

**Міністерство освіти і науки України
Уманський державний педагогічний університет
Імені Павла Тичини**

Азізов Т. Н., Мельник О. В., Орлова О. М.

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Умань
ВВЦ «Візаві»
2018

УДК 531.(075.8)

А 35

Рекомендовано до друку Вченою радою Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини
(протокол № 4 від 30.10.2018 р.)

Рецензенти:

Клименко Є. В. – доктор технічних наук, завідувач кафедри будівельних конструкцій Одеської державної академії будівництва та архітектури,

Семко О. В. – доктор технічних наук, завідувач кафедри архітектури та міського будівництва Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка,

Мельник О.С. – кандидат технічних наук, доцент, в.о. завідувача кафедри професійної освіти та технологій за профілями Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини.

А 35 **Азізов Т. Н.** Технічна механіка : навчальний посібник / Н. Азізов, О. В. Мельник, О. М. Орлова; МОН України, Уманський рж. пед. ун-т ім. Павла Тичини. – Умань : Візаві, 2018. – 116 с.

Навчальний посібник призначений для підготовки фахівців технологічної та професійної освіти з дисципліни «Технічна механіка». Рекомендується студентам для самостійного вивчення основних положень теоретичної та технічної механіки.

У посібнику наведені приклади розв'язку задач з теоретичної та технічної механіки. Розглянуто дванадцять тем, десять з яких містять практичні завдання по дванадцять варіантів в кожному для виконання розрахункових робіт студентами Уманського державного педагогічного університету.

УДК 531.(075.8)

ЗМІСТ	
Вступ	4
Основні поняття і аксіоми статички	5
Розділ 1 Теоретична механіка	11
Практичне заняття № 1. Визначення реакцій у в'язях плоскої системи сил.....	11
Практичне заняття № 2. Тертя. Стійкість твердого тіла проти перекидання.....	21
Практичне заняття № 3. Просторова система сил	28
Практичне заняття № 4. Центр ваги твердого тіла, послідовність розрахунку	37
Розділ 2 Опір матеріалів	45
Практичне заняття № 5. Розрахунок елементів на розтяг та стиск побудова епюр повздовжніх сил та напруг	45
Практичне заняття № 6. Зсув. Деформація зсуву. Закон Гука. Розрахункова формула для зсуву	56
Практичне заняття № 7. Кручення. Відомості про деформацію кручення. Побудова епюр крутних моменті.....	65
Практичне заняття № 8. Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів	74
Практичне заняття № 9. Чистий згин прямого бруса. Згинальний момент і поперечна сила. Диференціальні залежності при згині. Нормальні напруги, умова міцності.....	80
Практичне заняття № 10. Позацентровий стиск.....	94
Практичне заняття № 11. Визначення жорсткості залізобетонних елементів коробчастого перерізу з нормальними тріщинами.....	97
Практичне заняття № 12. Розрахунок складених балок	101
Глосарій	113
Список використаних джерел	116

ВСТУП

Механіка – наука, про механічний рух і взаємодію матеріальних тіл.

Технічна механіка – комплекс дисциплін, що включає теоретичну механіку, опір матеріалів, будівельна механіка та деталі машин.

Навчальний посібник призначений для підготовки фахівців професійної освіти з дисципліни «Технічна механіка». Рекомендується студентам для самостійного вивчення основних положень теоретичної та технічної механіки.

Курс вивчення цієї дисципліни, передбачає опанування комплексу знань і вмінь необхідних для правильного рішення найпростіших технічних завдань під час своєї професійної діяльності, зорієнтований на розвиток творчої особистості студента – майбутнього фахівця нового покоління.

Навчальний посібник містить основний теоретичний матеріал, глосарій та практичні задачі з деформації (згин, розтяг, стиск, кручення) з дисципліни «Технічна механіка».

У посібнику наведені приклади розв'язку задач з теоретичної та технічної механіки. Розглянуто дванадцять тем, десять з яких містять запитання для самоконтролю та практичні завдання по дванадцять варіантів в кожному для виконання розрахункових робіт студентами Уманського державного педагогічного університету.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І АКсіОМИ СТАТИКИ

Статика – це відділ теоретичної механіки, який вивчає умови за яких тіло перебуває у рівновазі (стан спокою, або прямолінійного і рівномірного руху).

Абсолютно тверде тіло – це тіло, відстань між будь-якими його точками залишається незмінною під дією на нього інших тіл.

Матеріальна точка – це точка, яка має масу. Вважають матеріальною точкою не тільки тіло малих розмірів, а й будь-яке тіло, розмірами якого в умовах даної задачі можна знехтувати (наприклад зорі).

Сила – це міра механічної взаємодії сил. Дія сили на тіло характеризується трьома елементами:

- чисельним значенням сили (модулем);
- лінією дії, напрямом;
- точкою прикладання.

В Міжнародній системі одиниць (СІ) модуль сили вимірюється в ньютонках (Н).

Ньютон – це така сила, яка надає тілу 1 кг прискорення 1 м/с^2 у напрямку дії сили: $9,81 \text{ Н} \approx 1 \text{ кгс}$.

Рівновагою вважається такий стан, при якому тіло перебуває у спокої або рухається прямолінійно рівномірно чи рівномірно обертається.

Основні поняття статички:

- 1) **система сил** - це сукупність сил, що діють на дане тіло;
- 2) якщо під дією деякої системи сил вільне тіло знаходиться в спокої або рівномірно прямолінійно рухається, то така система сил називається **зрівноваженою системою сил**. Під дією зрівноваженої системи сил тіло знаходиться в рівновазі;
- 3) дві різні системи сил називаються **еквівалентними**, якщо вони виявляють однакову механічну дію на одне і те ж вільне тверде тіло. При заміні даної системи сил еквівалентною, механічний стан твердого тіла не змінюється;
- 4) сила, яка після приєднання до деякої системи сил, що діють на тіло, приводить цю систему до рівноваги, називається **зрівноважуючою** даної системи сил;
- 5) сила, еквівалентна даній системі сил, називається **рівнодією** цієї системи. Сили, що діють на дане тіло чи на систему тіл, діляться на зовнішні і внутрішні сили.

Зовнішніми силами називають сили з якими діють на дане тіло чи систему інші тіла.

Внутрішніми силами називають сили взаємодії між окремими точками даного тіла чи між тілами однієї системи.

Умови, за яких тіло може перебувати у рівновазі, виведені з кількох основних положень, їх приймають без доведень, підтверджених дослідами. Такі умови називають **аксіомами статyki**.

Основні аксіоми статyki вперше сформулював англійський учений Ньютон (1642–1727), тому їх назвали його іменем.

Аксіома I (аксіома інерції, або перший закон Ньютона).

Будь-яке тіло зберігає свій стан спокою або прямолінійного рівномірного руху, поки якісь сили не виведуть тіло з цього стану.

Здатність матеріального тіла зберігати рух, коли немає діючих сил, або поступово змінювати цей рух, коли на тіло починають діяти сили називають інерцією або інертністю. Інертність одна із основних властивостей матерії.

Аксіома II (аксіома взаємодії, або третій закон Ньютона).

Сили взаємодії двох тіл завжди однакові за модулем і протилежно напрямлені по одній прямій (рис. 1).

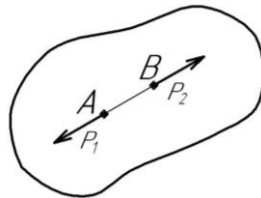


Рис. 1. Сили взаємодії двох тіл

Третій закон Ньютона доводить, однобічної дії одного тіла на друге не буває, всі сили в природі – парні сили.

Сила дії будь-якого тіла на дане і сила протидії не є системою сил, бо вони прикладені до різних тіл.

Аксіома III (умова рівноваги двох сил).

Для рівноваги вільного твердого тіла, яке перебуває під дією двох сил, необхідно і достатньо, щоб ці сили дорівнювали одна одній за модулем і діяли по одній прямій у протилежних напрямках.

Аксіома IV (про додавання, віднімання системи зрівноважених сил).

Рівновага (як і будь-який механічний стан) твердого тіла не порушиться, якщо до нього прикласти або відняти від нього систему зрівноважених сил.

Висновок з аксіом III, IV.

Механічний стан твердого тіла не порушиться, якщо силу перенести вздовж лінії її дії.

Доведемо вище зазначений висновок. Нехай на тверде тіло серед інших сил діє сила P прикладена в точці A і діє по прямій ab (рис. 2).

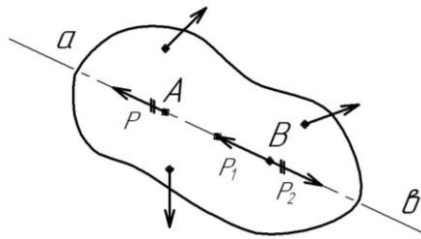


Рис. 2. Перенесення сили вздовж лінії її дії

У довільно взятій точці B на лінії ab прикладені дві однакові за модулем і протилежно направлені сили P_1 і P_2 , що діють по лінії ab . Відповідно до аксіоми III сили P_1 і P_2 взаємно зрівноважені, а на основі аксіоми IV їх можна прикласти до тіла, не порушивши його механічного стану. Візьмемо сили P_1 і P_2 такими, щоб кожна з них за модулем дорівнювала силі P

$$P_1 = P_2 = P.$$

У відповідності до аксіоми IV відкинемо сили P і P_2 як такі, що взаємно зрівноважуються. Тоді силу P_1 , яка залишилася, можна розглядати як силу P , перенесену із точки A в точку B вздовж лінії дії, при цьому механічний стан не порушиться. Висновок доведено.

Аксіома V (аксіома паралелограма).

Рівнодіюча двох сил, прикладених до тіла в одній точці дорівнює за модулем діагоналі паралелограма, побудованого на даних силах збігається з діагоналлю і прикладена в тій самій точці.

Побудову діагоналі паралелограма (рис. 3), сторонами якого є задані вектори, називають векторним або геометричним додаванням.

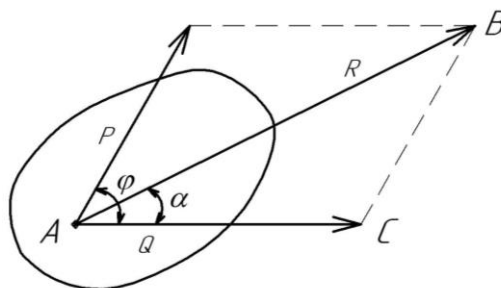


Рис. 3. Векторне додавання двох сил за допомогою паралелограма

Отже, рівнодіюча двох сил прикладених в одній точці дорівнює їх векторній сумі $R = P + Q$ і прикладена в тій самій точці.

Рівнодіючу двох сил можна знайти, побудувавши замість паралелограма сил трикутник сил (рис. 4).

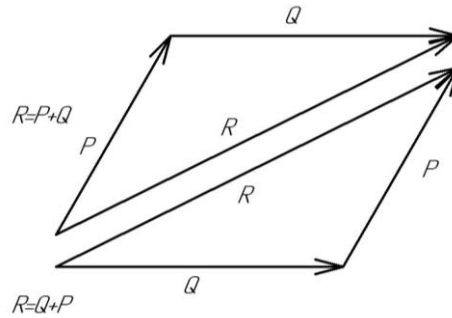


Рис. 4. Векторне додавання двох сил за допомогою трикутника

З рис. 3 видно, що послідовність додавання векторів на величину рівнодіючої не впливає, тоді:

$$R = P + Q = Q + P.$$

Крім того, модуль і напрям рівнодіючої двох сил, що прикладені в одній точці, можна знайти аналітично розглянувши трикутник ABC (рис. 3) за теоремою косинусів:

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos(\pi - \varphi) = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \varphi,$$

тоді модуль рівнодіючої:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \varphi}.$$

За теоремою синусів:

$$\frac{P}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin(\pi - \varphi)} = \frac{R}{\sin \varphi},$$

звідки напрям рівнодіючої:

$$\sin \alpha = \frac{P \sin \varphi}{R}.$$

Приведемо окремі випадки додавання двох сил:

1. $\varphi = 0^\circ$, тоді $R = P + Q$.

Рівнодіюча двох сил, які діють по одній прямій і в одному напрямі, дорівнює їх сумі і направлена по тій самій прямій і в той самий бік.

2. $\varphi = 180^\circ$, тоді $R = P - Q$.

Рівнодіюча двох сил, які діють по одній прямій але в протилежних напрямках, дорівнює різниці цих сил, та направлена по тій самій прямій у бік більшої сили.

3. $\varphi = 90^\circ$, тоді $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$.

Рівнодіюча двох сил, які діють під прямим кутом, дорівнює за величиною діагоналі прямокутника, побудованого на цих силах.

Усі тіла в природі поділяють на вільні і невольні. Під **абсолютно вільним тілом** розуміють тіло, яке може переміщуватися в просторі в будь

якому напрямку. Більшість тіл – невідільні, їх рух обмежується взаємодією з іншими тілами. Тіла, які обмежують рух даного тіла в просторі, називаються *зв'язками*. Сила, з якою тіло діє на зв'язок, називають *силою тиску*; силу, з якою зв'язок протидіє даному тілу, називають *силою реакції* або спрощено *реакцією*. Відповідно до аксіоми II (взаємодії) сила тиску і реакції за модулем дорівнюють одна одній, діють по одній прямій в протилежних напрямках.

Будь-яке невідільне тіло можна розглядати як вільне, якщо подумки звільнити його від зв'язків і замінити їх дію на тіло силами реакцій цих зв'язків. Реакція зв'язку є силою протидії і завжди має напрямок, протилежний силі дії даного тіла на зв'язок.

В залежності від характеру закріплення тіл розрізняють кілька типів зв'язків.

Ідеально гладка площина. На (рис. 5) реакція R напрямлена перпендикулярно до опорної площини в бік тіла.

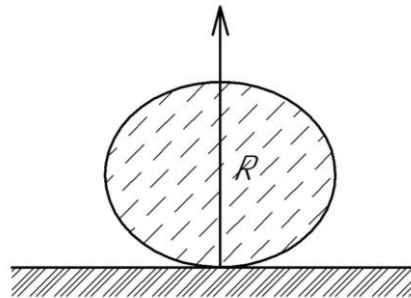


Рис. 5. Напрямок реакції R до перпендикулярно опорної площини

Якщо тіло знаходиться на похилій площині, необхідно силу тяжіння G розкласти на дві складові G_1 і G_2 , паралельну і перпендикулярну до опорної площини (рис. 6). З рисунка 1.6 видно, що складова G_1 рухатиме тіло вздовж поверхні а складова G_2 притискатиме тіло до поверхні і врівноважуватиметься реакцією R .

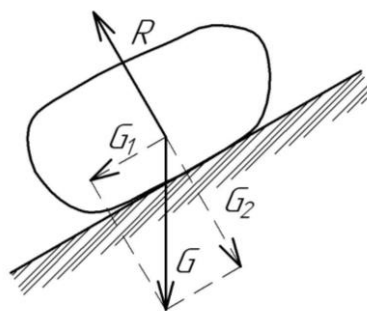


Рис. 6. Напрямок реакції R , якщо тіло знаходиться на похилій площині

Ідеально гладка поверхня. В даному випадку реакція R напрямлена перпендикулярно до дотичної площини $A-A$, тобто по нормалі до опорної поверхні в бік тіла, так як нормаль єдиний напрям переміщення тіла, якого даний зв'язок не дозволяє (рис. 7).

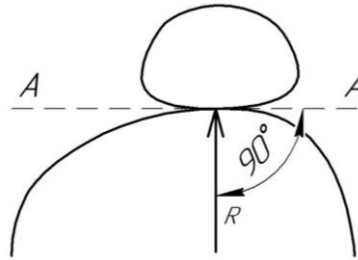


Рис. 7. Напрямок реакції R до перпендикулярно дотичної площини $A-A$

Гнучкий зв'язок (в'язь нитка, ланцюг) може бути тільки розтягнутим, тому реакція R напрямлена вздовж зв'язку від тіла до точки підвісу (рис. 8).

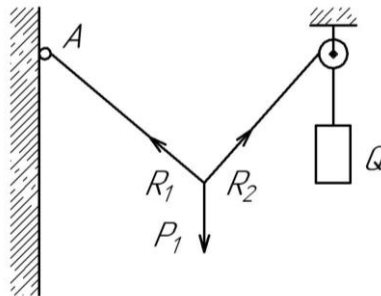


Рис. 8. Напрямок реакції R в гнучкому зв'язку

Точка опору або ребро. Реакція R_A напрямлена перпендикулярно до поверхні тіла чи дотичної до опорної поверхні в бік тіла (рис. 9).

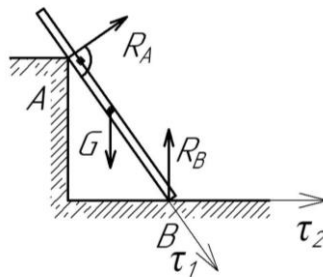


Рис. 9. Напрямок реакції R_A до точки опору або ребра

Плоскою системою збіжних сил називають систему сил, лінії дії яких лежать в одній площині і перетинаються в одній точці.

Розділ 1 Теоретична механіка

Практичне заняття № 1.

Визначення реакцій у в'язях плоскої системи сил

Балка – плоска конструкція, що працює в умовах чистого або поперечного плоского згину.

Як правило, балки бувають двохопорні та консольні (рис. 1.1).

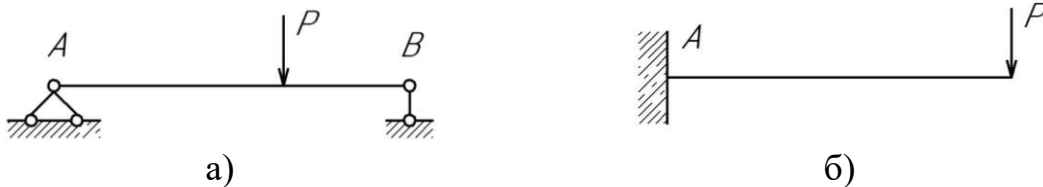


Рис. 1.1. Види балок: а) шарнірна на двох опорах, б) консольна

Балка на двох опорах фіксується в просторі за допомогою двох опор – шарнірно-нерухомої (опора А) та шарнірно-рухомої (опора В) (рис. 1.1 а).

Опорні реакції – сили (R_A – вертикальна, H_A – горизонтальна), які виникають в опорах внаслідок дії на них зовнішніх сил (рис. 1.2).

Шарнір – рухоме з'єднання двох тіл, допускає обертання тільки навколо спільної осі (циліндричний шарнір) або спільної точки (кульовий шарнір).

Шарнірно-нерухома опора в ній може виникати дві складові реакції – вертикальна R_A та горизонтальна H_A (рис. 1.2).

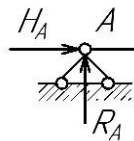


Рис. 1.2. Напрямок реакцій R_A та H_A в шарнірно-нерухомій опорі

Шарнірно-рухома опора в ній може виникати тільки одна складова реакції – R_A , направлена вздовж опорного стержня (рис. 1.3).



Рис. 1.3. Напрямок реакції R_A вздовж опорного стержня

Консольна балка (рис. 1.1б) фіксується за допомогою однієї опори – жорсткого кріплення.

Жорстке кріплення можуть виникати три складові – вертикальна R_A , горизонтальна H_A реакції та опорний момент M_A (рис. 1.4).

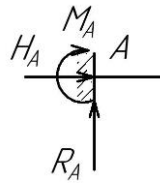


Рис. 1.4. Напрямок реакцій R_A , H_A та опорного моменту M_A в жорсткому кріпленні

Шарніром називається пристрій, що зв'язує тіла і дозволяє здійснювати обертання одного тіла відносно іншого.

Циліндричний шарнір допускає обертання тіл навколо однієї осі і ковзання вздовж неї (рис. 1.5).

Рухомий циліндричний шарнір дозволяє тілу обертатись навколо осі шарніра і рухатися разом з шарніром вздовж опорної поверхні. Реакція R_A завжди напрямлена перпендикулярно до опорної поверхні (рис. 1.5).

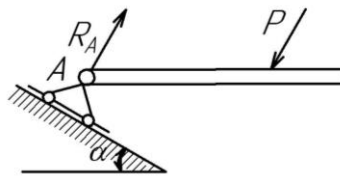


Рис. 1.5. Напрямок реакції R_A в рухомому циліндричному шарнірі

Нерухомий циліндричний шарнір (радіальний підшипник, петля).

Реакція R_A лежить в площині, перпендикулярній до осі шарніра, напрямок її невідомий. При розв'язку задач реакцію R_A зображають її складовими R_{Ax} і R_{Ay} (рис. 1.6). Звідки $R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2}$.

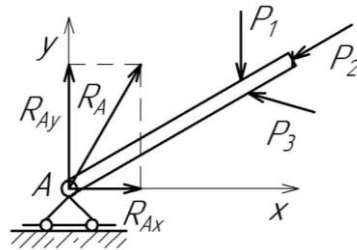


Рис. 1.6. Напрямок реакції R_A в нерухомому циліндричному шарнірі

Сферичний шарнір, опорний підшипник, підп'ятник. Напрямок реакції R_A в просторі може бути довільним в залежності від активних сил.

При розв'язку задач реакцію R_A зображають у вигляді трьох складових (рис. 1.7):

$$R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az}, \quad \text{тоді:}$$

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2 + R_{Az}^2}.$$

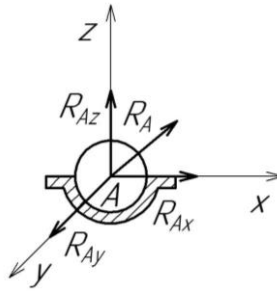


Рис. 1.7. Напрямок реакції R_A в сферичному шарнірі

Раніше розглядали сили, які умовно вважали прикладеними у певній точці, але насправді вони прикладені до площадки, розмірами якої нехтують, такі сили називають **зосередженими**. На практиці часто трапляються сили прикладені по об'єму чи поверхні тіла, наприклад сила Земного тяжіння, тиск вітру або води тощо. Такі сили називають **розподіленими**. Плоску систему розподілених сил характеризують так званою **інтенсивністю** q .

Інтенсивність – величина сили, яка припадає на одиницю довжини ділянки, що навантажується. В системі СІ позначена у H/m .

Розподілене навантаження сталої інтенсивності називають **рівномірно розподіленим** (рис. 1.8).

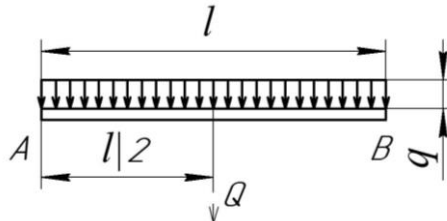


Рис. 1.8. Рівномірно розподілене навантаження q

Під час розв'язку задач статички, розподілене навантаження замінюють його рівнодіючою. Модуль рівнодіючої рівномірно розподіленого навантаження дорівнює:

$$Q = q \cdot l,$$

де

q – інтенсивність навантаження;

l – довжина навантаженої ділянки.

Розподілене навантаження із змінною інтенсивністю називають **нерівномірно розподіленим**.

Моментом сили відносно точки називають добуток модуля сили на її плече (рис. 1.9) $M_0(P) \equiv P \cdot h$.

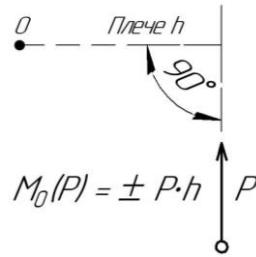


Рис. 1.9. Момент сили P відносно точки O

Центр моменту – точка відносно якої беруть момент сили.

Плече сили – найкоротша відстань від центра моменту до лінії дії сили.

Одиниця моменту сили:

$$[M] = [P] \cdot [h] = \text{сила} \times \text{довжина} = \text{ньютон} \times \text{метр} = \text{Н} \cdot \text{м}.$$

Момент сили приймемо за додатній, коли сила намагається обертати своє плече навколо центра моменту проти годинникової стрілки, від'ємний навпаки за нею (рис. 1.10).



Рис. 1.10. Напрямок моменту сил: а) від'ємного, б) додатного

Момент сили відносно точки, яка лежить на лінії дії цієї сили завжди дорівнює нулю, оскільки плече в даному випадку відсутнє та дорівнює нулю.

На рис. 1.11 показано, що момент сили відносно точки залишається сталим після перенесення сили вздовж лінії її дії, так як модуль сили і плече залишаються незмінними.

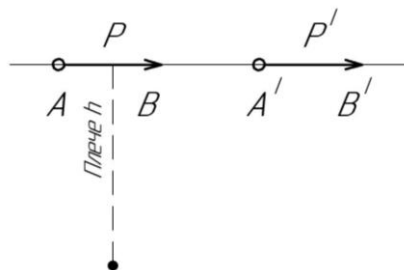


Рис. 1.11. Момент сили залишається сталим при перенесенні сили вздовж лінії її дії

Пара сил – система двох рівних по модулю, протилежно направлених паралельних сил: (P, P') . Пара сил намагається надати тілу

обертального руху. Обертальна дія пари залежить від величини сили, плеча пари, напрямку обертання, площини дії пари і характеризується моментом пари.

Плече пари (h) – найкоротша відстань між лініями дії сил пари (рис. 1.12).

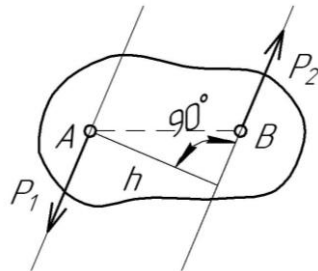


Рис. 1.12. Плече пари h

Момент пари – добуток модуля однієї з сил пари на плече пари:

$$m(P_1, P_2) = P_1 \cdot h = P_2 \cdot h.$$

Момент пари рахується додатнім, якщо вона намагається обертати своє плече проти годинникової стрілки, і навпаки. Момент пари має таку ж саму розмірність, як і момент сили.

Момент пари чисельно дорівнює подвоєній площі трикутника, в якого основа – вектор однієї із сил пари, а висота – плече, помножені на масштаби сили і плеча (рис. 1.13). З рис. 1.13 видно, що момент пари залишиться сталим, якщо сили перенести вздовж лінії їх дії (плече не змінюється), так як трикутники ABC і $A'B'C$ – рівновеликі.

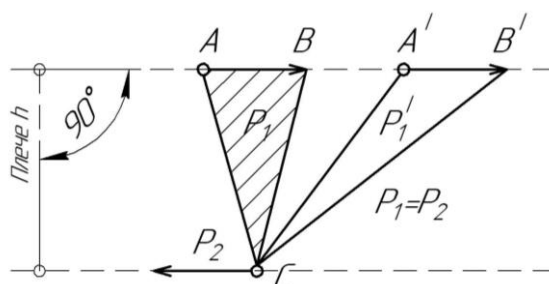


Рис. 1.13. Перенесення сил пари вздовж лінії їх дії

Плоска система пар перебуває у рівновазі за умови коли:

$$m = \sum m_i = 0.$$

Умову рівноваги плоскої системи пар у загальному випадку можна записати:

$$\sum m_i = 0.$$

та сформулювати: для рівноваги плоскої системи пар необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів даних пар дорівнювала нулю.

Для рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій усіх сил на осі абсцис і ординат дорівнювала нулю та також алгебраїчна сума моментів цих сил відносно будь-якої точки площини також дорівнювала нулю. Для спрощення умови рівноваги запишемо як рівності:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum M.$$

Під час розв'язування задач інколи доцільно замість одного або двох рівнянь проєкцій **складати рівняння моментів**.

Наприклад, при заміні одного рівняння проєкцій, умова рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил будить мати вигляд:

$$\sum X = 0, \quad \sum M_A = 0, \quad \sum M_B = 0.$$

Проте, ця умова не завжди є достатньою для рівноваги плоскої системи паралельних сил.

Для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума всіх сил дорівнювала нулю та алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно будь-якої точки площини також дорівнювала нулю:

$$\sum P_i = 0, \quad \sum M = 0.$$

Задача 1.

Горизонтальну балку закріплену на опорах A і B та навантажено зосередженим зусиллям $P = 60\text{кН}$, на відстані $a = 3\text{м}$, $b = 6\text{м}$ відповідно до їхніх опор (рис. 1.14). Не враховуючи сили тяжіння балки визначити реакції її опор.

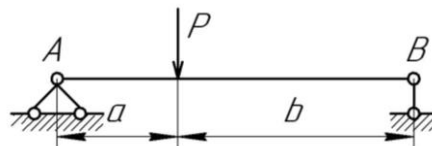


Рис. 1.14. Розрахункова схема шарнірної балки завантаженої силою P

Розв'язок:

Як зазначалось раніше, в шарнірно-нерухомій опорі A може виникати дві складові реакції – вертикальна R_A та горизонтальна H_A . В шарнірно-рухомій опорі B може виникати тільки одна складова реакції – R_B направлена вздовж балки. Відкинемо опори та замінимо їх реакціями (рис. 1.15).

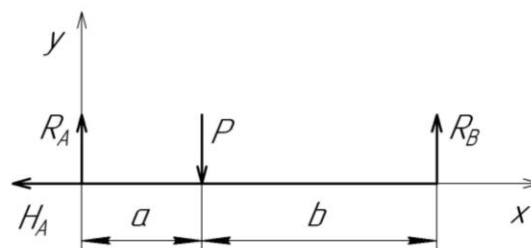


Рис. 1.15. Заміна шарнірних опор балки реакціями R

Для визначення реакцій застосуємо зазначені умови рівноваги плоскої системи сил.

Перша умова: сума проєкцій усіх сил на вісь балки дорівнює нулю, тоді:

$$\sum P_i = 0, \text{ звідки:}$$
$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0.$$

На вісь X проєктуються лише одна вертикальна сила P , відповідно горизонтальна реакція H_A . (рис. 1.15) буде дорівнювати нулю.

На вісь Y проєктуються: реакції R_A , R_B , та сила P , тоді:

$$R_A - P + R_B = 0.$$

Визначити два невідомих маючи одне рівняння неможливо, тому використаємо другу умову рівноваги плоскої системи паралельних сил (сума моментів усіх сил відносно будь-якої точки площини дорівнює нулю) і складемо два рівняння з двома невідомими відносно точок A і B , а саме:

$$\sum M_A = 0, \quad \sum M_B = 0.$$

Сума моментів усіх сил відносно опорного шарніра A дорівнює нулю, тоді:

$$R_B \cdot (a+b) - P \cdot a = 0, \text{ звідки:}$$

$$R_B = P \frac{a}{(a+b)}, \text{ тоді:}$$

$$R_B = \frac{60 \text{кН} \cdot 3 \text{м}}{3 \text{м} + 6 \text{м}} = \frac{180 \text{кН} \cdot \text{м}}{9 \text{м}} = 20 \text{кН}.$$

Сума моментів усіх сил відносно опорного шарніра B дорівнює нулю, звідки:

$$R_A \cdot (a+b) - P \cdot b = 0, \text{ звідки:}$$

$$R_A = P \frac{b}{(a+b)}, \text{ тоді:}$$

$$R_A = \frac{60 \text{кН} \cdot 6 \text{м}}{3 \text{м} + 6 \text{м}} = \frac{360 \text{кН} \cdot \text{м}}{9 \text{м}} = 40 \text{кН}.$$

Для перевірки правильності розрахунків використаємо умову: сума проєкцій усіх сил на вісь Y дорівнює нулю, тоді:

$$R_A - P + R_B = 0, \quad 40 \text{кН} - 60 \text{кН} + 20 \text{кН} = 0.$$

Умова рівності суми проєкцій реакції R_A , R_B , та сили P на вісь Y дорівнює нулю виконується. Тому реакції в балці визначені правильно (рис. 1.16).

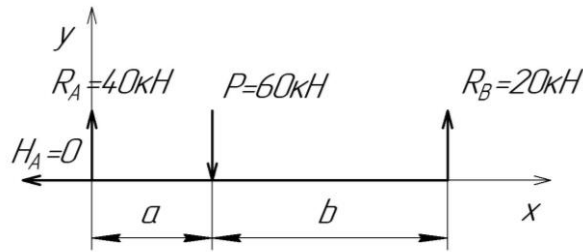


Рис. 1.16. Опорні реакції шарнірної балки звантаженої силою P

Задача 2.

Горизонтальну балку, яка має довжину $l = 6\text{ м}$, закріплено на опорах A і B та навантажено парою сил з моментом $0,4\text{ кН} \cdot \text{м}$ (рис. 1.17). Не враховуючи сили тяжіння балки визначити реакції її опор.

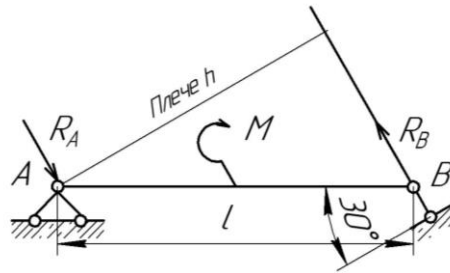


Рис. 1.17. Розрахункова схема шарнірної балки звантаженої моментом M

Розв'язок:

Замінімо опори A і B їх реакціями та розглянемо рівновагу балки. Так як пару сил можна зрівноважити лише парою, то реакції R зазначених опор утворюватимуть пару сил, а реакція R шарнірно-рухомої опори B перпендикулярна до опорної площини, яка нахилена під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонталі балки.

Застосувавши умову рівноваги плоскої системи пар і складемо відповідне рівняння

$$\sum m_i = 0, \text{ звідки:}$$

$$-m + R \cdot h = 0, \text{ тоді:}$$

врахувавши, що $h = l \cdot \cos 30^\circ$ матимемо:

$$R = \frac{m}{h} = \frac{m}{l \cdot \cos 30^\circ} = \frac{0,4\text{ кН} \cdot \text{м}}{6\text{ м} \cdot 0,866} \approx 0,077\text{ кН}.$$

Задача 3.

Консольна балка (рис. 1.18), яка має довжину $l = 3\text{ м}$, навантажена рівномірно розподіленим навантаженням $q = 2,2\text{ кН} / \text{м}$. Не враховуючи власну вагу балки, визначити реакції закріплення.

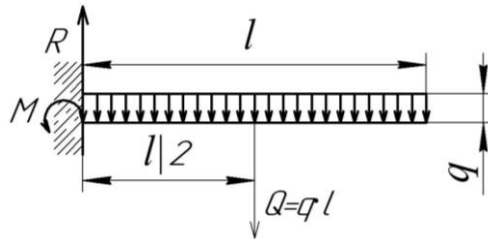


Рис. 1.18. Розрахункова схема консольної балки завантаженої рівномірно розподіленим навантаженням q

Розв'язок:

Замінімо закріплення балки реакціями і розглянемо її рівновагу. Реакції закріплення – реактивна сила R і реактивний момент M . Так як реактивний момент M можна зрівноважити лише парою сил, то навантаження $Q = q \cdot l$ і реакція R утворюють пару, тоді:

$$R = Q = q \cdot l = 6,6 \text{ кН}.$$

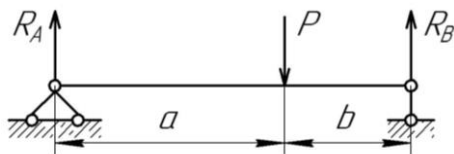
За умови рівноваги плоскої системи пар складемо рівняння:

$$\sum m_i = 0, \quad m - Q \cdot \frac{l}{2} = 0,$$

$$m = Q \cdot \frac{l}{2} = 6,6 \text{ кН} \cdot 1,5 \text{ м} = 9,9 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

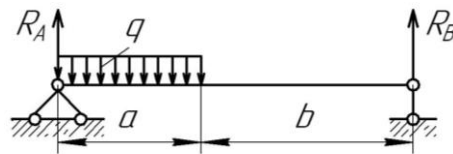
Завдання:

Визначити реакції опор балки не враховуючи її власної ваги відповідно заданого варіанту (рис. 1.19 – 1.30).



