

# RIGIDITY AND TORSIONAL STRENGTH OF REINFORCED CONCRETE BARS WITH NORMAL CRACKS

**Taliat Azizov**, Professor, DSc (eng.)<sup>1</sup>, **Dmytro Kochkarev**, DS (eng.)<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University, Uman, Ukraine

<sup>2</sup> National University of Water and Environmental Engineering, Rivne, Ukraine

## ЖЕСТКОСТЬ И ПРОЧНОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ СТЕРЖНЕЙ С НОРМАЛЬНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

**Азизов Т.Н.**, докт.техн. наук, проф.<sup>1</sup>, **Кочкарев Д.В.**, докт. техн. наук, доц. <sup>2</sup>,

<sup>1</sup>Уманский государственный педагогический университет имени Павла Тычины, г. Умань, Украина;

<sup>2</sup> Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно, Украина

**Abstract.** Methods are proposed for determining the torsional stiffness of reinforced concrete elements with normal cracks. In one method, average stiffness is introduced in the normal crack region. This rigidity is approximated according to a numerical experiment. A numerical experiment was carried out in the Lira program. The results obtained by the proposed method are compared with the data of a numerical experiment. Good convergence of the calculated data and the data of the numerical experiment is shown.

**Аннотация.** Предложены способы определения крутильной жесткости железобетонных элементов при наличии в них нормальных трещин. Предложен способ, предполагающий введение средней жесткости на участке с нормальными трещинами и ее аппроксимацию с помощью коэффициента, полученного из решения некоторого количества задач с применением апробированных программных комплексов. Приведено сравнение результатов, полученных по предложенной методике, с расчетами при помощи объемных конечных элементов. Показана удовлетворительная сходимость расчетных данных и данных численного эксперимента.

**Keywords:** approximation, torsion, reinforced concrete element, normal crack, average stiffness, reinforcement.

**Ключевые слова:** аппроксимация, кручение, железобетонный элемент, осредненная жесткость, нормальная трещина, арматура.

### **Анализ публикаций и постановка задачи.**

Известно, что в статически неопределимых системах (каркасы зданий, мосты, ребристые монолитные и сборные перекрытия) перераспределение усилий существенно зависит от соотношения осевых, изгибных и крутильных жесткостей их отдельных элементов. В свою очередь на жесткости оказывают влияние различные трещины [1, 2, 5, 6, 9]. В работах [2, 6, 7, 8, 13, 15] показано, что перераспределение локальной нагрузки зависит практически одинаковым образом как от изгибной, так и от крутильной жесткостей отдельных элементов. Несмотря на это, большинство расчетов при расчете железобетонных стержневых систем, включая и известные мощные программные комплексы, проводится без учета изменения крутильной жесткости в результате образования нормальных трещин. Как правило, в существующих методах расчета изменяют изгибную жесткость железобетонных элементов. Изменение крутильной жесткости или игнорируется вообще, или учитывается только при наличии пространственных трещин. Существующие методики определения жесткости на кручение [9, 10, 15] касаются в основном железобетонных элементов с пространственными (спиральными) трещинами при действии изгиба с кручением, хотя экспериментальными исследованиями установлено существенное влияние нормальных трещин на крутильную жесткость железобетонных элементов [8, 12]. Эта проблема и на сегодня остается достаточно острой. И связана она в основном с отсутствием достоверных методов определения крутильной жесткости железобетонных элементов с нормальными трещинами.

Работы [1, 5, 14, 15, 16] посвящены исследованию крутильной жесткости железобетонных элементов с нормальными трещинами. Несмотря на это, существует необходимость создания инженерных методов определения крутильной жесткости железобетонных элементов с нормальными трещинами, целью которых должна быть простая методика, позволяющая на этапе

вариантного проектирования быстро и без применения сложных вычислительных процессов определить жесткость железобетонного элемента с нормальными трещинами.

В связи с вышесказанным **целью настоящей статьи** является развитие методов определения крутильных жесткостей железобетонных элементов с нормальными трещинами с использованием данных численного эксперимента, полученных на основе применения известных программных комплексов, с целью получения инженерной методики расчета.

### **Изложение основного материала.**

Рассмотрим для начала железобетонный элемент прямоугольного сечения с нормальными трещинами (рис. 1). Смещению в трещине блока А относительно блока В препятствуют неизвестная нагельная сила в продольной арматуре и сопротивление части бетонного сечения над трещиной. Неизвестную нагельную силу согласно [5, 15, 16] нетрудно определить из условия равенства перемещений в месте условного рассечения продольной арматуры.

