УДК 517.5

Фурман Інна Володимирівна
викладач кафедри педагогіки та освітнього менеджменту
Уманського державного педагогічного університету ім. П.Тичини

Василь Єрмаков

ПОВНА ТЕОРІЯ НАЙБІЛЬШИХ І НАЙМЕНШИХ ВЕЛИЧИН ФУНКЦІЙ ВІД ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

В статті розглядається детальне вивчення науково-освітньої діяльності Київського фізико-математичного товариства, яке було створено у 1889 році. На засіданнях товариства обговорювались наукові теми з математики, фізики, механіки та суміжних галузей науки. Зокрема, на одному із засідань Київського фізико-математичного товариства була проголошена доповідь В. Єрмакова «Полная теория наибольших и наименьших величин функции от одной переменной». Дані цієї доповіді можна використати при підготовці до уроку з алгебри з теми «Функція» в 11класі, студентами вищих навчальних закладів фізико-математичних факультетів.

Ключові слова: товариство, математика, функція, maximum, minimum, первісна.

Фурман И. В. Полная теория наибольших и наименьших величин функции от одной переменной.

В статье рассматривается детальное изучение научно-образовательной деятельности Киевского физико-математического общества, которое было создано в 1889 году. На заседаниях общества обсуждались научные темы по математике, физике, механике и сумежных отраслей науки. В частности, на одном из заседаний Киевского физико-математического общества был провозглашён доклад В.Ермакова «Полная теория наибольших и наименьших величин функции от одной переменной». Данные этого доклада можно использовать при подготовке к уроку алгебры в 11 классе, студентами высших учебных заведений физико-математических факультетов.

Ключевые слова: общество, математика, функция, максимум, минимум, производная.

Furman I. V. The full theory of the largest and smallest values of the function of one variable.

The detailed study of scientifically-educational activity of Kiev physics and mathematical society which was created in 1889 is examined in the article. Scientific themes on mathematics, physics came into question on meetings of society, to mechanics and contiguous branches of science. In particular, on one of meetings of Kiev physics and mathematical society the lecture was proclaimed the V.Ermakov «Complete theory of most and the least sizes of function from one variable». Information of this lecture can be used for preparation to the lesson of algebra in a 11 class, by the students of higher educational establishments of physics and mathematical faculties.

Key words: society, mathematics, function, maximum, minimum, derivative.

Вступна стаття

Зміни, які відбуваються в освітньому житті Української держави, ставлять перед наукою нові завдання: змістовно дослідити маловідомі джерела у різних галузях знань; дослідити творчі та наукові праці вчених, які свого часу були засновниками і учасниками багатьох об'єднань, відіграли вагому роль у розвитку науки та популяризації її результатів, мають багату педагогічну і просвітницьку спадщину.

Особливої уваги заслуговує вивчення науково-освітньої діяльності Київського фізико-математичного товариства, створеного у 1889 році. Засновниками товариства були видатні вчені, відомі вчителі та викладачі фізики й математики, студенти й магістранти університетів, а саме: М. Авенаріус, Б. Букреєв, М. Ващенко-Захарченко, В. Єрмаков, І. Рахманінов, П. Ромер, Г. Суслов, М. Хандріков, М. Шіллер, Є. Шпачинський та ін.

На засіданнях товариства обговорювались наукові теми не тільки загального характеру, а й з математики, фізики, механіки та суміжних галузей науки. Розглядались тут і методичні питання. Засідання збиралися раз на місяць або частіше, залежно від потреби. З повідомленнями на засіданнях виступали члени товариства та запрошені видатні вчені. Частина цих повідомлень публікувалася в «Университетских известиях» та окремими виданнями або зберігалася в протоколах засідань товариства.

Так, на одному із засідань Київського фізико-математичного товариства була виголошена доповідь одним із його членів В. Єрмаковим, який торкнувся таких питань: диференціальні рівняння з алгебраїчними та однозначними інтегралами, про пошук раціональних інтегралів лінійних диференціальних рівнянь, про особливі інтеграли та про інтегруючі множники диференціальних рівнянь, про нові способи інтегрування рівняння Лапласа.

