



ЕСТЕСТВЕННЫЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ

*Сборник статей по материалам
XLVII международной научно-практической конференции*

№ 10 (45)
Октябрь 2016 г.

Издается с декабря 2012 года

Новосибирск
2016

УДК 50
ББК 20
Е 86

Ответственный редактор: Васинович М.А.

Председатель редакционной коллегии:

Козьминых Владислав Олегович – д-р хим. наук, проф., зав. кафедрой химии естественнонаучного факультета Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета.

Редакционная коллегия:

Елисеев Дмитрий Викторович – канд. техн. наук;

Зеленская Татьяна Евгеньевна – канд. физ.-мат;

Ибатаев Жаркын Абыкенович – канд. хим. наук;

Корвет Надежда Григорьевна – канд. геол.-минерал. наук;

Королев Владимир Степанович – канд. физ.-мат. наук;

Ларионов Максим Викторович – д-р биол. наук;

Романова Алла Александровна – канд. техн. наук;

Рымкевич Павел Павлович – канд. физ.-мат. наук;

Сүлеймен Ерлан Мэлсұлы – д-р филос. наук, канд. хим. наук;

Харченко Виктория Евгеньевна – канд. биол. наук;

Яковишина Татьяна Федоровна – канд. с.-хоз. наук.

Е 86 Естественные и математические науки в современном мире /

Сб. ст. по материалам XLVII междунар. науч.-практ. конф.
№ 10 (45). Новосибирск: Изд. АНС «СибАК», 2016. 106 с.

Учредитель: АНС «СибАК»

Сборник статей «Естественные и математические науки в современном мире» включен в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ). Статьи, принятые к публикации, размещаются в полнотекстовом формате на сайте научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU.

При перепечатке материалов издания ссылка на сборник статей обязательна.

Оглавление	
Биология	6
Секция «Генетика»	6
МУТАЦИОННАЯ ИЗМЕНЧИВОСТЬ ОЗИМОЙ ПШЕНИЦЫ В УСЛОВИЯХ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ТОКСИЧЕСКИМИ ОТХОДАМИ ПОЛИГОНА В Г. КАЛУШ Якимчук Руслан Андреевич Гульченко Юлия Леонидовна Василенко Оксана Алексеевна	6
Секция «Зоология»	14
НАХОДКА МУХОЛОВКИ SCUTIGERA COLEOPTERATA (LINNAEUS, 1758) (CHILOPODA: SCUTIGEROMORPHA, SCUTIGERIDAE) В ПЕРМСКОМ КРАЕ Козьминых Владислав Олегович	14
Секция «Токсикология»	18
БИОАККУМУЛЯЦИЯ КАДМИЯ И СВИНЦА В НАТУРАЛЬНОМ ПЧЕЛИНОМ МЕДЕ В РАЙОНАХ С РАЗНЫМ УРОВНЕМ АНТРОПОГЕННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ Зонова Екатерина Роман Адам	18
Секция «Экология и природопользование»	23
РАДИОЭКОЛОГИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА БАССЕЙНА РЕКИ ЖЫРГАЛАН Кадырова Гулькаир Бейшебаевна Калдыбаев Бакыт Кадырбекович	23
Информационные технологии	31
Секция «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»	31
МЕТОД РАСПОЗНАВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ ПУТЕМ СРАВНЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ДЕСКРИПТОРОВ В ПРИЗНАКОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ Копелиович Михаил Викторович Курдоглян Айк Варужанович Петрушан Михаил Викторович	31

АНАЛИЗ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ СОЗДАНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛИ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЁТКИ ЛОНСДЕЙЛИТА Фомин Денис Васильевич	37
Математика	45
Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»	45
ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОБ ИСТОЧНИКЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ Матанова Калыскан Базарбаевна Темиров Бекжан Кайыпбекович	45
МЕТОД ПОГРАНСЛОЙНЫХ ЛИНИЙ ПОСТРОЕНИЯ РЕГУЛЯРНЫХ И СИНГУЛЯРНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ Алыбаев Курманбек Сарманович Тампагаров Куштарбек Бекмуратович	59
ПОГРАНСЛОЙНЫЕ ЛИНИИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО И РЕГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ Тампагаров Куштарбек Бекмуратович	67
Науки о земле	74
Секция «Физическая география и ландшафтоведение»	74
ЛАНДШАФТНО-ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УСЛОВИЙ ЗЕМЛЕПОЛЬЗОВАНИЯ В ГЕОСИСТЕМАХ СМЕШАННЫХ ЛЕСОВ ВОДНО-ЛЕДНИКОВЫХ РАВНИН МОРДОВИИ Ямашкин Анатолий Александрович Ямашкин Станислав Анатольевич Москалева Светлана Александровна Орлова Ольга Алексеевна Елистратова Алина Сергеевна	74