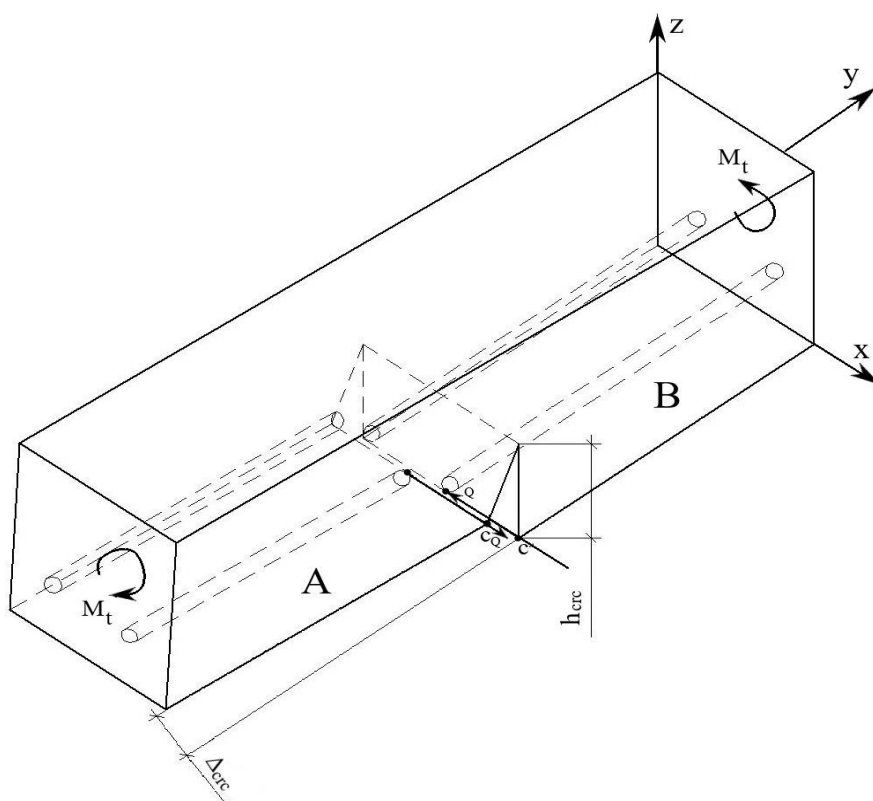


Рис. 1. Схема для определения нагельной силы в арматуре при взаимном повороте двух блоков, отделенных трещиной

После рассечения продольной арматуры главной и одной из самых сложных частей задачи становится определение взаимного смещения берегов нормальной трещины. Сложность задачи состоит в том, что смещение одного блока относительно другого происходит в результате местных деформаций над трещинами. В этом легко убедиться, смоделировав стержень с нормальным разрезом с помощью объемных конечных элементов (рис. 2).

В большинстве случаев смещение между точками *c* и *d* будет больше перемещения точки *c* от кручения цельного блока длиной *l*. И чем больше высота трещины, тем большей будет эта разница.

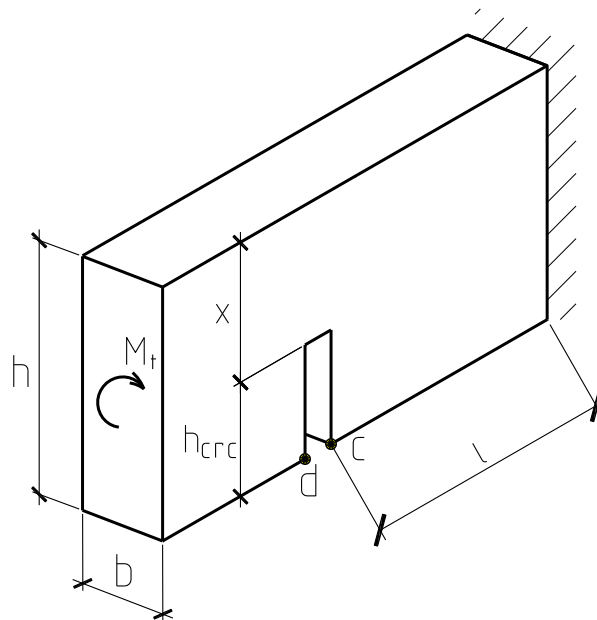


Рис. 2. Модель элемента с нормальным разрезом

Это обстоятельство существенно усложняет задачу. Ввиду малости длины участка над трещиной (ширины раскрытия трещины) попытка рассчитать перемещения элемента как стержня с переменным поперечным сечением не приведет к правильным результатам. Так, например, если рассмотреть стержень со ступенчатым изменением сечения (рис. 3), то угол поворота его торца, к которому приложен крутящий момент  $M_t$ , определится по известной формуле сопротивления материалов:

$$\varphi = M_t \left( \frac{l_1}{GJ_1} + \frac{l_2}{GJ_2} + \frac{l_3}{GJ_3} \right), \quad (1)$$

где  $GJ_1$ ,  $GJ_2$ ,  $GJ_3$  – соответственно крутильные жесткости первого второго и третьего участков стержня.

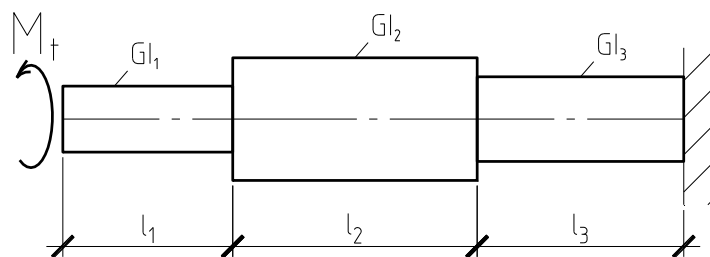


Рис. 3. Схема стержня со ступенчатым изменением жесткости

Легко видеть, что если смоделировать ступенчатую жесткость элемента с трещиной, то расчет по формуле (1) даст ничтожно малое приращение перемещения (поворота) в месте резкого изменения сечения элемента в виду его ничтожной длины.

В работах [4, 15] предложено было определять взаимное перемещение берегов нормальной трещины с помощью аппроксимации данных численного эксперимента. Для этого следует создать базу данных функций зависимости перемещения в трещине от геометрических параметров элемента, высоты трещины и расстояния между трещинами. Это достаточно надежный подход, однако, на сегодняшний день такая база данных не создана ввиду надобности проведения сотен однотипных расчетов.

