$1{,}035\cdot10^{-2}$	$1{,}037\cdot10^{-2}$	$1{,}040\cdot10^{-2}$	$1{,}042\cdot10^{-2}$
	d/L	$7{,}850\cdot10^{-5}$	$7{,}768\cdot10^{-5}$	$7{,}619\cdot10^{-5}$	$7{,}371\cdot10^{-5}$	$6{,}981\cdot10^{-5}$	$6{,}432\cdot10^{-5}$
	λ	-0,5	-0,4995	-0,4990	-0,4986	-0,4981	-0,4976
	λ_1	-0,7117	-0,7296	-0,7478	-0,7668	-0,7873	-0,8100
	λ_{d1}	-0,4963	-0,4963	-0,4964	-0,4965	-0,4966	-0,4967

Висновки. Досліджено комплексну модель зони передруйнування, яка відповідає наступному механізму розвитку міжфазної тріщини у пружно-пластичному тілі в умовах зсуву. Біля вершини тріщини утворюється область контакту берегів і вузька бічна пластична зона, в привершинній частині якої виникає зона підвищеної деформації матеріалу – область деструкції, що разом призводять до відносного зсуву вершин верхнього і нижнього берегів – розкриття тріщини. Зі збільшенням навантаження розміри зони передруйнування і області деструкції, а також розкриття тріщини ростуть, що сприяє зрушенню тріщини за механізмом зсуву. Виявлено збереження концентрації напружень біля вершини після появи зони передруйнування, що передбачає подальший її розвиток шляхом утворення нових зон.

Автор висловлює вдячність проф. Кіпнісу Л.А. за цінні поради і зауваження.

Бібліографічні посилання

1. **Антипов Ю.А.** Трещина на линии раздела упругих сред при наличии сухого трения / Ю.А. Антипов // Прикл. математика и механика, 1995. – Т. 59, вып. 2. – С.290-306.
2. **Бакиров В.Ф.** Модель Леонова-Панасюка-Дагдейла для трещины на границе соединения материалов / В.Ф. Бакиров, Р.В. Гольдштейн // Прикл. математика и механика, 2004. – Т. 68, вып. 1. – С.170-179.
3. **Гахов Ф.Д.** Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
4. **Дундурс Дж.** Обзор и перспектива исследования межфазной трещины / Дж. Дундурс, М. Комниноу // Механика композитных материалов, 1979. - №3. – С.387-396.
5. **Каминский А.А.** Исследование закономерностей изменения пластической зоны у края трещины и характеристик трещиностойкости металлических материалов в зависимости от их структуры (обзор) / А.А. Каминский, С.Б. Нижник // Прикл. механика, 1995. – Т.31, № 10. – С.3-27.
6. **Каминский А.А.** Линия скольжения в конце разреза на границе раздела различных сред / А.А. Каминский, Л.А. Кипнис, В.А. Колмакова // Прикл. механика, 1995. – Т. 31, № 6. – С. 86–91.
7. **Каминский А.А.** О комплексной модели зоны предразрушения в конце трещины на границе раздела упругих сред / А.А. Каминский, Л.А. Кипнис // Доповіді НАН України, 2010., № 2. – С.59-63.
8. **Каминский А.А.** О направлении развития пластической зоны предразрушения в вершине трещины на границе раздела различных сред / А.А. Каминский, М.В. Дудик, Л.А. Кипнис // Прикл. механика, 2006. – Т. 42, № 2. – С. 14–23.
9. **Каминский А.А.** О страгивании трещины, расположенной на границе раздела упругих сред / А.А. Каминский, Л.А. Кипнис // Доповіді НАН України, 2011, № 1. – С.38-43.
10. **Каминский А.А.** Экспериментальное исследование распределения пластических деформаций в окрестности вершины трещины при статическом нагружении / А.А. Каминский, Г.И. Усикова, Е.А. Дмитриева // Прикл. механика, 1994. – Т. 30, № 11. – С.69-75.
11. **Лобода В.В.** Определение зон предразрушения у края трещины между двумя упругими ортотропными материалами / В.В. Лобода, А.Е. Шевелева // Прикл. механика, 2003. – Т.39, № 5. – С. 76–82.
12. **Нобл Б.** Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных / Б. Нобл. - М.: Изд-во иностр. лит., 1962. - 279 с.
13. **Острик В.І.** Контакт з тертям берегів міжфазної тріщини за розтягу та зсуву / В.І. Острик // Фіз.-хім. механіка матеріалів, 2003, № 2. – С. 58–65.
14. **Панасюк В.В.** Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування / В.В. Панасюк, М.П. Саврук // Фіз.-хім. механіка матеріалів, 1992. – Т. 28, № 1. – С. 49–68.
15. **Черепанов Г.П.** К общей теории разрушения / Г.П. Черепанов // Фіз.-хім. механіка матеріалів, 1986. – Т. 22, № 1. – С. 36-44.
16. **Comninou M.** Effect of friction on the interface crack loaded in shear / M. Comninou, J. Dundurs // Journ. of Elasticity, 1980. – Vol. 10, № 2. – P. 203–212.
17. **Comninou M**. Interface crack with friction in the contact zone / M. Comninou // Transactions of the ASME. Journ. of Applied Mechanics, 1977. – Vol. 44. – P.780-781.
18. **Gautesen A.K.** The Interface Crack Under Combined Loading / A.K. Gautesen, J. Dundurs // Transactions of the ASME. Journ. of Applied Mechanics, 1988. – Vol. 55, № 9. – P.580-586.
19. **Leblond J.B.** Crack kinking from an initially closed, ordinary on interface crack, in the presence of friction / J.B. Leblond, J. Frelat // Eng. Fract. Mech., 2004. – Vol. 71. – P. 289–307.
20. **Loboda V.V.** Analytical derivation and investigation of the interface crack models / V.V. Loboda // Int. Journ. Solids Structures, 1998. - Vol. 35, № 33. – P.4477-4489.