Київське фізико-математичне товариство відігравало важливу роль у розвитку математичної науки, зокрема в математичному аналізі, початки якого вивчаються у шкільному курсі математики, а відтак більш широко у вищих навчальних закладах.

Вважаємо за доцільне подати текст доповіді В. Єрмакова «Полная теория наибольших и наименьших величин функции от одной переменной», яка була опублікована у протоколах засідань Київського фізико-математичного товариства за 1891 року. Ця стаття може бути використана при підготовці до уроку «Алгебра і початки аналізу» з теми «Функція» в 11 класі, застосовуватись студентами вищих навчальних закладів фізико-математичних факультетів.

Інна Фурман

Приложение

Полная теория наибольших и наименьших величин функции от одной переменной

Обозначения и условия. Говоря об изменении функции с изменением независимого переменного, мы будем всегда предполагать, что независимое переменное возрастает.

Если с возрастанием переменных функция сначала возрастает, а потом убывает, то мы будем говорить, что функция переходит через maximum. Если же функция сначала убывает, а потом возрастает, то мы будем говорить, что функция переходит через minimum.

Условимся в следующих сокращенных обозначениях:

возрастание функции обозначим через ………………………… $<$

убывание функции…………………………………………………… $>$

переход через maximum ……………………………………….. $\frown$

переход через minimum……………………………………….. $\smile$

переход из положительного значения в отрицательное ………$+\,-$

переход из отрицательного значения в положительное …….. $-\,+$

Основные теоремы. Вся теория может быть основана на следующем известном соотношении между функцией и её производной: если с возрастанием функция возрастает, то её производная положительна, если же функция убывает, то её производная отрицательная. Для большей наглядности представим это соотношение в форме *первой таблички:*

Таблица 1

$F(x)$	$<$	$>$
$F'(x)$	$+$	$-$

Предположим теперь, что функция переходит чрез maximum, т.е. сначала возрастает, а потом убывает; в таком случае первая производная, как показывает эта табличка, сначала положительна, потом становиться отрицательною. Если же функция переходит через minimum, то её первая производная переходит из отрицательного значения в положительное. Таким образом, имеем *вторую табличку*:

Таблица 2

$F(x)$	$\frown$	$\smile$
$F'(x)$	$+\,-$	$-\,+$

Итак, первая производная должна менять знак, если начальная функция переходит или через maximum или через minimum. Но функция может менять знак тремя способами: 1)перехода через нуль, 2) перехода через бесконечность, 3) делая скачёк от отрицательного значения к положительному или обратно. Отсюда получается простое средство для нахождения тех значений независимого переменного, при которых данная функция может приобрести maximum или minimum. Для этой цели нужно найти те значения независимого, при которых первая производная обращается в нуль, в бесконечность и вообще становиться прерывною.

Пусть $x = a$ одно из найденных таким образом значений. Остаётся дать правила, по которых можно узнать, приобратает ли данная функция при найденном значении переменного maximum или minimum, или же не имеет ни того, ни другого. Принимая во внимание все возможные обстоятельства, мы можем насчитать шесть случаев, которые и рассмотрим отдельно.

Первый случай. Предположим, что, при $x = a$ первая производная обращается в нуль, $f(a) = 0$. Вопрос приводиться к определению знаков первой производной для значений x, весьма близких к $x = a$. Иногда это определение удаётся сделать по внешнему виду первой производной.

Если по внешнему виду первой производной трудно судить о её знаках для значений x, весьма близких к a, то переходим ко второй производной. Обозначим первую производную новым символом, $\varphi(x) = f(x)$.

Если данная функция $f(x)$ переходит через maximum, то $\varphi(x)$ из положительного значения через нуль переходит в отрицательное значение. Но в таком случае по обе стороны $x = a$ можно назначить два таких довольно близких предела, между которыми функция $\varphi(x)$ непрерывно убывает.[1]

[1] Из нашего рассмотрения исключаеться такая функция, которая вблизи x = a имеют бесчисленное множество maxima и maxima или бесконечное число раз обращаеться или в безконечность; таковы напр.функция sin $\frac{1}{x-a}$, tan$\frac{1}{x-a}$.

