

УДК 539.375

А. А. КАМИНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук,
М. В. ДУДИК, канд. физ.-мат. наук, В. М. ФЕНЬКИВ

РАСЧЕТ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ ЗОНЫ ПРЕДРАЗРУШЕНИЯ В КОНЦЕ ТРЕЩИНЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА РАЗЛИЧНЫХ УПРУГИХ СРЕД

В большинстве работ о тонкой структуре конца трещины на границе раздела различных сред предполагается, что из него развивается зона предразрушения, не выходящая из плоскости расположения трещины [1–4]. В статье [5] исследовано отклонение направления развития пластической зоны предразрушения от плоскости расположения трещины кусочно-однородном теле, состоящем из упругого и упругопластического материалов. В данной работе исследовано направление развития зоны предразрушения из конца трещины в теле, составленном из различных упругих сред.

1. Постановка задачи. В условиях плоской деформации рассмотрим статическую задачу о нахождении направления развития начальной зоны предразрушения вблизи конца трещины в кусочно-однородном изотропном теле, расположенной на границе раздела двух различных однородных упругих сред. Зона предразрушения моделируется исходящей из конца трещины под углом α к границе раздела сред прямой линией разрыва нормального смещения, на которой нормальное напряжение равно заданной постоянной материала σ , представляющей собой среднее по длине нормальное напряжение в зоне предразрушения. На начальном этапе развития зоны предразрушения ее длина l значительно меньше длины трещины L и всех размеров тела. Для исследования направления развития этой зоны достаточно знание напряженно-деформированного состояния вблизи линии разрыва. Это позволяет в качестве решения соответствующей статической задачи теории упругости использовать решение для кусочно-однородной изотропной упругой плоскости, составленной из двух полуплоскостей и содержащей на их границе полубесконечную трещину с исходящей из ее конца линией разрыва, расположенной в теле с постоянными E_I, ν_I , который является более хрупким, чем материалы второго тела и связующего. На бесконечности главные члены разложений напряжений в асимптотические ряды представляют собой удовлетворяющие условию затухания напряжений доминирующие слагаемые в решении аналогичной задачи без линии разрыва, имеющие осциллирующий характер вблизи конца трещины и поддерживающие произвольные постоянные K_I, K_{II} – заданные коэффициенты интенсивности напряжений [6], характеризующие интенсивность внешнего поля.

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид

$$\langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0 \text{ при } \theta = 0, \\ \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_r \rangle = 0 \text{ при } \theta = \pm\pi, \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \text{ при } \theta = \alpha; \quad (1.1)$$

$$\sigma_\theta = \sigma \text{ при } \theta = \alpha, r > l, \quad \langle u_\theta \rangle = 0 \text{ при } \theta = \alpha, r < l; \quad (1.2)$$

$$\sigma_\theta = F(\alpha) r^{-1/2+i\omega} + \overline{F(\alpha)} r^{-1/2-i\omega} + o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } \theta = \alpha, r \rightarrow \infty, \quad (1.3)$$

где

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{e+\chi_1}{1+e\chi_2}, \quad e = \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1} e_0, \quad e_0 = \frac{E_1}{E_2}, \quad \chi_{I(2)} = 3 - 4\nu_{I(2)},$$

$$F(\alpha) = e' \cdot (K_{II} - iK_I) L^{-i\omega} F_1(\alpha), \quad e' = \frac{\sqrt{(e+\chi_1)(1+e\chi_2)}}{2\sqrt{2\pi} \left[(e+\chi_1)^2 - (1+e\chi_2)^2 \right]},$$

$$F_1(\alpha) = - \left[a_1 \sin(\lambda+2)\alpha + a_2 \sin \lambda\alpha + a_3 \cos(\lambda+2)\alpha + a_4 \cos \lambda\alpha \right]_{\lambda=-1/2+i\omega},$$

$$a_1 = \frac{e+\chi_1}{2} - 1 - e\chi_2 + \left(e+\chi_1 - \frac{1+e\chi_2}{2} \right) \text{ch} 2\pi\omega + i\omega \left[e+\chi_1 - (1+e\chi_2) \right] \text{ch} 2\pi\omega,$$

$$a_2 = \left(\frac{3}{2} + i\omega \right) \left[(1+e\chi_2) \text{ch} 2\pi\omega - e - \chi_1 \right], \quad a_3 = -\omega(1+e\chi_2) \text{sh} 2\pi\omega -$$

$$-i \left(e+\chi_1 - \frac{1+e\chi_2}{2} \right) \text{sh} 2\pi\omega, \quad a_4 = \left(\omega - \frac{3i}{2} \right) (1+e\chi_2) \text{sh} 2\pi\omega,$$

$\langle f \rangle$ – скачок f ; \overline{W} – число, комплексно сопряженное W ; E_i и ν_i – модули Юнга и коэффициенты Пуассона контактирующих сред.