Эту задачу можно упростить с помощью инженерных способов определения смещения в трещине. Один из таких способов предложен в [1]. Согласно этого метода из серии расчетов с использованием объемных конечных элементов, в стандартных программных комплексах, для балок с различным соотношением высоты сжатой (от изгиба) зоны, длины блока между трещинами, высоты сечения блока и его ширины получают зависимости перемещений (поворотов) в рассматриваемых блоках. Затем, используя схему стержня с переменной высотой сечения (рис. 4), следует подобрать функцию изменения его высоты по длине блока вдоль продольной оси стержня  $h_y=f(y)$  от начальной высоты, равной высоте сжатой (от изгиба) зоны  $X$ , до полной высоты  $h$  в конце блока длиной  $l_0$ .

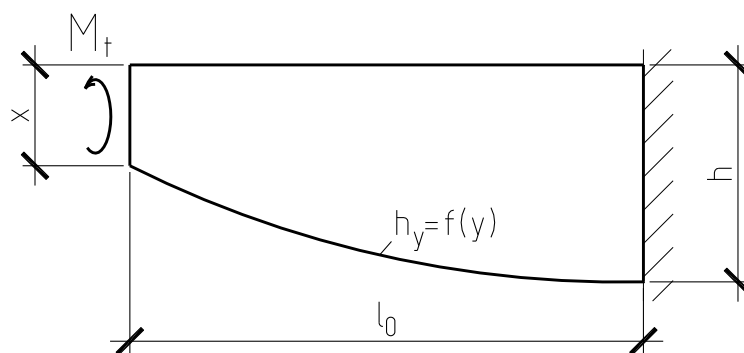


Рис. 4. Схема стержня с переменной высотой поперечного сечения

К левому концу такого эквивалентного стержня прикладывается крутящий момент  $M_t$ , правый конец считается жестко заземленным. Задача решается элементарными методами сопротивления материалов для закрученного стержня с переменной высотой сечения. Функцию изменения высоты  $h_y=f(y)$  (вернее, функцию изменения крутильной жесткости), следует подбирать таким образом, чтобы поворот левого конца эквивалентного стержня (рис. 4) был равен повороту верхней части объемного блока, к части поперечного сечения, которого приложен крутящий момент. Данный момент должен быть рассчитан с использованием объемных конечных элементов в стандартном программном комплексе, в котором реализован МКЭ. Такой подход позволяет (после получения функций изменения высоты сечения для блоков с любой длиной, шириной и высотой сечения, а также с любой высотой сжатой от изгиба зоны бетона) ввести в общую программу расчета весьма малую подпрограмму, которая вычисляет поворот конца сечения высотой  $X$ . При тщательном подборе функции изменения высоты получается весьма высокая точность приближения.

Согласно этого же метода следует построить (на основании численного эксперимента) кривую, вида

$$\varphi_{crс}/\varphi_{tot} = f(J_{crс}/J_{tot}), \quad (2)$$

В выражении (2) приняты следующие обозначения:  $\varphi_{crс}$ ,  $\varphi_{tot}$  – соответственно углы поворота стержня сечением  $b \times x$  (т.е. ширина равна ширине рассчитываемого стержня, а высота – высоте сжатой от изгиба зоны  $x$ ) и стержня полного сечения  $b \times h$  (см. рис. 4);  $J_{crс}$ ,  $J_{tot}$  – соответственно моменты инерции на кручение этих же стержней. Вид этой кривой показан на рис. 5.

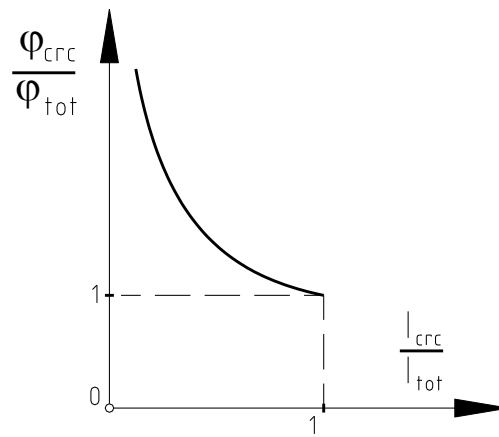


Рис. 5. Зависимость отношения углов закручивания к отношению моментов инерции при кручении

Кривая имеет в качестве асимптоты вертикальную ось координат, а справа ограничена координатами 1:1, что вполне очевидно. После построения зависимости (2) для данной длины (вернее, для данного отношения высоты сечения к расстоянию между трещинами) следует подобрать также эмпирическую зависимость изменения такой кривой с изменением расстояния между трещинами.

Зависимость типа  $h_y=f_1(y)$  или типа  $J_t(y)=f_2(y)$  (см. рис. 4) можно построить, например, в среде Excel. Для этого следует задавать различный тип этой функции (например, в виде полинома степени  $n$ ), далее рассмотреть стержень со ступенчатым изменением момента инерции на кручение  $J_t(y)$ , определить угол поворота по формуле сопротивления материалов и сравнить его с данными расчета с использованием объемных конечных элементов. Кроме того, можно варьировать длиной  $l_0$  зоны, в конце которой стержень имеет уже сечение с высотой, равной полной высоте сечения  $h$ . Произведя некоторое число попыток, нетрудно получить функцию кривой, показанной на рис. 4.

Рассмотрим теперь способ, требующий меньшего количества предварительных вычислений с объемными конечными элементами по сравнению со способами, описанным выше. Этот способ основывается на методе усреднения жесткостей в сечении, подобно тому, как это сделано в европейских нормах при определении перемещений от изгиба железобетонных элементов с трещинами [17].

Рассмотрим элемент с нормальными трещинами, жестко заделанный одним торцом, а к другому торцу которого приложен крутящий момент  $M_t$  (рис. 6).