Согласно первой табличке первая производная, $\varphi'(x) = f''(x)$, в этом случае отрицательная и не меняет знака.

Итак, если функция $f(x)$ переходит через maximum, первая производная $f'(x)$ переходит через нуль, то вторая производная $f''(x)$ отрицательна. Подобным образом доказывается, что и вторая производная положительная, если данная функция переходит через minimum. Отсюда имеем третью табличку:

Таблица 3

$f(x)$	$\frown$	$\smile$
	$f'(a) = 0$	
$f''(x)$	$-$	$+$

Таким образом, вопрос приводиться к определению знака второй производной. В рассматриваемом нами первом случае мы полагаем, что при $x = a$ вторая производная не обращается ни в нуль, ни в бесконечность и не делается прерывною. При таких условиях данная функция действительно приобретает либо maximum, либо minimum, что вполне определяется знаком при $f''(a)$

Если при $x = a$ первая производная обращается в нуль, а вторая производная положительна, то при том же значении переменного начальная функция приобретает minimum; если же вторая производная отрицательна, то начальная функция приобретает minimum.

Представителем этого случая может быть функция, выражаемая формулой:

$$f(x) = A + (x - a)^2 \theta(x) \qquad (1)$$

где A – постоянная величина, а $\theta(x)$ такая функция, которая при $x = a$ обращается в конечную определённую величину, отличаемую от ноля.

Второй случай. Предположим, что при $x = a$ не только первая производная, но и вторая производная обращается в нуль: $F'(a) = 0, f''(a) = 0$.

В этом случае вопрос о существовании maximum и minimum остается нерешённым. Необходимо исследовать знак второй производной для значений, весьма близких к $x = a$.

Если начальная функция переходит через maximum, то из третьей таблички мы делаем вывод, что вторая производная отрицательна, сверх того вторая производная переходит через ноль. Но если какая либо функция, сохраняя отрицательный знак, переходит через ноль, то ноль будет maximum для этой функции. Отсюда следует, что вторая производная переходит через maximum, если начальная функция переходит через maximum. Подобным образом, если начальная функция переходит через minimum, то и вторая производная переходит через minimum. Но если вторая функция не имеет maximum, ни minimum, то легко показать, что функция и её вторая производная одновременно возрастают, либо одновременно убывают. Всё сказанное может быть выражено четвёртой табличкой:

Таблица 4

$f(x)$	$\frown$	$\smile$	$<$	$>$
$f'(a) = 0$				
$f''(a) = 0$				
$f''(x)$	$\frown$	$\smile$	$<$	$>$

Здесь мы замечаем полное соответствие между начальной функцией и её второй производной. Таким образом *вопрос о существовании maximum и minimum для функции* $f''(x)$. *С этой последней функцией мы можем поступить точно также, как и с начальной функцией.*

Представителем этого случая может быть функция, выражаемая формулою (1), если $\theta(a) = 0$.

Третий случай. Предположим, что при $x = a$ первая производная обращается в нуль, а вторая производная в бесконечность:

$f'(a) = 0, f''(a) = \infty$

Вопрос о существовании maximum и minimum в этом случае остаётся нерешённым. Необходимо иследовать знак второй производной для значений, весьма близких к $x = a$.

Если начальная функция переходит через maximum, то из третьей таблички следует, что вторая производная отрицательна, сверх того она переходит через бесконечность. Функция $\frac{1}{f''(x)}$ так же отрицательна и переходит черех ноль. Но в таком случае ноль будет maximum для $\frac{1}{f''(x)}$.

Рассуждения, подобные прежним, приведут нас к полному соответствию между $f(x)$ и $\frac{1}{f''(x)}$, что может быть выражено пятой таблицей:

Таблица 5

$f(x)$	$\frown$	$\smile$	$<$	$>$
$f'(a) = 0$				
$f''(a) = \infty$				
$\frac{1}{f''(x)}$	$\frown$	$\smile$	$<$	$>$

Таким образом *вопрос о существовании тахітит и тіпітит для функции f(x) сводится к подобному для функции* $\frac{1}{f''(x)}$*. С этой последней функцией мы можем поступать точно также, как и с начальной функцией.*

Представителем этого случая может быть функция, выражаемая формулой:

$$f(x) = A + (x - a)^{n}\theta(x), \qquad (2)$$

где A – постоянная величина, показатель ^{n} заключается между 1 и 2, функция $\theta(x)$ при $x = a$ обращается в конечную величину, отличную от нуля.