Вблизи конца линии разрыва в силу общих положений о поведении напряжений в окрестностях угловых точек упругих тел [7, 8] реализуются асимптотики, представляющие собой удовлетворяющие условию непрерывности смещений доминирующие слагаемые в решении однородной задачи теории упругости для плоскости, содержащей полубесконечную прямолинейную линию разрыва. В частности, справедливы асимптотики

$$\sigma_\theta \sim \frac{K}{\sqrt{2\pi(r-l)}} \text{ при } \theta = \alpha, r \rightarrow l+0,$$

$$\left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \sim - \frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1} \frac{K}{\sqrt{2\pi(l-r)}} \text{ при } \theta = \alpha, r \rightarrow l-0. \quad (1.4)$$

КИН K в конце линии разрыва подлежит определению.

Решение рассматриваемой задачи представим в виде суммы решений двух задач. Первая отличается от нее тем, что в (1.2) вместо первого условия принимается

$$\sigma_{\theta} = \sigma - F(\alpha) r^{-1/2+i\omega} - \overline{F(\alpha)} r^{-1/2-i\omega} \text{ при } \theta = \alpha, r < l, \quad (1.5)$$

а на бесконечности напряжения затухают как $o(1/r)$. Решение второй задачи, аналогичной задаче без линии разрыва, известно [6]. Поэтому достаточно найти решение первой задачи.

2. Решение уравнения Винера-Хопфа и определение зоны предразрушения. Для построения решения задачи используем метод Винера-Хопфа в сочетании с аппаратом интегрального преобразования Меллина [9, 10]. Применив преобразование Меллина к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций, закону Гука, условиям (1.1) и учитывая второе условие (1.2) и условие (1.5), приходим к функциональному уравнению Винера-Хопфа первой задачи:

$$\Phi^+(p) + \frac{\sigma}{p+1} + \frac{Z}{p+1/2+i\omega} + \frac{\bar{Z}}{p+1/2-i\omega} = -\operatorname{tg} p\pi \cdot G(p) \Phi^-(p),$$

где

$$\Phi^+(p) = \int_1^{\infty} \sigma_{\theta}(\rho l, \alpha) \rho^p d\rho, \quad \Phi^-(p) = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} \right\rangle \Big|_{\substack{r=\rho l \\ \theta=0}} \rho^p d\rho,$$

$$Z = -F(\alpha) l^{-1/2+i\omega}, \quad G(p) = -\frac{D_1(p) \cos p\pi}{D_0(p) \sin^2 p\pi},$$

$$D_0(p) = 2(e + \chi_1)(1 + e\chi_2) \cos 2p\pi + (e + \chi_1)^2 + (1 + e\chi_2)^2,$$

$$D_1(p) = (1 + e\chi_2)^2 \Delta_1(p) - 2(1 - e)(1 + e\chi_2) \Delta_2(p) + 2(e + \chi_1) \times \\ \times (1 + e\chi_2) \Delta_3(p) - 2(1 - e)(e + \chi_1) \Delta_4(p) - (e + \chi_1)^2 \Delta_5(p),$$

$$\Delta_1(p) = p \sin 2\alpha \sin p(\pi - 2\alpha) + 2p^2 \sin^2 \alpha \cos p(\pi - 2\alpha) - \\ - 2 \sin p\alpha \sin p(\pi - \alpha), \quad \Delta_2(p) = p^2 \sin^2 \alpha \cos p(3\pi - 2\alpha) + \\ + p \sin 2\alpha \cos p(2\pi - \alpha) \sin p(\pi - \alpha) + \cos p\pi \sin^2 p(\pi - \alpha),$$

$$\Delta_3(p) = p^2 \sin^2 \alpha \cos p(\pi + 2\alpha) - p \sin 2\alpha \sin p\alpha \cos(p\pi + \alpha) - \\ - \sin p(\pi - \alpha) [\sin p(2\pi + \alpha) - \sin p\pi \cos p(\pi - \alpha)],$$

$$\Delta_4(p) = p^2 \sin^2 \alpha \cos p(\pi - 2\alpha) + p \sin 2\alpha \cos p\alpha \sin p(\pi - \alpha) + \\ + \cos p\pi \sin^2 p(\pi - \alpha), \quad \Delta_5(p) = \sin p\pi [\sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha];$$

$-\delta_1 < \operatorname{Re} p < \delta_2$; δ_1 и δ_2 – достаточно малые положительные числа.