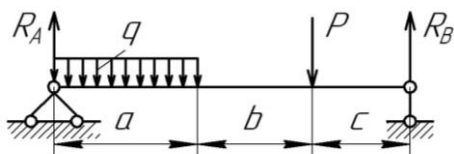
$$P=2 \text{ кН}, \quad a=4 \text{ м}, \quad b=2 \text{ м}.$$

Рис. 1.19.



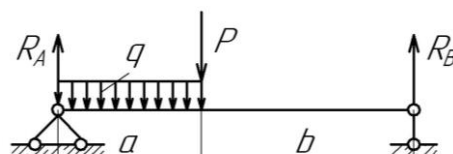
$$q=3 \text{ кН/м}, \quad a=2 \text{ м}, \quad b=4 \text{ м}.$$

Рис. 1.20.



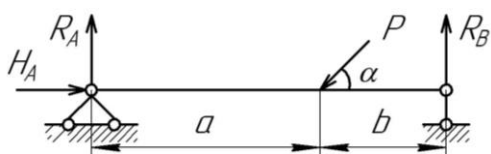
$$q=2 \text{ кН/м}, \quad P=3 \text{ кН}, \quad a=3 \text{ м}, \\ b=2 \text{ м}, \quad c=1 \text{ м}.$$

Рис. 1.21.



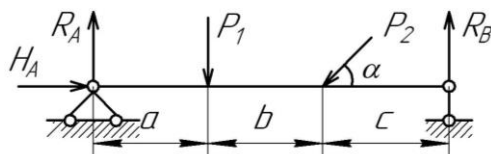
$$q=2 \text{ кН/м}, \quad P=1 \text{ кН}, \quad a=2 \text{ м}, \quad b=4 \text{ м}.$$

Рис. 1.22.



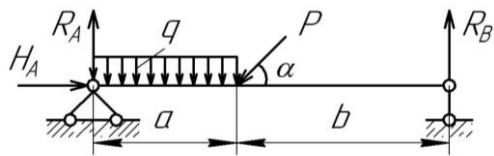
$$P=3 \text{ кН}, \quad a=4 \text{ м}, \quad b=2 \text{ м}, \quad \alpha=60^\circ.$$

Рис. 1.23.



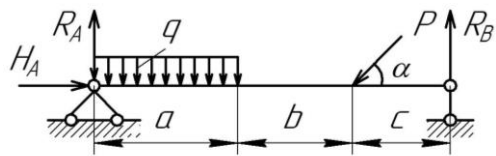
$$P_1=2 \text{ кН}, \quad P_2=3 \text{ кН}, \quad a=2 \text{ м}, \quad b=2 \text{ м}, \\ c=2 \text{ м}, \quad \alpha=30^\circ.$$

Рис. 1.24.



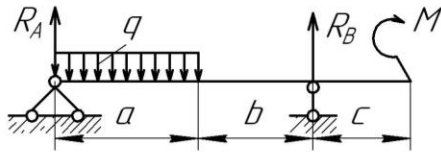
$q=3\text{кН/м}$, $P=2\text{кН}$, $a=2\text{м}$,
 $b=4\text{м}$, $\alpha=30^\circ$.

Рис. 1.25.



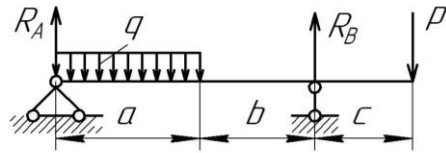
$q=4\text{кН/м}$, $P=2\text{кН}$, $a=3\text{м}$, $b=2\text{м}$,
 $c=1\text{м}$, $\alpha=60^\circ$.

Рис. 1.26.



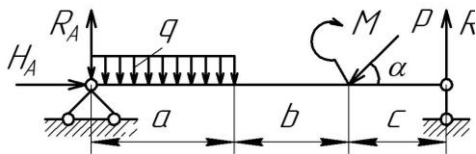
$q=2\text{кН/м}$, $M=2\text{кНм}$, $a=3\text{м}$,
 $b=2\text{м}$, $c=1\text{м}$.

Рис. 1.27.



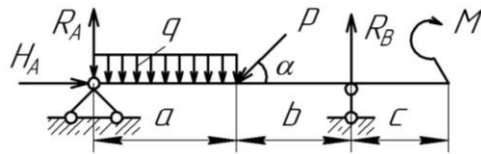
$q=4\text{кН/м}$, $P=2\text{кН}$, $a=3\text{м}$,
 $b=2\text{м}$, $c=1\text{м}$.

Рис. 1.28.



$q=2\text{кН/м}$, $P=2\text{кН}$, $M=1\text{кНм}$,
 $a=3\text{м}$, $b=2\text{м}$, $c=1\text{м}$, $\alpha=45^\circ$.

Рис. 1.29.



$q=3\text{кН/м}$, $P=2\text{кН}$, $M=2\text{кНм}$,
 $a=3\text{м}$, $b=2\text{м}$, $c=1\text{м}$, $\alpha=60^\circ$.

Рис. 1.30.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ:

1. Що таке балка?
2. Внаслідок чого виникають опорні реакції?
3. Види опор, кріплень та шарнірів.
4. Що таке зосереджена сила, рівномірно розподілене навантаження, одиниці виміру?
5. Умова рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил.

Практичне заняття № 2.

Тертя. Стійкість твердого тіла проти перекидання

Тертя – явище, яке зустрічається в природі вельми часто. На його явищі ґрунтується робота різноманітних механізмів у всіх галузях та сферах суспільного життя. На рис. 2.1. приведено види тертя за наявністю і характером руху

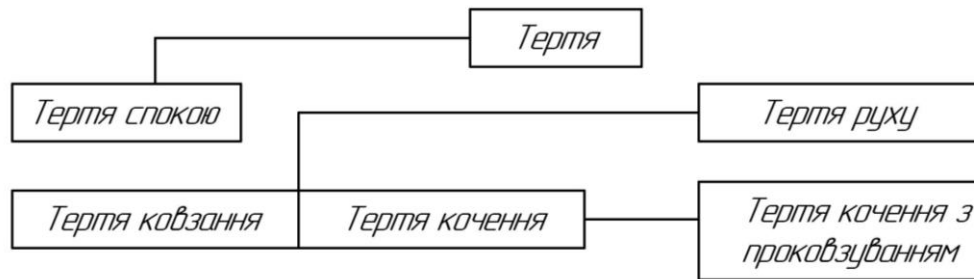


Рис. 2.1. Види тертя за наявністю і характером руху

Тертям спокою називають тертя двох тіл внаслідок попереднього зміщення, тобто внаслідок малого відносного переміщення тіл до переходу від стану спокою до ковзання.

Тертям руху називають тертя двох тіл, які перебувають у відносному русі.

Тертям ковзання називають тертя руху, за якого швидкості дотичних тіл у точках дотику різні.

Сила тертя – це сила опору відносному переміщенні двох тіл: одного по поверхні іншого.

Максимальне значення сила тертя спокою має у момент початку відносного руху і називається найбільшою силою тертя спокою або просто силою тертя спокою. Сила тертя завжди напрямлена проти відносного руху тіла.

Є три основних **закони тертя ковзання** (закони Кулона).

1. Сила тертя не залежить від величини площі тертьових поверхонь.
2. Максимальна сила тертя прямо пропорційна нормальній складовій зовнішніх сил, що діють на поверхні тіла.
3. Сила тертя залежить від матеріалу тіл, стану тертьових поверхонь, наявності і виду мастила.

Перший закон підтверджується тим, що при збільшенні площі тертьових поверхонь, то і збільшиться кількість дотичних нерівностей, але зменшиться тиск (на одиницю площі), і опір відносному переміщенню залишиться попереднім.

Другий закон твердить, що коли збільшується нормальна складова зовнішніх сил, які діють на поверхні тіла (збільшиться сила нормального тиску або реакції), то в скільки ж разів зросте максимальна сила тертя.

Відношення сили тертя F_T до нормальної складової N зовнішніх сил, які діють на поверхні тіла, називають **коефіцієнтом тертя ковзання** і позначають f (якщо сила тертя спокою неповна, то це відношення називають коефіцієнтом зчеплення), тоді:

$$f = F_T / N \quad \text{або} \quad F_T = fN. \quad (2.1)$$

Сила тертя дорівнює коефіцієнту тертя ковзання помноженому на силу нормального тиску або реакції (величина безрозмірна).

Повна реакція R це рівнодіюча нормальної реакції N опорної поверхні і сили тертя F_T (рис. 2.2):

$$R = N + F_T.$$

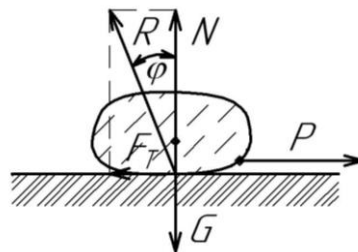


Рис. 2.2. Напрямок повної реакції R відносно опорної поверхні

Повна реакція R утворює з нормаллю до опорної поверхні певний кут. Максимальне значення цього кута (момент початку руху називають **кутом тертя** φ (рис. 2.2), тоді маємо:

$$F_T = N \operatorname{tg} \varphi. \quad (2.2)$$

З рівностей (2.1) і (2.2) отримаємо:

$$f = \operatorname{tg} \varphi.$$

Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює тангенсу кута тертя. Коефіцієнт тертя ковзання визначають експериментально.

Приведемо орієнтовані значення коефіцієнтів f тертя ковзання для деяких матеріалів (для стану спокою):

Метал по металу	0,15 – 0,3
Метал по металу з мастилом	0,1 – 0,18
Дерево по дереву насухо	0,4 – 0,6
Шкіра по чавуну насухо	0,3 – 0,5
Шкіра по чавуну з мастилом	0,15
Сталь по льоду	0,02

Коефіцієнт тертя ковзання під час руху під час руху менший, ніж стану спокою, і в першому наближенні не залежить від швидкості відносно переміщення тіл.

Розглянемо декілька прикладів розв'язування задач.

Задача 1.

Шорстка площина (рис. 2.3) нахилена до горизонту на такий кут α , при якому тіло, що знаходиться на цій площині ковзає донизу з сталою швидкістю, яку йому надали на початку руху. Визначити коефіцієнт тертя f між тілом і площиною.

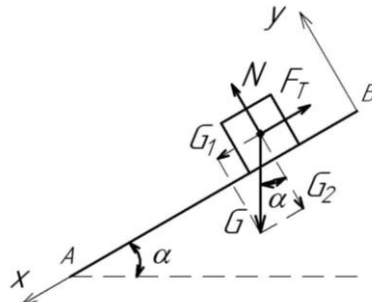


Рис. 2.3. Напрямки збіжних сил які діють на тіло на похилій площині

Розв'язок:

За умови коли тіло рухається рівномірно і прямолінійно, то система сил, що діє на тіло, знаходиться в рівновазі (рис.2.3). На тіло діють: активна сила тяжіння G , яку розкладемо на складові G_1 і G_2 паралельну і перпендикулярну до площини і нормальна реакція N до поверхні AB .

Модулі складових сили тяжіння G визначимо за формулами:

$$G_1 = G \sin \alpha, \quad G_2 = G \cos \alpha.$$

Складова G_2 зрівноважується реакцією N похилої площини, тоді:

$$G_2 = N = G \cos \alpha.$$

Складова G_1 рухає тіло вздовж похилої площини, вона частково зрівноважується силою тертя. За другим законом тертя ковзання її максимальне значення визначається виразом (2.1), тому:

$$F_T = fN = fG \cos \alpha.$$

Щоб тіло на похилій площині знаходилося в рівновазі, рушійна сила G_1 має дорівнювати за модулем силі тертя F_T , тоді:

$$G_1 = G \sin \alpha = fG \cos \alpha, \text{ звідки:} \\ \text{tg} \alpha = f = \text{tg} \varphi.$$

Задача 2.

Клин A (рис. 2.4.), кут нахилу щоки якого відносно осі складає 30° , вдавлюється в тіло B зусиллям $Q = 6 \text{ кН}$. Визначити нормальний тиск N на щоки клина та зусилля P , яке треба прикласти до клина, щоб його

витагнути, якщо коефіцієнт тертя $f = 0,1$. Нормальний тиск на щоки клина при витягуванні дорівнює тиску при вдавлюванні.

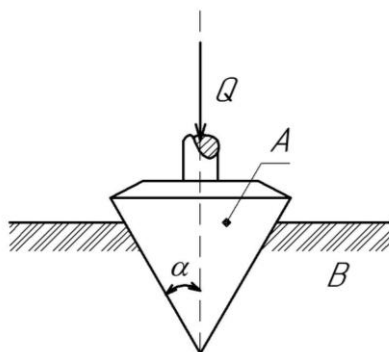


Рис. 2.4. Напрямок зусилля Q , яке діє на клин A відносно тіла B

Розв'язок:

Для визначення нормального тиску N пружного тіла B на клин A , розглянемо клин під час його вдавлювання в тіло B під дією сили Q (рис. 2.5).

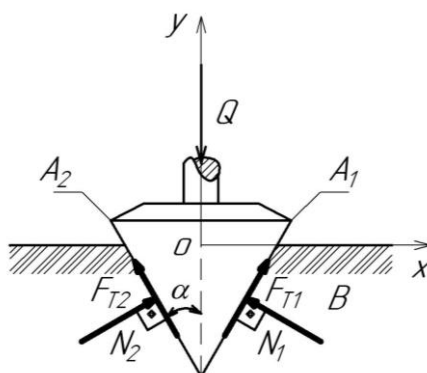


Рис. 2.5. Напрямок реакцій і сил тертя від дії активної сили Q

На клин діють: активна сила Q і реакції від тіла B на щоки клина. Реакції на щоки клина розкладемо на складові нормального тиску N_1 і N_2 та сили тертя F_{T1} і F_{T2} , які напрямимо проти напрямку руху клина під час вдавлювання. Таким чином, клин знаходиться в рівновазі під дією системи сил: Q , N_1 , N_2 , F_{T1} і F_{T2} , причому сили тертя будуть мати максимальне значення. Пов'яжемо з клином прямокутну систему координат oxy і складемо рівняння рівноваги для даної системи сил в проекціях на осі координат:

$$\sum P_{ox} = -N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha + F_{T1} \sin \alpha - F_{T2} \sin \alpha = 0; \quad (2.3)$$

$$\sum P_{oy} = -Q + N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha + F_{T1} \cos \alpha + F_{T2} \cos \alpha = 0; \quad (2.4)$$

Крім цього, запишемо залежності сил тертя від сил нормального тиску:

$$F_{T1} = fN_1; \quad (2.5)$$

$$F_{T2} = fN_2. \quad (2.6)$$

Перетворимо вираз (2,3) з урахуванням залежностей (2.5) і (2.6), тоді:

$$N_1(f \sin \alpha - \cos \alpha) = N_2(f \sin \alpha - \cos \alpha), \quad \text{або} \quad N_1 = N_2.$$

Оскільки $N_1 = N_2$, то $F_{T1} = F_{T2}$. Замінюючи N_2 на N_1 і F_{T2} на F_{T1} та врахувавши (2.5) з виразу (2.4) маємо:

$$-Q + 2N_1 \sin \alpha + 2F_{T1} \cos \alpha = -Q + 2N_1 \sin \alpha + 2N_1 f \cos \alpha = 0, \quad \text{звідки}$$

$$N_1 = \frac{Q}{2(\sin \alpha + f \cos \alpha)} = \frac{6 \text{кН}}{2(0,5 + 0,1 \cdot 0,865)} = 5,115 \text{кН}.$$

Для визначення зусилля P , яке необхідно прикласти до клина, щоб його витягнути розглянемо (рис. 2.6).

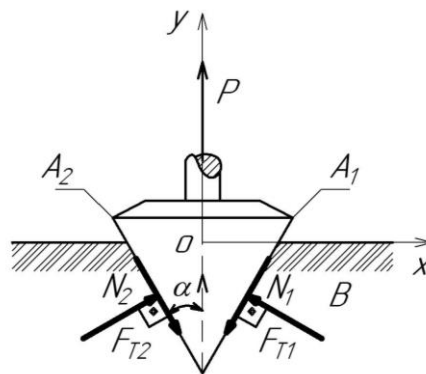


Рис. 2.6. Напрямок реакцій і сил тертя від дії активної сили P

Клин знаходиться в рівновазі під дією активної сили P , і реакцій з боку тіла B на щоки клина: N_1 і N_2 та сили тертя F_{T1} і F_{T2} .

Так як при витягуванні клин буде рухатися вгору, то сили тертя прикладені вздовж щоки проти напрямку їх руху і будуть мати максимальне значення. Оскільки з першої частини задачі відомо, що $N_1 = N_2 = 5,115 \text{кН}$ і $F_{T1} = F_{T2}$, то для визначення зусилля P досить скласти тільки одне рівняння рівноваги в проекції на вісь oy :

$$\sum P_{oy} = P + 2N_1 \sin \alpha - 2F_{T1} \cos \alpha = 0; \quad \text{звідки:}$$

$$P = 2F_{T1} \cos \alpha - 2N_1 \sin \alpha = 2N_1 \sin \alpha (f \cos \alpha - \sin \alpha), \quad \text{тоді:} \quad (2.7)$$

$$P = 2 \cdot 5,115 \text{кН} (0,1 \cdot 0,865 - 0,5) = -4,23 \text{кН}.$$

Знак мінус показує, що напрям сили P має зворотній від напрямку сил тертя F_{T1} і F_{T2} .

Маємо тверде тіло вагою G , яке розташоване на площині і може перекидатися відносно певного ребра від дії горизонтальної сили P (рис. 2.7).

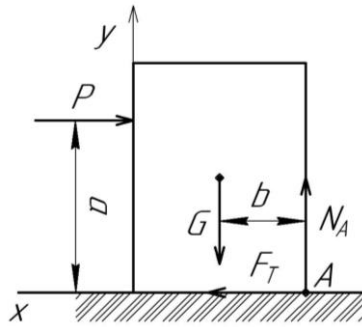


Рис. 2.7. Схема дії сил під час перекидання твердого тіла відносно точки A

Вважатимемо, що сили P і G лежать в одній площині, яка перетинається з ребром у точці A . У момент початку перекидання на тіло додатково діятимуть нормальна реакція N_A і сила тертя F_T , прикладені у точці A , зокрема для в випадку рівноваги система всіх чотирьох сил можна записати два рівняння:

$$\begin{aligned} \sum Y = 0; N_A - G = 0, \quad \text{звідки } N_A = G. \\ \sum X = 0; F_T - P = 0, \quad \text{звідки } P = F_T. \end{aligned}$$

Отже, в момент початку перекидання на дане тіло діє пара сил (P і F_T). Згідно властивості моменту пари тіло не перекидатиметься, коли:

$$m(G, N_A) > m(P, F_T), \quad \text{або } G \cdot b > P \cdot a.$$

Добуток $G \cdot b$ є момент сили G відносно точки A і називається **моментом стійкості**. Аналогічно добуток $P \cdot a$ є момент сили P відносно точки A і називається **перекидним моментом**. Умова стійкості проти перекидання запишемо у вигляді:

$$M_{CT} > M_{П}.$$

Зазначену умову сформулюємо так: **для стійкості твердого тіла проти перекидання необхідно і достатньо, щоб момент стійкості був більший від перекидного моменту**. За умов дії на тіло декількох сил, які прагнуть перекинути його, то перекидний момент дорівнює сумі моментів сил відносно точки, навколо якої може статися перекидання, теж саме стосується і моменту стійкості, звідки:

$$M_{CT} > \sum M_{П}, \quad \sum M_{CT} > M_{П}, \quad \sum M_{CT} > \sum M_{П}.$$

Коефіцієнт стійкості – відношення моменту стійкості до перекидного моменту:

$$k_{CT} = \frac{M_{CT}}{M_{П}}.$$

Із виразу очевидно, що для споруд повинна виконуватись умова:

$$k_{CT} > 1.$$

Зазначена умова, особливо важлива для високих споруд: різних веж, димарів, щогл, кранів, високих конструкцій та ін. Слід зазначити, що для

випадку, коли $P > F_T$, а $M_{II} < M_{CT}$ тіло сковзатиме по опорній площині, якщо конструкція допускатиме такий рух.

Задача 1.

Тіло у формі паралелепіпеда (рис. 2.7) стоїть на твердій поверхні. Вага тіла $G = 60\text{кг}$, відстань $b = 25\text{см}$. На відстані $a = 40\text{см}$ від твердої поверхні прикладена невідома горизонтальна сила P . Визначити, якою повинна бути сила P , щоб тіло перекинулося.

Розв'язок:

Використаємо необхідну умову для перекидного моменту, тоді:

$$m(P, F_T) > m(G, N_A), \quad \text{або } P \cdot a > G \cdot b.$$

Знайдемо невідому силу P , відповідно вихідних даних:

$$P > \frac{G \cdot b}{a} = \frac{60\text{кг} \cdot 25\text{см}}{40\text{см}} = 37,5\text{кг}.$$

Таким чином, для того щоб перекидний момент перевищував момент стійкості, необхідно і достатньо, щоб знайдена сила P перевищувала $37,5\text{кг}$.

Завдання:

Визначити силу P , необхідну для перекидного моменту відповідно заданого варіанту таблиці 2.1.

Таблиця 2.1.

Варіанти завдань для визначення сили P

Варіант	Вага G , кг	Відстань b , см	Відстань a , см
1	60	20	35
2	40	30	50
3	45	25	60
4	75	35	50
5	80	40	70
6	90	30	45
7	65	25	60
8	115	45	85
9	55	40	25
10	95	55	50
11	100	40	65
12	90	45	75

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ:

1. Що називають моментом стійкості?
2. Що називають перекидним моментом ?
3. Умова стійкості проти перекидання.
4. Що таке коефіцієнт стійкості, необхідна умова для будинків та споруд?
5. Послідовність розрахунку перекидного моменту?

Практичне заняття № 3.

Просторова система сил

Просторова система сил – система сил, лінії дії яких лежать у різних площинах.

Просторова система збіжних сил

Просторова система сил є збіжною, якщо лінії дії сил системи перетинаються в одній точці.

Теорема (про рівнодіючу просторової системи збіжних сил).

Просторова система збіжних сил еквівалентна рівнодіючій, яка проходить через точку перетину ліній дії цих складових і дорівнює векторній сумі цих сил.

Дано просторову систему n збіжних сил $(P_1, P_2, P_3, \dots, P_n)$.

Відповідно висновків з аксіом III і IV перенесемо всі сили системи вздовж ліній дії у точку їх перетину. Відповідно до аксіоми паралелограма сил додамо сили P_1 і P_2 та отримаємо рівнодіючу:

$$R_1 = P_1 + P_2.$$

Додавши до рівнодіючої силу P_3 , отримаємо рівнодіючу трьох сил:

$$R_2 = R_1 + P_3 = P_1 + P_2 + P_3.$$

Аналогічно повторивши таке додавання $n-1$ разів, матимемо рівнодіючу системи n сил, яка дорівнюватиме векторній сумі цих сил, а лінія дії рівнодіючої проходить через точку перетину ліній дії її складових:

$$R_2 = R_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n, \text{ або } R = \sum P_i.$$

Силовий многокутник просторової системи сил не лежить в одній площині, як наслідок, геометричний і графічний способи знаходження рівнодіючої непридатні. В даному випадку застосовують аналітичний спосіб (метод проєкцій).

Проєкції сили на вісь абсцис та ординат

За умови коли на тіло діє декілька сил та невідомі напрями деяких із них, під час розв'язування задач зручно використовувати не геометричну а аналітичну умови рівноваги, яка базується на **методі проєкцій**.

Проєкцією сили на вісь називають відрізок осі, який лежить між двома перпендикулярами, опущеними на вісь з початку і кінця вектора сили.

На рис. 3.1 показано силу P , яка прикладена в точці A і розміщена в площині координатних осей x, y . Проєкціями сили P на осі є відрізки x_1, x_2 і y_1, y_2 . Позначимо проєкції сили P відповідно P_x і P_y . Тоді:

$$P_x = P \cdot \cos \alpha, \quad P_y = P \sin \alpha.$$

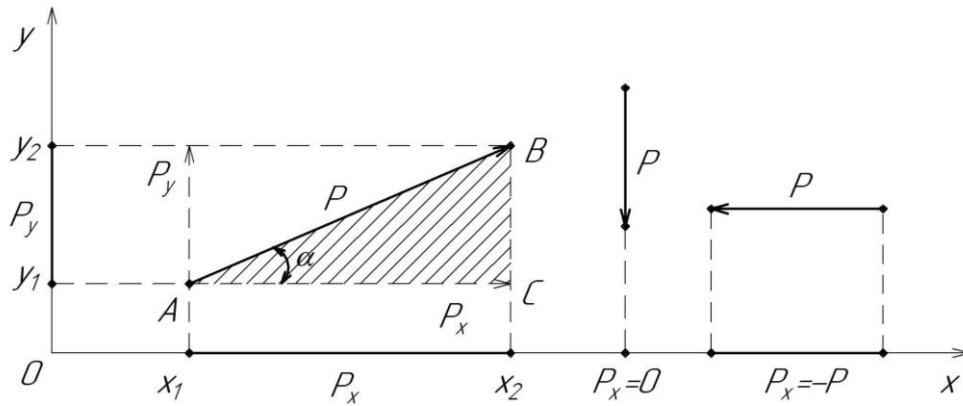


Рис. 3.1. Різні варіанти проекції сили P на осі координат

Проекція сили на вісь – **величина алгебраїчна** і може бути додатною або від’ємною (враховується напрям проекції).

В теоретичній механіці встановлено наступне правило знаків: якщо напрям проекції сили на вісь співпадає з додатним напрямом осі, то ця проекція вважається додатною, і навпаки.

Також на рис. 3.1 показані різні варіанти проекції сили на осі координат.

Якщо вектор сили паралельний осі, то він проектується на дану вісь у натуральну величину (з врахуванням напрямку). Якщо вектор осі перпендикулярний до осі, то його проекція на цю вісь дорівнює нулю. Якщо вектор осі розміщений під деяким кутом, то як зазначалось раніше знаходиться через синус (проекція на вісь ординат), або косинус (проекція на вісь абсцис) кута.

Знайшовши проекції P_x і P_y по трикутнику ABC визначимо модуль і напрям вектора сили P за формулами:

модуль сили

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2},$$

напрямний тангенс кута між вектором сили P і віссю x

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_y}{P_x}.$$

Проекція сили на вісь, коли вісь і сила лежать в різних площинах

Якщо сила і вісь лежать у різних площинах, то проектуючи перпендикуляри ($Aa_x Bb_x$) також лежать у різних площинах (рис. 3.2).

Для визначення проекції сили P на вісь Ox , необхідно уявно провести через початок або кінець сили вісь O_1x_1 , яка буде паралельною даній осі Ox , тоді $P_x = P \cdot \cos \alpha$, так як $P_x = Px_1$.

Правило знаків лишається, як зазначено вище.

За умов, коли вектор сили паралельний осі, він проектується на дану вісь у натуральну величину (рис. 3.2).

За умов, коли вектор сили лежить у площині перпендикулярній до осі, то його проекція на дану вісь дорівнює нулю (рис. 3.2).

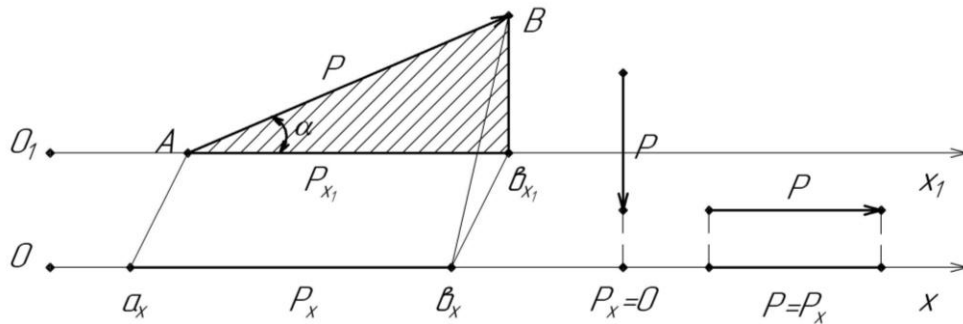


Рис. 3.2 Проекція вектора сили на вісь якщо вони лежить у різних площинах

Розкладання сили на три осі координат

Дано довільну силу P (рис. 3.3).

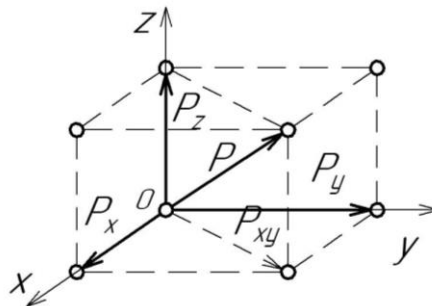


Рис. 3.3 Проекція сили P на вісі x, y, z

Виберемо систему координат так, щоб початок її збігався з початком вектора сили P . Від кінця даного вектора опустимо перпендикуляр на площину xy і розкладемо силу P на складові P_{xy} , P_z , крім того складову P_{xy} , – на складові P_x і P_y . Тоді:

$$P = P_x + P_y + P_z.$$

Добудуємо даний рисунок до паралелепіпеда, в якого складові P_x , P_y і P_z . – ребра, а сила P – діагональ.

Робимо висновок: **рівнодіюча трьох взаємно перпендикулярних сил за модулем і напрямком є діагоналлю паралелепіпеда побудованого на цих силах.** Отже, складові P_x , P_y і P_z , за модулем дорівнюють проекціям сили P на ці осі та виражаються наступними залежностями:

$$\text{модуль сили } P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2},$$

напрямні косинуси $\cos(P, x) = \frac{P_x}{P}$, $\cos(P, y) = \frac{P_y}{P}$, $\cos(P, z) = \frac{P_z}{P}$.

Аналітичний спосіб визначення рівнодіючої просторової системи збіжних сил

Візьмемо просторову систему n збіжних сил. Розмістимо початок координат у точці перетину ліній дії цих сил і розкладемо кожен із сил даної системи на три взаємно перпендикулярні складові, які направлені по осях координат, попередньо перемістивши усі сили вздовж ліній їх дій в одну точку.

В результаті отримаємо еквівалентну систему $3n$ сил, з яких n сил діє по осі x , n сил – по осі y і n сил – по осі z .

Рівнодіючі сил, направлених відповідно по осям x, y та z дорівнює їх алгебраїчній сумі. Систему $3n$ сил замінимо еквівалентною системою трьох сил R_x, R_y, R_z :

$$R_x = P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + \dots + P_{nx} = \sum X,$$

$$R_y = P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} + \dots + P_{ny} = \sum Y,$$

$$R_z = P_{1z} + P_{2z} + P_{3z} + \dots + P_{nz} = \sum Z.$$

Рівнодіючу трьох взаємно перпендикулярних сил за модулем і напрямом виразимо діагоналлю паралелепіпеда, побудованого на цих силах (рис. 3.3). За знайденими проекціями рівнодіючої R_x, R_y, R_z знаходимо модуль і напрям вектора рівнодіючої за формулами:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

$$\cos(R, x) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(R, y) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(R, z) = \frac{R_z}{R},$$

де

$$R_x = \sum X, \quad R_y = \sum Y, \quad R_z = \sum Z.$$

Аналітичні умови рівноваги просторової системи збіжних сил

Як зазначалось раніше, просторова система збіжних сил еквівалентна їх рівнодіючій, яка проходить через точку перетину ліній дії цих складових і дорівнює векторній сумі цих сил. Якщо така система перебуває у рівновазі (зрівноважена), то вона еквівалентна нулю:

$$(P_1, P_2, P_3, \dots, P_n) = 0,$$

Рівнодіюча та проекції цих сил на взаємно перпендикулярні осі також дорівнюють нулю, тоді:

$$R = 0; R_x = 0; R_y = 0; R_z = 0.$$

Тому умова рівноваги просторової системи збіжних сил матиме вигляд:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0.$$

Дані умови формулюються так:

Просторова система збіжних сил перебуватиме у рівновазі, якщо алгебраїчна сума проєкцій усіх сил на кожен з трьох координатних осей дорівнює нулю.

Задача 1.

Вантаж $G = 300\text{H}$ утримують у рівновазі горизонтальна вірвочка AO та дві вірвочки BO і CO , площина яких нахилена до горизонтальної площини під кутом $\alpha = 45^\circ$ і утворює з вертикальною площиною, яка проходить через AO , прямий кут (рис. 3.4,а). Вірвочки BO і CO утворюють з цією вертикальною площиною кути $\beta = 30^\circ$. Визначити натяги вірвочок.

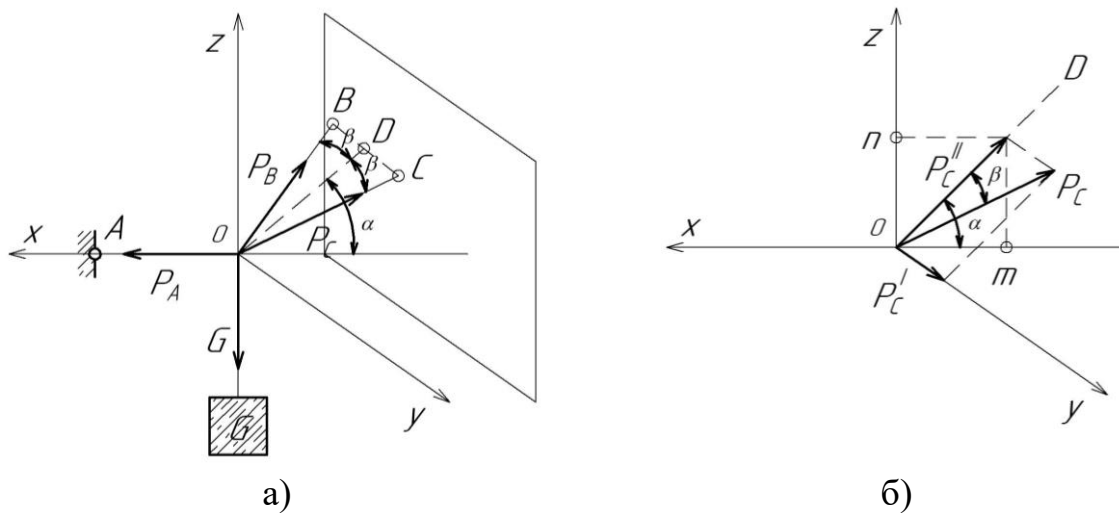


Рис. 3.4 а) проєкції сил на осі x, y, z , б) розкладання сили P_C на дві складові

Розв'язок:

Розглянемо рівновагу збіжних сил: G, P_A, P_B, P_C , які проходять через вузол O . Використовуючи аналітичні умови рівноваги просторової системи збіжних складемо три рівняння рівноваги:

$$1. \sum Y = 0; P_C \sin \beta - P_B \sin \beta = 0, \quad \text{тоді } P_C = P_B,$$

Так, як кути між реакціями P_B, P_C , і осями координат x і z невідомі, то для зручності проєктування розкладемо кожен з цих сил на дві складові (рис. 4.4,б), звідки:

$$P_{Cx} = om = P_C'' \cos \alpha = P_C \cos \beta \cos \alpha,$$

$$P_{Cz} = on = P_C'' \sin \alpha = P_C \cos \beta \sin \alpha.$$

Проєкції складової P_C' на осі x і z дорівнюють нулю, оскільки ця складова перпендикулярна до зазначених осей.

$$2. \sum Z = 0; P_C \cos \beta \sin \alpha + P_B \cos \beta \sin \alpha - G = 0.$$

Враховуючи рівність $P_C = P_B$, маємо:

$$P_B = P_C = \frac{G}{2 \cos \beta \sin \alpha} = \frac{G}{2 \cos 30^\circ \sin 45^\circ} = \frac{300}{2 \cdot 0,866 \cdot 0,707} = 245H;$$

3. $\sum X = 0; P_A - P_C \cos \beta \cos \alpha - P_B \cos \beta \cos \alpha = 0$, тоді:

$$P_A = 2P_B \cos \beta \cos \alpha = \frac{2G \cos \beta \cos \alpha}{2 \cos \beta \sin \alpha} = G = 300H.$$

Задача 2.

