

**USING THE SEMI-INFINITE ELEMENT SOLUTION IN DETERMINING
THE TORSION DISPLACEMENT OF A REINFORCED CONCRETE
ELEMENT WITH A NORMAL CRACK**

Azizov T.N.

Professor, DSc (eng.), Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University, Ukraine

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ТЕЛА
ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОТ КРУЧЕНИЯ
ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО ЭЛЕМЕНТА С НОРМАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ**

Азизов Т.Н.

Доктор технических наук, профессор, Уманский государственный
педагогический университет имени Павла Тычины

Abstract. The article presents a method for determining stresses and displacements in a normal crack using the well-known solutions of the theory of elasticity for a semi-infinite body. In this case, the imposition of the problem when a tangential force is applied on the free surface of a semi-infinite body and the problem of applying a force inside a semi-infinite body are considered. The problem is solved by drawing up a system of equations in which the condition of the absence of stresses on the lateral surfaces of a rectangular prism is set.

Аннотация. В статье приведена методика определения напряжений и перемещений при кручении элемента с нормальной трещиной с использованием известных решений теории упругости для полубесконечного тела. При этом рассматривается наложение задачи при приложении касательной силы на свободной поверхности полубесконечного тела и задачи о приложении силы внутри полубесконечного тела. Задача решена составлением системы уравнений, в которой ставится условие отсутствия напряжений на боковых поверхностях прямоугольной призмы.

Keywords: torsion, theory of elasticity, semi-infinite element, Cherruti problem, Mindlin problem.

Ключевые слова: кручение, теория упругости, полубесконечное тело, задача Черрути, задача Миндлина.

Анализ исследований и постановка задачи.

При рассмотрении жесткости и прочности при кручении железобетонных элементов в подавляющем большинстве работ предполагается наличие пространственных (спиральных) трещин [3-5]. Известно, однако, что на крутильную жесткость оказывают влияние и нормальные трещины. Задаче определения крутильной жесткости железобетонных элементов с нормальными трещинами посвящены работы автора настоящей статьи [1, 2]. В этих и других его работах предложены различные способы определения взаимного смещения берегов нормальной трещины, т.к. эта задача является наиболее важной и сложной в общей задаче определения крутильной жесткости железобетонных элементов.

К достоинствам работ по определению взаимного смещения берегов нормальной трещины [1] следует отнести простоту их использования, а к недостаткам – их приближенность, особенно в случае прямоугольного сечения стержня, подверженного кручению. В работе [2] предложен аппроксимационный метод решения задачи об определении взаимного смещения берегов нормальной трещины, при котором могут быть получены точные значения этих смещений. Однако, для получения банка данных аппроксимационных конечных элементов нужно провести тысячи численных расчетов в программных комплексах. Поэтому для расчета нужны методы точные с одной стороны и достаточно простые с другой.

В связи с вышесказанным **целью настоящей статьи** является разработка метода определения взаимного перемещения берегов нормальной трещины с использованием решений теории упругости для объемных тел.

Изложение основного материала.

Для расчета воспользуемся известными решениями задачи Черрути для касательной сосредоточенной силы на поверхности упругого полупространства. Для пояснения методики расчета рассмотрим решение для

элемента прямоугольного сечения, которое совершенно не сложно распространить на элементы любого другого поперечного сечения.

При работе элемента с нормальной трещиной касательные силы кручения прикладываются на некоторой части торцевого сечения (рис. 1) высотой $h-h_{\text{трс}}$, где $h_{\text{трс}}$ – глубина трещины.