Точное решение уравнения Винера-Хопфа строится так же, как решение задачи в работе [3]. Оно имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi^+(p) &= -\frac{pG^+(p)}{K^+(p)} \left\{ \frac{\sigma}{p+1} \left[\frac{K^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} \right] + \frac{Z}{p+1/2+i\omega} \times \right. \\ &\quad \times \left[\frac{K^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-1/2-i\omega)}{(1/2+i\omega)G^+(-1/2-i\omega)} \right] + \frac{\bar{Z}}{p+1/2-i\omega} \times \\ &\quad \left. \times \left[\frac{K^+(p)}{pG^+(p)} + \frac{K^+(-1/2+i\omega)}{(1/2-i\omega)G^+(-1/2+i\omega)} \right] \right\} \quad (\operatorname{Re} p < 0), \\ \Phi^-(p) &= K^-(p)G^-(p) \left[\frac{\sigma K^+(-1)}{(p+1)G^+(-1)} + \frac{ZK^+(-1/2-i\omega)}{(p+1/2+i\omega)} \times \right. \\ &\quad \times \frac{1}{(1/2+i\omega)G^+(-1/2-i\omega)} + \frac{\bar{Z}K^+(-1/2+i\omega)}{(p+1/2-i\omega)} \times \\ &\quad \left. \times \frac{1}{(1/2-i\omega)G^+(-1/2+i\omega)} \right] \quad (\operatorname{Re} p > 0), \\ \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] &= \begin{cases} G^+(p), & \operatorname{Re} p < 0 \\ G^-(p), & \operatorname{Re} p > 0 \end{cases}, \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(1/2 \mp p)}, \quad (2.1) \end{aligned}$$

в котором $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Использование теоремы абелевого типа [9] и асимптотик (1.4) вместе с (2.1) позволяет найти асимптотику трансформанты $\Phi^-(p)$:

$$\Phi^-(p) \sim -\frac{K}{\sqrt{2pl}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \left[\frac{\sigma K^+(-1)}{G^+(-1)} + 2 \operatorname{Re} \left(\frac{ZK^+(-1/2-i\omega)}{(1/2+i\omega)G^+(-1/2-i\omega)} \right) \right] \quad (p \rightarrow \infty),$$

из которого определяется КИН в конце линии разрыва:

$$K = -\sqrt{2l} \left[\frac{\sigma K^+(-1)}{G^+(-1)} + 2 \operatorname{Re} \left(\frac{ZK^+(-1/2-i\omega)}{(1/2+i\omega)G^+(-1/2-i\omega)} \right) \right].$$

Приравнявая КИН к нулю, получаем уравнение для определения длины зоны предразрушения

$$\bar{\sigma} \sin(\omega \ln x + \psi + \xi + \varphi) / \sqrt{x} = C, \quad x = l/L, \quad \psi = \arg(F_1(\alpha)). \quad (2.2)$$

Здесь

$$\xi = \arg\left(\frac{K^+(-1/2-i\omega)}{(1/2+i\omega)G^+(-1/2-i\omega)}\right), \quad \varphi = \arctg \frac{K_{II}}{K_I},$$

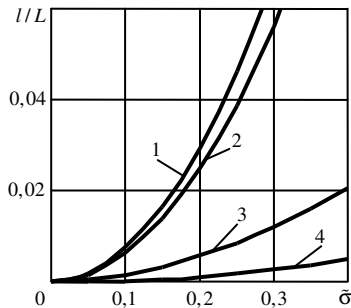
$$C = \frac{K^+(-1)}{2e'G^+(-1)|F_1(\alpha)|} \left| \frac{(1/2+i\omega)G^+(-1/2-i\omega)}{K^+(-1/2-i\omega)} \right|, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}}{\sigma\sqrt{L}}.$$

Уравнение (2.2) нужно дополнить условием, определяющим направление развития зоны предразрушения. Однако большинство критериев выбора направления [11, 12] при использовании решения статической задачи для кусочно-однородной изотропной плоскости с трещиной на границе раздела сред оказываются неудовлетворительными вследствие осциллирующего поведения напряжений вблизи конца трещины. Поэтому ниже выбрано условие максимума энергии деформации, запасенной в зоне предразрушения, которая выражается через определяемую из решения уравнения Винера-Хопфа (2.1) трансформанту Меллина $\Phi^-(p)$.