Визначити зусилля в стержнях AB , AC та AD просторового кронштейна, якщо на вузол A діє сила $P = 3,2kH$ (рис. 3.5). Вагою стержнів кронштейна нехтувати а кути мають відповідні значення: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$, $\varphi = 45^\circ$.

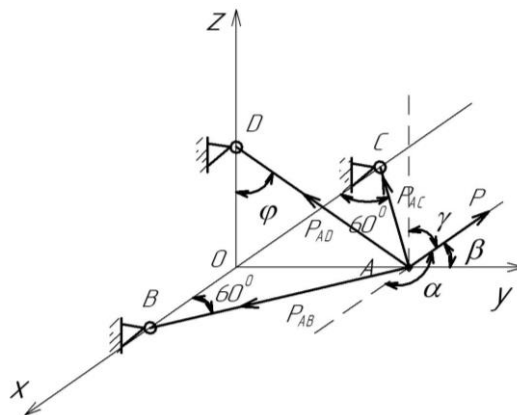


Рис. 3.5 Проекції сил на осі x, y, z

Розв'язок:

Розглянемо рівновагу збіжних сил P_{AB}, P_{AC}, P_{AD} . Використавши принцип звільнення від в'язей, замінимо їх дію реакціями та складемо рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum P_x &= p_{AB} \cdot \cos 60^\circ - p_{AC} \cdot \cos 60^\circ + P \cdot \cos 30^\circ = 0, \\ \sum P_y &= -P_{AB} \cdot \sin 60^\circ - P_{AC} \cdot \sin 60^\circ + P \cdot \cos 60^\circ - P_{AD} \cdot \sin 45^\circ = 0, \\ \sum P_z &= P \cdot \cos 30^\circ + P_{AD} \cdot \cos 45^\circ = 0. \end{aligned}$$

З третього рівняння знаходимо P_{AD} :

$$P \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + P_{AD} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, P_{AD} = -3,2 \cdot 0,866 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \approx -3,919kH.$$

Для зручності розрахунку перше рівняння помножимо на $\sqrt{3}$:

$$P_{AB} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - P_{AC} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + P \cdot \frac{3}{2} = 0.$$

Друге рівняння має вигляд:

$$-P_{AB} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - P_{AC} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + P \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Для знаходження P_{AC} додамо перше та друге рівняння:

$$-P_{AC} \cdot \sqrt{3} + P \cdot 2 = 0, \text{ тоді } P_{AC} = P \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}, P_{AC} = 3,2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 3,695 \text{ кН}$$

З першого рівняння $P_{AB} = P_{AC} - P \cdot \sqrt{3}$, звідки:

$$P_{AB} = 3,695 \text{ кН} - 3,2 \cdot \sqrt{3} \approx -1,847 \text{ кН}, \text{ отже:}$$

$$P_{AB} = -1,847 \text{ кН}, P_{AC} = 3,695 \text{ кН}, P_{AD} = -3,919 \text{ кН}.$$

Знак мінус показує, що реакція P_{AB} направлена в протилежному напрямку.

Завдання:

Визначити зусилля в стержнях AB , AC та AD просторового кронштейна, якщо на вузол A діє сила P , як це показано на рис. 3.6 – 3.17. Вагою стержнів кронштейна нехтувати.

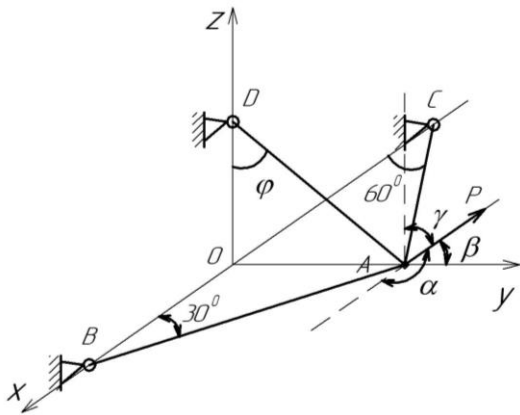


Рис. 3.6

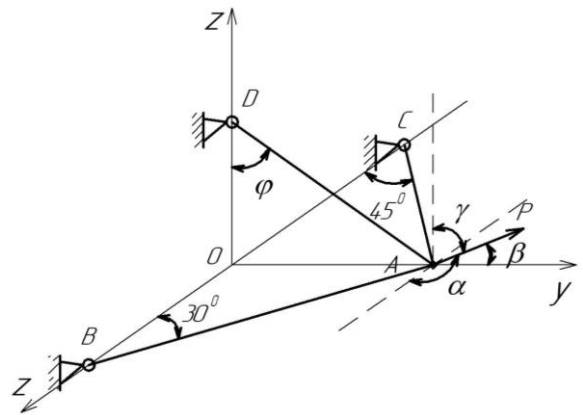


Рис. 3.7

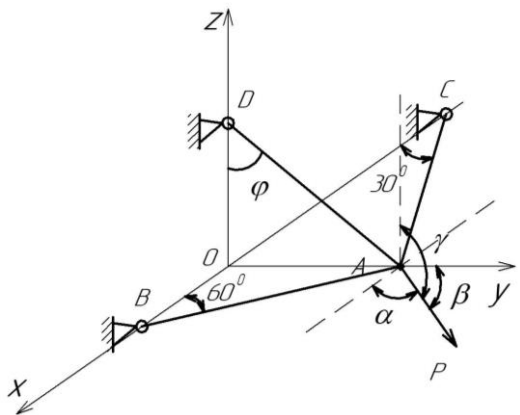


Рис. 3.8

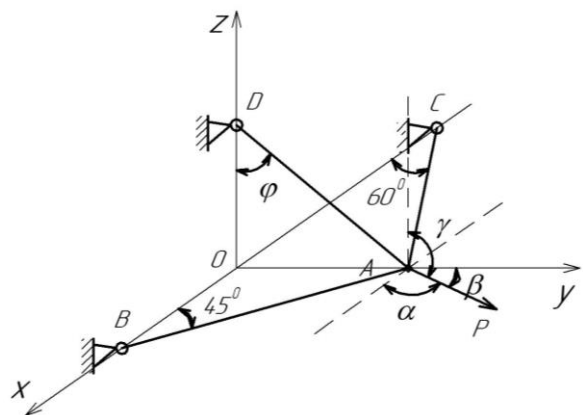


Рис. 3.9

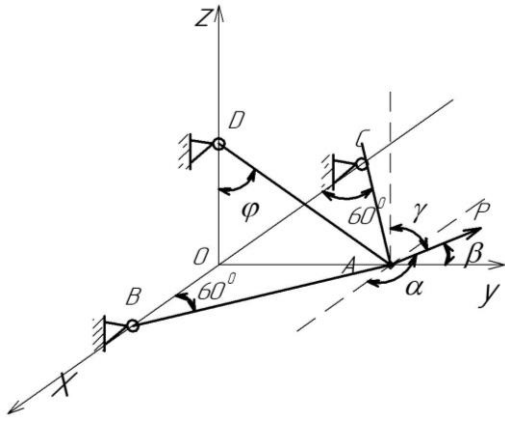


Рис. 3.10

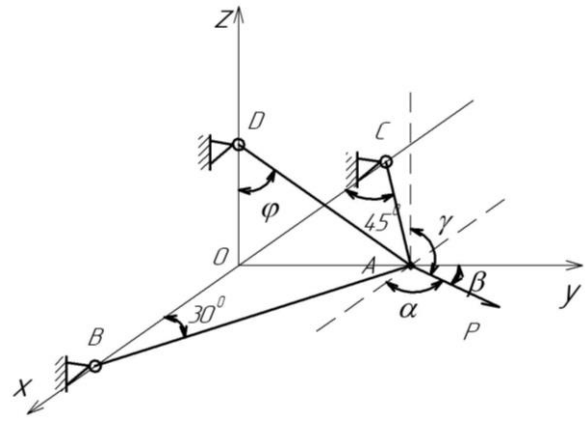


Рис. 3.11

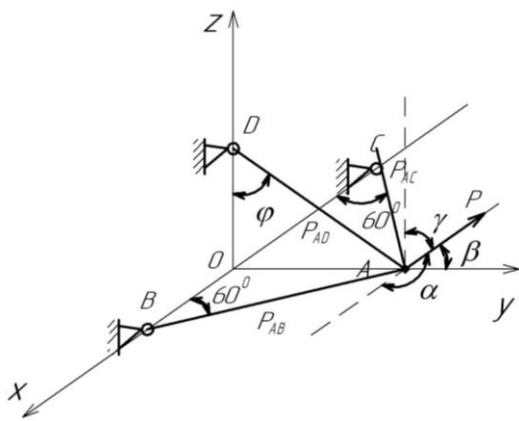


Рис. 3.12

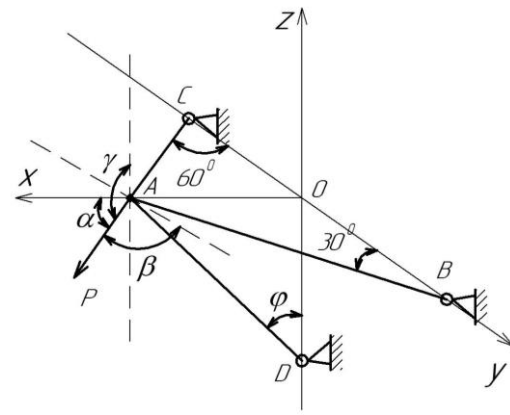


Рис. 3.13

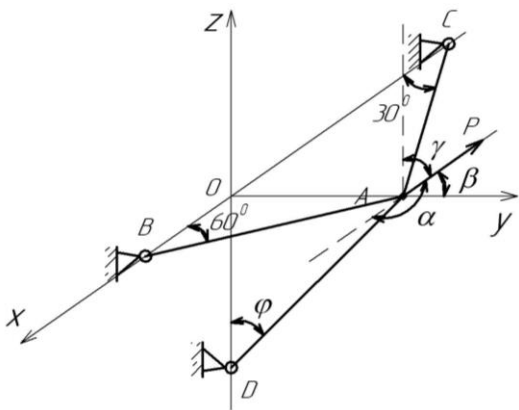


Рис. 3.14

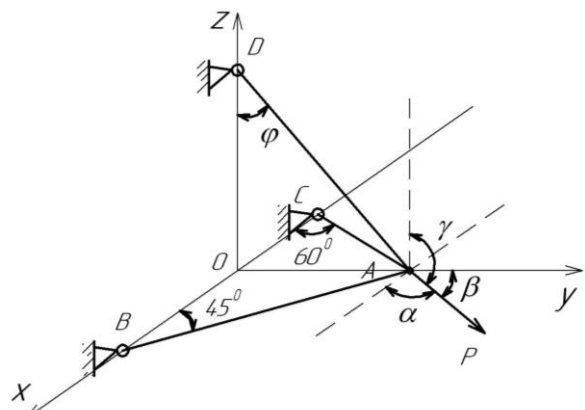


Рис. 3.15

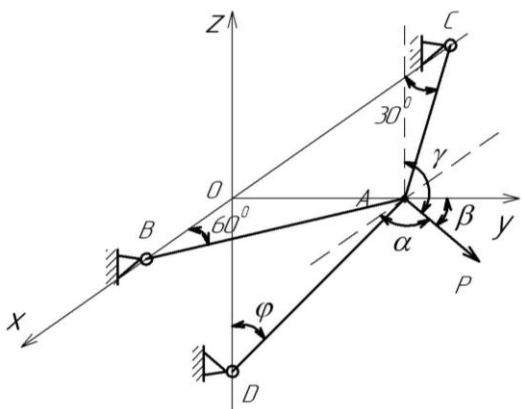


Рис. 3.16

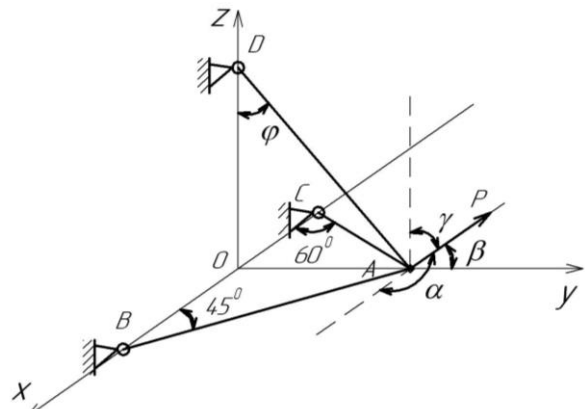


Рис. 3.17

Числове значення величини сили P та значення кутів, що визначають положення її вектора відносно системи координат приведені в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1.

Варіанти завдань для визначення зусиль в стержнях AB , AC та AD

Варіант	P (кН)	φ (град.)	α (град.)	β (град.)	γ (град.)
1	2,5	45°	60°	60°	30°
2	2,8	60°	30°	30°	60°
3	2,2	45°	45°	45°	90°
4	3,5	45°	60°	30°	90°
5	2,5	60°	60°	30°	60°
6	2,9	30°	60°	30°	90°
7	3,5	45°	90°	30°	60°
8	2,4	45°	30°	60°	90°
9	2,6	60°	90°	30°	60°
10	3,2	45°	60°	30°	90°
11	3,4	60°	60°	30°	90°
12	3,6	45°	90°	30°	60°

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ:

1. Що таке просторова система сил?
2. Що таке просторова система збіжних сил?
3. Проекція сили на вісь.
4. Розкладання сили на три осі координат.
5. Аналітичні умови рівноваги просторової системи збіжних сил.

Практичне заняття № 4.

Центр ваги твердого тіла, послідовність розрахунку

Силу, з якою тіло притягується до Землі, називають силою тяжіння.

Центром ваги твердого тіла називають незмінно зв'язану з тілом точку C , через яку проходить лінія дії сили тяжіння даного тіла при будь-якому положенні тіла в просторі. Вона може лежати й за межами тіла (наприклад, кільце, циліндр з отвором).

Координати центра ваги тіла визначають за наступними формулами:

$$x_c = \frac{\sum G_i x_i}{\sum G_i}, \quad y_c = \frac{\sum G_i y_i}{\sum G_i}, \quad z_c = \frac{\sum G_i z_i}{\sum G_i}$$

де G_i – сила тяжіння кожної елементарної частинки тіла;

x_i, y_i, z_i – координати частинки;

$\sum G_i$ – сила тяжіння усього тіла.

Силу тяжіння елементарної частинки виразимо через її об'єм, тоді:

$$G_i = \gamma V_i,$$

де γ – питома сила тяжіння, для однорідного тіла величина стала, тоді:

$$x_c = \frac{\sum (G_i x_i)}{\sum G_i} = \frac{\gamma \sum (V_i x_i)}{\gamma \sum V_i} = \frac{\sum (V_i x_i)}{\sum V_i}.$$

Виразимо об'єм елементарної частинки висотою h через її площу:

$$x_c = \frac{\sum (h A_i x_i)}{\sum (h A_i)} = \frac{h \sum (A_i x_i)}{h \sum A_i} = \frac{\sum (A_i x_i)}{\sum A_i}.$$

Загальні формули визначення координат центра ваги мають вигляд:

$$x_c = \frac{\sum (A_i x_i)}{\sum A_i}, \quad y_c = \frac{\sum (A_i y_i)}{\sum A_i}, \quad z_c = \frac{\sum (A_i z_i)}{\sum A_i}.$$

Статичним моментом площі фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, називають взятую по всій площі перерізу суму добутків площ елементарних площадок dA на відстані їх від цієї осі (рис. 4.1).

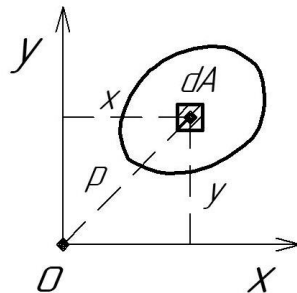


Рис. 4.1. Розміщення елементарної площадки dA плоскої фігури відносно осей координат

Статичний момент площі позначимо через S з індексом відповідної осі:

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA.$$

У формулах визначення координат центра ваги під A_i можна розуміти площу dA елементарної площадки, то в границі, коли dA прямує до нуля, вирази, що стоять у чисельниках правих частин формул $\sum(A_i x_i)$, $\sum(A_i y_i)$ є статичними моментами площі фігури відносно осей x, y , а $\sum A_i$ – це площа A усієї фігури. Тому формули визначення статичного моменту площі фігури приймуть вигляд:

$$S_x = \int_A y dA = y_c A, \quad S_y = \int_A x dA = x_c A.$$

Статичний момент площі фігури відносно осі що лежить у тій самій площині, дорівнює добутку площі фігури на відстань її центра ваги від цієї осі.

Одиниця статичного моменту площі:

$$[S] = [x_c] \cdot [A] = m \cdot m^2 = m^3.$$

Статичний момент площі фігури може бути додатнім та від'ємним. Статичний момент площі відносно осі, яка проходить через центр ваги площі фігури (центральної осі), у тому числі осі симетрії фігури дорівнює нулю.

Осьовим моментом інерції плоскої фігури відносно осі, яка лежить у тій самій площині, називають взятую по всій площі перерізу суму добутків площ елементарних площадок dA на квадрат їх відстаней від цієї осі (рис. 4.1).

Осьовий момент інерції позначимо через J з індексом відповідної осі:

$$J_x = \int_A y^2 dA, \quad J_y = \int_A x^2 dA.$$

Полярним моментом інерції плоскої фігури відносно осі, яка лежить у тій самій площині, називають взятую по всій площі перерізу суму добутків площ елементарних площадок dA на квадрат їх відстаней від полюса O (рис. 4.1).

Полярний момент інерції позначимо через J_ρ :

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA.$$

Одиниці виміру полярного моменту інерції:

$$[J_\rho] = [\rho^2] \cdot [A] = m^2 \cdot m^2 = m^4.$$

Так як поняття полярного моменту інерції буде необхідним для вивчення деформації кручення круглих валів, виведемо формули полярних моментів інерції круглого суцільного і кільцевого перерізів, вважаючи що центри цих фігур є їхніми полюсами.

1. Круг діаметром d (рис. 4.2):

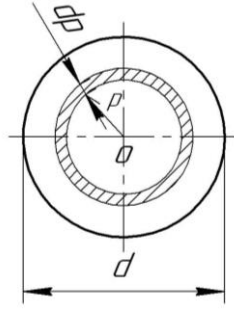


Рис. 4.2. Розміщення елементарної площадки dA круга діаметром d .

Нескінченно малу площадку dA виділемо у вигляді кільця шириною $d\rho$, яке знаходиться на змінній відстані ρ від полюса, звідки $dA = 2\pi\rho d\rho$.

Визначимо полярний момент інерції:

$$J_{\rho} = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^3 d\rho = 2\pi \cdot \frac{d^4}{64} = \frac{\pi d^4}{32},$$

$$J_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4.$$

2. Кільце, що має розміри $D \times d$:

$$J_{\rho} = \int_A \rho^2 dA = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \rho^3 d\rho = 2\pi \cdot \left(\frac{D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} \right) = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4),$$

$$J_{\rho} = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) \approx 0,1(D^4 - d^4).$$

Осьовий момент інерції позначимо через J з індексом відповідної осі:

$$J_x = \int_A y^2 dA, \quad J_y = \int_A x^2 dA.$$

Одиниці виміру осьового та полярного моменту інерції виражаються в однакових одиницях виміру:

$$[J] = m^4.$$

Осьовий і полярний моменти інерції – величини завжди **додатні і не дорівнюють нулю**.

Додамо моменти інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей x, y (рис. 4.1):

$$J_x + J_y = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A \rho^2 dA = J_{\rho},$$

$$J_x + J_y = J_{\rho}.$$

Полярний момент інерції дорівнює сумі осьових моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей координат (рис. 4.1).

Так як інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів, то момент інерції складної фігури можна обчислити як суму моментів інерції простих фігур, на які розбивають складну фігур.

Приведемо обчислення осьових моментів інерції деяких простих фігур.

1. Прямокутник $b \times h$ (рис. 4.3).

Нескінченно малу площадку dA виділемо у вигляді смужки, яка має ширину b і висоту dy , тоді $dA = b \cdot dy$, тоді:

$$J_x = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 b dy = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy = b \cdot \left(\frac{h^3}{6} - \left(-\frac{h^3}{6} \right) \right) = \frac{bh^3}{12},$$

$$J_x = b \frac{h^3}{12}.$$

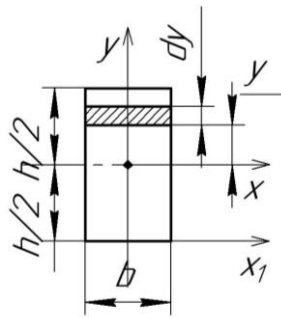


Рис. 4.3. Розміщення елементарної площадки dA прямокутника відносно осей координат

Для квадрата із стороною a :

$$J_x = \frac{a^4}{12}.$$

2. Круг розміром d відносно діаметрів x і y . Так як круг фігура симетрична то $J_x = J_y$. Оскільки:

$$J_x + J_y = J_\rho = \frac{\pi d^4}{32},$$

$$J_x = J_y = \frac{J_\rho}{2} = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4.$$

3. Кільце розміром $D \times d$ відносно діаметрів x і y :

$$J_x = J_y = \left(\frac{\pi}{64} \right) \cdot (D^4 - d^4) \approx 0,05 \cdot (D^4 - d^4).$$

Як було зазначено раніше:

$$J_x + J_y = J_\rho.$$

Під час повороту осей координат у своїй площині навколо початку координат полярний момент інерції залишається незмінним, а осьові моменти інерції змінюватимуться, тому:

$$J_x + J_y = const.$$

Зрозуміло, якщо сума двох змінних величин залишається сталою, то при збільшенні однієї із них, інша зменшується. При певному положенні осей один із осевих моментів досягає максимального значення, а другий мінімального. Осі відносно яких моменти інерції набувають максимального і мінімального значень, називають **головними осями інерції**.

У випадку, коли головна вісь проходить через центр ваги фігури, то вона називається **головною центральною віссю**, а момент інерції відносно цієї осі – **головним центральним моментом інерції**. Важливим є те, що коли фігура має вісь симетрії, то ця вісь завжди є однією з головних центральних осей.

Задача 1.

Для тавра зображеного на рис. 4.4 знайти головні центральні моменти інерції.

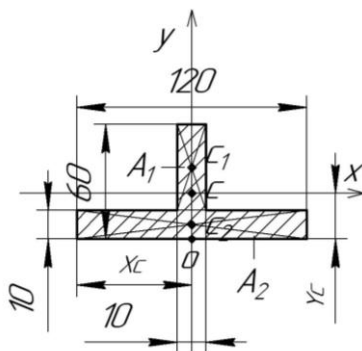


Рис. 4.4. Тавр з геометричними розмірами в міліметрах

Розв'язок:

1. Розіб'ємо тавр на дві прості фігури – прямокутники з площинами A_1 і A_2 .

2. Позначимо сторони:

$$b_1 = 10 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad h_1 = 50 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad b_2 = 120 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad h_2 = 10 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

3. Знайдемо центр ваги тавра.

В нашому випадку вісь y є віссю симетрії тавра (центральною віссю), то центр його ваги лежатиме на цій осі, абсциса центра ваги $x_c = 0$, ординату центра ваги обчислимо за формулою приведеною вище:

$$y_c = \frac{(A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2)}{(A_1 + A_2)},$$

де

$$A_1 = b_1 \cdot h_1 = 10 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot 50 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, \quad y_1 = OC_1 = 35 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$A_2 = b_2 \cdot h_2 = 120 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, \quad y_2 = OC_2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$Y_c = \frac{(0,5 \cdot 35 + 1,2 \cdot 5) \cdot 10^{-6} \text{ м}^3}{(0,5 + 1,2) \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} = 13,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Використовуючи метод розбиття і формули приведені вище моментів інерції прямокутників відносно власних центральних осей, а також теорему про момент інерції відносно осі, паралельної центральній, запишемо:

$$J_x = \frac{b_1 h_1^3}{12} + a_1^2 A_1 + \frac{b_2 h_2^3}{12} + a_2^2 A_2,$$

де

$$a_1 = C_1 C = 21,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad a_2 = C_2 C = 8,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

4. Підставимо значення та розрахуємо:

$$J_x = \frac{120 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot (10 \cdot 10^{-3} \text{ м})^3}{12} + (21,2 \cdot 10^{-3} \text{ м})^2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 + \frac{10 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot (50 \cdot 10^{-3} \text{ м})^3}{12} + (8,8 \cdot 10^{-3} \text{ м})^2 \cdot 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \approx 10 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4 + 225 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4 + 104 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4 + 93 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4 \approx 432 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4 \approx 0,432 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Момент інерції J_y обчислимо як суму моментів інерції прямокутників відносно центральної осі:

$$J_y = \frac{h_1 b_1^3}{12} + \frac{h_2 b_2^3}{12} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot (10 \cdot 10^{-3} \text{ м})^3}{12} + \frac{10 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot (120 \cdot 10^{-3} \text{ м})^3}{12} \approx 4,2 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4 + 1440 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4 \approx 1,444 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Завдання:

Для заданої фігури знайти головні центральні моменти інерції. Вихідні дані вибрати згідно варіанту (рис. 4.5 – 4.16), таблиця 4.1.

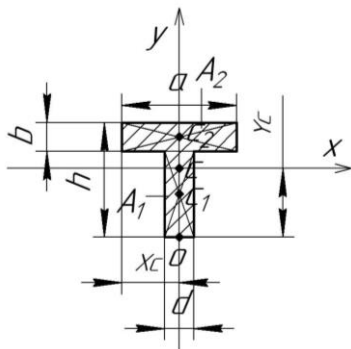


Рис. 4.5.

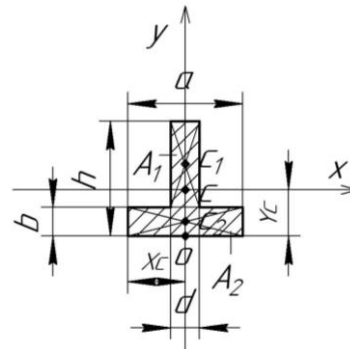


Рис. 4.6.

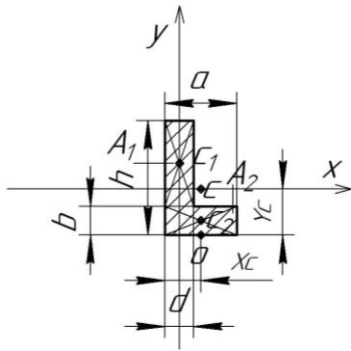


Рис. 4.7.

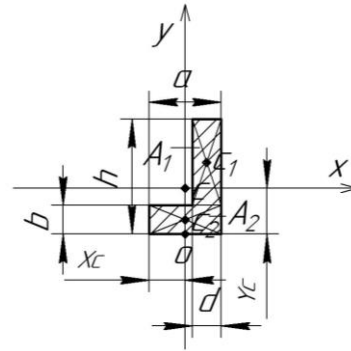


Рис. 4.8.

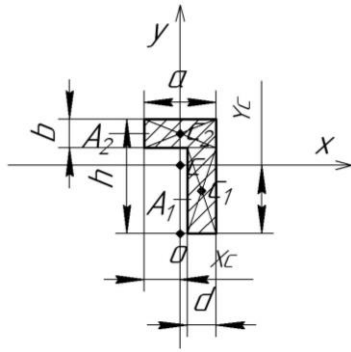


Рис. 4.9.

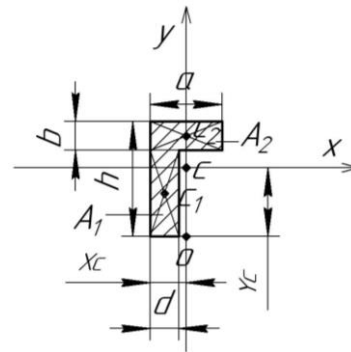


Рис. 4.10.

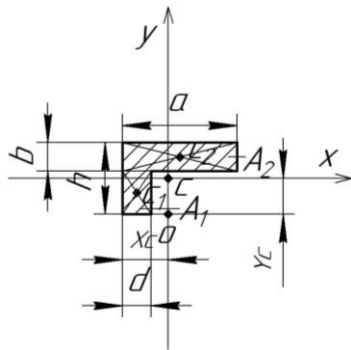


Рис. 4.11.

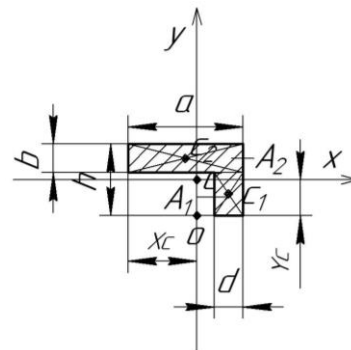


Рис. 4.12.

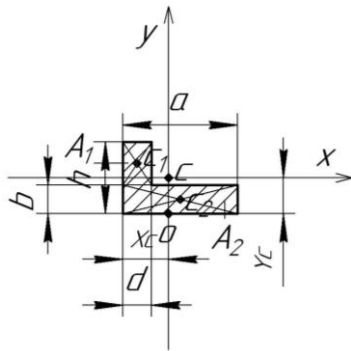


Рис. 4.13.

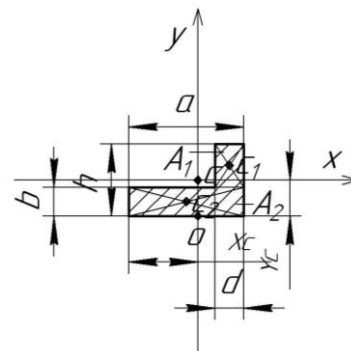


Рис. 4.14.

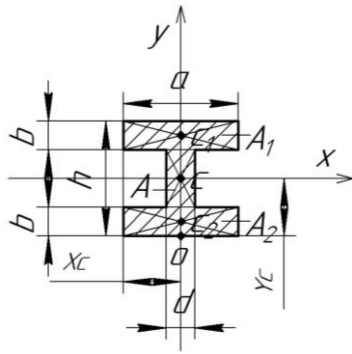


Рис. 4.15.

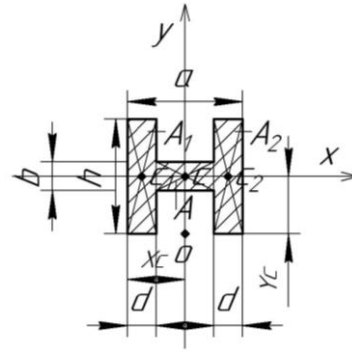


Рис. 4.16.

Таблиця 4.1.

Варіанти завдань для розрахунку головних центральних моментів інерції $J_x J_y$.

Варіант	Геометричні розміри в мм			
	a	b	d	h
1	60	10	10	70
2	60	10	10	70
3	40	10	10	60
4	40	10	10	60
5	40	10	10	60
6	40	10	10	60
7	60	10	10	40
8	60	10	10	40
9	60	10	10	40
10	60	10	10	40
11	50	10	10	50
12	50	10	10	50

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ:

1. Що називають статичним моментом площі фігури, одиниці його вимірювання?
2. Що називають осьовим моментом інерції, одиниці його вимірювання?
3. Що називають полярним моментом інерції, одиниці його вимірювання?
4. Що називають головними осями інерції?
5. Що називають головною центральною віссю та головним центральним моментом інерції?

Розділ 2 Опір матеріал

Практичне заняття № 5.

Розрахунок елементів на розтяг та стиск побудова епюр поздовжніх сил та напруг

Метод перерізів полягає в тому, що тіло уявно розрізають площиною на дві частини, будь-яку з них відкидають і замість неї до перерізу залишеної частини прикладають внутрішні сили, які діяли до розрізання; залишену частину розглядають як самостійне тіло, яке перебуває в рівновазі під дією зовнішніх і прикладених до перерізу внутрішніх сил (рис. 5.1).

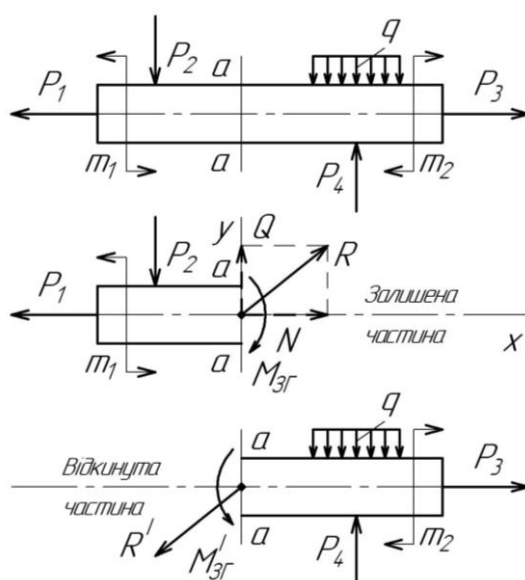


Рис. 5.1. Розподіл сил з використанням методу перерізів

Якщо зовнішні сили, які діють на брус, лежать в одній площині, то в загальному випадку статичним еквівалентом внутрішніх сил що діють у перерізі $a-a$, будуть **головний вектор** R , прикладений до центра ваги перерізу, та **головний момент** M_{3z} , які зрівноважують плоску систему зовнішніх сил, прикладених до залишеної частини бруса.

Розкладемо головний вектор R (рис. 5.1) на складові N , Q , які із головним моментом M_{3z} називають **внутрішніми силовими факторами**, назвемо складову N поздовжньою силою, складову Q – поперечною силою.

Для знаходження трьох внутрішніх силових факторів необхідно і достатньо три рівняння рівноваги залишеної частини бруса:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum M = 0.$$

Розкриваючи які, запишемо:

$$N + \sum P_{ix} = 0, \quad Q + \sum P_{iy} = 0, \quad M_{3r} + \sum M_0(P_i) = 0,$$

де

$\sum P_{ix}$, $\sum P_{iy}$ – алгебраїчні суми проекцій на осі x і y зовнішніх сил, прикладених до розглядуваної частини бруса,

$\sum M_0(P_i)$ – алгебраїчна сума моментів цих сил відносно центра ваги.