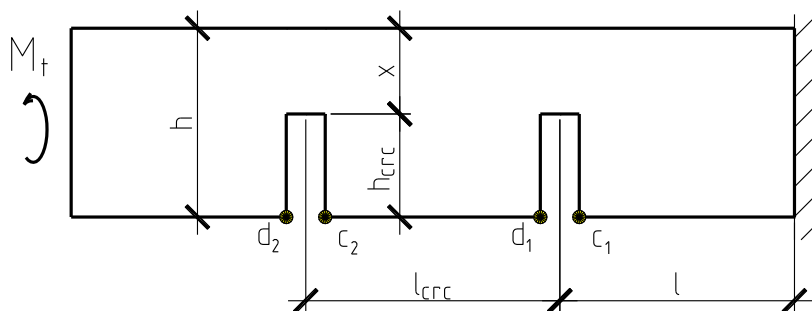


Рис. 6. Схема к определению средней жесткости

Следуя подобию методике [17], в связи с малой длиной участка с резко уменьшенной жесткостью (участка в пределах нормальной трещины) рассмотрим участок, включающий одну трещину и не треснувшую зону, и определим перемещение точки  $C_2$ , исходя из средней жесткости. Тогда угол поворота в точке  $C_2$  относительно точки  $C_1$  определится из формулы сопротивления материалов:

$$\varphi_{c2} = \frac{M_t l_{crc}}{G \cdot J_m} \quad (3)$$

где  $G$  – модуль сдвига материала балки;  $J_m$  – среднее значение жесткости на участке с нормальной трещиной, которое также по аналогии (но не тождественно) с [17] определится из выражения:

$$J_m = J_{tot} k + J_{crc} (1 - k) \quad (4)$$

где  $J_{crc}$ ,  $J_{tot}$  – соответственно момент инерции при кручении сечения с высотой, равной высоте, не треснувшей зоны над нормальной трещиной, и сечения с полной высотой элемента;  $k < 1$  – эмпирический коэффициент. Значение величины  $J_m$  лежит между  $J_{crc}$  и  $J_{tot}$ .

Остановимся отдельно на коэффициенте  $k$ . Подобно [17], где сказано, что любой действительный результат можно смоделировать, подобрав коэффициент распределения, исходя из экспериментальных исследований, мы можем утверждать, что в нашем случае этот коэффициент можно подобрать из численных экспериментов. Суть его определения состоит в том, что, имея



численные значения углов закручивания, следует с помощью аппроксимации подобрать выражение для  $k$ , при котором угол  $\varphi_{c2}$ , определяемый по выражению (3) с учетом (4), будет равен углу поворота, определенному из расчетов с использованием объемных конечных элементов. Эмпирический коэффициент  $k$  изменяется в пределах от 0 до 1. При  $k=0$  согласно формуле (4) средняя жесткость будет иметь жесткость, равную жесткости в трещине. При  $k=1$  среднее значение будет иметь жесткость полного сечения (без трещин).

Для определения нагельной силы в продольной арматуре нам необходимо знать перемещение точки  $d_1$  относительно точки  $C_1$  (см. рис. 6). Для этого от угла поворота  $\varphi_{c2}$  следует отнять угол поворота цельного блока между точками  $d_1$  и  $C_2$  (см. рис. 6). Другими словами разница углов поворота  $\Delta\varphi$  между точками  $C_1$  и  $d_1$  определится по выражению:

$$\Delta\varphi = \varphi_{d1} - \varphi_{c1} = \varphi_{c2} - \varphi_{cd} = \frac{M_t l_{crc}}{GJ_m} - \frac{M_t l_{crc}}{GJ_{tot}} \quad (5)$$

где  $\varphi_{d1}$ ,  $\varphi_{c1}$ ,  $\varphi_{c2}$  – углы поворота соответственно в сечениях  $d_1, c_1, c_2$ ;  $\varphi_{cd}$  – угол поворота между сечениями  $c_2$  и  $d_1$ .

Здесь следует сделать одну оговорку. Определение величины  $\varphi_{cd}$  по формуле сопротивления материалов (последний член выражения 5) с одной стороны не совсем корректно. Это связано с фактом, что крутящий момент в сплошном блоке  $c_2-d_1$  приложен не в середине сечения, а внецентренно. С другой стороны, при расчете стержневых элементов мы всегда рассматриваем условно только их осевую линию. Поэтому с точки зрения общепринятого расчета стержневых систем принятый подход вполне оправдан, что подтверждается сравнением смещения в трещине, определяемом по вышеприведенной схеме, и с помощью объемных конечных элементов, приведенном ниже.

Рассмотрим теперь технику определения углов поворота при расчете с помощью объемных конечных элементов. Учитывая, что в месте трещины мы имеем несимметричное сечение, то для определения угла поворота сечения следует учесть перемещения точек как внизу элемента, так и вверху. На рис. 7 показана схема определения угла поворота сечения по перемещениям угловых

точек.

Угол  $\varphi$  поворота сечения определится по одному из выражений (см. рис. 7)

$$\varphi = \frac{\Delta x_2 + \Delta x_4}{2 \cdot h}; \quad \varphi = \frac{\Delta z_2 + \Delta z_4}{2 \cdot b} \quad (6)$$

Перемещения в формуле (6) взяты без учета их знаков в глобальной системе координат расчетной схемы программного комплекса. Вместо точек 2 и 4 по диагонали сечения можно также взять точки 1 и 3 на рис. 7.

Следует отметить, что ввиду наличия нормальной трещины (разреза) перемещения точек 2 и 3 на рис. 7 в зоне сечения над разрезом будут складываться из перемещений от поворота сечения и местных деформаций, что искажает картину определения угла поворота по формулам (6), однако оговорка, сделанная к формуле (5), оправдывает такой подход.