Некоторые результаты расчетов при $\nu_1 = \nu_2 = 0,333$ даны в таблице:

e_0	$\bar{\sigma}$	n							
		-2	-1	-0,5	0,5	-2	-1	-0,5	0,5
		Значения α°				Значения x			
0,5	0,2	70	61	49	0	0,0246	0,0243	0,0208	0,0143
	0,4	69	60	47	0	0,0991	0,0962	0,0812	0,0558
2	0,2	60	49	31	0	0,0295	0,0266	0,0205	0,0104
	0,4	60	50	34	0	0,1183	0,1084	0,085	0,0439

На рисунке изображены графики зависимости отношения l/L длины линии разрыва к длине трещины от параметра нагрузки $\bar{\sigma}$. Кривые 1–4 соответствуют комбинациям значений $e_0 = 2$, $n = -2$; $e_0 = 0,5$, $n = 2$; $e_0 = 2$, $n = 2$; $e_0 = 0,5$, $n = -2$ ($n = K_{II}/K_I$). Как и следовало ожидать, длина линии разрыва возрастает с увеличением модуля нагрузки. Если e_0 увеличивается, то при $n > 0$ длина линии разрыва уменьшается, а при $n \leq 0$ она увеличивается. Угол



наклона линии разрыва слабо зависит от модуля нагрузки. При этом, с увеличением модуля нагрузки угол α уменьшается, если $e_0 < 1$, и увеличивается, если $e_0 > 1$. С увеличением e_0 угол наклона уменьшается. Начиная с некоторого $n > 0$ угол α становится и остается равным нулю. Таким образом, при $n > 0$ зона предразрушения в конце трещины расположена в области, прилегающей к границе раздела сред.

РЕЗЮМЕ. В умовах плоскої деформації методом Вінера-Хопфа здійснено розрахунок початкової зони передруйнування біля кінця тріщини в кусково-однорідному ізотропному пружному тілі, розташованій на межі розділу середовищ. Зона передруйнування моделюється прямою лінією розриву нормального зміщення, що виходить з кінця тріщини під кутом до межі розділу середовищ. Досліджені залежності довжини зони передруйнування і кута нахилу від навантаження та інших параметрів задачі.

SUMMARY. The calculation of the initial prefracture zone near the end of the crack in piece-homogeneous isotropic elastic body under plane strain by the Wiener-Hopf method is presented. The crack is located on the interface of different media. The prefracture zone is modeled by the direct line of normal displacement rupture emerging from the end of the crack. The dependences of the length of the prefracture zone and of the angle of the slope on the loading and on the other parameters of the problem are investigated.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ: 1. *Comninou M.* The interface crack // J. Appl. Mech. – 1977. – Vol. 44, № 4. – P. 631–636. 2. *Каминский А. А., Кипнис Л. А., Колмакова В. А.* Линия скольжения в конце разреза на границе раздела различных сред // Прикладная механика. – 1995. – Т. 31, № 6. – С. 86–91. 3. *Каминский А. А., Кипнис Л. А., Колмакова В. А.* О модели Дагдейла для трещины на границе раздела различных сред // Там же. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 63–68. 4. *Лобода В. В., Шевелева А. Е.* Определение зон предразрушения у края трещины между двумя упругими ортотропными телами // Там же. – 2003. – Т. 39, № 5. – С. 76–82. 5. *Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А.* О направлении развития тонкой пластической зоны предразрушения в вершине трещины на границе раздела различных сред // Там же. – 2006. – Т. 42, № 2. – С. 14–23. 6. *Кортен Х. Т.* Неорганические материалы // Разрушение неметаллов и композитных материалов. – М.: Мир, 1976. – С. 367–471 (Разрушение: В 7 т., т. 7). 7. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с. 8. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с. 9. *Нобл Б.* Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с. 10. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 402 с. 11. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1985. – 504 с. 12. *Ярема С. Я., Иващицкая Г. С.* Предельное равновесие и развитие косых трещин. Обзор критериев // Физ.-хим. механика материалов. – 1986. – № 1. – С. 45–57.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев,
Уманский государственный педагогический университет Поступила 19.05.2006*