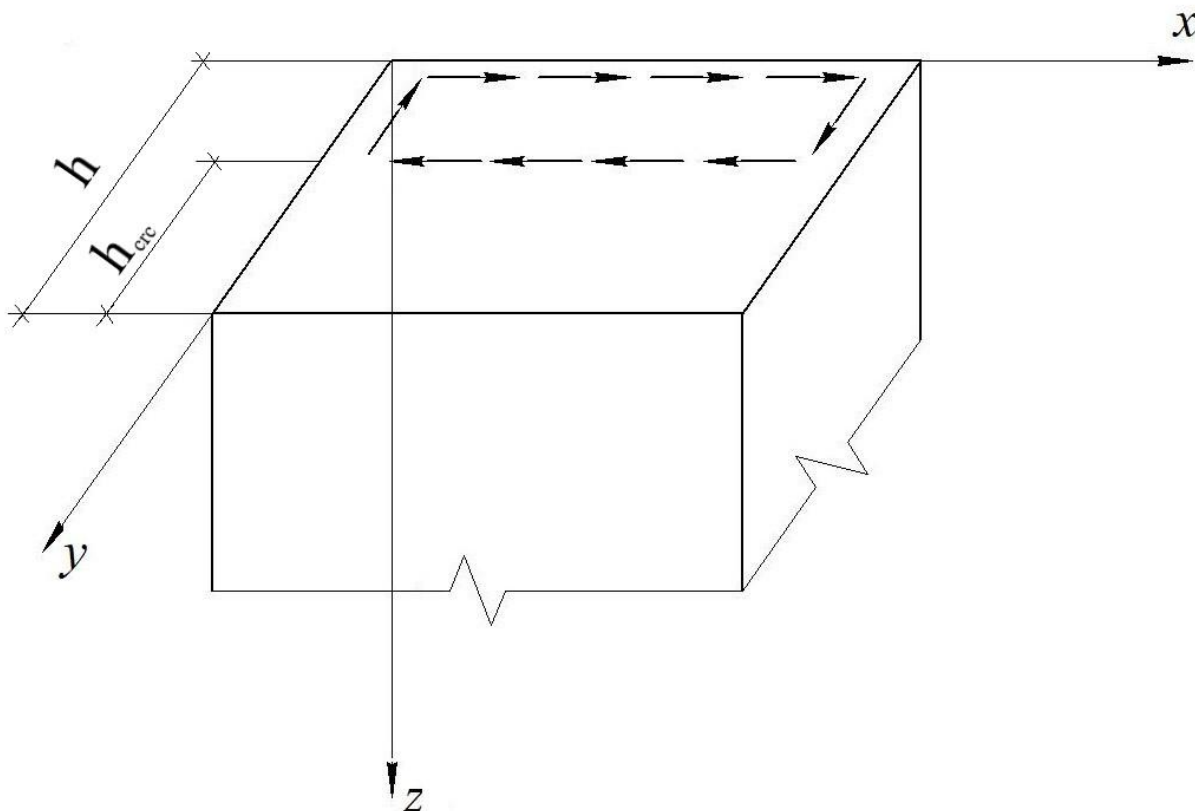


Рис. 1. Схема действия касательных сил на части торцевого сечения призмы

Выделим условно в упругом полупространстве призму с приложенными касательными силами и рассмотрим действие одной из этих сил Q (рис. 2) с целью определения напряженного состояния в этой призме. Причем сила Q приложена в начале координат. Напряженно-деформированное состояние в призме от действия остальных касательных сил будет получено как сумма напряженных состояний от действия одной силы.