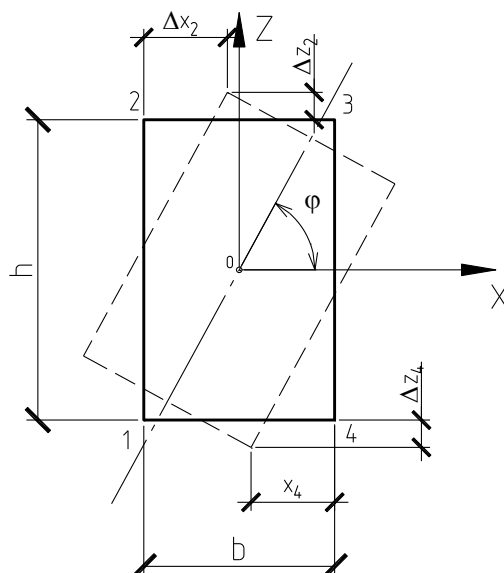


Рис. 7. Схема к определению угла поворота сечения

Правомерность применения методики осредненного сечения покажем на примере балок прямоугольного сечения с различной шириной, высотой сечения и высотой нормальной трещины. При этом коэффициент  $k$  получен аппроксимацией с варьированием ширины и высоты сечения  $b$  и  $h$ , высоты трещины  $h_{cr}$ . Полученная аппроксимационная формула имеет вид:

$$k = 0.062 + 0.047 \frac{b}{h} + 0.776 \frac{h_{cr}}{h} - 0.238 \ln \left( \frac{h}{l_{cr}} \right) - 0.056 \frac{h_{cr}}{b}. \quad (7)$$

В таблице 1 приведено сравнение результатов, полученных по вышеприведенной методике и при расчете в программном комплексе «Ли́ра» с применением объемных конечных элементов.

Таблица 1. Сравнение результатов теоретических расчетов смещения между точками с1-с2 и числовым экспериментом по программе Ли́ра

$N\bar{n}$ n/n	$b$ , м	$h$ , м	$h_{cre}$ , м	$l_{cre}$ , м	$k$	$I_{tot}$ , $\times 10^5 \text{ м}^4$	$I_{cre}$ , $\times 10^5 \text{ м}^4$	$\Delta_{tot}$ , мм	$\Delta_{clira}$ , мм	$\Delta_{cm}$ , мм	$\delta$ , %
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.100	0.300	0.120	0.300	0.321	7.89	1.96	5.475	<b>10.970</b>	<b>11.192</b>	2.0
2	0.100	0.300	0.100	0.300	0.280	7.89	1.41	5.475	<b>13.051</b>	<b>13.389</b>	2.6
3	0.100	0.300	0.080	0.300	0.240	7.89	0.86	5.475	<b>16.043</b>	<b>16.955</b>	5.7
4	0.300	0.300	0.080	0.300	0.301	114.21	4.25	0.378	<b>1.230</b>	<b>1.157</b>	-5.9
5	0.100	0.300	0.120	0.600	0.486	7.89	1.96	10.951	<b>16.562</b>	<b>17.855</b>	7.8
6	0.300	0.300	0.080	0.300	0.301	114.21	4.25	0.378	<b>1.230</b>	<b>1.157</b>	-5.9
7	0.300	0.300	0.040	0.300	0.205	114.21	0.59	0.378	<b>2.021</b>	<b>1.809</b>	-10.5
8	0.100	0.300	0.040	0.300	0.159	7.89	0.16	5.475	<b>29.082</b>	<b>31.158</b>	7.1
9	0.100	0.300	0.100	0.600	0.445	7.89	1.41	10.951	<b>18.680</b>	<b>20.114</b>	7.7
10	0.100	0.300	0.080	0.600	0.405	7.89	0.86	10.951	<b>21.711</b>	<b>23.306</b>	7.3
11	0.100	0.300	0.180	0.300	0.442	7.89	3.91	5.475	<b>7.442</b>	<b>7.621</b>	2.4
12	0.100	0.300	0.180	0.300	0.442	7.89	3.91	0.548	<b>0.744</b>	<b>0.762</b>	2.4
13	0.100	0.300	0.120	1.200	0.651	7.89	1.96	21.901	<b>27.416</b>	<b>29.702</b>	8.3
14	0.100	0.300	0.120	0.600	0.486	7.89	1.96	10.951	<b>16.562</b>	<b>17.855</b>	7.8
15	0.100	0.300	0.120	0.900	0.582	7.89	1.96	16.426	<b>21.995</b>	<b>23.949</b>	8.9
16	0.100	0.300	0.120	0.140	0.139	7.89	1.96	2.555	<b>7.416</b>	<b>7.242</b>	-2.3
17	0.100	0.300	0.120	0.080	0.006	7.89	1.96	1.460	<b>5.804</b>	<b>5.779</b>	-0.4
18	0.300	0.300	0.120	0.080	0.082	114.21	12.91	0.101	<b>0.515</b>	<b>0.542</b>	5.3
19	0.300	0.300	0.120	0.900	0.658	114.21	12.91	1.135	<b>1.595</b>	<b>1.628</b>	2.1
20	0.300	0.300	0.120	0.300	0.397	114.21	12.91	0.378	<b>0.839</b>	<b>0.813</b>	-3.1
21	0.300	0.300	0.120	0.140	0.192	114.21	12.91	0.177	<b>0.624</b>	<b>0.624</b>	0.0
22	0.600	0.300	0.120	0.140	0.274	370.98	30.07	0.054	<b>0.173</b>	<b>0.163</b>	-5.6
23	0.600	0.300	0.120	0.080	0.141	370.98	30.07	0.031	<b>0.144</b>	<b>0.148</b>	2.4
24	0.600	0.300	0.120	0.300	0.455	370.98	30.07	0.116	<b>0.233</b>	<b>0.233</b>	0.0
25	0.600	0.300	0.120	0.900	0.717	370.98	30.07	0.349	<b>0.465</b>	<b>0.472</b>	1.7
26	0.600	0.300	0.040	0.300	0.256	370.98	1.20	0.116	<b>0.414</b>	<b>0.451</b>	9.0
27	0.600	0.300	0.080	0.300	0.355	370.98	9.37	0.116	<b>0.302</b>	<b>0.313</b>	3.8
28	0.600	0.300	0.180	0.300	0.605	370.98	94.13	0.116	<b>0.168</b>	<b>0.165</b>	-1.5
29	0.300	0.300	0.180	0.300	0.541	114.21	36.39	0.378	<b>0.547</b>	<b>0.550</b>	0.6
30	0.100	0.300	0.100	0.300	0.280	7.89	1.41	0.055	<b>0.130</b>	<b>0.134</b>	2.7
										x%=	<b>2.1</b>
										□%=	<b>5.0</b>
										v%=	<b>2.42</b>