Крім поняття деформації є поняття напруги. **Напруга характеризує інтенсивність внутрішніх сил, які діють у перерізі.**

Поздовжнє зусилля N , що виникає в поперечному перерізі бруса, (наслідок прикладеної зовнішньої сили P), являє собою рівнодіючу внутрішніх нормальних сил, що розподілені по площі поперечного перерізу, і пов'язане з нормальною напругою, яка виникає в цьому перерізі залежністю:

$$N = P = \int_F \sigma dA.$$

де σ - нормальна напруга в довільній точці поперечного перерізу, що належить елементарній площадці dA ;

A – площа поперечного перетину бруса;

Добуток σdA являє собою елементарну внутрішню силу dP , що припадає на площадку dA , звідки:

$$\sigma = \frac{dP}{dA}.$$

Напруга σ – це внутрішня сила, віднесена до одиниці площі перерізу. Напруга – векторна величина.

Одиниця виміру напруги:

$$[\sigma] = \frac{[P]}{[A]} = \frac{\text{сила}}{\text{площа}} = \frac{\text{ньютон}}{\text{кв.метр}} = \text{паскаль (Па)}.$$

На практиці використовують інші одиниці виміру:

$$1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ (Па)} = 10 \text{ кгс} / \text{см}^2.$$

Розтягом або стиском називають такий вид деформації, при якому у будь-якому поперечному перерізі бруса виникає тільки **поздовжня сила**. Бруси з прямолінійною віссю (прямі бруси), які зазнають розтягу або стиску, переважно називають **стержнями**.

Візьмемо невагомий, затиснутий лівим кінцем брус, вздовж осі якого діють активні сили P і $2P$ (рис. 5.2).

Частини бруса сталого перерізу, що містяться між поперечними площинами, в яких прикладені активні або реактивні сили, називають **ділянками**. Зображений на рис. 5.2 брус має дві ділянки. Застосувавши метод перерізів, знайдемо поздовжні сили N_1 і N_2 на відповідних ділянках. Умовно зробимо поперечний переріз 1-1 на лівій ділянці бруса.

В усіх точках бруса діятимуть внутрішні розподілені сили, рівнодіюча яких визначається з умови рівноваги однієї частини бруса від перерізу:

$$\sum X = 0; \quad 2P - P - N_1 = 0, \quad N_1 = 2P - P = P.$$

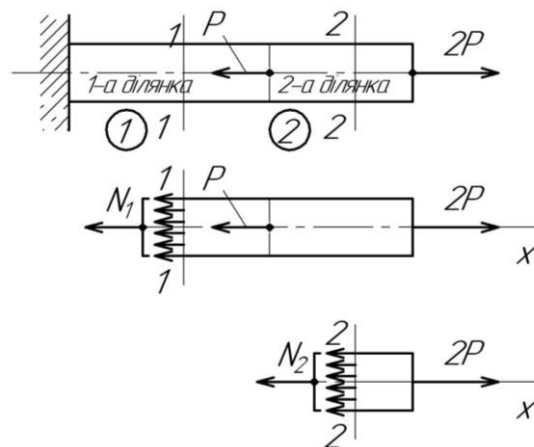


Рис. 5.2. Розподіл сил у брусі з використанням методу перерізів

Аналогічно знайдемо поздовжню силу N_2 яка діятиме в поперечному перерізі 2-2:

$$\sum X = 0, \quad 2P - N_2 = 0, \quad N_2 = 2P.$$

Отже, **поздовжня сила в поперечному перерізі бруса чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, розміщених по один бік перерізу.**

Прийmemo відповідні правила знаків: поздовжні розтягуючі сили, направлені від перерізу вважатимемо **додатними**, а стискаючі поздовжні сили, направлені до перерізу – **від'ємними**.

Задача 1.

Побудувати епюри поздовжніх сил P , нормальних напруг σ для ступінчатого бруса зображеного на рис. 5.3.

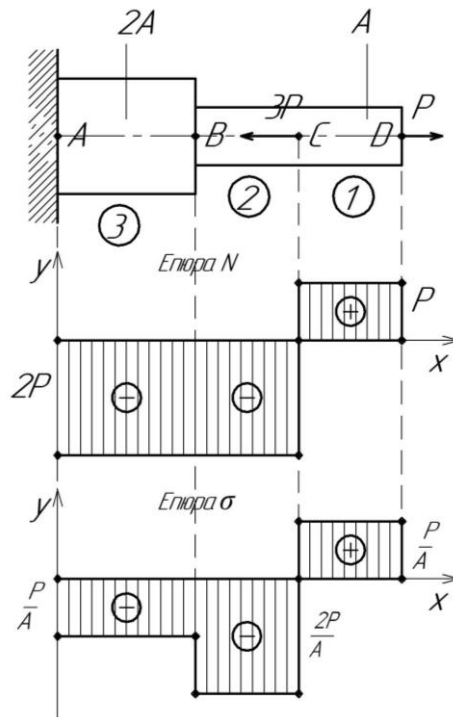


Рис. 5.3. Епюри поздовжніх N сил та нормальних напруг σ ступінчатого бруса

Розв'язок:

Розіб'ємо брус на ділянки та пронумеруємо їх (рис. 5.3).

Межі ділянок є точки прикладання зовнішніх сил і місця зміни розмірів поперечного перерізу. Даний брус має три ділянки.

Для побудови епюр поздовжніх сил N та нормальних напруг σ під рисунком бруса розмістимо вісь абсцис та ординат для візуального відображення їхніх ділянок і амплітуд у відповідному заданому масштабі.

Епюри будемо штрихувати тонкими лініями, перпендикулярними до осі абсцис. Величина амплітуди по ординаті дає значення поздовжньої сили N , та нормальної напруги σ .

У точках прикладання зовнішніх зосереджених сил на епюрі N видно перепад амплітуди, по модулю, який рівний величині прикладеної в перерізі бруса зовнішньої зосередженої сили.

Побудова епюри N :

1. На першій ділянці (застосувавши метод перерізів) діє поздовжня сила $N_1 = P$. Враховуючи те, що на першій ділянці діє поздовжня розтягуюча сила, відкладемо від осі епюри P (вісь абсцис) у довільному масштабі величину сили P і проведемо пряму, паралельну даній осі до кінця першої ділянки точки C (точка прикладання сили $3P$).

2. На початку другої ділянки (точка C) відбувається різкий стрибок, причому перепад амплітуди по модулю рівний величині сили $3P$. Застосувавши метод перерізів бачимо, що в усіх поперечних перерізах другої і третьої ділянок діятиме поздовжня сила $N_2 = N_3 = -2P$. Дана епюра

буде паралельною лінією до осі епюри N і проходить до кінця третьої ділянки (місце закріплення бруса). Зазначимо, що значення ординати епюри поздовжніх сил під закріпленням дорівнюватиме реакції закріплення. Використовуючи метод перерізів рівновагу частини бруса зручніше розглядати з боку його вільного кінця.

Побудова епюри σ

Для побудови епюри σ на відповідних ділянках поперечного перерізу бруса знайдемо нормальні напруги, врахувавши те, що їхнє значення, на цих ділянках, дорівнюватиме відношенню значення поздовжньої сили (епюри N) до площі поперечного перерізу. Звідки:

1. На першій ділянці $\sigma_1 = \frac{P}{A}$.
2. На другій ділянці $\sigma_2 = \frac{-2P}{A}$.
3. На третій ділянці $\sigma_3 = \frac{-2P}{2A} = \frac{P}{A}$.

Правила побудови епюри σ такі ж самі як і епюри P , враховуючи і правило знаків (+,-).

Завдання:

Побудувати епюри поздовжніх сил P , нормальних напруг σ , відповідно заданого варіанту (рис. 5.4 – 5.15).

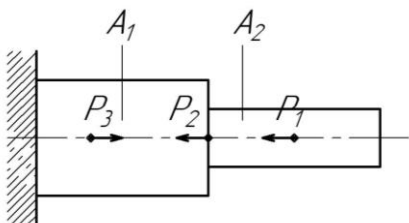


Рис. 5.4.

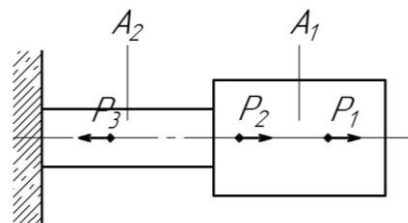


Рис. 5.5.

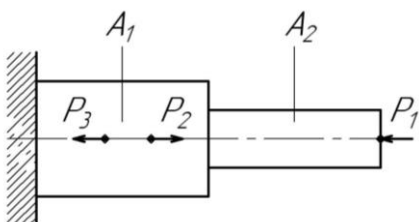


Рис. 5.6.

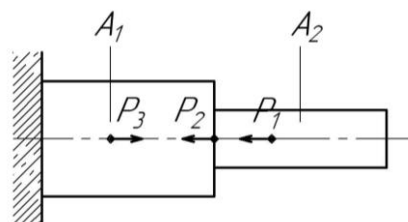


Рис. 5.7.

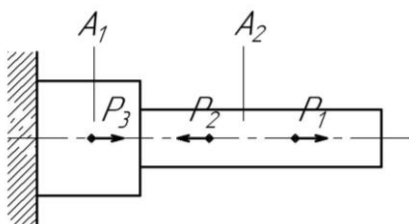


Рис. 5.8.

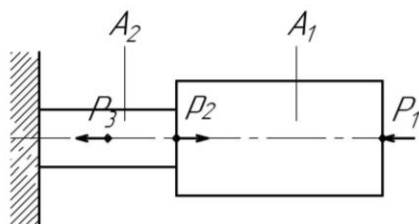


Рис. 5.9.

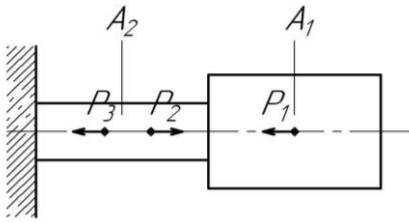


Рис. 5.10.

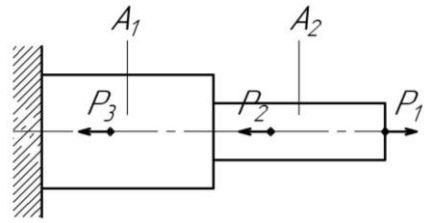


Рис. 5.11.

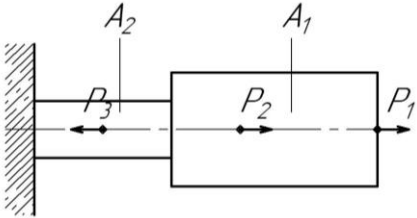


Рис. 5.12.

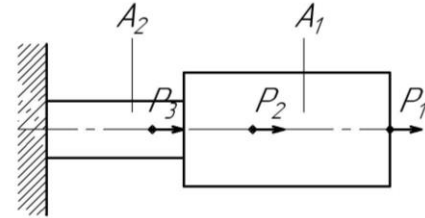


Рис. 5.13.

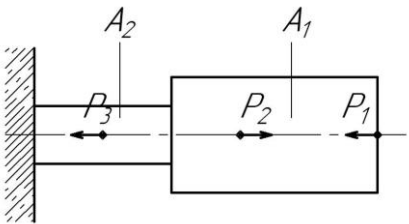


Рис. 5.14.

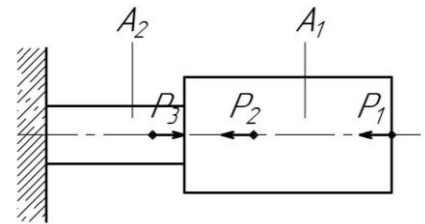


Рис. 5.15.

Під час розрахунку на міцність особливу увагу звертають на ті перерізи бруса, в яких наруги за абсолютним значенням максимальні, такі перерізи можуть бути небезпечними. Розглянемо деформації, які відбуваються під час розтягу або стиску. Візьмемо брус сталого поперечного перерізу A , який має довжину l , жорстко закріплений одним кінцем та навантажений на протилежному кінці розтягуючою силою P (рис. 5.16).

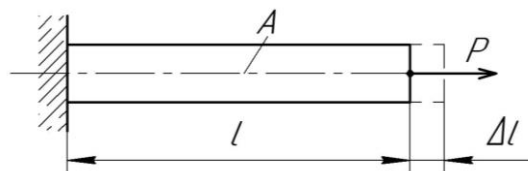


Рис. 5.16. Абсолютне видовження бруса на величину Δl

Під дією зазначеної сили брус видовжиться на деяку величину Δl , яку назвемо **абсолютним видовженням**. Відношення абсолютного видовження Δl до початкової діли l назвемо **відносним видовженням** і позначимо ε :

$$\varepsilon = \Delta l / l.$$

Відносне видовження ε число абстрактне, іноді його виражають у відсотках:

$$\varepsilon = (\Delta l / l) \cdot 100.$$

Закон Гука для розтягу і стиску

Напруга, деформації розтягу і стиску пов'язані між собою залежністю, яку називають законом Гука, за ім'ям англійського фізика Роберта Гука (1635–1703), який встановив даний закон. Закон Гука для розтягу і стиску відповідає лише певним межам навантаження і формулюється так: *нормальна напруга прямо пропорційна відносному видовженню або скороченню*.

Математично закон Гука записують у вигляді:

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Коефіцієнт пропорційності E характеризує жорсткість матеріалу, тобто його здатність протидіяти пружним деформаціям розтягу або стиску, і називають *модулем поздовжньої пружності або модулем пружності першого роду*.

Модуль пружності і напругу виражають в однакових одиницях:

$$[E] = \frac{[\sigma]}{[\varepsilon]} = \text{Па}.$$

Приведемо значення E , МПа для деяких матеріалів:

Чавун	$(1,5 - 1,6) \cdot 10^5$
Сталь	$(1,96 - 2,16) \cdot 10^5$
Мідь	$(1,0 - 1,3) \cdot 10^5$
Сплави алюмінію	$(0,1 - 0,16) \cdot 10^5$
Дерево	$(0,69 - 0,71) \cdot 10^5$
Текстоліт	$(0,06 - 0,1) \cdot 10^5$
Капрон	$(0,01 - 0,02) \cdot 10^5$

Якщо у формулу закону Гука підставити вирази $\sigma = P/A$, $\varepsilon = \Delta/l$, матимемо:

$$\Delta = Pl / EA.$$

Добуток EA у знаменнику називають *жорсткістю перерізу* при розтягу або стиску, а формулу читають так: абсолютне видовження або укорочення прямо пропорційне поздовжній силі і довжині та обернено пропорційне жорсткістю перерізу бруса. Відношення EA/l називають жорсткістю бруса при розтягу або стиску. Зокрема, наведені формули закону Гука стосуються лише брусів або їх ділянок сталого поперечного перерізу, виготовлених з одного матеріалу, за дії сталої поздовжньої сили.

Описана вище деформація показує, що розміри поперечного перерізу бруса під час розтягу зменшуються, а при стиску збільшуються. На дослідах встановлено, що при однобічному розтягуванні або стисканні відношення відносних поперечних і поздовжніх деформацій для відповідного матеріалу є величина стала. Залежність між відносною поперечною ε^l і відносною поздовжньою ε деформаціями вперше

встановив французький вчений Пуассон (1781 – 1840). Математично має вигляд:

$$|\varepsilon'| = \nu |\varepsilon|,$$

де ν коефіцієнт деформації, або **коефіцієнт Пуассона** (величина безрозмірна).

Приведемо значення ν для деяких матеріалів:

Чавун	0,23 – 0,27
Сталь	0,24 – 0,3
Мідь	0,31 – 0,34
Латунь	0,32 – 0,42
Свинець	0,42
Каучук	0,47

Необхідний запас міцності матеріалу – n є відношення границі міцності матеріалу (розтяг або стиск) до напруги яка виникає на тій чи іншій ділянці бруса відповідно до розтягу або стиску. Математично визначається так:

$$n = \sigma_{m(p,c)} / \sigma_{d(p,c)}.$$

Задача 2.

Побудувати епюри поздовжніх сил P та нормальних напруг σ , перевірити міцність чавунного бруса, зображеного на рис. 5.17, якщо $P_1 = 10\text{кН}$, $P_2 = 50\text{кН}$, $P_3 = 65\text{кН}$, необхідний запас міцності $[n] = 4$. Площі поперечних перерізів ступенів бруса $A_1 = 400\text{мм}^2$, $A_2 = 315\text{мм}^2$, $A_3 = 450\text{мм}^2$. Границя міцності чавуну на розтяг $[\sigma]_{mp} = 150\text{МПа}$, на стиск $[\sigma]_{mc} = 580\text{МПа}$.

Розв'язок:

1. Розіб'ємо брус на ділянки по точках прикладення зовнішніх сил та зміни розмірів перерізу, починаючи з вільного кінця бруса, тобто брус має п'ять ділянок (рис. 5.17).

2. Застосовуючи метод перерізів, визначимо поздовжні сили N на кожній ділянці бруса

перша ділянка:

$$N_1 = P_1 = 10\text{кН},$$

друга ділянка:

$$N_2 = P_1 = 10\text{кН},$$

третья ділянка:

$$N_3 = P_1 - P_2 = 10\text{кН} - 50\text{кН} = -40\text{кН},$$

четверта ділянка:

$$N_4 = P_1 - P_2 = 10\text{кН} - 50\text{кН} = -40\text{кН},$$

п'ята ділянка:

$$N_5 = P_1 - P_2 + P_3 = 10\text{кН} - 50\text{кН} + 65\text{кН} = 25\text{кН}.$$

3. Будуємо епюру поздовжніх сил бруса (рис. 5.17).

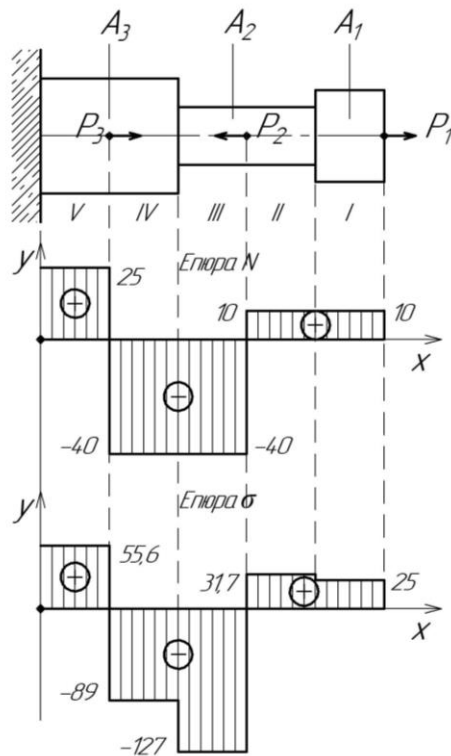


Рис. 5.17. Епюри поздовжніх N сил та нормальних напруг σ ступінчатого бруса

4. Визначимо нормальні напруги на ділянках бруса та побудуємо їхні епюри (рис. 5.17)

перша ділянка:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{10 \cdot 10^3 \text{ Н}}{4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 25 \text{ МПа},$$

друга ділянка:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{10 \cdot 10^3 \text{ Н}}{3,15 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 31,7 \text{ МПа},$$

третья ділянка:

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = \frac{-40 \cdot 10^3 \text{ Н}}{3,15 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -127 \text{ МПа},$$

четверта ділянка:

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_3} = \frac{-40 \cdot 10^3 \text{ Н}}{4,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -89 \text{ МПа},$$

п'ята ділянка:

$$\sigma_5 = \frac{N_5}{A_3} = \frac{25 \cdot 10^3 \text{ Н}}{4,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 55,6 \text{ МПа}.$$

5. Знаходимо максимальні напруги за абсолютним значенням (розтяг, стиск) які виникають в поперечних перерізах ступінчатого бруса і

порівнюючи з граничною міцністю даного матеріалу розраховуємо коефіцієнт запасу міцності.

Стиск (третя ділянка):

$$n_3 = \frac{\sigma_{mc}}{\sigma_3} = \frac{580 \text{ МПа}}{127 \text{ МПа}} = 4,57.$$

Міцність бруса на *третій ділянці* достатня, оскільки задовольняє умові задачі $n_3 = 4,67 > 4$.

Розтяг (п'ята ділянка):

$$n_5 = \frac{\sigma_{mp}}{\sigma_5} = \frac{150 \text{ МПа}}{55,6 \text{ МПа}} = 2,7.$$

Міцність бруса на *п'ятій ділянці* недостатня, оскільки не задовольняє умові задачі $n_5 = 2,7 < 4$.

6. Визначаємо максимальну напругу, яка б задовольняла умові необхідного коефіцієнту запасу міцності:

$$\frac{n}{n_5} = \frac{\sigma_5}{\sigma_x}, \text{ звідки } \sigma_x = \frac{\sigma_5 \cdot n_5}{n} = \frac{55,6 \text{ МПа} \cdot 2,7}{4} = 37,5 \text{ МПа}.$$

7. Визначаємо мінімально необхідну площу поперечного перерізу на *п'ятій ділянці* ступінчатого бруса:

$$A_5 \geq \frac{N_5}{[\sigma]} = \frac{25 \cdot 10^3 \text{ Н}}{37,5 \cdot 10^6 \text{ Па}} \approx 0,667 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 6,67 \text{ см}^2 \approx 667 \text{ мм}^2.$$

Завдання:

Для заданого ступінчатого бруса побудувати епюри поздовжніх сил та нормальних напруг. Перевірити брус на міцність відповідно допустимого коефіцієнту запасу міцності. Вихідні дані вибрати згідно варіанту (рис. 5.4 – 5.15), таблиця 5.1.

Таблиця 5.1.

Варіанти завдань для розрахунку ступінчатого бруса на міцність

Варіант	Площа поперечного перерізу мм^2		Матеріал бруса	Границя міцності, МПа	Доп. коеф. запасу міцн., n	Значення сили P , кН		
	A_1	A_2				P_1	P_2	P_3
1	160	200	сталь 30	$\sigma_m = 300$	3,5	14	20	26
2	145	185	чавун СЧ 21-40	$\sigma_{mp} = 210, \sigma_{mc} = 950$	4,5	12	25	20
3	180	120	чавун ВЧ50-1,5	$\sigma_{mp} = 500, \sigma_{mc} = 1600$	5,0	15	28	23
4	220	125	сталь Ст3	$\sigma_m = 240$	2,5	13	21	27
5	145	95	чавун СЧ21-40	$\sigma_{mp} = 210, \sigma_{mc} = 950$	4,0	10	25	30
6	128	180	сталь Ст5	$\sigma_m = 280$	3,0	15	20	13
7	210	165	чавун СЧ 12-28	$\sigma_{mp} = 120, \sigma_{mc} = 500$	4,5	11	30	16
8	250	150	сталь 45	$\sigma_m = 360$	2,5	18	20	24
9	215	190	сталь Ст5	$\sigma_m = 280$	4,0	14	21	31
10	165	125	чавун СЧ 12-28	$\sigma_{mp} = 120, \sigma_{mc} = 500$	5,0	17	19	21
11	150	210	чавун СЧ21-40	$\sigma_{mp} = 210, \sigma_{mc} = 950$	4,5	12	25	18
12	160	200	сталь 40Х	$\sigma_m = 800$	2,0	10	28	14

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ:

1. В чому полягає метод перерізів?
2. Що називають розтягом (стиском)?
3. Правила побудови епюр.
4. Що називають абсолютним та відносним видовження?
5. Що таке нормальна напруга, як розраховується, одиниці виміру?
6. Що таке коефіцієнт пропорційності E , одиниці виміру?
7. Що таке необхідний запас міцності?

Практичне заняття № 6.

Зсув. Деформація зсуву. Закон Гука. Розрахункова формула для зсуву

Зсув – такий вид деформації при якій у будь-якому поперечному перерізі бруса виникає лише поперечна сила. Прикладом деформації зсуву може бути розрізання ножицями металевих пластинок чи прутків, проте на практиці деформація зсуву у чистому вигляді майже не буває, так як вона супроводжується іншими видами деформацій, найчастіше згином (рис. 6.1).

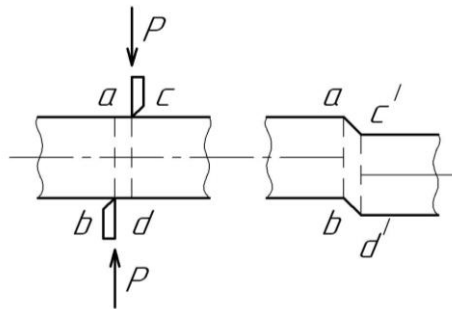


Рис. 6.1. Приклад деформації зсуву

Розглянемо брус площею поперечного перерізу A , перпендикулярно до осі якого на відносно малій відстані прикладено дві однакові, паралельні, але протилежно направлені сили P . Для визначення поперечної сили Q використаємо метод перерізів (рис. 6.2).

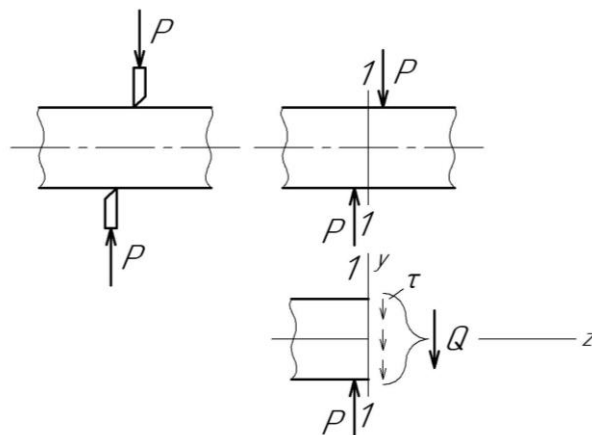


Рис. 6.2. Визначення поперечної сили Q з використанням методу перерізів

В усіх точках поперечного перерізу діятимуть рівномірно розподілені сили, рівнодіюча яких визначається з умови рівноваги залишеної частини бруса:

$$\sum Y = 0; \quad P - Q = 0,$$

звідки:

$$Q = P.$$

Поперечна сила це рівнодіюча внутрішніх поперечних сил, що діють на зсув у поперечному перерізі. Зазвичай вважають, що при зсуві в поперечному перерізі бруса діють тільки дотичні напруги τ . Вважатимемо, що ці напруги в поперечному перерізі розподілені рівномірно, тоді їх вони розраховуються за формулою:

$$\tau = Q / A.$$

Одна із основних умов міцності деталі будь-якої конструкції полягає у тому, що найбільша напруга, яка виникає в ній, не повинна перевищувати від допустимої. Розрахункова формула для зсуву:

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau].$$

Дотична напруга при зсуві, обчислена за формулою $\tau = Q / A$, не повинна бути більшою від допустимої.

Для більш детального розуміння параметрів, які характеризують деформацію зсуву, розглянемо елемент бруса, який має вигляд паралелепіпеда $abcd$ на грані якого діятимуть тільки дотичні напруги τ , а протилежну грань паралелепіпеда вважатимемо жорстко закріпленою (рис. 6.3).

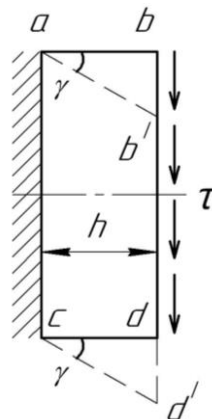


Рис. 6.3. Деформація зсуву під дією дотичної напруги τ

Деформація зсуву в даному елементі полягає у перекошуванні прямих кутів паралелепіпеда внаслідок поступального переміщення грані bd під дією дотичні напруги τ відносно грані ac , яку вважатимемо нерухомою. Деформацію зсуву характеризують кутом γ і називають **кутом зсуву** або **відносним зсувом** (оскільки він не залежить від відстані h , на якій виникає зсув). Величину bb_1 (dd_1), на яку зміщується рухома грань bd відносно нерухомої ac , називають **абсолютним зсувом**.

Відносний зсув γ вимірюють у радіанах.

Напруга і деформація зсуву зв'язані між собою залежністю, Яку називають законом Гука для зсуву. Закон Гука для зсуву справедливий

лише в певних межах навантаження і формулюється так: **дотична напруга прямо пропорційна відносному зсуву**.

Математично закон Гука можна записати у вигляді рівності:

$$\tau = G \cdot \gamma.$$

Коефіцієнт пропорційності G характеризує жорсткість матеріалу при зсуві. Його називають модулем зсуву або **модулем пружності другого роду**. Модуль пружності і напругу виражають в однакових одиницях:

$$[G] = \frac{[\tau]}{[\gamma]} = \text{Па}.$$

Приведемо значення G , МПа для деяких матеріалів:

Чавун	$4,5 \cdot 10^4$
Сталь	$8,1 \cdot 10^4$
Мідь	$(4,0 - 4,9) \cdot 10^4$
Латунь	$(3,5 - 3,7) \cdot 10^4$
Алюміній	$(2,6 - 02,7) \cdot 10^4$
Дерево	$0,055 \cdot 10^4$

Необхідно відмітити, що між трьома пружними сталими зазначеними вище E , G , і ν існує залежність:

$$G = \frac{E}{[2(1 + \nu)]}.$$

Прийнявши для сталей $\nu \approx 0,25$, матимемо:

$$G_{ст} \approx 0,4E_{ст}.$$

Розрахунок болтових з'єднань

Основним показником працездатності різних кріпильних з'єднань болтів, гвинтів і шпильок є розрахункова міцність на розтяг, стиск, зсув (розглянуті вище) і зминання.

Умова міцності на зсув (зріз) можна записати в загальному вигляді:

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{Q_{\text{макс}}}{A} \leq [\tau].$$

Величина допустимих напруг на зріз $[\tau]$ залежить від властивостей матеріалу, характеру навантаження та типу елементів конструкції.

Для наочності розглянемо розрахунок болтового з'єднання (рис. 6.4).

Сили P намагаються зсунути листи один відносно іншого. Цим силам перешкоджає болт, на який зі сторони кожного листа передаються розподілені по контактній поверхні зазначені сили. Рівнодіючі цих сил, рівні P , мають протилежний напрямок (рис. 6.4).

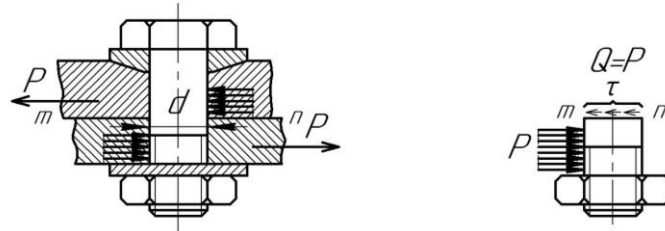


Рис. 6.4. Схема болтового з'єднання на яке діють сили P

Зусилля намагаються зрізати болт по площині розділу листів $m - n$, так як в цьому перерізі діє найбільша поперечна сила $Q = P$ (рис. 6.4). Враховуючи те, що дотичні напруги τ розподілені рівномірно, тоді отримаємо:

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{P}{\pi r^2} = \frac{P}{\pi (d/2)^2} = \frac{P}{\pi d^2 / 4}.$$

Таким чином, умова міцності болта на зріз набуває вигляду:

$$\frac{4P}{\pi d^2} \leq [\tau].$$

Звідси знаходимо діаметр болта:

$$d = \sqrt{\frac{4P}{\pi[\tau]}}.$$

Необхідно зауважити, що сили P , прикладені до болта, намагаються також зігнути його. Проте згинаючий момент малий і викликані ним нормальними напругами можна знехтувати, так як при збільшенні зовнішніх сил руйнування відбудеться шляхом зрізу.

Під час розрахунків зазначених вище з'єднань необхідно враховувати, що навантаження, прикладене до елементів з'єднань, крім зрізу викликають змінання контактуючих поверхонь.

Змінання – пластична деформація, яка виникає на поверхнях контакту.

Необхідно зазначити, розрахунок на змінання проводять наближено, так як закон розподілу тиску по поверхні контакту досконально не відомий. Зазвичай приймають, що тиск по діаметру d змінюється пропорційно проекції площадки dA циліндричної поверхні на діаметральну площину. Тоді максимальну напругу змінання на циліндричних поверхнях визначають:

$$\sigma_{зм} = \frac{P}{A_{зм}}$$

де

$A_{зм}$ – площа проекції поверхні контакту на діаметральну площину (рис. 6.5):

$$A_{3M} = dS$$

де

d – діаметр отвору;

S – товщина з'єднувальної деталі (висота циліндра).

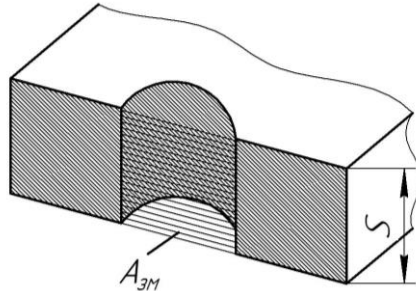


Рис. 6.5. Схема проєкції поверхні контакту на діаметральну площину

Якщо з'єднувальні деталі мають різну товщину, то в розрахункову формулу підставляють меншу.

Умова міцності на зминання набуває вигляду:

$$\sigma_{3M} = \frac{P}{dS} \leq [\sigma_{3M}].$$

Допустимі напруги на зминання встановлюють дослідним шляхом і приймають $[\sigma_{3M}] = (2 \div 2,5)[\sigma_-]$.

З формули визначення $\sigma_{3M} = P/dS \leq [\sigma_{3M}]$ отримаємо:

$$d \geq \frac{P}{S[\sigma_{3M}]}.$$

Для задоволення умови міцності на зріз і зминання, з двох знайдених діаметрів необхідно взяти більший, заокруглив його до стандартного значення.

Задача 1.

Визначити силу P , необхідну для пробивання круглого отвору діаметром $d = 30\text{мм}$ у сталюму листі товщиною $S = 10\text{мм}$, якщо зріз матеріалу відбувається при $\tau_s = 360\text{МПа}$ (рис. 6.6). Підібрати матеріал пуансона.

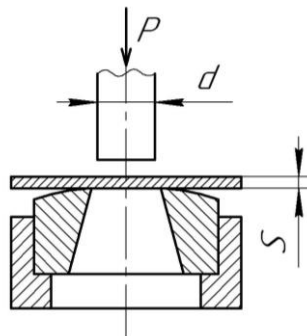


Рис. 6.6. Схема пробивання круглого отвору у сталюму листі

Розв'язок:

1. Визначаємо руйнуюче навантаження:

$$P_{рн} = \tau_3 \cdot A_3$$

де

A_3 – площа бокової поверхні циліндра діаметром d та висотою S

$$A_3 = \pi d S = 3,14 \cdot 30 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 942 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2, \text{ тоді}$$

$$P_{рн} = \tau_3 \cdot A_3 = 360 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 \cdot 942 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 = 338 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

2. Визначаємо напруги стиску в пуансоні:

$$\sigma_c = P_{рн} / A$$

де

A – площа поперечного перерізу пуансона

$$A = \pi d^2 / 4 = 3,14 \cdot 30^2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / 4 = 707 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2, \text{ звідки}$$

$$\sigma_c = P_{рн} / A = 338 \cdot 10^3 \text{ Н} / (707 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2) = 478 \text{ МПа}.$$

Оскільки напруги стиску, які виникають під час пробивання отвору великі, як матеріал для пуансона необхідно брати високоміцну леговану сталь, наприклад сталь марки Х12, для якої границя міцності $\sigma_m = 1500 \text{ МПа}$, що забезпечить запас міцності $n = \sigma_m / \sigma_c = 1500 \text{ МПа} / 478 \text{ МПа} = 3,138$.

Задача 2.