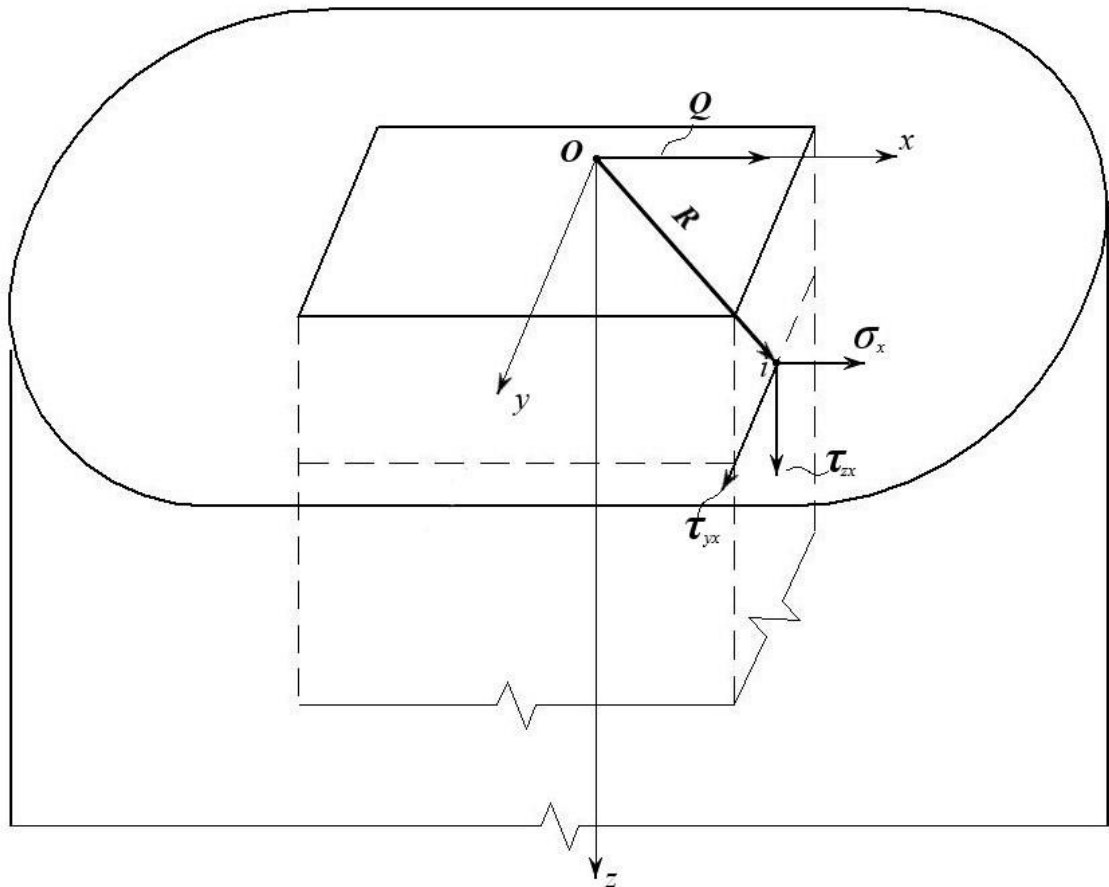


Рис. 2. Призма, помещенная в упругое полубесконечное пространство

Разобьем периметр призмы сеткой на некоторое конечное количество точек. В рассматриваемой точке i призмы из всего тензора напряжений будут действовать три составляющие напряжений (см. рис. 2) σ_x , τ_{zx} и τ_{yx} . Действие только трех составляющих тензора напряжений объясняется тем, что нас интересует только поверхность призмы. На гранях, параллельных плоскости Oxz будут действовать напряжения σ_y , τ_{zy} и τ_{xy} . Учитывая, что в торцевом сечении при приложении касательной силы Q как показано на рис. 2 напряжения везде будут равны нулю кроме точки, в которой приложена эта сила, внутренние силы будем рассматривать в точках, лежащих на определенном расстоянии по оси Z от края полубесконечного тела.