В столбцах 2-5 таблицы приведены исходные данные для расчетов. В столбце 6 приведен коэффициент  $k$ , определенный по аппроксимационной формуле (7). В столбцах 10 и 11 приведены значения разницы перемещений между точками  $s_1$  и  $s_2$ , полученные соответственно по программе Ли́ра и теоретически по предложенной методике. В последних трех строчках таблицы приведены статистические данные сравнения, в том числе коэффициент вариации  $v$ .

Момент инерции при кручении прямоугольного сечения определяется по известной формуле сопротивления материалов:  $J_t = \alpha \cdot h \cdot b^3$ , где  $h$ ,  $b$  – соответственно большая и меньшая сторона прямоугольника;  $\alpha$  – коэффициент, зависящий от соотношения этих сторон. Учитывая это, вместо одного коэффициента аппроксимации  $k$  в некоторых случаях можно принять два коэффициента  $k_1$  и  $k_2$  в зависимости от соотношения сторон рассматриваемого прямоугольника. Т.е. при  $h - h_{crc} \leq b$  коэффициент  $k_1$ , при  $h - h_{crc} > b$  – коэффициент  $k_2$ .

Зная взаимное перемещение берегов нормальной трещины (которое определяется любым из приведенных выше способов) нетрудно определить взаимное перемещение точек в местах рассечения всех продольных стержней арматуры из условия плоского поворота сечения. Далее составлением условия совместности деформаций в местах рассечения арматурных стержней нетрудно получить уравнение или систему уравнений для определения нагельных сил во всех стержнях продольной арматуры. Так, если в сечении имеется один стержень продольной арматуры, то уравнение для определения нагельной силы  $Q$  в этом продольном стержне:

$$\Delta_{crc} = Q \cdot \overline{\Delta}_Q + 2 \cdot \Delta_{loc} \quad (8)$$

где  $\overline{\Delta}_Q$  – взаимное смещение берегов трещины в месте расположения арматуры от кручения единичной силой, приложенной в месте расположения этой арматуры;  $\Delta_{crc}$  – взаимное смещение берегов трещины в месте расположения продольной арматуры от крутящего момента  $M_t$ , приложенного к торцевому сечению;  $\Delta_{loc}$  – перемещение арматуры в результате местного

смятия бетона от действия нагельной силы. Величину  $\Delta_{loc}$  лучше определять по эмпирическим данным, приведенным в нормативных документах, например по [11]. Это связано с фактом, что моделирование даже с помощью объемных конечных элементов не дает результата, близкого к реальности, т.к. арматура в массиве бетона в реальных условиях сминает бетон под своей поверхностью, а при компьютерном моделировании конечные элементы, расположенные со стороны, противоположной направлению нагельной силы, также оказывают сопротивление перемещению. Величина  $\Delta_{loc}$  согласно [11] определяется по формуле:

$$\Delta_{loc} = 1000 \frac{Q^2}{d^3 E_c^2} + \frac{Q}{d \cdot E_c} \quad (9)$$

где  $d$  и  $E_c$  – соответственно диаметр арматурного стержня и модуль деформаций бетона.

Подставляя (9) в (8), решая квадратное уравнение и опуская отрицательное значение корня, получим величину неизвестной нагельной силы  $Q$  в арматуре:

$$Q = (-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}) / (2 \cdot a) \quad (10)$$

где обозначено:  $a = 2000 / (d^3 E_c^2)$ ;  $b = \overline{\Delta_Q} + 2 / (d \cdot E_c)$ ;  $c = -\Delta_{crc}$ .

После определения нагельных сил жесткость железобетонного элемента с нормальной трещиной определится из выражения:

$$B_{crc} = \frac{\Delta_{bl}}{\Delta_{bl} + \Delta} B_t, \quad (11)$$

где  $\Delta_{bl}$  – перемещение грани целого (без трещин) блока стержня, отделенного нормальной трещиной от кручения. Оно определяется по известным формулам сопротивления материалов;  $B_t$  – крутильная жесткость сплошного стержня без трещин;  $\Delta$  – полное перемещение в трещине, равное:

$$\Delta = 2 \cdot \Delta_{loc} \quad (12)$$

где  $\Delta_{loc}$  определяется по (9), но теперь уже известна величина  $Q$ . В формуле (12) величина  $\Delta_{loc}$  умножена на 2, т.к. перемещения в трещине складываются с двух сторон нормальной трещины.