На рис. 6.7 зображений сталевий циліндричний стержень. Діаметр стержня d , діаметр його головки D , висота стержня h . З'ясувати чи витримуються умови рівномірності стержня діаметром d на розтяг, його головки висотою h на зріз, опорної поверхні головки діаметром D на зминання, якщо $[\sigma_p] = 120 \text{ МПа}$, $[\tau_3] = 70 \text{ МПа}$, $D = 32 \text{ мм}$, $d = 20 \text{ мм}$, $h = 12 \text{ мм}$. Визначити допустиме значення сили $[P]$.

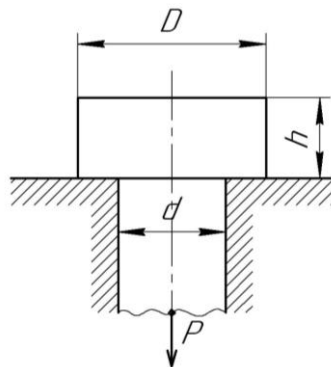


Рис. 6.7. Схема сталевий циліндричний стержень

Розв'язок:

Визначимо площі перерізів, які працюють на розтяг зминання та зріз.

Розрахунок на розтяг

В розрахунку на розтяг приймається площа поперечного перерізу стержня діаметром d , тоді:

$$A_p = \pi d^2 / 4 = 3,14 \cdot 20^2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / 4 = 314 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Розрахунок на зминання

В розрахунку на зминання приймається площа опорної поверхні головки:

$$A_{зм} = \pi D^2 / 4 - \pi d^2 / 4 = \pi(D^2 - d^2) / 4 = 3,14 \cdot (32^2 - 20^2) \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / 4 = 490 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Розрахунок на зріз

В розрахунку на зріз приймається площа бокової поверхні циліндра діаметром d та висотою h :

$$A_3 = \pi \cdot d \cdot h = 3,14 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot 12 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 754 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Використавши основні розрахункові рівняння розтягу, стиску і зрізу, знаходимо допустиме значення $[P]$:

$$[P_p] = [\sigma_p] \cdot A_p = 120 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 \cdot 314 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 = 37,7 \cdot 10^3 \text{ Н} = 37,7 \text{ кН},$$

$$[P_{зм}] = [\sigma_{зм}] \cdot A_{зм} = 170 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 \cdot 490 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 = 83,3 \cdot 10^3 \text{ Н} = 83,3 \text{ кН},$$

$$[P_3] = [\sigma_3] \cdot A_3 = 70 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 \cdot 754 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 = 52,8 \cdot 10^3 \text{ Н} = 52,8 \text{ кН}.$$

Розраховані значення допустимих сил значно відрізняються своїми величинами, тому умови рівномірності не витримуються. Допустиме значення сили $[P]$ візьмемо найменше із знайдених значень, тобто $[P] = 37,7 \text{ кН}$.

Задача 3.

Визначити необхідну кількість заклепок діаметром $d = 25 \text{ мм}$ для закріплення розкосу ферми, що складається з двох кутників $90 \times 60 \times 10$, до фасонного листа (косинки), яка має товщину $S = 1,2 \text{ см}$ (рис. 6.8). Розтягуюче зусилля в розкосі $P = 300 \text{ кН}$, матеріал сталь – Ст3, отвори для заклепок просвердлені.

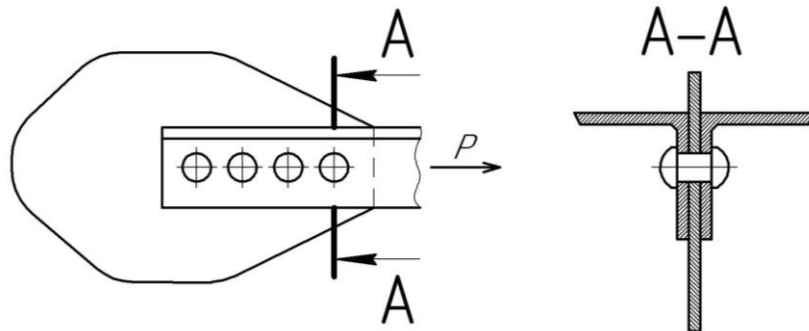


Рис. 6.8. Схема кріплення розкосу до ферми

Розв'язок:

Вважаючи те, що зусилля між заклепками розподіляються рівномірно, і маючи на увазі, що вони підлягають подвійному зрізу (одночасно по двом перерізам), число заклепок n визначимо із умови міцності на зріз:

$$\tau = \frac{Q}{2nA} = \frac{P}{2n\pi d^2 / 4} \leq [\tau],$$

або з умови міцності на зминання:

$$\sigma_{зм} = \frac{P}{nSd} \leq [\sigma_{зм}].$$

Враховуючи при цьому, що для сталі можна прийняти $[\tau] = 100 \text{ МПа}$, $[\sigma_{зм}] = 280 \text{ МПа}$, знайдемо

1. З розрахунку на зріз:

$$n \geq \frac{P}{2[\tau]\pi d^2 / 4} = \frac{300 \cdot 10^3 \text{ Н}}{2 \cdot 100 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 \cdot \frac{3,14 \cdot (2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м})^2}{4}} \approx 3,1.$$

2. З розрахунку на зминання:

$$n = \frac{P}{[\sigma_{зм}]Sd} = \frac{300 \cdot 10^3 \text{ Н}}{280 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 \cdot 1,2 \cdot 10^{-2} \cdot 2,5 \cdot 10^{-2}} \approx 3,6.$$

Приймаємо, що число заклепок $n = 4$.

В розрахунку на зминання зазначалась товщина фасонного листа $S = 1,2 \text{ см}$, так як сумарна товщина полук двох кутників $2S = 2 \text{ см}$, отже, напруга зминання в заклепках в місцях контакту з кутниками буде меншою, ніж в місці контакту з косинкою (передбачається, що матеріал заклепок м'якший ніж матеріал з'єднувальних елементів).

Завдання:

Визначити необхідну кількість заклепок для закріплення розкосу ферми, що складається з двох кутників $90 \times 60 \times 10$, до фасонного листа (косинки). Матеріал сталь – Ст3, $[\tau] = 100 \text{ МПа}$, $[\sigma_{зм}] = 280 \text{ МПа}$. Вихідні дані вибрати згідно варіанту таблиця 6.1.

Таблиця 6.1.

Варіанти завдань для визначення необхідної кількості заклепок кріплення розкосу ферми до косинки.

Варіант	Значення розтягуючого зусилля P , кН	Товщина косинки S , см	Діаметр отвору d , мм
1	250	0,5	19
2	260	0,6	20
3	270	0,7	21
4	280	0,8	22
5	290	0,9	23
6	300	1,0	24
7	310	1,1	25
8	320	1,2	26
9	330	1,3	27
10	340	1,4	28
11	350	1,5	29
12	360	1,6	30

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ:

1. Що таке зсув?
2. Що таке поперечна сила?
3. Абсолютний та відносний зсув.
4. Що таке коефіцієнт пропорційності G , одиниці виміру?
5. Що таке зминання?
6. Умова міцності на зсув (зріз).
7. Умова міцності на зминання.

Практичне заняття № 7.

Кручення. Відомості про деформацію кручення. Побудова епюр крутних моментів

Кручення – такий вид деформації при якому в будь-якому поперечному перерізі бруса під дією пари сил виникає тільки крутний момент. Деформація кручення виникне, якщо до прямого бруса в площинах, перпендикулярних до його осі, прикласти пару сил.

Моменти цих пар називають **обертаючими** (якщо брус обертається), і **скручуючими** (якщо брус не обертається). Обертаючий момент позначають через M .

Так як на кручення в основному працюють вали, які обертаються, то вони зазвичай мають круглий або кільцевий переріз. Розглянемо кручення круглого циліндра (рис. 7.1).

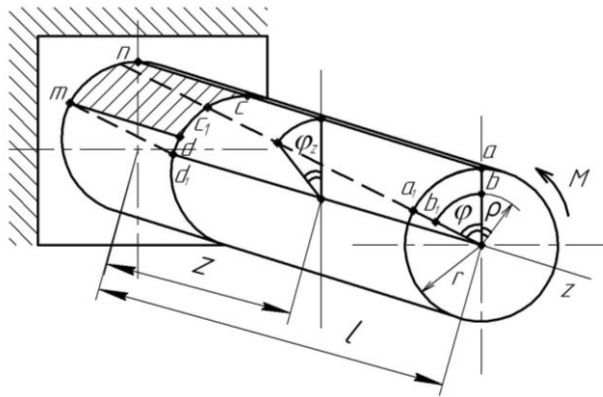


Рис. 7.1. Деформація кручення круглого циліндра з відносним φ_z та повним φ кутом закручування

Візьмемо для кращої наочності гумовий прямий циліндричний брус і жорстко закріпимо один його кінець. Нанесемо на його поверхню сітку ліній, яка складається з твірних і кіл та прикладемо до вільного кінця пару сил, щоб вона діяла в площині перпендикулярній до осі, тобто створимо деформацію кручення.

Внаслідок чого:

1. Вісь циліндричного бруса, яку називають **віссю кручення**, залишиться прямолінійною.
2. Діаметри кіл, нанесених на поверхню циліндра до деформації, під час деформації залишаться такими самими і відстань між колами не зміниться.
3. Твірні циліндра перетворяться у гвинтові лінії.

Для кручення круглого циліндра можна припустити, що радіуси кіл під час деформації залишаються прямими, так як в поперечних перерізах

бруса відсутні поздовжні сили і відстані між перерізами не змінюються. Таким чином, деформація кручення круглого циліндра полягає у повертанні поперечних перерізів одного відносно іншого навколо осі кручення, причому кути їх повороту прямо пропорційні відстаням від закріпленого перерізу. Отже, кут повороту перерізу дорівнює куту закручування частини циліндра, яка знаходиться між даним перерізом і закріпленням.

Повним кутом закручування циліндра називають кут φ (рис. 7.1) повороту кінцевого перерізу.

Відносним кутом закручування φ_0 (рис. 7.1) називають відношення кута закручування φ_z до відстані z даного перерізу від закріплення.

Якщо брус довжиною l має сталий переріз і навантажений крутним моментом на його кінці (тобто має одну ділянку), тоді:

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_z}{z} = \frac{\varphi}{l} = \text{const.}$$

Розглядаючи тонкий шар матеріалу на поверхні бруса, обмежений ділянкою наприклад, $mncd$ (рис. 7.1), бачимо, що ця ділянка при деформації перекошується, приймаючи положення mnc_1d_1 . Очевидно, що при крученні виникає тільки деформація зсуву в результаті обертального руху одного поперечного перерізу відносно іншого. Отже у поперечних перерізах виникають тільки **дотичні внутрішні сили**, які утворюють крутний момент.

Крутний момент є результуючим моментом відносно осі бруса внутрішніх дотичних сил, які діють у поперечному перерізі.

Для наочності розподілу крутних моментів вздовж осі бруса будують **епюри крутних моментів**. Крутний момент у поперечних перерізах бруса визначають методом перерізів. Так як вал який обертається рівномірно, як і нерухомий брус перебуває у рівновазі, то зрозуміло, що внутрішні сили, які виникають у поперечному перерізі, повинні зрівноважувати зовнішні моменти, що діють на розглядувану частину бруса. **Тому, крутний момент у будь-якому поперечному перерізі бруса чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів, прикладених справа або зліва від розглядуваного перерізу.**

Епюри крутних моментів дають змогу визначати небезпечні ділянки, де виникає найбільший крутний момент.

Крутний момент вважатимемо **додатним**, якщо результуючий момент зовнішніх пар, прикладених до розглядуваної частини бруса, буде напрямлений **проти стрілки годинника**, якщо дивитися з боку перерізу, і навпаки.

Задача 1.

Побудувати епюру крутних моментів для трансмісійного вала, зображеного на рис. 7.2. Обертаючі моменти дорівнюють $M_1 = 500H \cdot m$,

$$M_2 = 150H \cdot m, \quad M_3 = 250H \cdot m, \quad M_4 = 100H \cdot m.$$

Розв'язок:

1. Розділимо вал на ділянки (рис. 7.2).

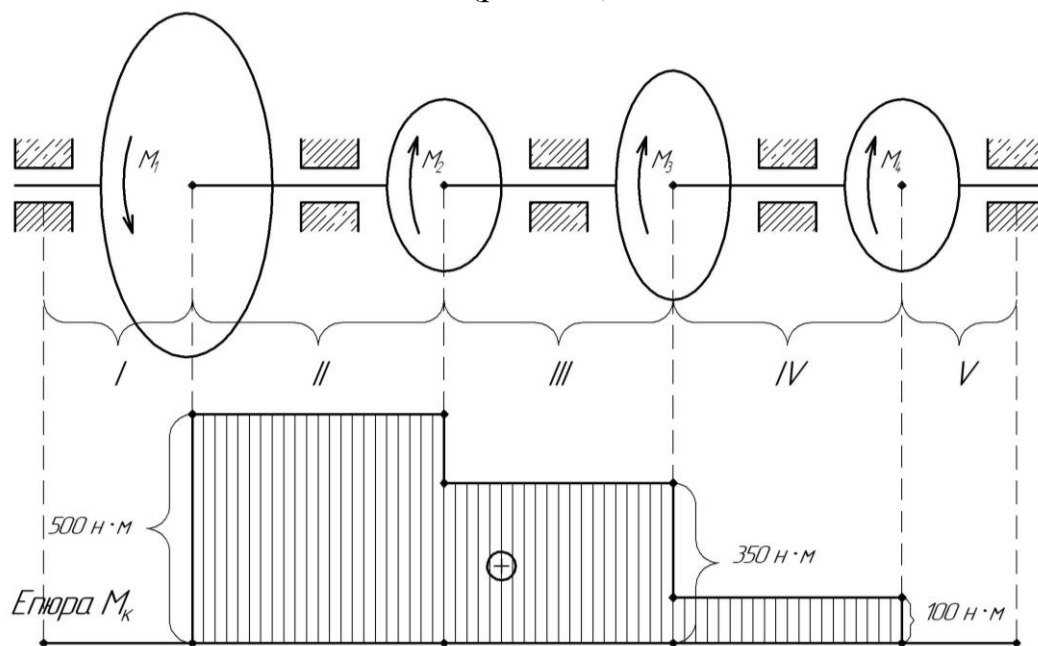


Рис. 7.2. Епюра крутних моментів трансмісійного вала

2. Застосувавши метод перерізів будемо епюру крутних моментів.

3. Врахувавши те, що на першій і п'ятій ділянках крутний момент дорівнює нулю, оскільки обертаючого моменту на цих ділянках немає, проводимо горизонтальну пряму по осі епюри до шківів I, де епюра робить «стрибок», рівний величині обертаючого моменту $M = 500H \cdot m$. Проводимо пряму до шківів II, де прикладений обертаючий момент $M = 150H \cdot m$, після якого епюра знову робить «стрибок», який дорівнює прикладеному обертаючому моменту (використовуємо правило знаків). Аналогічно будемо епюри крутних моментів на інших ділянках.

Необхідно зауважити, що «стрибок» на епюрі крутних моментів завжди чисельно дорівнює величині обертаючого моменту прикладеного в розглядуваному перерізі. З епюри видно, що найбільший крутний момент буде на ділянці II:

$$M_{k \max} = M_{k2} = 500H \cdot m.$$

Наслідком кручення круглого бруса є деформація зсуву, під час якої виникають тільки дотичні напруги τ , які перпендикулярні до радіуса, що сполучає ці точки з віссю бруса. Нормальні напруги у поздовжньому перерізі не виникають, оскільки деформація зсуву виникає не за рахунок поступального, а в результаті обертового руху одного поперечного перерізу відносно іншого, зумовлюється це відсутністю поздовжньої сили.

На рис. 7.1 видно, що абсолютний зсув перерізу волокна a дорівнює дузі aa_1 , перерізу b – дузі bb_1 :

$$\cup aa_1 = r\varphi, \quad \cup bb_1 = \rho\varphi$$

де φ – повний кут закручування, рад;

r – радіус циліндра;

ρ – відстань волокна b від осі циліндра.

Внаслідок того, що радіуси перерізу під час кручення залишаються прямими, то величина абсолютного зсуву перерізу будь-якого волокна прямо пропорційна їх відстані від осі кручення.

Відносний зсув перерізу волокна b :

$$\gamma_\rho = \frac{r\varphi}{l} = \varphi_0 \rho.$$

Застосуємо формулу закону Гука для зсуву:

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\varphi_0 \rho.$$

Звідси виходить, коли $\rho = 0$, то $\tau = 0$, тобто на осі кручення дотичні напруги дорівнюють нулю. Коли $\rho = r$, то $\tau = \tau_{\max}$, тобто дотичні напруги набувають **максимальних значень** у волокнах, які найвіддаленіші від осі кручення:

$$\tau_{\max} = G\varphi_0 r.$$

Так як відносний кут закручування φ_0 – величина стала для даного циліндричного бруса, то дотичні напруги, які виникають внаслідок кручення прямо пропорційні відстані точок перерізу від осі кручення. Епюра розподілу дотичних напруг в перерізі циліндра по радіусу має вигляд трикутника (рис. 7.3). Тому, якщо брус складається з однієї ділянки, тобто має сталий переріз і сталий по довжині крутний момент, то дотичні напруги у даному волокні будуть **однаковими** по всій довжині циліндра.

Розглянемо виведення формул для визначення кута закручування напруг у поперечному перерізі внаслідок дії крутного моменту M_k . Розріжемо брус зображений на рис. 7.1, поперечною площиною на відстані z від закріплення та розглянемо його переріз який зображено на рис. 7.3.

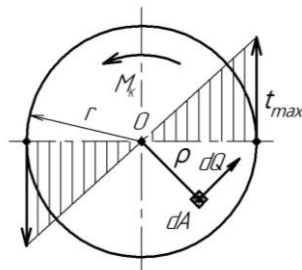


Рис. 7.3. Епюра розподілу напруг вздовж радіуса r перерізу циліндричного бруса

Виділимо в перерізі нескінченно малу площадку dA на відстані ρ від осі бруса. Сила dQ , яка діє на площадку dA , буде перпендикулярна до радіуса та дорівнюватиме:

$$dQ = \tau_\rho dA.$$

Визначимо момент внутрішніх сил відносно осі кручення, тобто крутний момент M_κ :

$$M_\kappa = \int_F dQ \rho = \int_F \tau_\rho dA \rho = \int_F G \varphi_0 \rho dA \rho = G \varphi_0 \int_F \rho^2 dA = G \varphi_0 J_p.$$

З даного виразу визначимо відносний кут закручування:

$$\varphi_0 = \frac{M_\kappa}{(GJ_p)}, \text{ рад.}$$

Повний кут закручування циліндра довжиною l визначатиметься:

$$\varphi = \frac{M_\kappa l}{(GJ_p)}, \text{ рад.}$$

Добуток GJ_p , який стоїть у знаменнику, називають **жорсткістю перерізу при крученні**.

Повний кут закручування круглого циліндра прямо пропорційний крутному моменту, довжині циліндра і обернено пропорційний жорсткості перерізу при крученні. Однак, необхідно зазначити, що для виведення останньої формули застосовується закон Гука, то вона дійсна в межах, коли навантаження і деформація прямо пропорційні.

Слід зауважити, що для циліндричного бруса, який має декілька ділянок, які відрізняються матеріалом, розмірами поперечного перерізу, величиною крутного моменту, повний кут закручування дорівнюватиме алгебраїчній сумі кутів закручування окремих його ділянок:

$$\varphi = \sum \varphi_i.$$

Приведемо формулу для визначення напруг:

$$\tau_\rho = G \varphi_0 \rho = \frac{GM_\kappa \rho}{(GJ_p)} = \frac{M_\kappa \rho}{J_p}.$$

У випадку коли $\rho = r$, напруги матимуть максимальні значення:

$$\tau_{\max} = G \varphi_0 r = \frac{M_\kappa r}{J_p} = \frac{M_\kappa}{(J_p / r)} = \frac{M_\kappa}{W_p},$$

де $W_p = J_p / r$ – **момент опору крученню** або **полярний момент опору**.

Момент опору крученню дорівнює відношенню полярного моменту інерції до радіуса перерізу.

Одиниця виміру моменту опору крученню:

$$[W_p] = \frac{[J_p]}{[r]} = \text{м}^3.$$

Таким чином напруги і деформації кручення круглого циліндра обчислюють за формулами:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_p}, \quad \varphi = \frac{M_{\kappa} l}{(GJ_p)}$$

Приведемо визначення моменту опору крученню для круглого і кільцевого перерізів, використавши формули визначення їх моментів інерції J_p .

1. Круг діаметра d :

$$W_p = \frac{J_p}{(0,5d)} = \frac{\pi d^4}{(32 \cdot 0,5d)} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3.$$

2. Кільце розмірами $D \times d$:

$$W_p = \frac{J_p}{(0,5D)} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{(32 \cdot 0,5D)} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{(16D)} \approx \frac{0,2(D^4 - d^4)}{D}.$$

Слід зазначити, що полярний момент інерції кільцевого перерізу можна визначити як різницю моментів інерції великого та малого кругів, то момент опору крученню не можна визначати як різницю моментів опору цих кругів.

Умова міцності бруса при крученні зумовлюється тим, що найбільша дотична напруга, яка виникає у ньому, не повинна перевищувати допустиму. Формула для розрахунку має вигляд:

$$\tau = \frac{M_{\kappa}}{W_p} \leq [\tau].$$

Задача 2.

Побудувати епюру крутних моментів для вала (рис. 7.4), якщо шків 1 отримує від двигуна потужність $N_1 = 52 \text{ кВт}$ при частоті обертання вала $n = 240 \text{ об/хв}$, з інших шківів знімають потужності $N_2 = 15 \text{ кВт}$, $N_3 = 17 \text{ кВт}$ і $N_4 = 20 \text{ кВт}$. З умови міцності визначити діаметр вала, прийнявши $[\tau_{\kappa}] = 30 \text{ МПа}$.

Розв'язок:

1. Визначаємо обертальні моменти, які передають 1, 2 і 3 шківів:

$$M_1 = \frac{N_1}{\omega} = \frac{30N_1}{\pi n} = \frac{30 \cdot 52 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 240} = 2070 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_2 = \frac{N_2}{\omega} = \frac{30N_2}{\pi n} = \frac{30 \cdot 15 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 240} = 597 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_3 = \frac{N_3}{\omega} = \frac{30N_3}{\pi n} = \frac{30 \cdot 17 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 240} = 677 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_4 = \frac{N_4}{\omega} = \frac{30N_4}{\pi n} = \frac{30 \cdot 20 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 240} = 796 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

2. Розбиваємо вал на ділянки (рис. 7.4). Проводимо поперечні перерізи на ділянках бруса і визначаємо крутні моменти:

$$M_{z1} = -M_1 = -2070 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_{z2} = M_1 - M_2 = -2070 + 597 = -1473 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_{z3} = -M_1 + M_2 + M_3 = -2070 + 597 + 677 = -796 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

3. Будемо епюру крутних моментів (рис. 7.4). З епюри крутних моментів видно, що найбільший крутний момент $M_{z\max} = M_1 = -2070 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

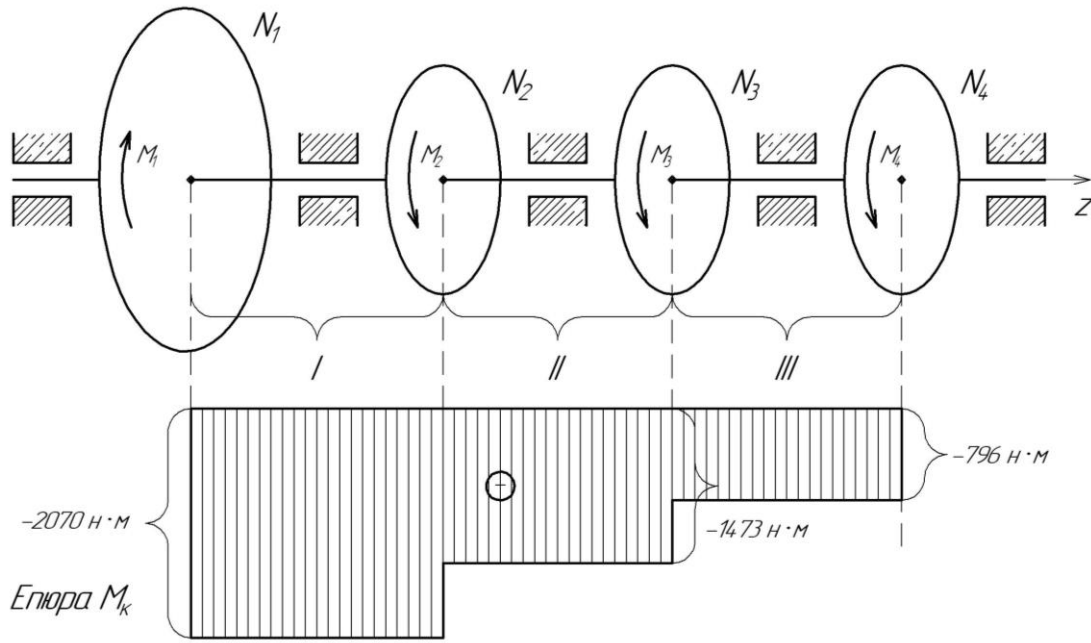


Рис. 7.4. Епюра крутних моментів M_k трансмісійного вала

5. З умови міцності на кручення визначаємо необхідний діаметр вала в небезпечному перерізі:

$$\tau = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau], W_p = \frac{\pi d^3}{16}, \quad \text{звідки:}$$

$$d^3 = \frac{16M_k}{\pi[\tau_k]}, d = \sqrt[3]{\frac{16M_{z\max}}{\pi[\tau_k]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2070 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм}}{3,14 \cdot 30 \text{ Н} / \text{мм}^2}} \approx 70 \text{ мм}.$$

Завдання:

Для заданого вала побудувати епюру крутних моментів. З умови міцності визначити його діаметр. Вихідні дані вибрати згідно варіанту (рис. 7.5 – 7.16), таблиця 7.1.

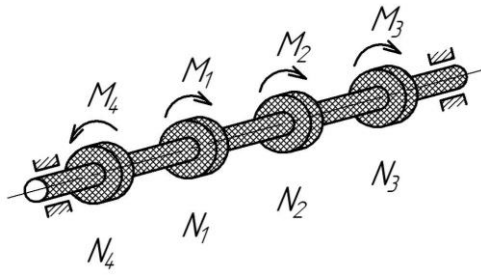


Рис. 7.5.

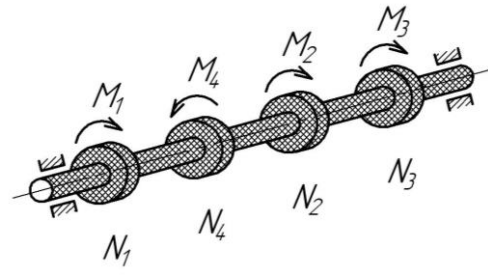


Рис. 7.6.

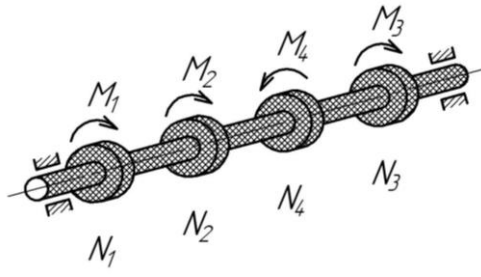


Рис. 7.7.

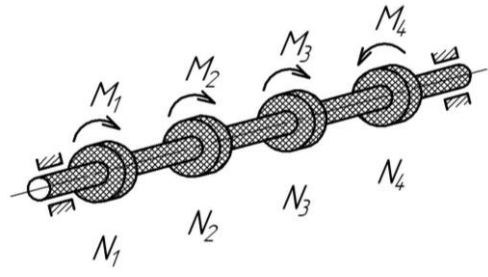


Рис. 7.8.

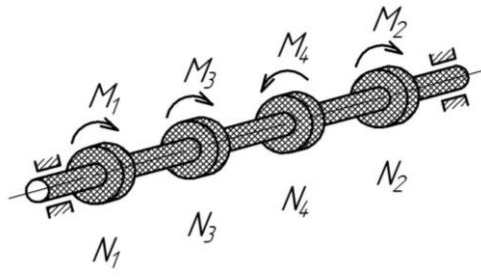


Рис. 7.9.

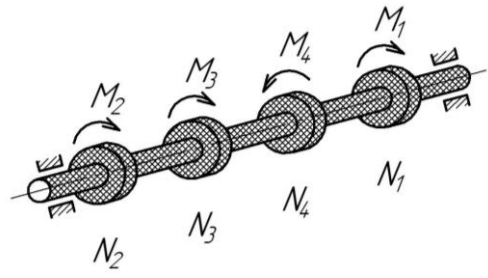


Рис. 7.10.

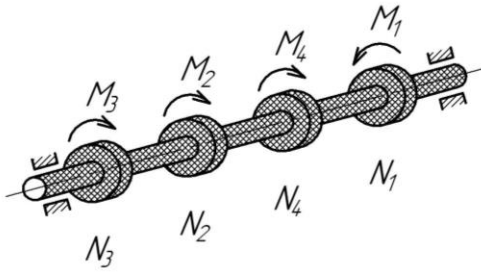


Рис. 7.11.

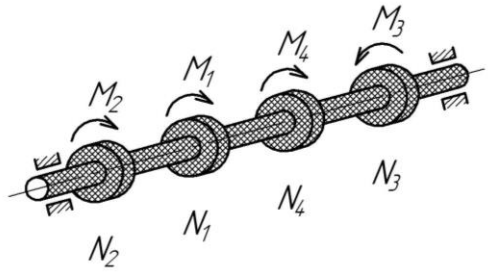


Рис. 7.12.

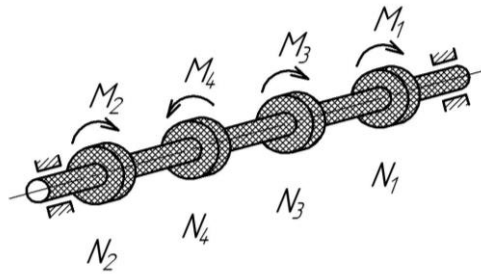


Рис. 7.13.

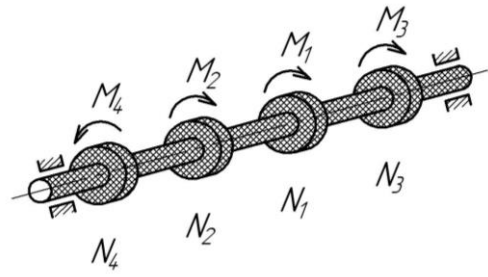


Рис. 7.14.

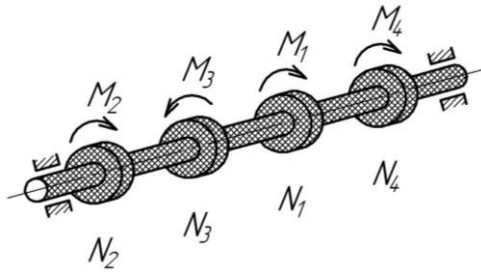


Рис. 7.15.

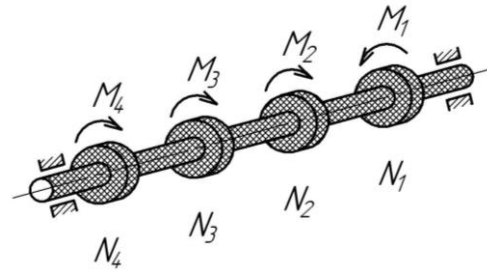


Рис. 7.16.

Таблиця 7.1.

Варіанти завдань для побудови епюр крутних моментів та визначення діаметра вала.

Варіант	Потужність, <i>кВт</i>				Частота, <i>об/хв</i>	Міцність, <i>МПа</i>
	<i>N₁</i>	<i>N₂</i>	<i>N₃</i>	<i>N₄</i>		
1	55	15	23	17	250	25
2	57	17	15	25	260	30
3	59	19	23	17	270	35
4	61	21	30	10	210	40
5	63	13	31	19	220	45
6	65	19	32	14	230	27
7	67	21	27	19	280	32
8	69	19	24	26	290	37
9	71	31	21	19	300	42
10	73	17	23	33	200	27
11	75	24	30	21	320	21
12	77	27	21	29	310	23

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ:

1. Що називають крученням?
2. Що називають повним та відносним кутом закручування?

Формули для їх розрахунку.

3. Що називають жорсткістю перерізу при крученні?
4. Момент опору крученню, одиниці виміру.

Практичне заняття № 8.

Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів

Для побудови епюр поперечних сил та згинальних моментів керуються наступними правилами:

1. Епюру поперечних сил та згинальних моментів будують на стиснутому волокні, тобто додатні поперечні сили (і додатні згинальні моменти) відкладають вгору від осі, а від'ємні вниз.

2. Використовують принцип пом'якшених граничних умов, вважають:

- в перерізі, в місці прикладання зосередженої сили значення поперечної сили змінюється стрибкоподібно, причому стрибок дорівнює модулю цієї сили;

- в перерізі, в місці прикладання пари сил (моменту), значення згинального моменту змінюється стрибкоподібно причому стрибок дорівнює моменту пари.

3. Правильність побудови епюр перевіряється за допомогою теореми Журавського.

З математики відомо, коли $M_{z_2} = f(z)$, то $\frac{dM_{z_2}}{dz} = tg\alpha$, де α – кут, який утворює дотична до епюри моментів з додатним напрямом осі z . Відповідно теоремі Журавського:

$$Q = \frac{dM_{z_2}}{dz} = tg\alpha.$$

Масштаби M_{z_2} і z чисельно дорівнюють одиниці, тому:

- кут α гострий, то $Q > 0$ і згинальний момент на ділянці **збільшується**;

- кут α тупий, то $Q < 0$ і згинальний момент на ділянці **зменшується**;

- кут $\alpha = 0$ на всій ділянці, то $M_{z_2} = const, Q = 0$ і на цій ділянці виникає **чистий згин**;

- кут $\alpha = 0$ в одній точці епюри моментів, то в даному перерізі $Q = 0$, а згинальний момент має **екстремальне значення** (максимум або мінімум).

Якщо в перерізі, де на епюрі поперечних сил є стрибок, то на епюрі згинальних моментів буде різка зміна напрямку дотичної. Для того, щоб правила знаків для поперечних сил і згинальних моментів не суперечили знакам, які відповідають теоремі Журавського, для перевірки епюри вісь z необхідно завжди уявно направляти зліва направо.

4. На ділянці, де немає розподіленого навантаження, **епюра поперечних сил** – пряма, паралельна осі, **епюра згинальних моментів** – похила пряма.

5. На ділянці, де прикладено рівномірно розподілене навантаження, **епюра поперечних сил** – похила пряма, **епюра згинальних моментів** – парабола.

6. На кінці балки згинальний момент дорівнює нулю, якщо там не прикладено пару сил.

7. Під час побудови епюр для консольних балок початок координат зручно брати на кінці консолі, що переважно дає змогу обійтися без визначення опорних реакцій. У перерізі, який відповідає закріпленню, **поперечна сила** дорівнює **реактивній силі**, а **згинальний момент** – **реактивному моменту**.

Задача 1.