Напряжения в точке i определяются по довольно простым формулам, полученным из решения задачи Черрути [6] для упругого полупространства:

$$\sigma_x = \frac{Qx}{2\pi R^3} \left[-\frac{3x^2}{R^2} + \frac{1-2\mu}{(R+z)^2} \left(R^2 - \frac{2Ry^2}{R+z} - y^2 \right) \right] \quad (1)$$

$$\tau_{zx} = -\frac{3Qx^2z}{2\pi R^5} \quad (2)$$

$$\tau_{yx} = \frac{Qx}{2\pi R^3} \left[-\frac{3x^2}{R^2} - \frac{1-2\mu}{(R+z)^2} \left(R^2 - \frac{2Rx^2}{R+z} - x^2 \right) \right] \quad (3)$$

В выражениях (1), (2) и (3) приняты обозначения: R – расстояние от точки приложения силы Q на поверхности до рассматриваемой точки i (см. рис. 2), $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; μ – коэффициент Пуассона; x, y, z – соответствующие координаты точки (см. рис. 2).

При кручении вся поверхность призмы за исключением ее торца должна быть свободна от напряжений. Поэтому в точке i приложим неизвестные пока силы P_x, P_{zx}, P_{yx} (рис. 3), величина которых должна быть равна соответственно напряжениям $\sigma_x, \tau_{zx}, \tau_{yx}$, умноженным на площадь действия этих напряжений на нанесенной сетке на поверхности призмы. Силы P_x, P_{zx}, P_{yx} должны быть направлены в обратном направлении действию соответствующих напряжений $\sigma_x, \tau_{zx}, \tau_{yx}$.

Силы P_x, P_{zx}, P_{yx} приложены внутри упругого полупространства. Напряжения от действия этих сил получим из решения задачи Р. Миндлина [6, 7]. Во избежание громоздкости формулы для определения этих напряжений здесь не приводим, т.к. это известные формулы [6], где напряжения зависят только от приложенной силы и координат. Отметим только, что в каждой точке i имеется своя местная система координат с началом в этой точке. Тогда в формулах определения напряжений от действия сил, приложенных в точке i , расстояние R до другой точки j на сетке будет определяться уже исходя из этой системы координат (см. рис. 3).

В точке j будут действовать как напряжения $\sigma_x, \tau_{zx}, \tau_{yx}$, определенные из решения задачи Черрути от действия внешней силы Q (см. рис. 2), так и напряжения от действия сил задачи Миндлина, приложенных в самой точке j , а также сил, приложенных во всех точках сетки, нанесенной на поверхность

рассчитываемой призмы.