Физика	90
Секция «Механика жидкости, газа и плазмы»	90
БИФУРКАЦИИ ТРАНСЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ В СИММЕТРИЧНЫХ КАНАЛАХ С ЦЕНТРАЛЬНЫМ ТЕЛОМ	90
Кузьмин Александр Григорьевич Бабарыкин Константин Валентинович	
Секция «Физика плазмы»	100
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ИСПАРЕНИЯ АЛЮМООКСИДНОЙ КЕРАМИКИ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ	100
Золотухин Денис Борисович Юшков Юрий Георгиевич Тюньков Андрей Владимирович	

БИОЛОГИЯ

СЕКЦИЯ

«ГЕНЕТИКА»

МУТАЦИОННАЯ ИЗМЕНЧИВОСТЬ ОЗИМОЙ ПШЕНИЦЫ В УСЛОВИЯХ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ТОКСИЧЕСКИМИ ОТХОДАМИ ПОЛИГОНА В Г. КАЛУШ

Якимчук Руслан Андреевич

*канд. биол. наук, доц. Уманского государственного
педагогического университета им. Павла Тычины,
Украина, г. Умань*

Гульченко Юлия Леонидовна

*студент Уманского государственного
педагогического университета им. Павла Тычины,
Украина, г. Умань*

Василенко Оксана Алексеевна

*студент Уманского государственного
педагогического университета им. Павла Тычины,
Украина, г. Умань*

E-mail: peoplenature@rambler.ru

MUTATIONAL VARIABILITY WINTER WHEAT UNDER CONTAMINATED BY TOXIC WASTE LANDFILLS IN KALUSH

Ruslan Yakimchuk

*candidate of science,
assistant professor of Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University,
Ukraine, Uman*

Julia Gulchenko

*student of Pavlo TychynaUman State Pedagogical University,
Ukraine, Uman*

Oksana Vasilenko

*student of Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University,
Ukraine, Uman*

АННОТАЦИЯ

Изучено мутационную изменчивость озимой пшеницы вследствие влияния загрязнений почвы токсическими отходами полигона в г. Калуш. Мутационная активность загрязнений территории захоронения отходов в 5,6 раза превышает спонтанный уровень. Частота мутаций на рекультивированных участках полигона превышает контроль в 3,4 раза. Выявленные в спектре мутаций полукарликовые и карликовые формы могут использоваться как биоиндикаторы загрязнения почвы хлорсодержащими токсическими отходами. Проведение работ с вывоза гексахлорбензола на утилизацию и дальнейшая рекультивация территории полигона не решает проблемы мутагенного загрязнения почвы в г. Калуш и требует сохранения за полигоном статуса объекта повышенной опасности.

ABSTRACT

Studied the mutational variability of winter wheat due to soil pollution impact of landfill toxic waste in Kalush. Mutational activity pollution waste disposal area 5,6 times greater than the spontaneous level. The frequency of mutations in the reclaimed areas of the landfill exceeds 3,4 times control. Identified in the spectrum of mutations in semi-dwarf and dwarf forms can be used as bio-indicators of soil chlorinated toxic waste pollution. Work on the removal of hexachlorobenzene recycling and further reclamation of the landfill does not solve the problem of soil contamination mutagenic in Kalush and requires the preservation of landfill status of high risk.

Ключевые слова: видимые мутации; токсические отходы; мутагенная активность; генетические последствия.

Keywords: visible mutations; toxic waste; mutagenic activity; genetic effects.