Для заданої консольної балки (рис. 8.1) побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів. З умови міцності підібрати необхідний номер двотаврової балки, прийнявши значення $[\sigma]=160\text{МПа}$.

Розв'язок:

1. Для побудови епюр поперечних сил та згинальних моментів ділимо балку на ділянки OB, BC, CD по відповідним точкам O, B, C, D (рис. 8.1). Побудову епюр почнемо з вільного кінця балки, що дозволяє не визначати опорні реакції.

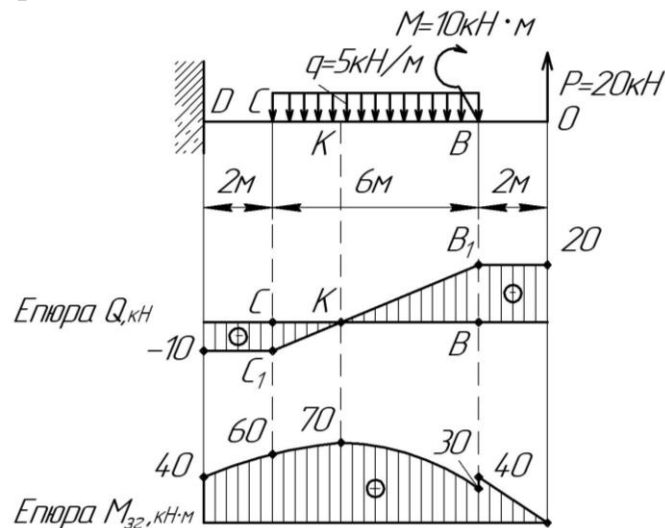


Рис. 8.1. Епюра поперечних сил та згинальних моментів балки

2. Будуємо епюру поперечних сил Q (рис. 8.1).

перша ділянка

На вільному кінці балки (точка O) прикладено зосереджену силу P . Поперечна сила в цій точці зліва дорівнює:

$$Q_O = -P = -20\text{кН}.$$

Це значення зберігається по всій довжині ділянки OB .

друга ділянка

Наявність зосередженої пари сил в точці B на епюрі поперечних сил не відображається.

На ділянці BC діє поперечна сила і розподілене навантаження які змінюються за лінійним законом. Для побудови цієї частини епюри необхідно знати два значення поперечної сили Q , тому:

$$Q_B = P = 20\text{кН},$$

$$Q_C = P - q \cdot CB = -0\text{кН} - 5\text{кН/м} \cdot 6\text{м} = -10\text{кН}.$$

третья ділянка

На ділянці CD залишається діяти поперечна сила і розподілене навантаження, тоді:

$$Q_D = P - q \cdot CB = 20\text{кН} - 5\text{кН/м} \cdot 6\text{м} = -10\text{кН}.$$

За отриманими результатами будуємо епюру поперечних сил (рис. 8.1).

3. Будуємо епюру згинальних моментів $M_{зг}$ (рис. 8.1).

перша ділянка

На вільному кінці балки (точка O ,) зосередженої пари сил не прикладено, тому:

$$M_{згO} = 0.$$

На ділянці OB згинальний момент створюється поперечною силою P , який змінюється за лінійним законом похила пряма.

Визначаємо згинальний момент в перерізі, нескінченно близькому (справа) від точки B :

$$M_{згB}^{PP} = P \cdot OB = 20\text{кН} \cdot 2\text{м} = 40\text{кН} \cdot \text{м}.$$

друга ділянка

На початку ділянки BC стрибок вниз відповідає моменту M прикладеного в точці B :

$$M_{згB}^{MB} = P \cdot OB - M = -20\text{кН} \cdot 2\text{м} - 10\text{кН} \cdot \text{м} = 30\text{кН} \cdot \text{м}.$$

На ділянці BC є рівномірно розподілене навантаження q , тому епюра згинального моменту буде мати вигляд параболи, екстремальне значення якої буде набувати при умові, що $Q = 0$, тобто в точці K . Отже, в перерізі балки (точка K) згинальний момент дорівнює алгебраїчній сумі моментів створених від рівномірно розподіленого навантаження q ділянки KB згинального моменту M та зосередженої сили P . Визначимо абсцису точки K використавши подібність трикутників CC_1K і BB_1K :

$$\frac{CC_1}{BB_1} = \frac{CB - KB}{KB}, \frac{CC_1}{BB_1} = \frac{CB}{KB} - 1, \frac{CC_1}{BB_1} + 1 = \frac{CB}{KB}, \frac{CC_1 + BB_1}{BB_1} = \frac{CB}{KB},$$
$$KB = \frac{BB_1 \cdot CB}{CC_1 + BB_1} = \frac{20\text{кН} \cdot 6\text{м}}{10\text{кН} + 20\text{кН}} = 4\text{м}.$$

$$M_{зк} = P \cdot OK - M - \frac{q(KB)^2}{2} = 20кН \cdot 6м - 10кН \cdot м - \frac{5кН / м \cdot (4м)^2}{2} = 70кН \cdot м.$$

Визначаємо згинальний момент в точці C , який буде дорівнювати алгебраїчній сумі моментів створених від рівномірно розподіленого навантаження q ділянки CB згинального моменту M та зосередженої сили P :

$$M_{зс} = P \cdot OC - M - \frac{q(CB)^2}{2} = 20кН \cdot 8м - 10кН \cdot м - \frac{5кН / м \cdot (6м)^2}{2} = 60кН \cdot м.$$

третья ділянка

На ділянці CD згинальний момент змінюється за лінійним законом.

В перерізі балки (точка D) згинальний момент буде дорівнювати алгебраїчній сумі моментів створених від зосередженої сили P , згинального моменту M та рівномірно розподіленого навантаження q

$$M_{зд} = P \cdot OD - M - q \cdot CB \cdot (0,5CB + CD) = 20кН \cdot 10м - 10кН \cdot м - 5кН / м \cdot 6м \cdot (3м + 2м) = 40кН \cdot м.$$

Епюра згинальних моментів зображена на (рис. 8.1), максимальне значення якої набуває в точці K , $M_{з\max} = 70кН \cdot м$.

4. Розраховуємо момент опору балки з умови міцності на згин:

$$W_x = \frac{M_{з\max}}{[\sigma]} = \frac{70 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{мм}}{160 \text{ Н} / \text{мм}^2} = 0,4375 \cdot 10^6 \text{ мм}^3.$$

Підбираємо двотавровий переріз згідно ГОСТ 8239-72, для якого:

$$W_x = 0,4375 \cdot 10^6 \text{ мм}^3, A_{\text{от}} = \text{мм}^2.$$

Завдання:

Для заданої консольної балки, навантаженої зосередженою силою P , парою сил з моментом M та рівномірно розподіленим навантаженням q побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів. З умови міцності підібрати необхідний номер двотаврової балки, прийнявши значення $[\sigma]=160\text{МПа}$. Вихідні дані вибрати згідно варіанту (рис. 8.2 – 8.13), таблиця 8.1.

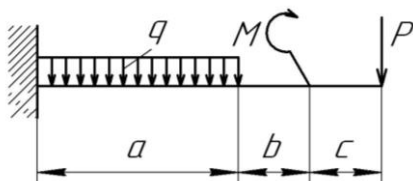


Рис. 8.2.

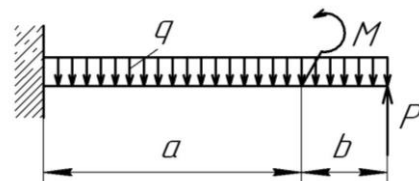


Рис. 8.3.

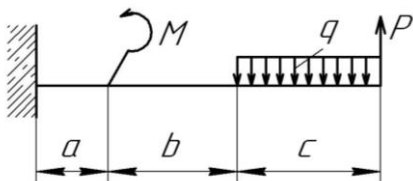


Рис. 8.4.

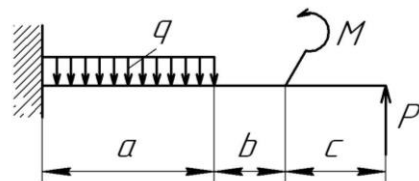


Рис. 8.5.

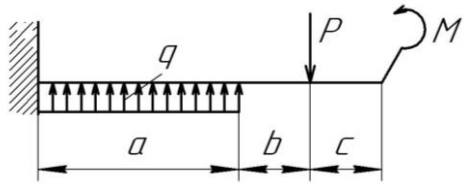


Рис. 8.6.

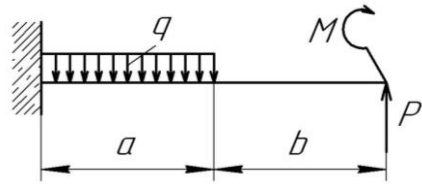


Рис. 8.7.

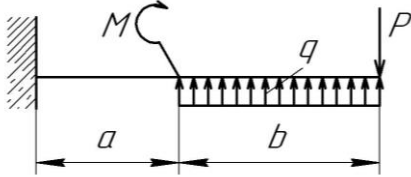


Рис. 8.8.

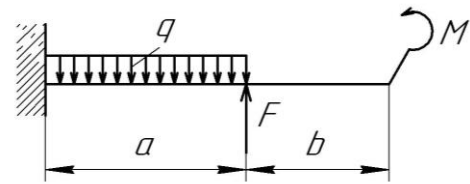


Рис. 8.9.

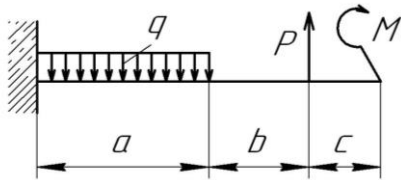


Рис. 8.10.

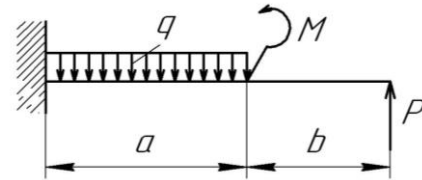


Рис. 8.11.

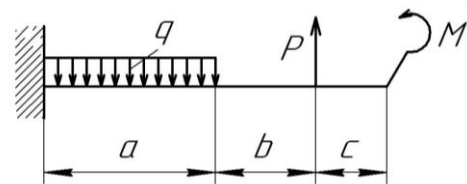


Рис. 8.12.

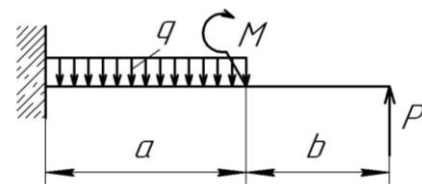


Рис. 8.13.

Таблиця 8.1.

Варіанти завдань для побудови епюр поперечних сил та згинальних моментів та визначення розмірів перерізів балок.

Варіант	Значення сили P , кН	Пара сил з моментом M , кН·м	Рівномірно розподілене навантаження q , кН/м	Відстань, м		
				a	b	c
1	30	12	1,5	4	1	1
2	15	10	1	4	2	-
3	25	21	2	1	2	2
4	20	16	1,5	3	1	2
5	35	25	1	4	1	1
6	28	17	2	3	3	-
7	45	14	1,5	2	4	-
8	34	23	1	4	2	-
9	17	27	2	3	2	1
10	37	11	15	4	2	-
11	23	15	1	3	2	1
12	43	30	2	4	2	-

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ:

1. Правила побудови епюр поперечних сил.
2. Правила побудови епюр згинальних моментів.
3. Послідовність побудови епюр поперечних сил та згинальних моментів.

Практичне заняття № 9.

Чистий згин прямого бруса. Згинальний момент і поперечна сила. Диференціальні залежності при згині. Нормальні напруги, умова міцності

Чистим згином вважається такий вид деформації, при якому в будь-якому поперечному перерізі бруса виникає тільки згинальний момент.

При чистому згині в поперечних перерізах бруса виникають тільки нормальні напруги розтягу і стиску, які нерівномірно розподілені по перерізу. При чому, волокна, які лежать на опуклому боці, **розтягуються**, а ті, що лежать на вгнутому боці – **стискаються**.

Нейтральною віссю бруса називають лінію перетину нейтрального шару з площиною поперечного перерізу. На нейтральній осі нормальні напруги **дорівнюють нулю**.

Згин, при якому в поперечному перерізі балки діють згинальний момент і поперечна сила, називають поперечним.

У випадку плоского поперечного згину в кожному поперечному перерізі балки із шести можливих внутрішніх силових факторів виникають тільки два - згинальний момент $M_{32} \neq 0$ і поперечне зусилля $Q \neq 0$.

Розглянемо два окремих випадки.

1. До балки прикладено дві однакові за величиною і протилежні за знаком пари сил (рис. 9.1). Розглядаючи рівновагу лівої або правої частини балки від перерізу 1–1, видно, що в усіх поперечних перерізах виникає тільки згинальний момент M_{32} , який дорівнює зовнішньому моменту. Цей випадок є випадком чистого згину. Необхідно звернути увагу на те, що згинальний момент має різний напрям для лівої та правої частини балки, тому правила знаків статки для визначення знака згинального моменту **непридатні**.

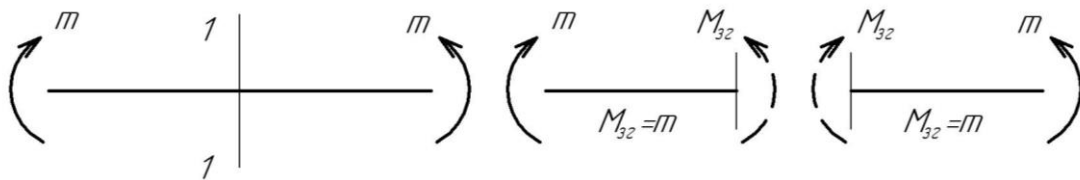


Рис. 9.1. Напрямок згинального моменту в перерізі 1–1

2. До балки прикладено активні і реактивні сили, перпендикулярні до осі (рис. 9.2). Розглядаючи рівновагу частин балки, розміщених зліва і справа від перерізу, видно, що в поперечних перерізах повинні діяти згинальний момент M_{32} і поперечна сила Q . В даному випадку в точках поперечного перерізу діють не тільки нормальні напруги, які відповідають

згинальному моменту, а й дотичні напруги, які відповідають поперечній силі.

Поперечна сила є рівнодіюча внутрішніх дотичних сил, що діють у поперечному перерізі балки. Звернемо увагу на те, що поперечна сила має протилежний напрям для лівої та правої частини балки, тому правила знаків статyki для визначення знака поперечної сили **непридатні**.

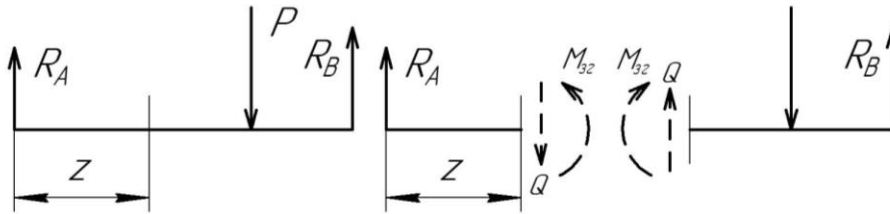


Рис. 9.2. Напрямок поперечної сили та згинального моменту в перерізі z

Для балки, яка перебуває у рівновазі під дією плоскої системи сил, алгебраїчна сума моментів усіх активних і реактивних сил відносно будь-якої точки дорівнює нулю, тому сума моментів зовнішніх сил, які діють на балку зліва від перерізу, чисельно дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил, які діють на балку справа від перерізу.

Згинальний момент в перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно центра ваги перерізу всіх зовнішніх сил, які діють справа або зліва від перерізу.

Для балки, яка перебуває у рівновазі під дією плоскої системи сил, перпендикулярних до осі (тобто системи паралельних сил), алгебраїчна сума всіх зовнішніх сил дорівнює нулю, тобто сума зовнішніх сил, які діють на балку зліва від перерізу, чисельно дорівнює сумі сил, які діють на балку справа від перерізу

Поперечна сила в перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі всіх зовнішніх сил, які діють зліва або справа від перерізу. Так, як правила знаків статyki для встановлення знаків згинального моменту і поперечної сили **непридатні**, то встановимо для них наступні правила знаків:

- зовнішнє навантаження намагається зігнути балку опуклістю вниз – **згинальний момент додатній** (рис. 9.3);



Рис. 9.3. Правило знаків для згинального моменту:

а) додатній б) від'ємний

- зовнішнє навантаження намагається зігнути балку опуклістю вгору – **згинальний момент від’ємний** (рис. 9.3);
- сума зовнішніх сил, які діють зліва від перерізу, дає рівнодіючу, направлену вгору – **поперечна сила додатна** і навпаки (рис. 9.4);



Рис. 9.4. Правило знаків для поперечної сили:
а) додатній б) від’ємний

- для частини балки, розміщеної справа від перерізу, знаки поперечної сили будуть протилежними (рис. 9.4).

Для визначення опорних реакцій користуються правилами знаків статички, а для визначення знаків згинального моменту і поперечної сили правилами знаків опору матеріалів.

Згинальний момент, поперечну силу та інтенсивність розподіленого навантаження зв’язують **диференціальні залежності**, основу яких покладає теорема Журавського, названа так за ім’ям визначного російського інженера-мостобудівника Д. І. Журавського (1821 – 1891 рр.) Ця теорема звучить так: поперечна сила дорівнює першій похідній від згинального моменту по абсцисі перерізу балки.

Для виведення зазначеної теореми розглянемо балку зображену на рис. 9.5.

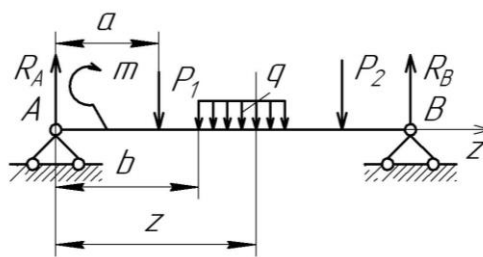


Рис. 9.5. Розрахункова схема балки для виведення теореми Журавського

Початок координат позначимо на лівому кінці балки, напрям осі z візьмемо праворуч. На одній із ділянок балки проведемо переріз з поточною координатою z та запишемо рівняння згинального моменту:

$$M_{z_2} = R_A z + m - P_1(z - a) + q(z - b)^2 / 2.$$

Продиференціюємо даний вираз по координаті z , тоді:

$$\frac{dM_{z_z}}{dz} = \frac{R_A z}{dz} - \frac{P_1 z}{dz} + \frac{q(z^2 - 2zb + b^2)}{dz} = R_A - P_1 + q(z - b).$$

Вираз, який стоїть у правій частині даної рівності, є поперечна сила Q в перерізі z , тоді матимемо:

$$\frac{dM_{z_z}}{dz} = Q.$$

теорему доведено.

Якщо рівняння згинального моменту (для ділянок з рівномірно розподіленим навантаженням) продиференціювати вдруге, отримаємо:

$$\frac{d^2 M_{z_z}}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = q.$$

Друга похідна від згинального моменту або перша похідна від поперечної сили за абсцисою перерізу балки дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження.

З вищої математики відомо, що за законом другої похідної функції можна судити про опуклість або вгнутість кривої, тому це правило слід використовувати для побудови епюр.

Як зазначалось раніше при чистому згині в поперечних перерізах балки виникають тільки нормальні напруги розтягу і стиску. Для визначення розподілу даних напруг у поперечному перерізі, розглянемо деформації волокон балки.

Розглянемо ділянку балки, яка підлягає деформації чистого згину. За допомогою двох поперечних перерізів AB і CD виділимо елемент балки нескінченно малої довжини dx , (рис. 9.6). радіус кривизни нейтрального шару позначимо через ρ .

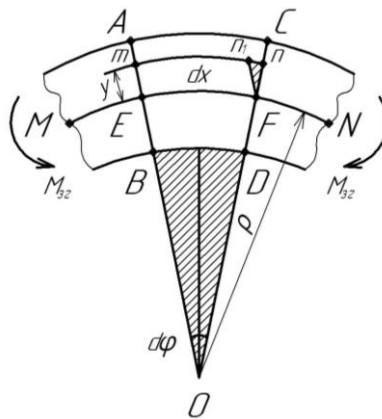


Рис. 9.6. Ділянка балки, яка зазнає деформації згину

Розглянемо шар волокон mn , який знаходиться на відстані y від нейтрального шару MN , причому перерізи AB і CD залишаються плоскими та повертаються на кут $d\phi$. Довжина шару волокон mn є

результатом видовження ділянки dx нейтрального шару на величину mn_1 , отже $mn_1 = dx$.

Зважаючи на малу відстань dx , заштриховані трикутники вважатимемо прямолінійними ($n_1 F \parallel mE$) та подібними.

Розглянемо відносне видовження волокна dx двома способами.

У першому випадку відносне видовження волокна dx дорівнюватиме

$$\varepsilon = (mn - mn_1) / mn_1.$$

Однак, $mn = (\rho + y)d\varphi$, і $mn_1 = dx$, тому:

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)d\varphi - dx}{dx}. \quad (9.1)$$

Волокна нейтрального шару dx під час деформації не змінюють своєї довжини, тоді:

$$dx = \rho d\varphi. \quad (9.2)$$

Підставивши (9.2) у (9.1) і скоротивши на $d\varphi$ матимемо:

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}.$$

У другому випадку відносне видовження волокна dx можна визначити використавши подібність трикутників $\triangle OEF$ і $\triangle Fmn_1$.

З подібності цих трикутників маємо:

$$\frac{mn_1}{dx} = \frac{y}{\rho}.$$

Так, як ліва частина цієї рівності є відносним видовженням, $mn_1 / dx = \varepsilon$, то $\varepsilon = y / \rho$.

Використавши закон Гука для розтягу і стиску $\sigma = E\varepsilon$, отримаємо:

$$\sigma = \frac{Ey}{\rho}.$$

З формули видно, що чим більша відстань y (відстань волокон від нейтрального шару) тим більшими будуть нормальні напруги, і навпаки.

Зазначена формула для розрахунку нормальних напруг незручна, так як до неї входить радіус кривизни нейтрального шару. Для виведення формули, яка зв'яже нормальні напруги і згинальний момент, використаємо метод перерізів і розглянемо рівновагу частини балки, що зображена на рис. 9.7.

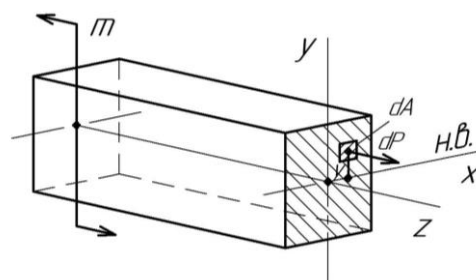


Рис. 9.7. Частина балки, до якої прикладений зовнішній момент m

В поперечному перерізі балки виділимо нескінченно малу площадку dA , у межах якої нормальні напруги σ вважатимемо сталими, тоді нормальна сила dP , яка діє на площадку dA , дорівнюватиме

$$dP = \sigma dA.$$

Складемо два рівняння рівноваги

$$1. \sum Z = 0; \int_A dP = 0, \text{ тоді:}$$

$$\int_A \sigma dA = \int_A \frac{E y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0.$$

E, ρ – для даного перерізу величини сталі, тому їх винесено за знак інтеграла. Так, як E і ρ не дорівнюють нулю, тоді

$$\int_A y dA = 0.$$

Даний інтеграл є статичним моментом площі перерізу відносно осі x , тобто нейтральної осі. Те, що він дорівнює нулю, означає, що під час згину **нейтральна вісь проходить через центр ваги площі поперечного перерізу.**

$$2. \sum M_x = 0; -m + \int_A y dP = 0.$$

У випадку чистого згину згинальний момент дорівнює зовнішньому моменту $M_{32} = m$, тоді:

$$M_{32} = \int_A y dP = \int_A y \sigma dA = \int_A y \frac{E y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA, \text{ тоді:}$$

$$M_{32} = \frac{EJ}{\rho},$$

де

$J = \int_A y^2 dA$ – момент інерції поперечного перерізу відносно нейтральної осі;

EJ – жорсткість перерізу при згині.

Так, як у випадку чистого згину балки сталого перерізу $M_{32} = const$ і $J = const$, тоді:

$$\rho = \frac{EJ}{M_{32}} = const.$$

Тому, зігнута вісь такої балки є дугою кола.

Значення радіуса кривизни підставимо в формулу для обчислення нормальних напруг, отримаємо:

$$\sigma = \frac{E y}{\rho} = \frac{E y}{EJ / M_{32}} = \frac{M_{32} y}{J}.$$

Максимальні значення нормальних напруг будуть там, де волокна **найбільш віддалені від нейтральної осі**, тому:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{32} y_{\max}}{J} = \frac{M_{32}}{J / y_{\max}} = \frac{M_{32}}{W},$$

де

$W = J / y_{\max}$ – момент опору деформації згину (або осьовий момент опору).

Момент опору деформації згину є відношення осьового моменту інерції поперечного перерізу відносно нейтральної осі до відстані від цієї осі до найбільш віддаленого волокна.

Одиниця виміру моменту опору згину:

$$[W] = \frac{[J]}{[y_{\max}]} = \text{м}^3.$$

Отже, найбільші нормальні напруги під час деформації чистого згину визначаються за формулою:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{32}}{W}.$$

Зазначена формула подібна до формул для розрахунку напруг розтягу, стиску, зсуву, та кручення.

Розрахункова формула на міцність у випадку згину (умова міцності балки для випадку згину) трактує, – максимальна напруга в небезпечному перерізі не повинна перевищувати допустиму.

Розрахункова формула на міцність у випадку згину має вигляд:

$$\sigma = \frac{M_{32 \max}}{W} \leq [\sigma]$$

Нормальна напруга в поперечному перерізі, розраховується за формулою $\sigma_{\max} = M_{32 \max} / W$, не повинна перевищувати допустиму. Допустиму нормальну напругу у випадку згину беруть такою самою, як для розтягу і стиску.

Приведемо моменти опору деформації згину найбільш поширених перерізів.

1. Прямокутник $b \times h$ (рис. 9.8):

$$W = \frac{J}{y_{\max}} = \frac{bh^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6}.$$

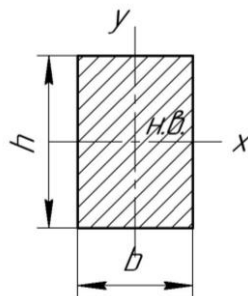


Рис. 9.8. Поперечний переріз балки з розмірами $b \times h$

Для квадрата із стороною, a :

$$W = \frac{a^3}{6}.$$

2. Круг діаметром d :

$$W = \frac{\pi d^4}{64} : \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3.$$

3. Кільце розміром $D \times d$ відносно діаметрів x і y :

$$W = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) : \frac{D}{2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} \approx 0,1 \frac{D^4 - d^4}{D}.$$

Слід зазначити, що момент опору кільцевого перерізу не можна розраховувати як різницю моментів опорів великого і малого кругів.

Дотичні напруги деформації згину напруги, які виникають в поперечних перерізах балки та спричиняють деформацію зсуву.

Відповідно до закону парності подібні напруги також виникають і в поздовжніх перерізах, паралельних нейтральному шару. Зазначене підтверджується появою в дерев'яних балках при поперечному згині поздовжніх тріщин.

Приступимо до виведення формули обчислення дотичних напруг поперечного згину балок прямокутного перерізу.

Розглянемо балку прямокутного перерізу розмірами $b \times h$ (рис. 9.9).

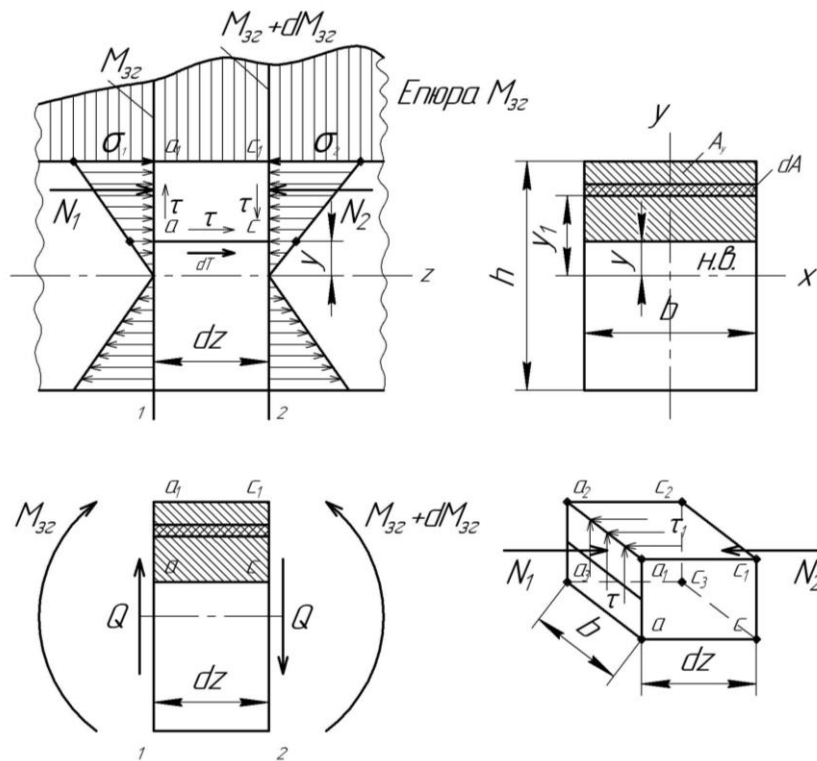


Рис. 9.9. Поперечний переріз балки з розмірами $b \times h \times dz$

Нехай в поперечному перерізі 1 діє згинальний момент M_{3z} , а в поперечному перерізі 2, розміщеному на відстані dz від першого, – згинальний момент $M_{3z} + dM_{3z}$. На відстані y від нейтральної осі проведемо поздовжній переріз ac і розглянемо рівновагу елементарного паралелепіпеда $acc_3a_3a_1c_1c_2a_2$ з розмірами $b \times dz \times \left(\frac{h}{2} - y\right)$.

Введемо два припущення про характер розподілу дотичних напруг в балках прямокутного перерізу:

- 1) τ скрізь паралельні Q ;
- 2) у всіх точках перерізу на відстані ($y = const$) τ однакові по всій ширині і залежать тільки від відстані точки від нейтральної осі.

Рівнодіючу нормальних внутрішніх сил, що діють на грані aa_1 , позначимо N_1 , а сил, які діють на грані cc_1 , – N_2 . Змінні нормальні напруги цих граней позначимо відповідно σ_1, σ_2 .

У поперечному перерізі балки виділемо нескінченно вузьку смужку dA , яка буде знаходитись на змінній відстані y_1 від нейтральної осі, тоді:

$$N_1 = \int_{A_y} \sigma_1 dA = \int_{A_y} \frac{M_{3z} y_1}{J} dA = \frac{M_{3z}}{J} \int_{A_y} y_1 dA,$$

$$N_2 = \int_{A_y} \sigma_2 dA = \int_{A_y} \frac{(M_{3z} + dM_{3z}) y_1}{J} dA = \frac{M_{3z} + dM_{3z}}{J} \int_{A_y} y_1 dA.$$

Враховуючи те, що значення $\int_{A_y} y_1 dA$; є статичним моментом заштрихованої площі A_y перерізу балки відносно нейтральної осі, то вище приведені вирази приймуть вигляд:

$$N_1 = \frac{M_{3z}}{J} S, \quad (9.3)$$

$$N_2 = \frac{(M_{3z} + dM_{3z})}{J} S. \quad (9.4)$$

З врахуванням того, що розмір dA грані $a_1c_1c_2a_2$ даного паралелепіпеда малий, можна вважати, що τ_1 рівномірно розподілені по грані $a_1c_1c_2a_2$ та створюють зусилля:

$$dT = \tau_1 b dx = \tau b dx. \quad (9.5)$$

Складемо умову рівноваги паралелепіпеда $acc_3a_3a_1c_1c_2a_2$

$$Z = 0; \quad N_1 + dT - N_2 = 0, \text{ тоді:}$$

$$dT = N_2 - N_1. \quad (9.6)$$

Підставивши у (9.6) вирази (9.3) і (9.4), а (9.6) у (9.5) отримаємо:

$$\tau b dx = \frac{(M_{3z} + dM_{3z})}{J} S - \frac{M_{3z}}{J} S, \text{ звідки:}$$

$$\tau = \frac{dM_{3z} S}{b dx J}.$$

Враховуючи теорему Журавського $\frac{dM_{3z}}{dz} = Q$ отримаємо:

$$\tau = \frac{QS}{bJ}.$$

Дана формула вперше отримана Д. І. Журавським та має його назву, **дотичні напруги в поперечному перерізі балки дорівнюють добутку поперечної сили Q на статичний момент S відносно нейтральної осі частини перерізу, яка лежить вище від розглядуваного шару волокон, поділеному на момент інерції J усього перерізу відносно нейтральної осі і на ширину b розглядуваного шару волокон.**

Визначимо закон розподілу дотичних напруг для балки прямокутного перерізу (рис. 9.10) для шару волокон ac

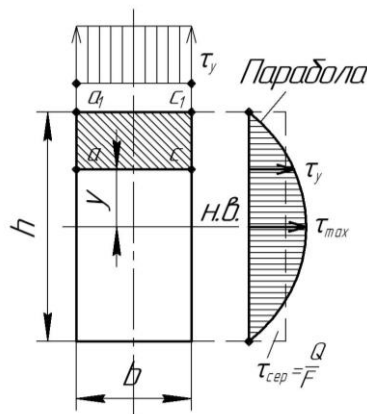


Рис. 9.10. Розподіл дотичних напруг для балки прямокутного перерізу

$$S_{acc_1} = b(h/2 - y) \left(\frac{h/2 - y}{2} + y \right) = (bh/2 - by)(h/4 + y/2) =$$

$$bh^2/8 + bhy/4 - bhy/4 - by^2/2 = bh^2/8 - by^2/2 = b/2(h^2/4 - y^2),$$

$$\tau = \frac{QS}{bJ} = \frac{Q(b/2)(h^2/4 - y^2)}{bbh^3/12} = \frac{Q(b/2)(h^2/4 - y^2)}{bbh^3/12} = \frac{6Q(h^2/4 - y^2)}{bh^3},$$

КОЛИ

$$y = \pm h/2, \text{ то } \tau = 0;$$

$$y = 0, \text{ то } \tau = \tau_{\max} = 3Q/(2bh) = 3Q/(2A) = 3\tau_{\text{сер}}/2.$$

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2A}.$$

Провівши аналогічні розрахунки для балки круглого перерізу отримаємо

$$\tau_{\max} = \frac{4Q}{3A}.$$

Задача 1.

Для заданої балки, (рис. 9.11) побудувати епюру згинальних моментів (дивись практичну 8) та визначити необхідні розміри поперечного перерізу прямокутника із співвідношенням сторін $h/b=1,5$, круга; двотавра. При знайдених розмірах порівняти їх маси. Для матеріалу балки прийняти $[\sigma]=160\text{Н} / \text{мм}^2$.

Розв'язок:

1. Складемо рівняння рівноваги, вибравши за центри моментів точки B, D та визначимо реакції R_b, R_d шарнірних опор зображених на рис. 9.11.