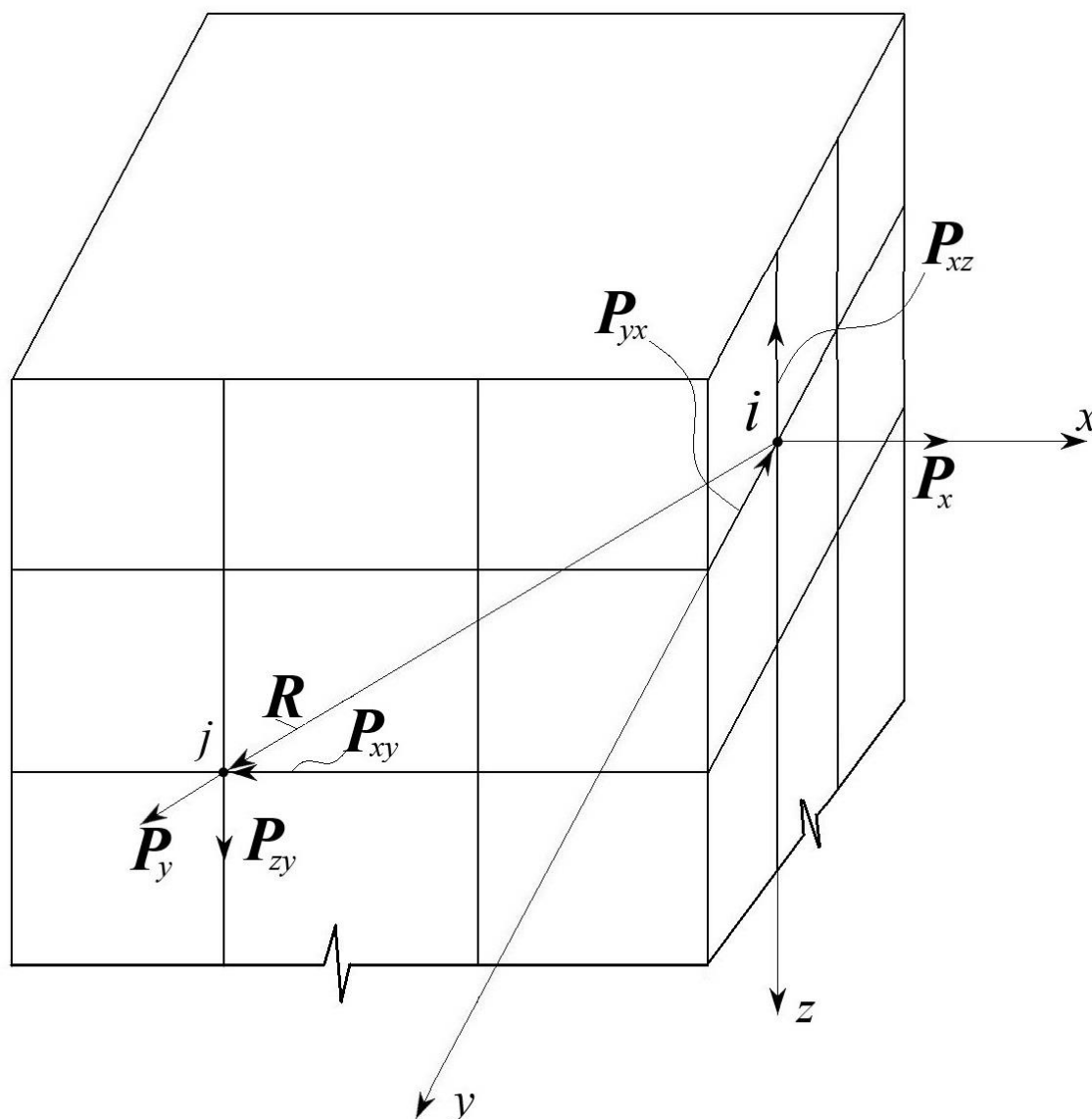


Рис. 3. Схема для определения напряжений при приложении силы на грани призмы внутри упругого полупространства

Неизвестные силы в каждой точке сетки на поверхности призмы должны быть равны силам от напряжений в результате действия внешней нагрузки Q . Таким образом мы получим обнуление напряжений на поверхности призмы в узлах нанесенной сетки.

Для определения неизвестных сил, приложенных в точках сетки на поверхности призмы следует составить систему уравнений. Типовая строка системы уравнений для i -той точки (см. рис. 3) будет выглядеть так (например, для напряжений, σ_x):

$$\begin{aligned}
& A_i \sigma_x(Q) + P_{x,i} + A_i [\sigma_x(P_{x,1}) + \dots + \sigma_x(P_{x,n})] + A_i [\sigma_x(P_{yx,1}) + \dots + \sigma_x(P_{yx,n})] + \\
& \quad + A_i [\sigma_x(P_{zx,1}) + \dots + \sigma_x(P_{zx,n})] + A_i [\sigma_x(P_{y,1}) + \dots + \sigma_x(P_{y,n})] + \\
& \quad + A_i [\sigma_x(P_{zy,1}) + \dots + \sigma_x(P_{zy,n})] + A_i [\sigma_x(P_{xy,1}) + \dots + \sigma_x(P_{xy,n})] = 0 \quad (4)
\end{aligned}$$

Аналогично составляются уравнения для остальных напряжений (напряжений σ_y и касательных напряжений).