Экспериментальными исследованиями авторов установлено [3], что прочность железобетонного элемента с нормальной трещиной при кручении существенно ниже прочности элемента без трещин, если элемент армирован только продольной арматурой.

Рассмотрим схему усилий, действующих в нормальном сечении с трещиной при действии крутящего момента (рис. 8). На рис. 8 заштрихованная часть – сжатая от изгиба зона (зона бетона без трещин). Внешний крутящий момент  $M_t$  воспринимается частично крутящим моментом  $M_v$ , действующим непосредственно в сжатой от изгиба зоне и моментом  $M_Q$ , воспринимаемым парой сил  $Q$  и  $Q_b$  от нагельной силы в арматуре. Момент этой пары сил (рис. 8) равен:

$$M_Q = Q \cdot Z_s \quad (13)$$

Условие равновесия (кручения вокруг продольной оси элемента) записывается в виде:

$$M_t - M_Q = M_v \quad (14)$$

Т.е. момент  $M_v$  - это часть внешнего крутящего момента, воспринимаемого бетоном сжатой от изгиба зоны.

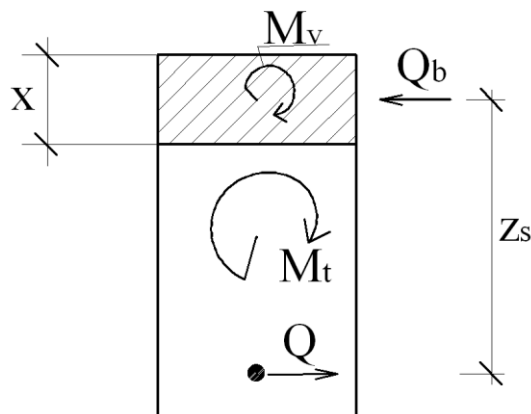


Рис.8. Схема усилий, действующих в нормальном сечении при кручении

Величина  $M_Q$  определяется после вычисления нагельной силы  $Q$  по методике, приведенной выше.

Разрушение может происходить по двум схемам:

1 схема – разрушение от среза сжатой зоны бетона в результате действия силы  $Q_b$  (рис. 8);

2 схема – разрушение сжатой от изгиба зоны в результате действия крутящего момента  $M_v$ , воспринимаемого этим участком.

Первое условие запишется в виде:

$$Q_b = \frac{M_t}{Z_s} \leq f_{sh} b \cdot x \quad (15)$$

где  $f_{sh}$  - расчетное сопротивление бетона срезу, принимаемого обычно равным удвоенной прочности бетона на растяжение  $f_{ct}$ , т.е.  $f_{sh}=2 \cdot f_{ct}$ ;  $M_t$  - внешний крутящий момент;  $Z_s$  - расстояние от центра тяжести арматуры до центра тяжести сжатой зоны бетона.

Расчет по формуле (15) идет в запас прочности, т.к. на самом деле пара сил  $Q_b - Q$  воспринимает не весь внешний крутящий момент, а только его часть (см. формулу 14). Поэтому основным условием прочности будет второе условие, которое запишется в виде:

$$M_v \leq [M_v], \quad (16)$$

где  $[M_v]$  - предельный крутящий момент, воспринимаемый бетоном сжатой от изгиба зоны, т.е. исключительно бетонного сечения с размерами  $b \times h = b \times x$ , т.е. ширина бетонного сечения равна ширине сечения балки, а его высота – высоте сжатой зоны бетона  $X$ .

Величину  $[M_v]$  рекомендуется определять из условия ограничения максимальных растягивающих напряжений, определенных по известным формулам сопротивления материалов для прямоугольного сечения, например [12]:

$$\tau_{max} = \frac{M_v}{\alpha \cdot b \cdot x^2} \quad (17)$$

где  $\alpha$  – коэффициент, зависящий от соотношения длинной стороны прямоугольника к короткой, приводимый в справочниках по сопротивлению материалов;  $b, x$  – соответственно большая и меньшая сторона прямоугольника.

Тогда условие прочности запишется в виде:

$$\tau_{max} \leq f_{sh} \quad (18)$$

Расчеты по приведенной методике, а также экспериментальные исследования [3, 12] показывают, что прочность при кручении железобетонного элемента с нормальной трещиной существенно зависит от сечения продольной арматуры, а также от глубины нормальной трещины. Этот факт опровергает общепринятое мнение, что прочность железобетонного элемента при кручении практически не зависит от сечения продольной арматуры. При наличии нормальных трещин прочность существенно зависит от количества продольной арматуры.

Приведем пример определения перемещения в элементе с нормальной трещиной. Задана балка прямоугольного сечения  $b \times h = 100 \times 300$  мм. В балке образовались трещины высотой  $h_{crc} = 120$  мм с расстоянием  $l_{crc} = 300$  мм. Необходимо найти относительное смещение между точками  $c_1$  и  $c_2$  (по рис. 6).