Интенсивная деятельность человечества на современном этапе развития науки, технологии и техники привела к появлению в объектах окружающей среды огромного количества химических веществ, которые одновременно обладают биологической активностью и вызывают

множество экологических изменений [3, с. 164]. Особенную опасность для окружающей среды составляет самый большой в Европе полигон токсических отходов в г. Калуж Ивано-Франковской области. В результате введения в эксплуатацию в 1973 г. на территории бывшего Калужского химико-металлургического комбината технологической линии по производству четыреххлористого углерода и перхлорэтилена с производственной мощностью 30 тыс. т в год, до 1998 г. образовались твердые отходы (осмолы), которые отнесены к I классу опасности. Их количество составляло 540 т/год, с содержанием гексахлорбензола свыше 90 %, а выбросы в атмосферу доходили до 0,12 т/год [8, с. 78]. В 2014 г. территориальное управление Госгорпромнадзора в Ивано-Франковской обл. сообщило об исключении полигона твердых токсических отходов в г. Калуж с Государственного реестра объектов повышенной опасности на основании выполненных работ с вывоза захороненный гексахлорбензола на утилизацию. Однако на сегодняшний день не существует научного подтверждения гарантий безопасности полигона для жизнедеятельности [4, с. 3]. Ведь большинство исследований сводятся в основном к мониторингу и установлению величин концентрации химических загрязнений в почве, воде и продуктах питания [1, с. 223; 9, с. 201; 10, с. 28]. И если антропогенно индуцированные изменения, возникающие на уровне экосистем, отдельных биоценозов, связанные с исчезновением или сокращением представителей естественной фауны и флоры, проявляются сразу и могут эффективно регистрироваться с помощью контактных или дистанционных методов, то изменения, вызванные повреждением генетических структур и возникающие на клеточном и молекулярном уровнях, могут проявляться значительно позже, иногда в следующих поколениях [6, с. 63]. Это ставит вопрос о целесообразности проведения мониторинговых исследований территорий полигона токсических отходов, что позволит дать адекватную оценку генетических рисков для живых организмов, в том числе, и человека.

С целью определения мутагенной активности загрязнений почвы полигона в г. Калуж токсическими отходами, были изучены частота и спектр видимых мутаций озимой пшеницы, выращенной на данной территории.

Растения озимой пшеницы сорта Альбатрос одесский на протяжении 2012–2013 гг. выращивались на территории полигона и его рекультивированного участка. Контролем являлась территория исследовательского хозяйства Института физиологии растений и генетики НАН Украины (пгт. Глеваха Васильковского р-на Киевской обл.), где на протяжении многих лет изучается спонтанный уровень мутационной изменчивости у озимой пшеницы. Первое поколение

растений (M_1) выращивали на загрязненных территориях сплошным посевом. Растения поколений M_2 и M_3 выращивали четко семьями, что давало возможность определять макро- и микромутации, а также проводить их правильный учет. Семей считали группу растений, полученных с семян одного колоса. За разные случаи мутирования принимали растения, отличающиеся по фенотипу от исходной формы в пределах одной семьи. Растения с измененными признаками выделяли тщательным осмотром всех семей во время прохождения ими основных фаз роста и развития. Частоту и спектр мутантных форм учитывали только с поколения M_3 после проверки наследования измененных признаков по соотношению количества семей с мутантными растениями к изученным семьям поколения M_2 .

По данным Украинской лаборатории качества и безопасности продукции АПК Национального университета биоресурсов и природопользования, концентрации гексахлорбензола в почве хранилища и его рекультивированного участка составляли 550,5 мг/кг и 292,0 мг/кг, при ПДК 0,03 мг/кг.

Математическую обработку данных проводили по общепринятым методикам [2, с. 223; 5, с. 218]. Достоверность разницы между средними показателями опытных вариантов и контролем оценивали по критерию Стьюдента и Фишера.