В выражении (4) обозначено: A_i – площадь, с которой собираются напряжения в точке i (если размеры сетки равны a и b , то площадь $A_i = a \cdot b$); $\sigma_x(P_{x,k})$ означает напряжение σ_x в точке i в результате действия силы P_x , расположенной в точке k ($k=1 \dots n$, где n – количество точек на сетке); $\sigma_x(P_{yx,k})$ означает напряжение σ_x в точке i в результате действия силы P_{yx} , расположенной в точке k ; остальные обозначения по аналогии с вышеупомянутым обозначением; $\sigma_x(Q)$ – напряжения σ_x от действия внешней нагрузки Q .

Таким образом в выражении (4) известной величиной является величина $\sigma_x(Q)$, а неизвестными силы $P_{x,i}$; $P_{x,1} \dots P_{x,n}$; $P_{yx,1} \dots P_{yx,n}$; $P_{zx,1} \dots P_{zx,n}$; $P_{y,1} \dots P_{y,n}$; $P_{zy,1} \dots P_{zy,n}$; $P_{xy,1} \dots P_{xy,n}$. Если сетка содержит n узлов, то система уравнений будет содержать $3n$ уравнений с $3n$ неизвестными.

Равенство (4) означает, что в любой рассматриваемой точке i сетки суммарное напряжение σ_x равно нулю, что означает свободную от напряжений поверхность призмы (но не свободную от напряжений область полубесконечного тела). Аналогичные равенства составляются для всех остальных составляющих напряжений.

При рассмотрении номеров неизвестных сил следует учитывать, что для точки с номером k , находящейся, например, на поверхности призмы в плоскости XOZ составляющие $P_{x,k}$; $P_{zx,k}$ и $P_{yx,k}$ отсутствуют, что легко видеть из рисунка 3. Поэтому при составлении уравнений типа (4) нужно быть осторожным и учитывать этот фактор. Этот фактор усложняет алгоритмирование, но не усложняет само решение задачи.

После определения всех неизвестных сил от приложения силы Q напряжения внутри призмы определяются как сумма напряжений от этой

силы и от всех внутренних сил. Зная величины всех сил нетрудно определить и перемещения любой точки внутри призмы также по готовым формулам [6]. Далее следует приложить силу Q в другой точке торца призмы, так как касательных сил, создающих крутящий момент несколько (см. рис. 1), и проделать ту же процедуру расчета.

Аналогично может быть решена задача при любой другой форме поперечного сечения. При этом в полубесконечное тело вписывается элемент с требуемым поперечным сечением и на сетке на поверхности тела по его периметру определяются неизвестные внутренние силы, обнуляющие каждую из составляющих напряжений.

Методика расчета, описанная выше, сродни методу граничных элементов и отличается тем, что здесь не требуется знания интегрального уравнения на границе области, а использованы достаточно простые окончательные готовые формулы напряжений для полубесконечного тела, полученные точными методами теории упругости. Система будет содержать на порядок меньшее количество уравнений, чем в методе конечных элементов.

Учитывая, что взаимное смещение берегов нормальной трещины является задачей местного характера, при большом расстоянии между нормальными трещинами можно перемещения, полученные описанным выше способом принять окончательными. Если же расстояние между трещинами мало, то на перемещения, полученные изложенным методом при нагрузке на левом торце призмы следует наложить перемещения (и напряжения) от нагрузки с другого торца призмы. Сказанное проиллюстрировано на рис. 4. На этом рисунке слева показана эпюра касательных напряжений (любой из составляющих напряжений) от нагрузки на левом торце (линия 1), справа – зеркальная линия эпюры напряжений от нагрузки на правом торце призмы (линия 3). Длина призмы равна расстоянию между трещинами $l_{\text{тр}}$. Если бы тело было полубесконечным в направлении вправо, то эпюра напряжений имела бы вид линии 1 с

продолжением штриховой линии 2. Но так как с правой стороны действуют аналогичные зеркальные напряжения, то реальная эпюра будет иметь вид ломанной кривой 1-3, обозначенной сплошными линиями на рис. 4.