Решение. Относительное смещение между точками  $c_1$  и  $c_2$  равно:

$$\frac{\Delta_{c_2-c_1}}{\Delta_{tot c_2-c_1}} = \frac{I_{tot}}{I_m}$$

1. Момент инерции при кручении для полного сечения:

$$I_{tot} = \alpha h b^3 = 0.263 \times 0.3 \times 0.1^3 = 7.89 \times 10^{-5} \text{ м}^4. \text{ Где } \alpha = 0.263 \text{ при } h/b = 0.3.$$

2. Момент инерции при кручении для сечения с трещиной:

$$I_{crc} = \alpha h_{crc} b^3 = 0.163 \times 0.12 \times 0.1^3 = 1.96 \times 10^{-5} \text{ м}^4. \text{ Где } \alpha = 0.163 \text{ при } h/b = 1.2.$$

3. Коэффициент влияния жесткости при заданных условиях (по формуле 7):

$$k = 0.062 + 0.047 \frac{b}{h} + 0.776 \frac{h_{crc}}{h} - 0.238 \ln \left( \frac{h}{l_{crc}} \right) - 0.056 \frac{h_{crc}}{b} = 0.321.$$

4. Усредненный момент инерции при кручении для блока между трещинами (по формуле 4):

$$I_m = I_{tot} k + I_{crc} (1 - k) = 7.89 \times 0.321 + 1.96 \times (1 - 0.321) = 2.53 + 1.33 = 3.86 \times 10^{-5} \text{ м}^4.$$

5. Относительное смещение между точками  $c_1$  и  $c_2$  равно:

$$\frac{\Delta_{c_2-c_1}}{\Delta_{tot c_2-c_1}} = \frac{I_{tot}}{I_m} = \frac{7.89}{3.86} = 2,044.$$



Точное значение относительного смещения определенного с помощью МКЭ равно 2,00. Относительная ошибка составляет 2,15%.

**Выводы и перспективы исследований.** Предложены подходы к определению крутильных жесткостей железобетонных элементов с трещинами. Предлагаемый инженерный способ позволяет решать задачи о кручении железобетонных элементов путем введения средней жесткости и ее аппроксимации с помощью коэффициента, полученного из моделирования некоторого количества задач с применением апробированных программных комплексов. Приведено сравнение результатов, полученных по предложенной методике с расчетами с применением объемных конечных элементов. Сравнение показало удовлетворительную сходимость, что позволяет предложить применять разработанную методику в практике проектирования.

**В перспективе** предполагается распространение методики на решение задач о кручении железобетонных элементов различного поперечного сечения и с различными их размерами, а также распространение предложенного подхода на расчет с учетом нелинейных свойств железобетона.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Азизов Т.Н. Жесткость железобетонных элементов при кручении и ее влияние на пространственную работу мостов // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. Збірник наукових праць. НАН України. Фізико-мех.інститут ім.. В.Г. Карпенка. – Львів, 2009. – С. 576-590
2. Азизов Т.Н. Пространственная работа железобетонных перекрытий. Теория и методы расчета: Дисс. ... докт. техн. наук: 05.23.01 / Полтавский национальный технический университет. – Полтава, 2006. – 406 с.
3. Азизов Т.Н., Срібняк Н.Н. Прочность при кручении железобетонных элементов прямоугольного сечения с нормальными трещинами//Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. Вип. 17., – Рівне: Нац. ун-т водного господарства та природокористування, 2008. – С. 100-104.

4. Азизов, Т.Н. Использование аппроксимационных конечных элементов в расчетах конструкций // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – 2010. – № 39, частина 1. – С. 4-9.

5. Азизов, Т.Н. Определение крутильной жесткости железобетонных элементов с трещинами // Дороги і мости. Збірник наукових праць. К.: ДерждорНДІ, 2007. – Вип. 7. Том 1. – С. 3-8.

6. Горнов В.Н. Исследование прочности и жёсткости сборных железобетонных перекрытий из лотковых настилов // Материалы иконструкции в современной архитектуре. – М.: Стройиздат, 1950.

7. Дроздов П.Ф. Конструирование и расчёт несущих систем многоэтажных зданий и их элементов. – М.: Стройиздат, 1977. –223с.

8. Карабанов Б.В. Нелинейный расчет сборно-монолитных железобетонных перекрытий // Бетон и железобетон. – 2001. - №6. - С. 14-18.

9. Карпенко, Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами. / Н.И. Карпенко; – М.: Стройиздат, 1976. – 208 с.

10. Коуэн, Г.Дж. Кручение в обычном и предварительно напряженном железобетоне: Пер. с англ. – М.: Изд-во литературы по строительству, 1972. – 104 с.

11. Рекомендации по проектированию стальных закладных деталей для железобетонных конструкций / НИИЖБ. –М.: Стройиздат, 1984. – 87 с.

12. Срібняк, Н.М. Крутильна жорсткість залізобетонних елементів перекриттів з нормальними тріщинами: автореф. дис. .... канд. техн. наук 05.23.01. Одеська державна академія будівництва та архітектури. – О., 2009. – 23 с.

13. Улицкий Б.Е., Потапкин А.А, Руденко В.И., Сахарова И.Д., Егорушкин Ю.М. Пространственные расчёты мостов. – М.: Транспорт, 1967. – 404 с.

14. Яременко О.Ф., Школа Ю.О. Несучаздатність та деформативність залізобетонних стержневих елементів в складному напруженому стані – Одеса, 2010. – 136с.

15. Azizov T., Melnik O. and others Calculation of reinforced concrete ceilings with normal cracks accounting the Chebyshev approximation / 6 th International Scientific Conference “Reliability and Durability of Railway Transport Engineering Structures and Buildings” Transbud-2017. – Kharkiv, April 19-21, 2017/ - S. 1-7.

16. Azizov T., Jurkowska N., Kochkarev D. Basis of calculation on torsion for reinforced concrete structures with normal cracks // Concrete Innovations In Materials, Design And Structures. FibSymposium 2019. Cracow 27-29 May 2019. Book of Abstracts. S. 489-490

17. Narayanan R.S. (2009) Designers Guide to Eurocode 2: Design of Concrete Structures, London, Thomas Telford