Изучая мутагенную активность загрязнения почвы полигона в месте захоронения гексахлорбензола и на рекультивированном участке, установлено, что частота видимых мутаций в поколениях M_2 - M_3 растений озимой пшеницы сорта Альбатрос одесский статистически достоверно превышала спонтанный уровень в контроле. Так, в условиях выращивания первого поколения растений на территории захоронения токсических отходов, частота мутаций составляла $5,51 \pm 1,03$ %, что в 5,6 раза превышало контроль (табл. 1). Остатки гексахлорбензола, выявленного в почве рекультивированных площадей хранилища, сохраняли мутагенные свойства. Об этом свидетельствует высокий уровень ($3,32 \pm 0,79$ %) видимых мутаций у растений M_2 - M_3 , превышающий контроль в 3,4 раза. И хотя показатель частоты видимых мутаций на рекультивированном участке уступал по величине частоты мутаций, индуцированных загрязнением почвы территории захоронения гексахлорбензола, все же статистически достоверной разницы не выявлено.

Спектр типов мутаций довольно широкий: 1 – высокорослая, 2 – низкорослая, 3 – полукарлик, 4 – карлик, 5 – интенсивный рост, 6 – раннеспелая, 7 – среднеранняя, 8 – позднеспелая, 9 – длинный колос, 10 – короткий колос, 11 – крупный колос, 12 – плотный колос, 13 – неплотный колос, 14 – цилиндрический колос, 15 – скверхедный

колос, 16 – безостый колос, 17 – помятые ости, 18 – широкий лист, 19 – гофрированный лист, 20 – отсутствие воскового налета. Он преимущественно включал формы высокорослые, низкорослые, с интенсивным ростом и поздними сроками созревания.

Таблица 1.

**Частота видимых мутаций (M₂-M₃) озимой пшеницы сорта
Альбатрос одесский под влиянием загрязнений почвы
токсическими отходами**

Вариант влияния	Количество изученных семей, шт.	Количество мутантных семей, шт.	Частота мутантных семей, %
Пгт Глеваха (контроль)	506	5	0,99±0,44
Полигон, г. Калуш	490	27	5,51±1,03*
Рекультивированный участок полигона, г. Калуш	512	17	3,32±0,79*

* – разница относительно контроля статистически достоверна при $P \leq 0,05$

Мутации неплотный, цилиндрический, скверхедный колос выявлены с частотой 0,98, 0,82 и 1,43 %, что существенно превышало контрольные показатели (табл. 2). Среди типов мутаций выявлено типичные, возникающие сравнительно с невысокой частотой, но характеризующие реакцию генома пшеницы на действие химического загрязнения почвы. К ним относятся среднеранние формы, длинный, плотный, неплотный, цилиндрический, скверхедный, безостый колос. Среди мутаций выявлены такие, что встречаются очень редко, или единично: крупный колос, помятые ости, широкий, гофрированный лист, раннеспелые формы. Внимание привлекают мутации, связанные с уменьшением длины стебля, в частности полукарликовые и карликовые формы, которые выявлены с частотой 0,20–0,41 % и 0,20–0,39 %, соответственно. Они являются очень редкими при спонтанном мутагенезе и, по предварительным опытам академика НАН Украины В.В. Моргуна (2010), оказались типичными в условиях радионуклидного загрязнения в результате аварии на ЧАЭС. Таким образом, указанные мутации могут использоваться как биоиндикаторы загрязнения почвы хлорсодержащими токсическими отходами.

Таблица 2.
**Спектр видимых мутаций (M₂-M₃) озимой пшеницы сорта Альбатрос одесский под влиянием
 загрязнений почвы токсическими отходами**

		Типы мутаций, %																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
		<i>пт. Глебаха (контроль)</i>																			
0,40	0,40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,20	0,40	0,00	0,20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
		<i>Полигон, г. Калуш</i>																			
2,04*	1,23	0,41	0,20	0,41	0,00	0,41	0,41	0,41	0,61	0,20	0,20	0,41	0,00	0,82*	1,43*	0,41	0,20	0,20	0,20	0,61	0,00
		<i>Результивированный участок полигона, г. Калуш</i>																			
1,37	0,20	0,20	0,20	1,17*	0,20	0,00	0,59	0,39	0,39	0,00	0,20	0,98*	0,20	0,00	0,59	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,59

* – разница относительно контроля статистически достоверна при $P \leq 0,05$

Среди семей M_2 были выявлены такие, которые включали растения с комплексными мутациями, или группу растений с мутациями разных типов. В частности, семьи сорта Альбатрос одесский отличались сочетанием мутаций длинный, неплотный колос; позднеспелая, карлик, скверхедный колос; интенсивный рост, безостый, скверхедный колос; интенсивный рост, отсутствие воскового налета; высокорослая, помятые ости, скверхедный колос; интенсивный рост, высокорослая, длинный колос, отсутствие воскового налета; плотный, цилиндрический колос, полукарлик; высокорослая, раннеспелая, короткий, плотный, цилиндрический колос.