Надійшла до редколегії 08.12.2013.

УДК 539.375

Дудик Михаил Владимирович, канд. физ.-мат. наук

Уманский государственный педагогический университет имени Павла Тычины

КОМПЛЕКСНАЯ МОДЕЛЬ ЗОНИ ПРЕДРАЗРУШЕНИЯ ВОЗЛЕ ВЕРШИНЫ МЕЖФАЗОВОЙ ТРЕЩИНЫ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ТЕЛЕ ПРИ СДВИГЕ

В условиях плоской деформации методом Винера-Хопфа выполнен расчет узкой маломасштабной зоны предразрушения в упруго-пластическом кусочно-однородном теле при сдвиге вблизи вершины межфазной трещины, берега которой контактируют с трением. Зона предразрушения, выходящая из вершины трещины под углом к плоской границе раздела сред, содержит примыкающем к вершине трещины участке область деструкции материала и моделируется прямой линией разрыва смещения. Выполнен числовой анализ структуры и напряженно-деформируемого состояния соединения материалов в привершинной области.

Ключевые слова: межфазная трещина, комплексная модель зоны предразрушения, зона деструкции.

UDC 539.375

COMPLEX MODEL OFF PRE-FRACTURE NEAR THE TIP OF INTERFACIAL CRACK IN EKASTIC-PLASTIC BODY UNDER THE SHEAT

Dudyk Mykhailo, PhD (Phys.-Math.)

Uman State Pedagogical University Pavlo Tychyna

The calculation of a thin small scale pre-fracture zone in an elastic-plastic piecewise homogeneous body under the shear near the tip of the interfacial crack is executed by the Wiener-Hopf method for the plane strain conditions. The crack lips are in contact with the friction. The pre-fracture zone going out of the crack tip under an angle to the flat interface contains a process zone in the adjacent part to the crack tip and is modeled as a straight line of a displacement rupture. The numerical analysis of the structure and stress-strain state of a material joint near the crack tip is executed.

Key words: interfacial crack, complex model of pre-fracture zone, process zone.