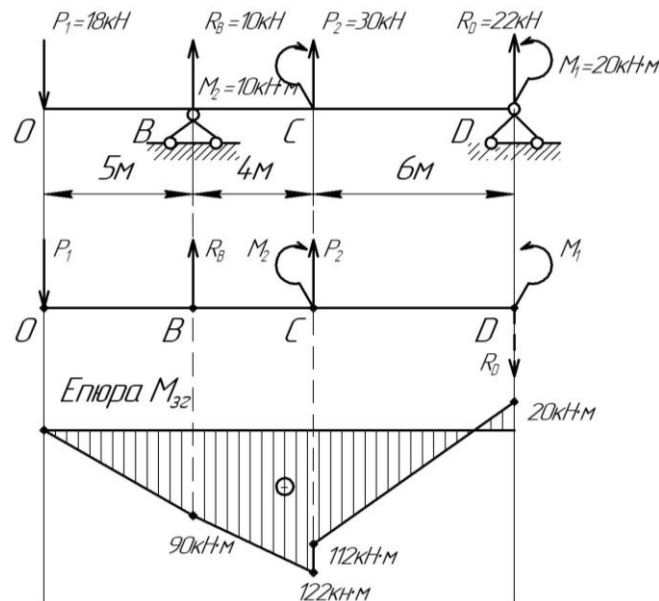


Рис. 9.11. Епюра згинальних моментів балки

$$\sum M_D = 0, \sum M_D = M_1 - P_2 \cdot CD - M_2 - R_B \cdot BD + P_1 \cdot OD = 0,$$

$$\sum M_B = 0, \sum M_B = M_1 + R_D \cdot BD - M_2 + P_2 \cdot BC + P_1 \cdot OB = 0,$$

$$R_B = \frac{M_1 - P_2 \cdot CD - M_2 + P_1 \cdot OD}{BD} = \frac{20\text{кН} \cdot \text{м} - 30\text{кН} \cdot 6\text{м} - 10\text{кН} \cdot \text{м} + 18\text{кН} \cdot \text{м} \cdot 15\text{м}}{10\text{м}} =$$

$$= 10\text{кН},$$

$$R_D = \frac{-M_1 + M_2 - P_2 \cdot BC - P_1 \cdot OB}{BD} = \frac{-20\text{кН} \cdot \text{м} + 10\text{кН} \cdot \text{м} - 30\text{кН} \cdot 4\text{м} - 18\text{кН} \cdot 5\text{м}}{10\text{м}} =$$

$$= -22\text{кН}.$$

Знак «-» показує, що дійсний напрямок реакції R_D протилежний попередньо вибраному (рис. 9.11).

Виконуємо перевірку: сума проєкцій усіх сил на вісь Y дорівнює нулю, тоді

$$-P_1 + R_B + P_2 - R_D = 0, \quad -18кН + 10кН + 30кН - 22кН = 0.$$

Умова $\sum Y = 0$ виконується, отже реакції опор визначені вірно. При побудові епюр використаємо тільки дійсний напрямок реакцій опор.

2. Ділимо балку на відповідні ділянки OB, BC, CD (рис. 9.11).

Епюру згинальних моментів будуємо по точкам O, B, C, D , тобто розраховуємо значення $M_{зг}$ на відповідних ділянках (рис. 9.11).

$$M_{згO} = 0,$$

$$M_{згB} = -P_1 \cdot OB = -18кН \cdot 5м = -90кН \cdot м,$$

$$M_{згC^{лв}} = -P_1 \cdot OC + R_B \cdot BC = -18кН \cdot 9м + 10кН \cdot 4м = -122кН \cdot м,$$

$$M_{згC^{пр}} = -P_1 \cdot OC + R_B \cdot BC + M_2 = -18кН \cdot 9м + 10кН \cdot 4м + 10кН \cdot м = -112кН \cdot м.$$

Для спрощення розрахунків подальше обчислення $M_{зг}$ доцільно проводити з права на ліво

$$M_{згD}^{лв} = M_1 = 20кН \cdot м.$$

3. Розраховуємо момент опору балки з умови міцності на згин

$$W_x = \frac{M_{зг\max}}{[\sigma]} = \frac{122 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{мм}}{160 \text{ Н} / \text{мм}^2} = 0,763 \cdot 10^6 \text{ мм}^3.$$

4. Визначаємо розміри круглого перерізу балки використавши формулу визначення його моменту опору.

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}, \text{ звідки:}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0,763 \cdot 10^6 \text{ мм}^3}{3,14}} = 198 \text{ мм}.$$

Площа круглого перерізу буде рівна:

$$A_{кр} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 198 \text{ мм}^2}{4} = 30775,14 \text{ мм}^2.$$

5. Визначаємо розміри прямокутного перерізу балки із заданим співвідношенням сторін $\frac{h}{b} = 1,5$ або $h = 1,5b$.

Для прямокутного перерізу момент опору визначається:

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6},$$

Підставивши значення b замість h отримаємо:

$$b = \sqrt[3]{\frac{6W_x}{2,25}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 0,763 \cdot 10^6 \text{ мм}^3}{2,25}} = 127 \text{ мм},$$

$$h = 1,5b = 191 \text{ мм}.$$

Площа прямокутного перерізу буде рівна

$$A_{пр} = bh = 127 \cdot 191 = 24257 \text{ мм}^2.$$

6. Підбираємо двотавровий переріз згідно ГОСТ 8239-72, для якого

$$W_x = 0,953 \cdot 10^6 \text{ мм}^3, A_{ом} = 7260 \cdot 10^2 \text{ мм}^2.$$

7. Співвідношення мас балок однакової довжини дорівнює співвідношенню площ їхніх поперечних перерізів:

$$\frac{A_{кр}}{A_{пр}} = \frac{30775 \text{ мм}^2}{24257 \text{ мм}^2} = 1,27, \quad \frac{A_{кр}}{A_{ом}} = \frac{30775 \text{ мм}^2}{7260 \text{ мм}^2} = 4,24, \quad \frac{A_{пр}}{A_{ом}} = \frac{24257 \text{ мм}^2}{7260 \text{ мм}^2} = 3,34.$$

З проведених розрахунків робимо висновок, що найбільш раціональним для використання є двотавровий переріз.

Завдання:

Для заданої двохопорної балки, навантаженої зосередженими силами P_1, P_2 , та парою сил з моментом M , побудувати епюри згинальних моментів. Визначити розміри перерізу балок двотаврового та прямокутного перерізу з відповідним співвідношенням h/b . Порівняти маси балок в обох розрахункових варіантах. Для матеріалу балки приймаємо $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Вихідні дані вибрати згідно варіанту (рис. 9.12 – 9.23), таблиця 9.1.

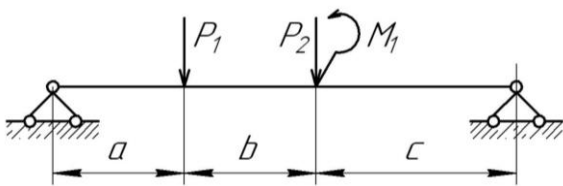


Рис. 9.12.

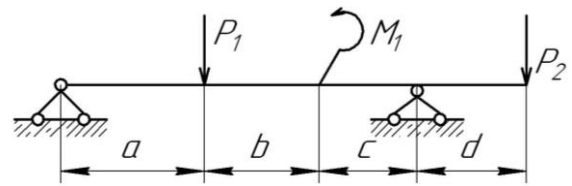


Рис. 9.13.

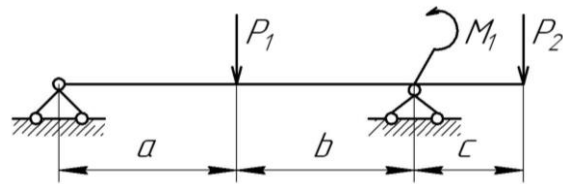


Рис. 9.14.

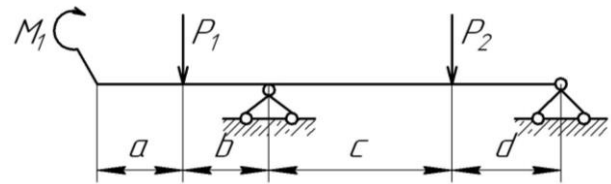


Рис. 9.15.

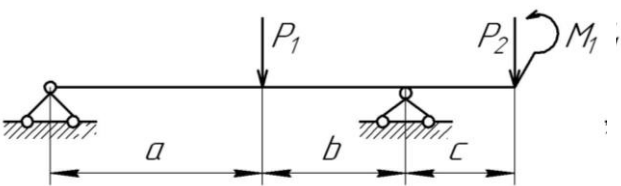


Рис. 9.16.

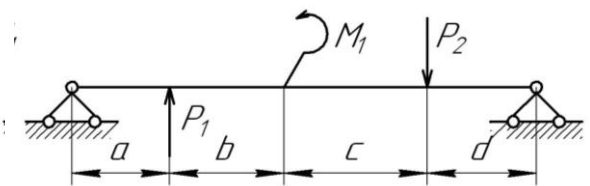


Рис. 9.17.

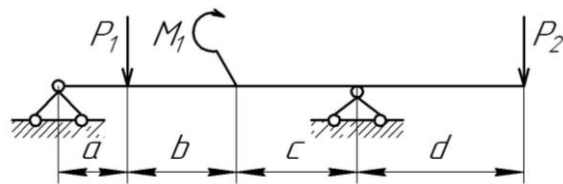


Рис. 9.18.

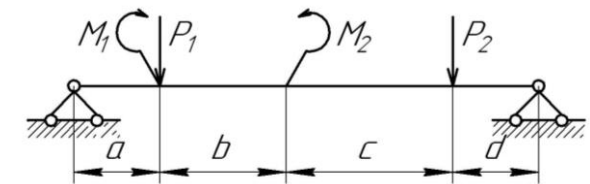


Рис. 9.19.

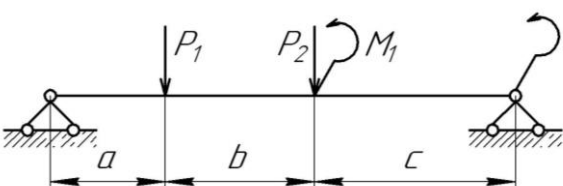


Рис. 9.20.

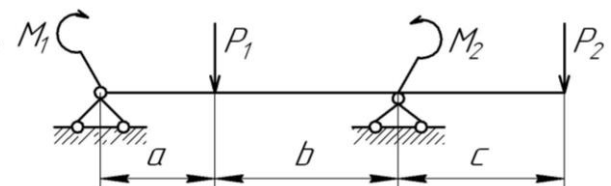


Рис. 9.21.

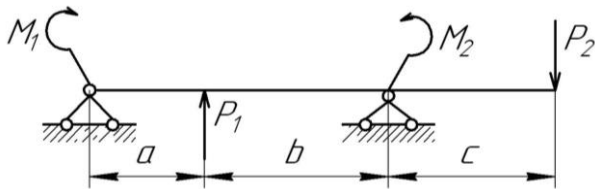


Рис. 9.22.

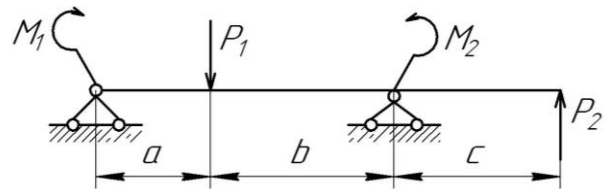


Рис. 9.23.

Таблиця 9.1.

Варіанти завдань для побудови епюр згинальних моментів та визначення розмірів перерізів балок.

Варіант	Значення сили P , кН		Пара сил з моментом M , кН·м		Співвідношення сторін h/b	Відстань, м			
	P_1	P_2	M_1	M_2		a	b	c	d
1	14	25	20	17	1,5	2	2	3	-
2	25	10	10	15	1	3	2	1	1
3	10	15	15	10	2	3	3	1	-
4	30	30	14	12	1,5	1	1	3	2
5	8	5	12	14	1	3	2	2	-
6	15	32	18	8	2	1	2	2	2
7	12	5	10	18	1,5	1	2	2	2
8	28	12	8	11	1	2	2	2	1
9	20	18	14	15	2	2	2	3	-
10	15	22	10	13	15	2	3	2	-
11	16	12	13	10	1	1	4	2	-
12	35	18	17	20	2	2	3	2	-

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ:

1. Що називають чистим згином?
2. Нейтральна вісь бруса.
3. Поперечна сила.
4. Теорема Журавського.
5. Момент опору деформації згину.
6. Умов міцності при згині.
7. Дотичні напруги деформації згину, формула Журавського.

Практичне заняття № 10.

Позацентровий стиск

Позацентрове навантаження є одним з випадків сумісної дії осьових сил та сил, які викликають згин. Коли довжина стрижня не велика у порівнянні з розмірами його поперечного перерізу, то відхилення його від вертикалі таке, що ним можна нехтувати.

За принципом незалежності дії сил позацентровий стиск можна вважати сумою окремих навантажень: центральний стиск, коли сила P прикладена по центру ваги перерізу, та чистий згин викликаний згинальним моментом, якій дорівнює $M = P \cdot e$, де e – ексцентриситет, найкоротша відстань між центром ваги перерізу і точкою прикладання сили (рис. 10.1).

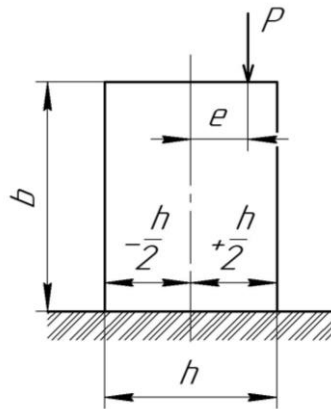


Рис. 10.1. Схема стрижня до якого прикладене позацентрове навантаження сили P на відстанні e

Із розглянутого вище матеріалу зрозуміло, що загальна напруга від дії центрального стиску та згинального моменту буде визначатись за формулою:

$$\sigma = -\frac{P}{A} \pm \frac{M_{z2}y}{J}, \quad (10.1)$$

де

P – сила прикладена по центру ваги перерізу;

A – площа перерізу стрижня;

y – відстань від нейтральної лінії до місця, де визначається напруга;

J – момент інерції перерізу, який для прямокутного перерізу визначається за формулою:

$$J = b \frac{h^3}{12}, \quad (10.2)$$

де

b, h – відповідно ширина та висота поперечного перерізу стрижня (рис. 10.1).

Знак « $-$ » приймається для напруги, яка викликає деформацію стиску, « $+$ » деформації розтягу.

Як зазначалось раніше максимальні (мінімальні) напруги діятимуть на гранях стрижня при $y = \pm h/2$. Підставивши значення y та вираз (10.2) у (10.1) отримаємо:

$$\sigma_{\max, \min} = -\frac{P}{A} \pm \frac{M_{зг} h/2}{bh^3/12} = -\frac{P}{A} \pm \frac{M_{зг}}{bh^2/6} = -\frac{P}{A} \pm \frac{M_{зг}}{W}, \quad (10.3)$$

де

$\sigma_{\max, \min}$ – максимальні, мінімальні напруги розтягу та стиску;

W – момент опору прямокутного перерізу який, як зазначалось раніше, визначається за формулою $W = bh^2/6$.

Задача 1.

До стійки (рис. 10.2) позacentрово прикладене зосереджене навантаження $P = 50 \text{кН}$, з ексцентриситетом $e = 80 \text{мм}$, та розмірами поперечного перерізу $b \times h = 100 \times 200 \text{мм}$. Визначити напругу в точці прикладання зосередженої сили P , максимальні і мінімальні напруги розтягу та стиску, які діють на гранях стійки.

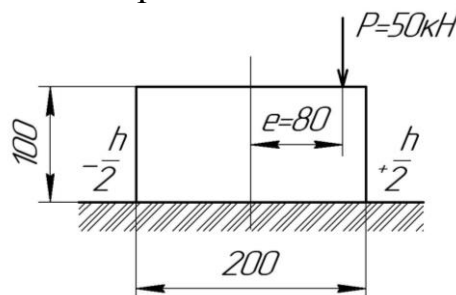


Рис. 10.2. Схема стрижня до якого прикладене зосереджене навантаження сили P

Розв'язок:

1. Визначаємо момент опору перерізу:

$$W = 100 \text{мм} \cdot (200 \text{мм})^2 / 6 = 667 \text{см}^2.$$

2. Визначаємо площу прямокутного перерізу:

$$A = 100 \text{мм} \cdot 200 \text{мм} = 200 \text{см}^2.$$

3. Визначаємо згинальний момент в тоці прикладання зосередженої сили P :

$$M_{згP} = P \cdot e, = 50 \text{кН} \cdot 80 \text{мм} = 400 \text{кН} \cdot \text{см}.$$

4. Визначаємо максимальний згинальний момент на грані стійки:

$$M_{зг\max} = P \cdot h/2, = 50 \text{кН} \cdot 100 \text{мм} = 500 \text{кН} \cdot \text{см}.$$

5. Визначаємо напругу в тоці прикладання зосередженої сили P , максимальні і мінімальні напруги розтягу та стиску на гранях стійки:

$$\sigma_p = -\frac{P}{A} + \frac{M_{з2P}}{W} = -\frac{50\text{кН}}{200\text{см}^2} + \frac{400\text{кН} \cdot \text{см}}{667\text{см}^3} = 0,35\text{кН} / \text{см}^2,$$

$$\sigma_{\max} = -\frac{P}{A} + \frac{M_{з2\max}}{W} = -\frac{50\text{кН}}{200\text{см}^2} + \frac{500\text{кН} \cdot \text{см}}{667\text{см}^3} = 0,5\text{кН} / \text{см}^2,$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{P}{A} - \frac{M_{з2\max}}{W} = -\frac{50\text{кН}}{200\text{см}^2} - \frac{500\text{кН} \cdot \text{см}}{667\text{см}^3} = -1\text{кН} / \text{см}^2.$$

Максимальна напруга розтягу діє зліва, а мінімальна (стиску) діє праворуч (зі сторони дії сили).

Завдання:

Для заданої стійки позацентрово прикладене зосереджене навантаження сили P з ексцентриситетом e , та розмірами поперечного перерізу $b \times h$. Визначити напругу в точці прикладання зосередженої сили P , максимальні і мінімальні напруги розтягу та стиску, які діють на гранях стійки. Вихідні дані вибрати згідно варіанту таблиця 10.1.

Таблиця 10.1.

Варіанти завдань для визначення максимальних та мінімальних напруг розтягу та стиску.

Варіант	Значення зосередженої сили P , кН	Ексцентриситет e , мм	Конструктивні розміри $b \times h$, мм
1	45	50	65x130
2	50	55	70x140
3	55	60	75x150
4	60	65	80x160
5	65	70	85x170
6	70	75	90x180
7	75	80	95x190
8	80	85	100x200
9	85	90	105x210
10	90	95	110x220
11	95	100	115x230
12	95	105	120x240

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ:

1. Що таке позацентрове навантаження?
2. Що таке ексцентриситет?
3. Особливості розрахунку позацентрового розтягу та стиску.

Практичне заняття № 11.

Визначення жорсткості залізобетонних елементів коробчастого перерізу з нормальними тріщинами

При визначенні деформацій комбінованих елементів, в яких є два і більше матеріалів з різними характеристиками (наприклад, залізобетонних), а також при наявності дефектів і пошкоджень (наприклад, тріщин) неможливо користуватися формулами опору матеріалів, наведених вище. У цьому випадку слід враховувати неоднорідність у ділянці елемента, що закручується. Найбільш зручною можливістю вирішення таких задач є використання загальновідомих програм, таких як «Lira, Ansys» та ін., які вивчаються під час проходження курсу «Використання інформаційних технологій в будівництві».

Для пояснення вищесказаного нижче наведений принцип визначення жорсткості залізобетонних елементів коробчастого перерізу з нормальними тріщинами при крученні, отриманий О. В. Мельником [3].

Розглянемо для прикладу залізобетонний елемент коробчастого перерізу з нормальною тріщиною, до якого прикладений зовнішній крутний момент M_t (рис. 11.1).

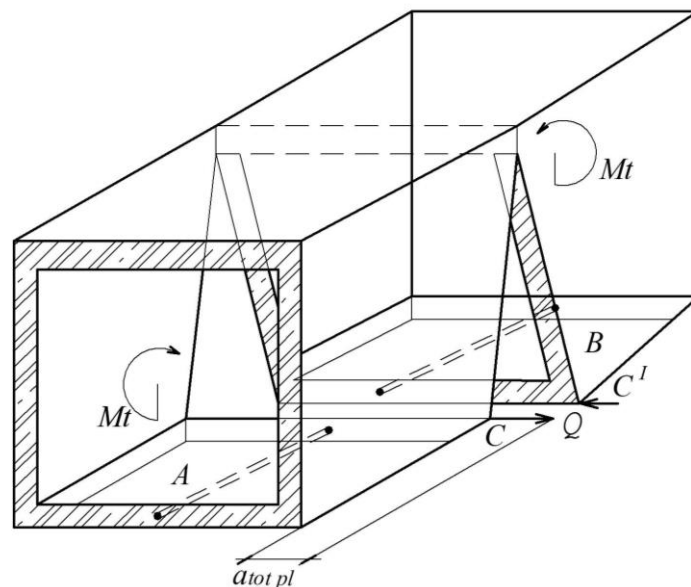


Рис. 11.1. Схема визначення нагельної сили в арматурі при взаємному повороті двох блоків, відділених нормальною тріщиною

Для визначення його жорсткості на кручення спочатку необхідно знайти нагельну силу Q у поздовжній арматурі, яка буде визначатися із умови однакових горизонтальних переміщень точок C і C' відповідних

блоків A і B у місці умовного розтину арматури (рис. 11.1).

Нагельну силу Q , яка виникає у поздовжній арматурі визначимо, використовуючи метод скінченних елементів (МСЕ) та програмний комплекс «Lira» з врахуванням нелінійних властивостей бетону.

Для визначення нагельної сили застосуємо метод сил.

Розглянемо (рис. 11.2), на якому показано:

Δ_{Cpl} - переміщення блока A відносно блока B ;

Δ_{smpl} - переміщення від зминання бетону нагельною силою Q ;

$2a_{crc}$ - ширина тріщини;

l - довжина зони деформування арматурного стрижня.

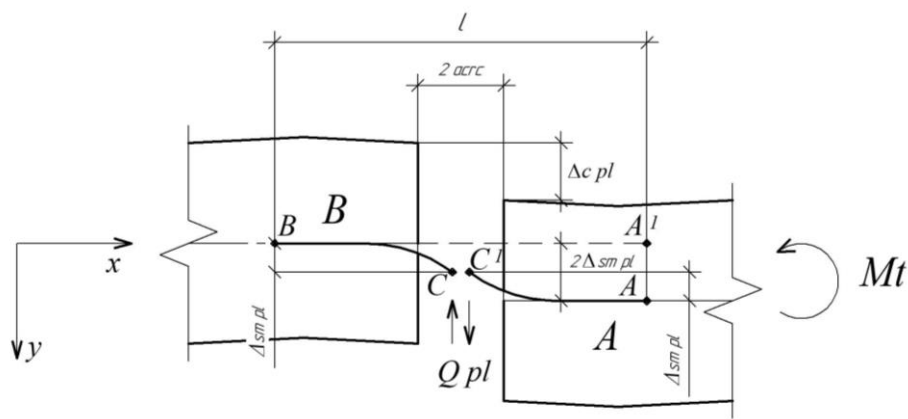


Рис. 11.2. Схема деформування арматури від взаємного повороту блоків, що зазнали крутного моменту

Переміщення точки C відносно точки C^I у місці умовного розтину арматури повинно бути рівним нулю:

$$\Delta_{Cpl} = \Delta_{Mtpl} - \Delta_{Qpl} - \Delta_{smpl} = 0, \quad (11.1)$$

де

Δ_{Mtpl} - переміщення точки C^I відносно точки C від кручення зовнішнім моментом M_t ;

Δ_{Qpl} - переміщення C^I відносно C від кручення нагельною силою Q ;

Δ_{smpl} - переміщення C^I відносно C від зминання бетону нагельною силою Q .

У зв'язку з тим, що бетон зминається одночасно у двох блоках A і B які розмежує тріщина $2a_{crc}$ величина Δ_{smpl} збільшується в рази 2 (рис. 11.2).

Складові $\Delta_{M_{rpl}}$ і $\Delta_{Q_{rpl}}$ у виразі (11.1) визначаються з розрахунків в програмному комплексі «Lira» двох схем коробчастих елементів із імітацією нормальних тріщин у вигляді розрізу. При цьому слід застосовувати об'ємні кінцеві елементи. Одна схема для визначення переміщень $\Delta_{M_{rpl}}$ за дії прикладеного по торцях елемента крутного моменту M_t , друга для визначення переміщень $\Delta_{Q_{rpl}}$ за дії нагельної сили Q , яка прикладена в місті розташування поздовжньої арматури.

Складова Δ_{smp} від зминання нагельною силою Q визначається з використанням емпіричних даних, які наведені в нормативних документах.

Алгоритм розрахунку виглядає так:

1. Визначаємо нагельну силу Q з розрахунку за методикою [1];
2. Проводимо розрахунок в програмному комплексі «Lira» елемента з тріщиною, до якого прикладені зовнішній момент M_t та знайдена за п.1 нагельна сила Q . За результатами розрахунку отримуємо переміщення в місті розташування тріщини $\Delta = \Delta_{M_{rpl}} - \Delta_{Q_{rpl}}$ (перші дві складові правої частини виразу (11.1));
3. За методикою будівельних норм визначаємо переміщення Δ_{smp} від дії нагельної сили Q ;
4. Якщо $\Delta_{C_{rpl}} < 0$, то нагельну силу Q зменшуємо на певну величину (яка задається на початку розрахунку, наприклад, 10% від Q);
5. Якщо $\Delta_{C_{rpl}} > 0$, то нагельну силу навпаки Q збільшуємо на певну величину;
6. Повторюємо розрахунок з п. 2. Розрахунок повторюється до тих пір, поки умова рівняння (11.1) не буде задовільнена з заданою наперед точністю;
7. За методикою будівельних норм визначаємо переміщення Δ_{smp} від дії знайденою ітераціями за п. 2-6 нагельної сили Q .

Визначивши невідому нагельну силу Q слід знайти повне переміщення у тріщині a_{totpl} :

$$a_{totpl} = 2 \cdot \Delta_{smp} \cdot Q. \quad (11.2)$$

Визначивши a_{totpl} , визначаємо коефіцієнт k_{rpl} , який являє собою відношення деформативності елемента з нормальною тріщиною до деформативності елемента без тріщин:

$$k_{rpl} = \frac{a_{totpl} + a_e}{a_e}, \quad (11.3)$$

де

a_e - переміщення від кручення елемента без тріщин, яке визначається за формулою:

$$a_e = r \cdot \varphi_e, \quad (11.4)$$

де

r - радіус повороту, тобто найкоротша відстань від центральної осі елемента до точки визначення переміщення блоку;

φ_e - кут повороту елемента без тріщин довжиною l_{crc} (відстань між тріщинами елемента), який можна визначити за формулою:

$$\varphi_e = \frac{\Delta_{pl}}{r}, \quad (11.5)$$

де

Δ_{pl} - переміщення елемента без тріщин на довжині l_{crc} , отримане за допомогою програмного комплексу «Lira» з врахуванням нелінійних властивостей бетону.

По формулі опору матеріалів для визначення кута повороту:

$$\varphi_e = \frac{M_t \cdot l_{crc}}{GJ_t}, \quad (11.6)$$

де GJ_t - крутильна жорсткість елемента без тріщин, знайдемо еквівалентний момент інерції при крученні J_t :

$$J_t = \frac{M_t \cdot l_{crc}}{G\varphi_e}. \quad (11.7)$$

Визначивши J_t по (11.7) і підставивши у (11.6), а потім у (11.4) отримаємо:

$$a_e = \frac{M_t \cdot l}{GJ_t} \cdot r. \quad (11.8)$$

Після отриманих a_{toipl} і a_e знаходимо повне теоретичне переміщення:

$$\Delta_{teorepl} = a_{toipl} + a_e. \quad (11.9)$$

Розглянутий вище коефіцієнт k_{rpl} є показником відношення деформативності елемента з тріщиною до деформативності елемента без тріщин, тобто у скільки разів жорсткість елемента з нормальною тріщиною з урахуванням нелінійних деформацій менша за її початкову жорсткість.

Таким чином, можна бачити, що при визначенні деформацій кручення елементів з тріщинами замість моменту інерції суцільного перерізу слід підставляти вираз еквівалентного моменту інерції за формулою (11.7) і далі розрахунок не відрізняється від розрахунку суцільних елементів.

Практичне заняття № 12.

Розрахунок складених балок

Складеним стрижнем називають такий стрижень, поперечний переріз якого складається з декількох окремих часток, які з'єднуються за допомогою болтів, заклепок, нагелів, шпонок і т. п.

Якщо частки складеного стрижня з'єднані між собою жорстко по усій довжині, то такий стрижень може вважатися **монолітним (суцільним)** і розглядатися як один простий стержень, хоча б навіть різні частини його поперечного перерізу були зроблені з різних матеріалів. Тем не менш часто не вдається жорстко з'єднати окремі стрижні і тоді треба враховувати вплив піддатливості з'єднань, які об'єднують ці стрижні. Таку групу стрижнів слід розглядати як особливу систему, яка називається **складеним стрижнем**.

Складені стрижні широко застосовують в деталях машин, будівельних конструкціях, інженерних спорудах. Вони можуть бути зробленими з металу, дерева, залізобетону, пластику і т. ін. Передумовою великого розповсюдження металевих складених стрижнів є обмеженість сортименту метала, яка викликає необхідність з'єднання декількох елементів для отримання більш потужних та вигідних перерізів. Це з'єднання здійснюється або зварюванням, заклепками і болтами, або введенням проміжних з'єднувальних елементів – планок та решіток.

Якщо **складений стрижень працює на згин**, то його називають **складеною балкою**.

На рис. 12.1 показані металеві та дерев'яні складені стрижні. На рис. 12.1,а показана складена дерев'яна балка, яка зроблена за допомогою дерев'яних шпонок та металевих болтів. На рис. 12.1,б показана металева складена балка, зроблена за допомогою сталевих планок.

В дерев'яних конструкціях складені стрижні зустрічаються частіше. Роль в'язей в них виконують цвяхи, болти, нагелі, шпонки, клей. В залізобетонних конструкціях до схеми складеного стрижня приводяться несучі конструкції багатоповерхових будівель.

В машинобудуванні до складених стрижнів можна віднести окрім вище відмічених елементи конструкцій з отворами.

Передумови для отримання рівнянь для визначення дотичних зусиль у в'язях зсуву

В більшості випадків піддатливість поперечних в'язів можна не враховувати, тобто вважати їх нескінченно жорсткими. В'язі зсуву вважаються піддатливими. Похибка від неврахування поперечних деформацій буває чутливою лише при розгляданні коротких складених стрижнів з великою висотою поперечного перерізу.

При отриманні розрахункових залежностей О. Р. Ржаніцин [1]

розглядав в'язі, безперервно розташовані по довжині шва. Ця передумова дійсна і при наявності декількох (більше п'яти- шести) зосереджених в'язів, які розташовані на однаковій відстані одна від одної.

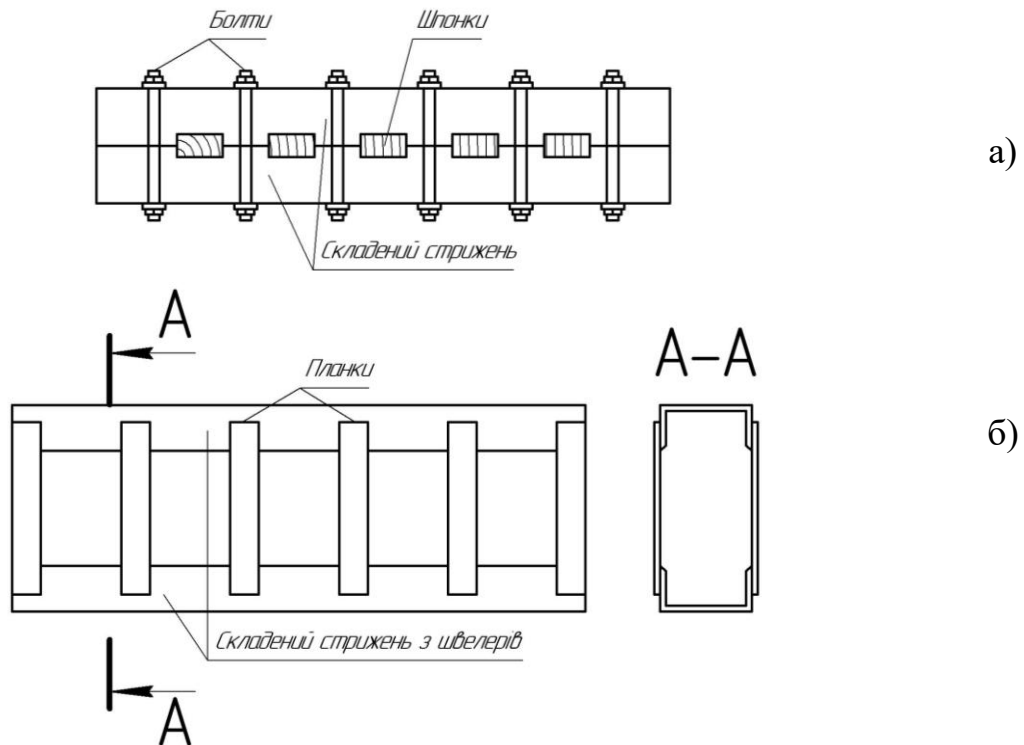


Рис. 12.1. Схеми складених стрижнів а) складена дерев'яна балка, б) складена металева балка

Розрахункові залежності отримані на основі умов сумісності деформацій сусідніх граней складених стрижнів з врахуванням зсуву в'язів.

Для розрахунку в'язі зсуву складеного стрижня розсікаються по швах між складеними стрижнями і таким чином з'являється так звана основна система методу сил, де невідомі зусилля $T_i(x)$, які підлягають визначенню, замінюють дію цих в'язів (рис. 12.2).

Після цього кожен окремий складений стрижень розглядається як балка, на яку діє зовнішнє навантаження та внутрішні дотичні $T(x)$ зусилля (рис. 12.2), які підлягають визначенню.

При розгляданні складеного стрижня з абсолютно жорсткими поперечними в'язями система еквівалентна $n+1$ сумісно згинальним окремим стрижням за однаковою кривою згину, де n – кількість швів складеного стрижня (див. рис. 12.2). Жорсткість на згин складеного стрижня, в якому відсутні в'язі зсуву (після їх умовного розсічення), дорівнює сумі жорсткостей окремих стрижнів:

$$\sum_{i=1}^{n+1} E_i J_i = \sum E J.$$

(тут і далі для скорочення записів в цій сумі не вказані межі сумування та індекси).