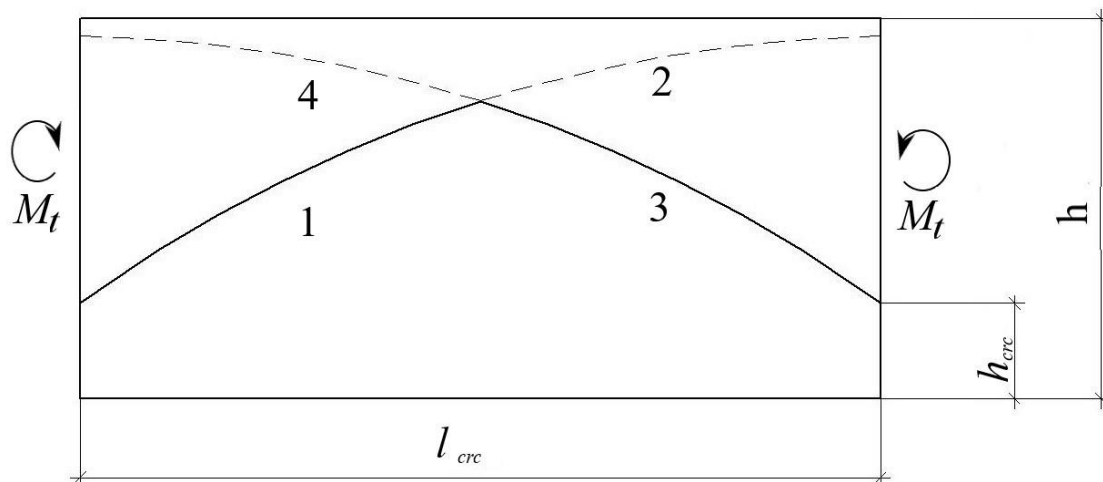


Рис. 4. Схема зеркального наложения эпюры при действии нагрузки с двух торцов

После определения усилий перемещения любых точек определяются по известным формулам теории упругости для полубесконечного тела. Зная перемещения точек, нетрудно определить взаимное смещение берегов нормальной трещины. После этого крутильная жесткость железобетонного элемента легко определяется по методике [1]

Выводы и перспективы исследований.

Для расчета перемещений в элементе с нормальной трещиной предложено использовать готовые решения пространственной теории упругости для полубесконечного тела. Для решения составляется система $3n$ уравнений с $3n$ неизвестными, где n – количество узлов на сетке, нанесенной на периметр боковой поверхности элемента. Эти неизвестные силы подбираются таким образом, что на поверхности элемента, подверженного кручению, суммарное значение всех напряжений равно нулю.

В перспективе предполагается разработка программы расчета по

предложенной методике с целью внедрения в практику проектирования.

Список использованной литературы

1. Азизов Т.Н. Жесткость железобетонных элементов при кручении и ее влияние на пространственную работу мостов // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій// Збірник наукових праць. НАН України. Фізико-мех.інститут ім.. В.Г. Карпенка. – Львів, 2009. – С. 576-590.
2. Азизов Т.Н. Использование аппроксимационных конечных элементов в расчетах конструкций // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. Вип. 39, частина 1. – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2010. – С. 4-9.
3. Дроздов П.Ф. Конструирование и расчёт несущих систем многоэтажных зданий и их элементов. – М.: Стройиздат, 1977. – 223 с.
4. Карпенко Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами. М.: Стройиздат, 1976. – 208 с.
5. Коуэн, Г.Дж. Кручение в обычном и предварительно напряженном железобетоне: Пер. с англ. / Г.Дж. Коуэн; – М.: Изд-во литературы по строительству, 1972. – 104 с.
6. Хан Х. Теория упругости: Основы линейной теории и ее применения: Пер с нем. – М.: Мир, 1988. – 344 с.
7. Mindlin R. Force at a point interior of a semiinfinite solid. – Physics, 1936, #7, P. 195-202.