REFERENCES

1. **Antipov Y. A.** An interface crack between elastic materials when there is dry friction / Y. A. Antipov // J. Appl. Math. Mech., 1995. – Vol. 59, №2. – P. 273-287.
2. **Bakirov V. F.** The Leonov–Panasyuk–Dugdale model for a crack at the interface of the joint of materials / V. F. Bakirov, R. V. Gol'dshtein // J. Appl. Maths. Mech., 2004. – Vol. 68, №1. – P. 153–161.
3. **Cherepanov G. P.** On the general theory of fracture / G. P. Cherepanov // Mater. Sci., 1986. – Vol. 22, №1. – P. 32–39.
4. **Comninou M.** Effect of friction on the interface crack loaded in shear / M. Comninou, J. Dundurs // Journ. of Elasticity, 1980. – Vol. 10, № 2. – P. 203–212.
5. **Comninou M**. Interface crack with friction in the contact zone / M. Comninou // Transactions of the ASME. Journ. of Applied Mechanics, 1977. – Vol. 44. – P.780-781.
6. **Gakhov F. D.** Boundary Value Problems / F. D. Gakhov. – Oxford, 1966.
7. **Gautesen A.K.** The Interface Crack Under Combined Loading / A.K. Gautesen, J. Dundurs // Transactions of the ASME. Journ. of Applied Mechanics, 1988. – Vol. 55, № 9. – P.580-586.

8. **Kaminskii A. A.** Slip lines at the end of a cut at the interface of different media / A. A. Kaminskii, L.A. Kipnis, V.A. Kolmakova // Int. Appl. Mech., 1995. – Vol. 31, №6. – P. 491-495.
9. **Kaminskii A. A.** Experimental study of the distribution of plastic strains near a crack tip during static loading / A. A. Kaminskii, G. I. Usikova, E. A. Dmitrieva // Int. Appl. Mech., 1994. – Vol. 30, №1. – P. 892–897.
10. **Kaminskii A. A.** Study of the laws governing the changes in the plastic zone at the crack tip and characteristics of the fracture toughness of metallic materials in relation to their structure (survey) / A. A. Kaminskii, S. B. Nizhnik // Int. Appl. Mech., 1995. – Vol. 31, №10. – P. 777–798.
11. **Kaminskij A. A.** On a complex model of the pre-fracture zone at the end of a crack on the interface of elastic media / A. A. Kaminskij, L. A. Kipnis // Dopovidi Natsional'noi Akademii Nauk Ukrainy. Matematyka, Pryrodoznavstvo, Tekhnichni Nauky, 2010. – №2. – P. 59-63 (In Russian). [URI: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/19595]
12. **Kaminskij A.A.** On the start of a crack on the interface of elastic media / A. A. Kaminskij, L. A. Kipnis // Dopovidi Natsional'noi Akademii Nauk Ukrainy. Matematyka, Pryrodoznavstvo, Tekhnichni Nauky, 2011. – №1. – P. 38-43 (In Russian). [URI: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/36984]
13. **Kaminsky A.A.** On the direction of development of a thin prefracture process zone at the tip of an interfacial crack between dissimilar media / A. A. Kaminsky, M. V. Dudik, L.A. Kipnis // Int. Appl. Mech., 2006. – Vol. 42, №2. – P. 136-144.
14. **Leblond J.B.** Crack kinking from an initially closed, ordinary on interface crack, in the presence of friction / J.B. Leblond, J. Frelat // Eng. Fract. Mech., 2004. – Vol. 71. – P. 289–307.
15. **Loboda V. V.** Determining Prefracture Zones at a Crack Tip Between Two Elastic Orthotropic Bodies / V. V. Loboda, A. E. Sheveleva // Int. Appl. Mech., 2003. – Vol. 39, №5. – P. 566-572.
16. **Loboda V.V.** Analytical derivation and investigation of the interface crack models / V.V. Loboda // Int. Journ. Solids Structures, 1998. - Vol. 35, № 33. – P.4477-4489.
17. **Noble B**. Methods Based on the Wiener-Hopf Technique, 2nd ed. / B. Noble. – New York, Chelsea, 1988.
18. **Ostryk V. I.** Friction Contact of the Edges of an Interface Crack under the Conditions of Tension and Shear / V. I. Ostryk // Mater. Sci., 2003. – Vol. 39, №2. – P. 214-224.
19. **Panasyuk, V. V.** Model for plasticity bands in elastoplastic failure mechanics / V. V. Panasyuk, M. P. Savruk // Mater. Sci., 1992. – Vol. 28, №1. – P. 41–57.