Четвёртый случай. Предположим, что при $x = a$ первая производная обращается в нуль, а вторая производная при переходе переменной через $x = a$ изменяется на конечную величину, так что два выражения:

$$f''(a-\alpha), f''(a+\alpha) \tag{3}$$

с приближением α к нулю стремятся к разным пределам.

В этом случае вопрос приводится к орпедалению знаков пределов выражений (3). Если пределы выражений (3) имеют разные знаки, то данная функция не имеет ни maximum, ни minimum. Если же пределы (3) имеют одинаковые знаки, то данная функция приобретает либо maximum, либо minimum. Отличие maximum от minimum зависит от знака выражений (3), согласно с таблицею третьей.

Примером этого случая будет функция:

$$f(x) = A(x-a)^{n}[\log(e^{1}_{x-\alpha}+1)]^2 + B(x-\alpha)^2 + C, \tag{4}$$

где, A, B и C – некоторые постоянные величины. Для этой функции имеем:

Пред.$f'(a+\alpha) = 2A + 2B$,

Пред. $f(a-\alpha) = 2B$.

Пятый случай. Расмотрим теперь тот случай, когда первая производная в бесконечность: $f(a) = \infty$. Согласно второй табличке, вопрос приводится к определению заков первой производной для значений, весьма близких к $x = a$. Иногда это определние может быть сделано по внешнему виду первой производной.

Если определение знаков первой производной затруднительно по её внешнему виду, то переходим к следующей производной.

Предположим $\varphi(x) = \frac{1}{f''(x)}$, так определённая функция $\varphi(x)$ имеет те же знаки, как и функция $f(x)$, и при $x = a$ обращается в нуль. Для существования maximum і minimum $\varphi(x)$ как показывает табличка 2, должна при переходе через нуль менять знак. Поэтому по обе стороны $x = a$ можно назначить два таких близких предела, между которыми $f(x)$ либо непрерывно убывает либо возрастает. Но в таком случае первая производная

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{\{f(x)\}^2} \tag{5}$$

Между теми пределами должно сохранять постоянный знак. Если $f(x)$переходит через maximum, то $\varphi(x)$ переходит из положительного значения через нуль в отрицательное, т.е. убывает, но в таком случае $\varphi'(x)$ должно быть отрицательно. Если же $f(x)$ переходит через minimum, то $\varphi'(x)$ положительно. Но из равенства (5) следует, что $\varphi'(x)$ и $f'(x)$ имеют всегда противоположные знаки.

Таблица 6

$f(x)$	$\frown$	$\smile$
$f'(a) = \infty$		
$f''(x)$	$+$	$-$

Если какая нибудь функция обращается в безконечность, то извесно, что при том же значении независимого переменного и вся производная также обращшается в безконечность. Отсюда следует, что $f''(a) = \infty$

Шестой случай. Остаётся ещё раз рассмотреть один случай, когда первая производная, при переходе независимого переменного через $x = a$, мгновенно изменяеться на конечную величину, так что выражение

$$f'(a-\alpha), f'(a+\alpha) \tag{6}$$

с приближением положительной величины α к нулю, стремиться к разным пределам. Вопрос сводиться к нахождению знаков пределов выражений (6). Данная функция имеет maximum или minimum, если найденные пределы имеют одинаковые знаки. Отличие maximum от minimum производиться по второй табличке.

Примером для этого случая может служить функция:

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{A(x-a)^n log}(e^{1}_{x-\alpha} + 1) + B(\mathrm{x-a}) + C, \tag{7}$$

где A, B и C– некоторые постоянные величины. Для этой функции имеем:

Пред. $f'(a+\alpha) = A + B$,

Пред. $f'(a-\alpha) = B$.

Список літератури:

1. Протокол засідання Київського фізико-математичного товариства від 04.10.1891 р. – К., 1892. – № 31. – С. 22–30.