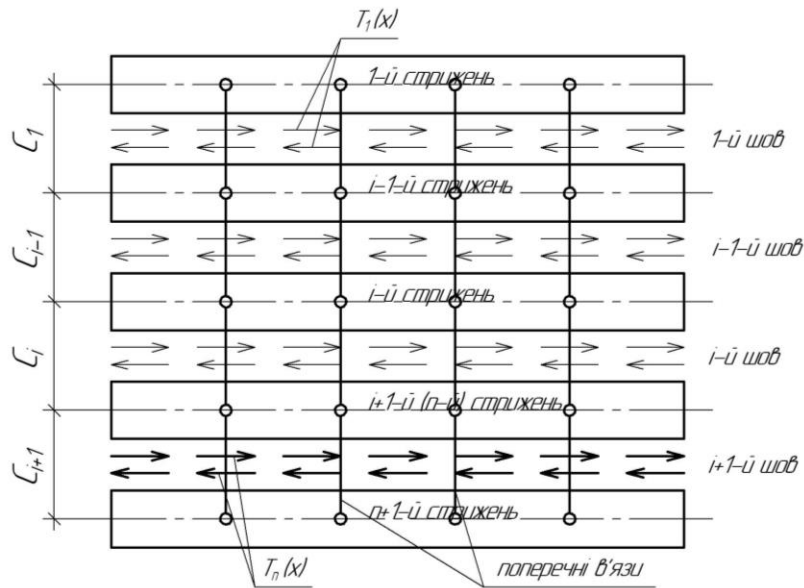


Рис. 12.2 Схема для розрахунку складених стрижнів за теорією О. Р. Ржаніцина

Після визначення невідомих внутрішніх зусиль в швах основної системи кожен окремий складаючий стрижень розглядається як балка, на яку діє зовнішнє навантаження та отримані від рішення задачі дотичні зусилля $T(x)$.

Розрахунок складених балок з абсолютно жорсткими поперечними в'язями.

Для розрахунку складених балок з двох стрижнів застосуємо диференціальне рівняння для визначення дотичних зусиль $T(x)$, яке отримане О. Р. Ржаніциним [1] із умов сумісності деформацій, які були приведені вище:

$$T'' / \xi = \gamma \cdot T + \Delta, \quad (12.1)$$

де $T = T(x)$ – сумарне зсувне зусилля між складеними стрижнями, які пов'язані з погонними дотичними зусиллями $\tau(x)$ (рис. 12.2) залежністю:

$$T(x) = \int_0^x \tau(x) dx, \quad (12.2)$$

$$\Delta = -(c / \sum E J) M^0 = 0, \quad (12.3)$$

де c – відстань між центрами ваги двох складених стрижнів (рис. 12.2):

$$\sum EJ = EJ_1 + EJ_2, \quad (12.4)$$

де EJ_1, EJ_2 – відповідно згинальна жорсткість верхнього та нижнього стрижня.

M^0 – сумарний згинальний момент системи, який дорівнює сумі згинальних моментів в перерізах кожного складеного стрижня системи:

$$M^0 = \sum_{i=1}^{n+1} M_i^0, \quad (12.5)$$

де i – номер шва складеного стрижня;

n – кількість швів (в нашому випадку – один шов), тому:

$$M^0 = M_1 + M_2, \quad (12.6)$$

γ – коефіцієнт, який залежить від геометричних характеристик перерізів стрижнів та визначається залежністю:

$$\gamma = \frac{1}{EA_1} + \frac{1}{EA_2} + \frac{c^2}{\sum EJ}, \quad (12.7)$$

де

EA_1, EA_2 – осьова жорсткість, тобто здобуток модуля пружності на площу поперечного перерізу відповідно верхнього та нижнього стрижня.

ζ – коефіцієнт жорсткості в'язей зсуву, який визначається в кожному окремому випадку. Так, наприклад, для складеного стрижня, зробленого за допомогою заклепок, коефіцієнт жорсткості в'язей зсуву визначається за формулою:

$$\xi = E_3 \pi d^2 k / (4ce), \quad (12.8)$$

де

E_3 – модуль пружності заклепочного з'єднання, який згідно з експериментальними даними [1] складає 100 – 120 Н/см²;

c – відстань між центрами ваги перерізів склепаних стрижнів;

d – діаметр заклепок;

e – крок розташування заклепок;

k – кількість рядів заклепок по ширині стрижня.

Якщо складений стрижень зроблений за допомогою зварювання поперечних планок (рис. 12.1,б), то коефіцієнт жорсткості в'язей зсуву ζ визначається за формулою (в разі рівної жорсткості верхнього та нижнього стрижнів):

$$\zeta = \frac{24E}{Bc^2(2c/J_p + B/J_v)}, \quad (12.9)$$

де

B – відстань між планками, J_p та J_y – моменти інерції відповідно планок та складених стрижнів.

В разі потреби побудови епюри дотичних зусиль простий спосіб рішення рівняння (1) можна отримати за допомогою тригонометричних рядів Фур'є у вигляді, запропонованому автором даних методичних вказівок [3] (див. нижче).

Рішення рівняння (12.1) в замкнутій формі у вигляді формули в гіперболічних функціях має вигляд [1]:

$$T = T_m \left(1 - \frac{2[ch(\lambda l) - ch(\lambda x)]}{\lambda^2 (l^2 - x^2) ch(\lambda l)} \right), \quad (12.10)$$

λ визначається виразом:

$$\lambda = \sqrt{\xi \gamma}, \quad (12.11)$$

де

λ, ξ – визначаються відповідно за формулами (12.7) та (12.8) або (12.9);

T_m – поперечна сила у монолітній балці.

З достатньою для практики точністю можливо застосувати більш просту формулу:

$$T = T_m \frac{\lambda^2 l^2}{\lambda^2 l^2 + \pi^2}, \quad (12.12)$$

В практичних розрахунках часто буває потреба визначити лише максимальні значення поперечної сили T . Максимального значення ця сила має при $x = l/2$, тоді:

$$T_{\max} = T_{m,\max} \frac{\lambda^2 l^2}{\lambda^2 l^2 + \pi^2}, \quad (12.13)$$

причому максимальна поперечна сила монолітної (суцільної) балки $T_{m,\max}$ визначається за формулою:

$$T_{m,\max} = \frac{q \cdot l^2 \cdot c}{\pi^2 \cdot \gamma \cdot \sum EJ}. \quad (12.14)$$

Згинальний момент в верхньому та нижньому стрижнях складеної балки визначається як алгебраїчна сума моменту від зовнішньої сили та моменту від дії дотичної сили T (див. рис. 12.2):

$$M_{\text{ver}} = M^0 \frac{EJ_1}{\sum EJ} - T \cdot a \cdot \frac{EJ_1}{\sum EJ}, \quad (12.15)$$

$$M_{\text{nig}} = M^0 \frac{EJ_2}{\sum EJ} - T \cdot b \cdot \frac{EJ_2}{\sum EJ}. \quad (12.16)$$

Згинальні моменти в складених стрижнях складеної балки можуть суттєво відрізнятись від моменту в суцільній балці. Це залежить від коефіцієнту жорсткості в'язей зсуву ζ . При наближенні величини коефіцієнту жорсткості в'язей зсуву до нескінченності робота складеної балки наближається до роботи суцільної балки.

Визначення вертикальних зусиль в двошарових складених балках.

Для більшості складених балок достатньо визначення тільки дотичних зусиль у в'язях зсуву за вище наведеною методикою. Однак існують складені балки, в яких існує потрібність визначення зусиль в поперечних (вертикальних) в'язях. До таких конструкцій відносяться складені балки, які опираються на опору верхнім стрижнем (так звані балки з підрізками), при дії на балку зосереджених навантажень поблизу опор.

Розглянемо розрахунок поперечних зусиль для складених балок за методикою автора [3].

В такому випадку складену балку розрізають по шву. Дія в'язей зсуву і поперечних в'язей замінюється невідомими функціями вертикальних $S(x)$ та дотичних $\tau(x)$ зусиль (рис. 12.3). Замість погонних дотичних зусиль $\tau(x)$ використовуються сумарні дотичні зусилля $T(x)$, пов'язані з останніми залежністю (12.2), яка наведена вище.

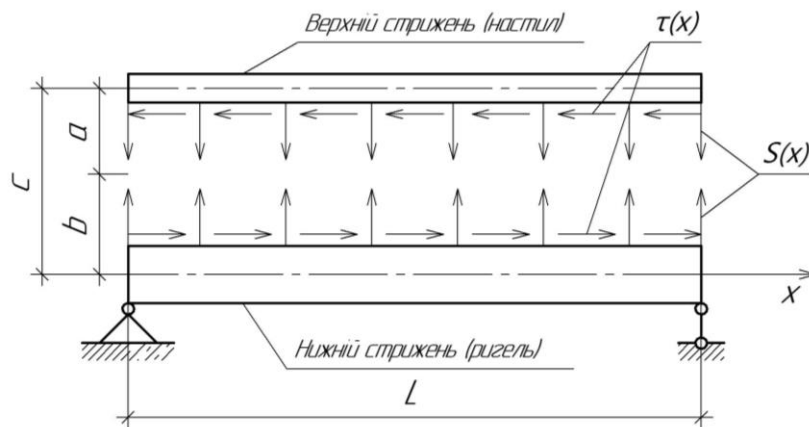


Рис. 12.3. Схема дотичних та поперечних зусиль в двошаровому складеному стрижні

В теорії складених стрижнів [1] виведено систему диференціальних рівнянь для визначення зусиль $T(x)$ та $S(x)$:

$$T'' / \xi = gT + iM_s + g_0 - M_s^{IV} / \eta = iT + kM_s + k_0, \quad (12.17)$$

де

ζ, n – відповідно коефіцієнти в'язей зсуву і поперечних в'язей [1];

g, i, k – параметри, які залежать від жорсткісних характеристик верхнього та нижнього стрижнів складеної балки;

M_s – згинальні моменти від зусиль $S(x)$, які пов’язані з останніми звільною диференційною залежністю опору матеріалів:

$$S(x) = -M_s''(x). \quad (12.18)$$

$T(x)$ – сумарні дотичні зусилля (дивись вище).

В [1] отримано рішення системи (12.18) тільки для окремого випадку коли жорсткості верхнього та нижнього складених стрижнів складеної балки рівні. Для розрахунку стрижнів з будь яким співвідношенням їх жорсткості верхнього та нижнього стрижнів будемо використовувати методику автора [3].

Виключивши з системи рівнянь (12.17) зусилля M_s , отримаємо диференційне рівняння для визначення $T(x)$:

$$T^{VI} - \xi \cdot g \cdot T^{IV} + \eta \cdot k T'' + \xi \eta (i^2 - gk) T = -\xi \eta \cdot i k_0 + \xi \eta \cdot k g_0 + \xi \cdot g_0^{IV}. \quad (12.19)$$

У зв’язку з тим, що ступень рівняння високий, його аналітичне рішення ускладнене. Вирішимо це рівняння за допомогою розкладення невідомих у тригонометричний ряд Фур’є по синусах:

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cdot \sin(\alpha \cdot x), \quad (12.20)$$

де

$$\alpha = \pi \cdot n / L;$$

T_n – коефіцієнт Фур’є, який підлягає визначенню.

Величини g_0 і k_0 в рівнянні (12.19) – суть згинальні моменти в складених стрижнях з деякими коефіцієнтами [1]:

$$g_0 = -aM_1 / EJ_1 - bM_2 / EJ_2, \quad (12.21)$$

$$k_0 = M_1 / EJ_1 - M_2 / EJ_2, \quad (12.22)$$

де

M_1, M_2 – функції згинальних моментів відповідно в верхньому та нижньому складених стрижнях від зовнішнього навантаження, яке діє безпосередньо на них;

a, b – відстань від центрів ваги відповідно верхнього та нижнього стрижнів до лінії їх спряження (рис. 3).

Розклавши функції M_1, M_2 в ряди по синусах, підставивши вираз (12.20) у (12.19), продиференціювавши і скоротивши на величину $\sin(\alpha \cdot x)$, отримаємо вираз для визначення невідомих коефіцієнтів розкладання T_n :

$$T_n [-\alpha^6 - \xi \cdot g \alpha^4 - k \eta \alpha^2 + \xi \eta (i^2 - gk)] = B_1 M_{1,n} + B_2 M_{2,n}, \quad (12.23)$$

де

$$B_1 = -(\xi \eta \cdot i + \xi \eta k a) / EJ_1, \quad (12.24)$$

$$B_2 = (\xi \eta \cdot i - \xi \eta k b) / EJ_2, \quad (12.25)$$

$M_{1,n}, M_{2,n}$ – коефіцієнти розкладання моментів від зовнішнього навантаження M_1 та M_2 .

В загальному випадку, коли на верхній стрижень діє навантаження q_1 , а на нижній навантаження q_2 вирази для M_1, M_2 будуть мати вигляд:

$$M_1 = -q_1 x^2 / 2, \quad (12.26)$$

$$M_2 = q_1 l x / 2 + q_2 l x / 2 - q_2 x^2 / 2. \quad (12.27)$$

Коефіцієнти розкладання величин M_1, M_2 за формулами (12.26 та 12.27) в ряди по синусах мають вигляд [3]:

$$M_{1,n} = (q_1 / l) \left[(l^2 / \alpha - 2 / \alpha^3) (-1)^n + 2 / \alpha^3 \right] \quad (12.27)$$

$$M_{2,n} = -(q_1 l / \alpha) (-1)^n + (q_2 / l) \left[(l^2 / \alpha - 2 / \alpha^3) (-1)^n + 2 / \alpha^3 \right] - (q_2 l / \alpha) (-1)^n. \quad (12.28)$$

Підставивши визначені за формулами (12.27, 12.28) коефіцієнти $M_{1,n}, M_{2,n}$ в формулу (12.23), визначимо T_n m разів, де m – верхня межа сумування ряду (12.20) (який, як показують розрахунки збігається дуже швидко), отримаємо функцію розподілення дотичних зусиль $T(x)$ між верхнім та нижнім складеними стрижнями.

Після визначення функції зусиль $T(x)$ з першого рівняння системи диференційних рівнянь (12.17) визначаються вертикальні зусилля $S(x)$, враховуючи, що $S(x) = M_s''(x)$:

$$S = (1/i) \left(-T^{IV} / \xi + gT'' + g_0'' \right) \quad (12.29)$$

Враховуючи, що g_0 визначається за формулою (12.21), а також вирази (12.26 та 12.27) для моментів M_1, M_2 , отримаємо вираз для другої похідної g_0 :

$$g_0'' = a q_1 / EJ_1 + b q_2 / EJ_2. \quad (12.30)$$

Приймаємо рішення для S за формулою (12.29) також у вигляді ряду по синусах i , розклавши g_0'' за (12.30) також в ряд, отримаємо вираз для визначення коефіцієнтів розкладання S_n :

$$S_n = -T_n \left(\alpha^4 / \xi / i + g \alpha^2 / i \right) - (2/l / \alpha / i) (q_1 a / EJ_1 + q_2 b / EJ_2) \left[(-1)^n - 1 \right] \quad (12.31)$$

де T_n – вже визначено вище за формулою (12.23).

Після визначення коефіцієнтів за формулою (12.31) зусилля $S(x)$ визначаються за допомогою рядів за формулою:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cdot \sin(\alpha \cdot x). \quad (12.32)$$

Погонні дотичні зусилля $\tau(x)$ з врахуванням виразу (12.2) визначаються за формулою:

$$\tau(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot T_n \cdot \cos(\alpha \cdot x). \quad (12.33)$$

Таким чином отримано рішення задачі в загальному вигляді, коли визначаються як вертикальні $S(x)$, так і дотичні $T(x)$ зусилля при будь-якому співвідношенні жорсткостей верхнього та нижнього стрижнів.

Врахування вертикальних зусиль дуже важливо в окремих випадках. Так, наприклад, при дії навантаження на нижній стрижень, що дуже часто зустрічається в деталях машин, епюра зусиль $S(x)$ має вигляд, показаний на (рис. 12.4). На цьому рисунку знак „+” мають зусилля розтягнення. З рисунку видно, що в такому випадку нижній стрижень може відірватись від верхнього. В складеному стрижні, який опирається верхньою частиною, епюра вертикальних зусиль схожа на епюру, яка показана на рис. 12.4 [2].

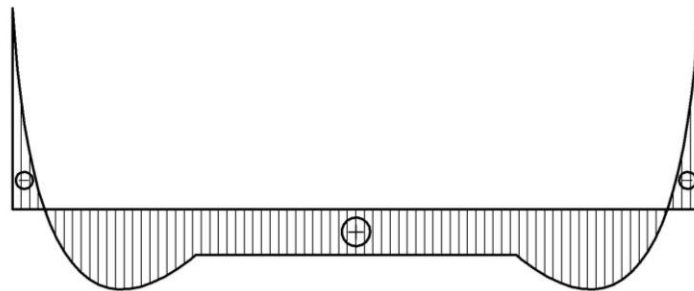


Рис. 12.4. Епюра вертикальних зусиль $S(x)$ для складеної балки, на нижню частину якої діє рівномірне навантаження

Наведена вище методика реалізується достатньо просто чисельно для розрахунків з застосуванням ЕОМ. Для наближених розрахунків в деяких випадках мається можливість застосування одного члену рядів, які описані вище.

Приклад розрахунку дотичних зусиль в двошаровій складеній балці.

Задача 1.

Розглянемо складену металеву балку, яка складається з двох однакових сталевих швелерів №20, з'єднаних за допомогою металевих планок-смужок товщиною 4мм та шириною 20мм які розташовані з кроком $B=200\text{мм}$ (рис. 12.5). Висота складеної балки $h=300\text{мм}$. Модуль пружності металу $E=210000\text{МПа}$.

Розв'язок:

Перед розрахунком необхідно вихідні дані привести до одних одиниць виміру.

- довжина складеної балки $l = 6000\text{мм} = 600\text{см}$;
- відстань між планками $B = 200\text{мм} = 20\text{см}$;
- модуль пружності матеріалу балки $E = 210000\text{Мпа} = 21000\text{кН} / \text{см}^2$;
- рівномірно розподілене навантаження (див. рис. 12.5)
 $q = 5\text{кН} / \text{м} = 0,05\text{кН} / \text{см}$;

- товщина з'єднувальних планок $t = 4\text{мм} = 0,4\text{см}$;
- ширина з'єднувальних планок $b_p = 20\text{мм} = 2\text{см}$.

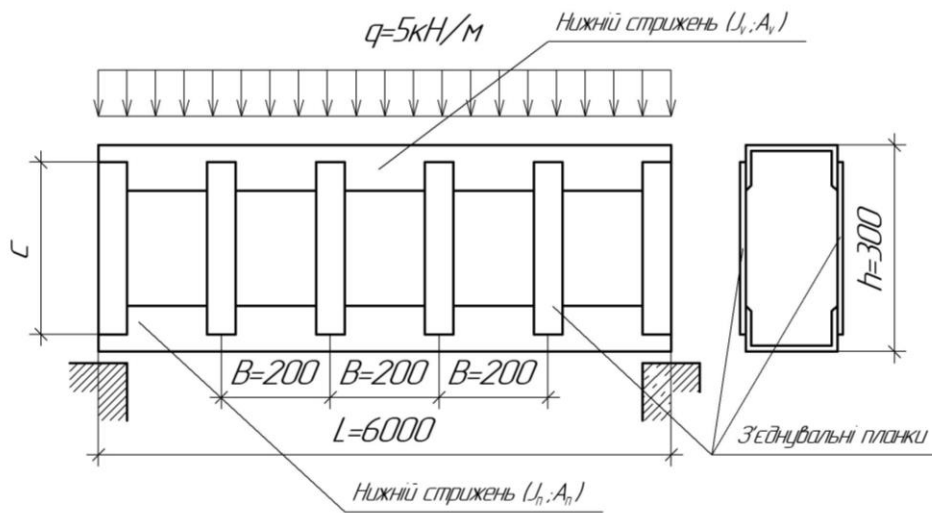


Рис. 12.5. Схема складеної балки до прикладу розрахунку

Далі усі параметри будуть включати до себе: одиниці довжини – у сантиметрах; одиниці сили – у кілоньютонах; моменти інерції перерізів будуть мати розмірність см^4 , осьова жорсткість EA – у кілоньютонах; згинальна жорсткість EJ – у $\text{кН} \cdot \text{см}^2$.

Послідовність розрахунку:

1. Визначимо момент інерції планки J_p як стрижня прямокутного перерізу:

$$J_p = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,4\text{см} \cdot 2^3\text{см}}{12} = 0,27\text{см}^4.$$

2. Моменти інерції верхнього та нижнього стрижнів знайдемо з довідника [4]: $J_y = J_n = 113\text{см}^4$.

3. Швелери в складеній балці розміщені як показано на рис. 12.5. Тому з таблиці довідника слід взяти мінімальний момент інерції J_y , адже в таблицях наведені максимальні та мінімальні осьові моменти інерції (рис. 12.6).

Табличні дані для швелера № 20

$$J_x = 1520\text{см}^4, J_y = 113\text{см}^4, A = 23,4\text{см}^2, X_0 = 2,07\text{см}.$$

Схема поперечного перерізу та геометричних характеристик швелера за довідником [4].

Площа поперечного перерізу швелера $A = 23,4\text{см}^2$ (данні довідника [4]).

4. Відстань між центрами ваги швелерів визначаємо за формулою (див. рис. 12.5 та 12.6):

$$c = h \cdot 2 \cdot X_0 = 30 \text{ см} \cdot 2 \cdot 2,07 \text{ см} = 25,8 \text{ см},$$

де X_0 – відстань від центру ваги швелера до його верхньої грані [4] (рис. 12.6).

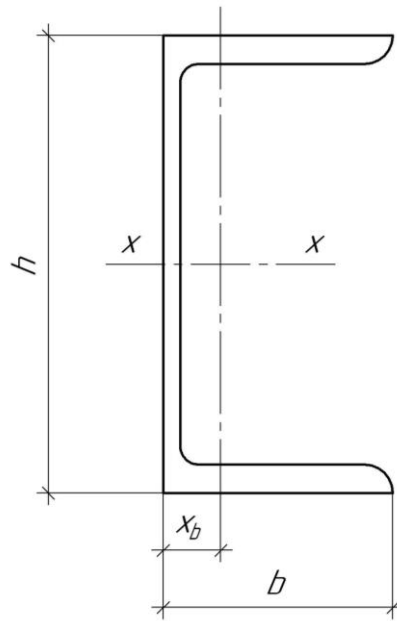


Рис. 6. Схема поперечного перерізу та геометричних характеристик швелера за довідником [4]

5. За формулою (12.9) визначаємо коефіцієнт жорсткості в'язей зсуву:

$$\zeta = \frac{24E}{Bc^2(2c/J_p + B/J_v)} = \frac{24 \cdot 21000 \text{ кН}}{20 \text{ см} \cdot (25,8 \text{ см})^2 (2 \cdot 25,8 \text{ см} / 0,27 \text{ см}^4 + 20 \text{ см} / 113 \text{ см}^4)} = 0,198 \text{ кН} / \text{см}^2.$$

6. Визначаємо сумарну згинальну жорсткість складеної балки за формулою (12.4):

$$\sum EJ = EJ_1 + EJ_2 = 21000 \text{ кН} / \text{см}^2 \cdot 113 \text{ см}^4 + 21000 \text{ кН} / \text{см}^2 \cdot 113 \text{ см}^4 = 4746000 \text{ кН} \cdot \text{см}^2.$$

7. Визначаємо осьову жорсткість складених стрижнів:

$$EA_1 = EA_2 = 21000 \text{ кН} / \text{см}^2 \cdot 23,4 \text{ см} = 491400 \text{ кН}.$$

8. Визначаємо параметри γ за формулою (12.7) та λ за формулою (12.11):

$$\gamma = \frac{1}{EA_1} + \frac{1}{EA_2} + \frac{c^2}{\sum EJ} = \frac{1}{491400 \text{ кН}} + \frac{1}{491400 \text{ кН}} + \frac{(25,8 \text{ см})^2}{4746000 \text{ кН} \cdot \text{см}^2} = 1,443 \cdot 10^{-4} \cdot 1 / \text{кН},$$

$$\lambda = \sqrt{\xi \gamma} = \sqrt{0,198 \text{ кН} / \text{см}^2 \cdot 1,443 \cdot 10^{-4} \cdot 1 / \text{кН}} = 0,0053 \cdot 1 / \text{см}.$$

9. Визначаємо максимальну поперечну силу в суцільній балці за формулою (12.14):

$$T_{m,\max} = \frac{q \cdot l^2 \cdot c}{\pi^2 \cdot \gamma \cdot \sum EJ} = \frac{0,05 \text{ кН} / \text{см} \cdot (600 \text{ см})^2 \cdot 25,8 \text{ см}}{3,14^2 \cdot 1,443 \cdot 10^{-4} \cdot 1 / \text{кН} \cdot 4746000 \text{ кН} \cdot \text{см}^2} = 68,77 \text{ кН}.$$

10. Визначаємо максимальну поперечну (дотичну) силу в шві складеної балки за формулою (12.13):

$$T_{\max} = T_{m,\max} \frac{\lambda^2 l^2}{\lambda^2 l^2 + \pi^2} = 68,77 \text{кН} \cdot \frac{(0,0053 \cdot 1/\text{см})^2 \cdot (600\text{см})^2}{(0,0053 \cdot 1/\text{см})^2 \cdot (600\text{см})^2 + (3,14)^2} = 34,8 \text{кН}.$$

11. Визначаємо максимальний згинальний момент в верхньому стрижні за формулою (12.15):

$$\begin{aligned} M_{\text{ver}} &= M^0 \frac{EJ_1}{\sum EJ} - T \cdot a \cdot \frac{EJ_1}{\sum EJ} = \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot 0,5 - T \cdot a \cdot 0,5 = \\ &= \frac{0,05 \text{кН} / \text{см} \cdot (600\text{см})^2}{8} \cdot 0,5 - 34,8 \text{кН} \cdot (25,8\text{см} / 2) \cdot 0,5 = 901 \text{кН} \cdot \text{см}, \end{aligned}$$

де $q \cdot l^2 / 8$ – максимальний згинальний момент в однопрогоновій шарнірно обпертій балці.

Як бачимо, максимальний згинальний момент в верхній балці складає 80% від згинального моменту в неї за умови відсутності в'язей. Тобто за рахунок з'єднуючих планок зовнішнє навантаження розподіляється між верхнім та нижнім стрижнями складеної балки. Чим більшою буде жорсткість планок, тим більше зовнішнє навантаження розподіляється між двома стрижнями складеної балки. Так, якщо ширину планок прийняти 50мм, то згинальний момент, який сприймається верхньою балкою, визначений за вище наведеними формулами, буде складати $M_{\text{ver}} = 708 \text{кН} \cdot \text{см}$. Якщо крім того зменшити крок розташування планок з 200мм, до 100мм, то згинальний момент буде дорівнювати $M_{\text{ver}} = 695 \text{кН} \cdot \text{см}$, що складе 61% від згинального моменту в верхньому стрижні за умови відсутності в'язей зсуву.

ВИСНОВКИ

Робота складених стрижнів суттєво відрізняється від роботи суцільних. Цей фактор повинен бути врахованим в розрахунках складених стрижнів, в тому числі складених балок.

Напружено-деформований стан складених балок залежить від жорсткості в'язей, за допомогою яких складаючі стрижні з'єднуються між собою. Чим більша жорсткість в'язей складеної балки, тим більш робота складеної балки наближається до роботи суцільної балки, складаючі частини якої жорстко пов'язані між собою.

У даних методичних вказівках на прикладі двохшарової складеної балки показано методику розрахунку таких конструкцій, що дозволяє студенту проводити розрахунки деталей машин та інженерних конструкцій. Крім того, в методичних вказівках наведено формули для визначення вертикальних зусиль в поперечних в'язях.

ГЛОСАРІЙ

Абсолютно тверде тіло – це тіло, відстань між будь-якими його точками залишається незмінною під дією на нього інших тіл.

Балка – плоска конструкція, що працює в умовах чистого або поперечного плоского згину.

В Міжнародній системі одиниць (СІ) модуль сили вимірюється в ньютонках (Н).

Внутрішні сили – сили взаємодії між окремими точками даного тіла чи між тілами однієї системи.

Дотичні напруги деформації згину напруги, які виникають в поперечних перерізах балки та спричиняють деформацію зсуву.

Зминання – пластична деформація, яка виникає на поверхнях контакту.

Зовнішні сили – сили з якими діють на дане тіло чи систему інші тіла.

Зсув – такий вид деформації при якій у будь-якому поперечному перерізі бруса виникає лише поперечна сила.

Інтенсивність – величина сили, яка припадає на одиницю довжини ділянки, що навантажується. В системі СІ позначена у Н/м.

Кручення – такий вид деформації при якому в будь-якому поперечному перерізі бруса під дією пари сил виникає тільки крутний момент.

Матеріальна точка – це точка, яка має масу. Вважають матеріальною точкою не тільки тіло малих розмірів, а й будь-яке тіло, розмірами якого в умовах даної задачі можна знехтувати (наприклад зорі).

Момент опору деформації згину є відношення осьового моменту інерції поперечного перерізу відносно нейтральної осі до відстані від цієї осі до найбільш віддаленого волокна. Одиниця виміру моменту опору згину

$$[W] = \frac{[J]}{[y_{\max}]} = \text{м}^3.$$

Момент пари – добуток модуля однієї з сил пари на плече пари

$$m(P_1, P_2) = P_1 \cdot h = P_2 \cdot h.$$

Моментом сили відносно точки називають добуток модуля сили на її плече : $M_0(P) \equiv P \cdot h$.

Напруга σ – це внутрішня сила, віднесена до одиниці площі перерізу. Напруга – векторна величина. Одиниця виміру напруги

$$[\sigma] = \frac{[P]}{[A]} = \frac{\text{сила}}{\text{площа}} = \frac{\text{ньютон}}{\text{кв.метр}} = \text{паскаль (Па)}.$$

Нейтральною віссю бруса називають лінію перетину нейтрального шару з площиною поперечного перерізу. На нейтральній осі нормальні напруги **дорівнюють нулю**.

Необхідний запас міцності матеріалу – n є відношення границі міцності матеріалу (розтяг або стиск) до напруги яка виникає на тій чи іншій ділянці бруса відповідно до розтягу або стиску.

Ньютон – це така сила, яка надає тілу 1 кг прискорення 1 м/с^2 у напрямку дії сили $9,81H \approx 1\text{кгс}$.

Обертальним моментом називають момент сили прикладеної до диска відносно його осі обертання.

Опорні реакції – сили (R_A – вертикальна, H_A – горизонтальна), які виникають в опорах внаслідок дії на них зовнішніх сил.

Осьовим моментом інерції плоскої фігури відносно осі, яка лежить у тій самій площині, називають взятую по всій площі перерізу суму добутків площ елементарних площадок dA на квадрат їх відстаней від цієї осі.

Пара сил – система двох рівних по модулю, протилежно направлених паралельних сил.

Плече пари (h) – найкоротша відстань між лініями дії сил пари.

Плече сили – найкоротша відстань від центра моменту до лінії дії сили. Одиниця моменту сили

$$[M] = [P] \cdot [h] = \text{сила} \times \text{довжина} = \text{ньютон} \times \text{метр} = H \cdot \text{м}.$$

Полярним моментом інерції плоскої фігури відносно осі, яка лежить у тій самій площині, називають взятую по всій площі перерізу суму добутків площ елементарних площадок dA на квадрат їх відстаней від полюса O . Одиниці виміру полярного моменту інерції

$$[J_p] = [\rho^2] \cdot [A] = \text{м}^2 \cdot \text{м}^2 = \text{м}^4.$$

Потужністю сили називають роботу, виконану протягом одиниці часу, визначають за формулою $N = \frac{A}{t} = \frac{\text{робота}}{\text{час}} = \frac{\text{джоуль}}{\text{с}} = \text{ват}(\text{Вт})$.

Проекцією сили на вісь називають відрізок осі, який лежить між двома перпендикулярами, опущеними на вісь з початку і кінця вектора сили.

Просторова система збіжних сил

Просторова система сил – система сил, лінії дії яких лежать у різних площинах.

Просторова система сил є збіжною, якщо лінії дії сил системи перетинаються в одній точці.

Рівновага – такий стан, при якому тіло перебуває у спокої або рухається прямолінійно рівномірно чи рівномірно обертається.

Сила – це міра механічної взаємодії сил.

Статика – це відділ теоретичної механіки, який вивчає умови за яких тіло перебуває у рівновазі (стан спокою, або прямолінійного і рівномірного руху).

Статичний момент площі фігури відносно осі що лежить у тій самій площині, дорівнює добутку площі фігури на відстань її центра ваги від цієї осі. Одиниця статичного моменту площі

$$[S] = [x_c] \cdot [A] = m \cdot m^2 = m^3.$$

Центр моменту – точка відносно якої беруть момент сили.

Чистим згином вважається такий вид деформації, при якому в будь-якому поперечному перерізі бруса виникає тільки згинальний момент.

Шарнір – рухоме з'єднання двох тіл, допускає обертання тільки навколо спільної осі (циліндричний шарнір) або спільної точки (кульовий шарнір).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Азизов, Т. Н. Общий подход к определению крутильной жесткости железобетонных элементов с трещинами / Т. Н. Азизов // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. – Рівне : Нац. ун-т водного господарства та природокористування, 2008. – Вип. 17. – С. 92-99.
2. Азізов, Т. Н. Технічна механіка : [метод. рек. для виконання практич. занять] / Т. Н. Азізов, О. С. Мельник ; МОНмолодьспорту України, Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини. – Умань : [ТК Сатурн TV], 2011. – 42 с.
3. Мельник, О. В. Крутильна жорсткість та міцність залізобетонних елементів коробчастого перерізу з нормальними тріщинами : дис. ... канд. тех. наук : 05.23.01 / О. В. Мельник. – Одеса, 2012. – 256 с.
4. Пашков, Н. Н. Техническая механика для строителей учеб. пособие для средних проф.-техн. училищ / Н. Н. Пашков, Н. А. Киль. – Изд. 3-е, перераб. и доп. М., Высшая школа, 1977. 335 с.
5. Писаренко Г. С. Опір матеріалів : підручник / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Є. С. Уманський. – К.: Вища школа, 2004. – 653. [3] с.
6. Писаренко, Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев – К. : Наукова думка, 1975.– 704 с.
7. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики : учебник / С. М. Тарг. – М. : Физматгиз, 1989. – 232 с.
8. Технічна механіка : доп. М-вом вищої і серед. спец. освіти СРСР як підруч. для сер. спец. навч. закладів / О. О. Ердеді, І. В. Аникін, Ю. О. Медведєв, О. С. Чуйков – К. : Вища школа, 1983. – 367, [1] с.
9. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов : ученик / В. И. Феодосьев. – М. : Гл.ред физ.-мат. литературы, 1970. – 544 с.
10. Цай, Т. Н. Строительные конструкции : ученик / Т. Н. Цай, М. К. Бородич, А. П. Мандриков. – М. : Стройиздат, 1984. – Т. 1. – 656 с.
11. Цай, Т. Н. Строительные конструкции : ученик / Т. Н. Цай. – М. : Стройиздат, 1985. – Т. 2. – 462 с.
12. Эрдеди, А. А. Техническая механика: Теоретическая механика. Сопротивление материалов: учебное пособие / А. А. Эрдеди., Ю. А. Медведев., Н. А. Эрдеди – М. : Высшая школа, 1991. – 304 с.

Навчальне видання

Т. Н. Азізов, О. В. Мельник, О. М. Орлова

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Видається в авторській редакції

Підписано до друку 31.10.2018 р. Формат 60x84/16.
Папір офсетний Ум. Друк арк.2,0
Тираж 300. Замовлення № 2008

Видавничо-поліграфічний центр «Візаві»
20300, м. Умань, вул. Тищика, 18/19
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 2521 від 08.06.2006.
тел. (04744) 4-64-88, 4-67-77, (067) 104-64-88
vizavi-print.jimdo.com
e-mail: vizavi008@gmail.com