Таким образом, загрязнение почвы полигона токсическими отходами приводит к существенному возрастанию частоты мутаций у озимой пшеницы, превышающей в 3,4–5,6 раза их спонтанный уровень. Спектр типов мутаций преимущественно включает формы высокорослые, низкорослые, с интенсивным ростом и поздними сроками созревания. Типичной реакцией генотипа пшеницы на загрязнение почвы гексахлорбензолом является индуцирование полукарликов и карликов, которые могут использоваться как биоиндикаторы загрязнения почвы хлорсодержащими токсическими отходами. Проведенная работа по вывозу гексахлорбензола на утилизацию и дальнейшая рекультивация территории полигона не решают проблемы мутагенного загрязнения почвы в г. Калуж и требует сохранения за полигоном статуса объекта повышенной опасности.

Список литературы:

1. Бондар Л.С. Моніторинг генотоксикологічного забруднення деяких чинників навколишнього середовища / Л.С. Бондар, А.В. Мацяк, В.В. Беляєв // Генетика і селекція в Україні на межі тисячоліть. – К.: Логос, 2001. – С. 219–225.
2. Доспехов Б.А. Методика полевого опыта (с основами статистической обработки результатов исследований) / Б.А. Доспехов – М.: Агропромиздат, 1985. – 351 с.
3. Клименко М.О. Моніторинг довкілля: підручник (для студентів вищих навчальних закладів) / М.О. Клименко, А.М. Прищеп, Н.М. Вознюк – К.: Видавничий центр «Академія», 2006. – 360 с.
4. Лазоришин І. Невмирущий полігон / І. Лазоришин // Галичина. – 30 жовтня 2014 р.
5. Лакин Г.Ф. Биометрия / Г.Ф. Лакин – М.: Высшая школа, 1990. – 350 с.

6. Мамедова А.О. Биоиндикация качества окружающей среды на основе мутационной и модификационной изменчивости растений / А.О. Мамедова // Цитология и генетика. – 2009. – Т. 43, № 2. – С. 61–64.
7. Моргун В.В. Генетичні наслідки аварії на Чорнобильській АЕС / В.В. Моргун, Р.А. Якимчук – К.: Логос, 2010. – 400 с.
8. Національний план виконання Стокгольмської конвенції про стійкі органічні забруднювачі. – Київ, 2011. – 253 с.
9. Петрук Р.В. Екологічна безпека складів і сховищ отрутохімікатів і відновлення земель навколо них / Р.В. Петрук, В.Г. Петрук, А.П. Березюк // Вісн. КрНУ імені Михайла Остроградського. – 2013. – Т. 80, № 3. – С. 197–202.
10. Швидь С.Ф. Динаміка залишкових концентрацій пестицидів у ґрунтах Полтавської області / С.Ф. Швидь, Л.М. Швидь, В.О. Наталочка, С.К. Ткаченко // Вісник Полтавської державної аграрної академії. – 2010. – № 3. – С. 26–31.

СЕКЦИЯ

«ЗООЛОГИЯ»

НАХОДКА МУХОЛОВКИ SCUTIGERA COLEOPTRATA (LINNAEUS, 1758) (CHILOPODA: SCUTIGEROMORPHA, SCUTIGERIDAE) В ПЕРМСКОМ КРАЕ

Козьминых Владислав Олегович

*д-р хим. наук, проф., зав. кафедрой химии Пермского
государственного гуманитарно-педагогического университета,
РФ, г. Пермь*

E-mail: kvoncstu@yahoo.com

RECORD OF HOUSE CENTIPEDE SCUTIGERA COLEOPTRATA (LINNAEUS, 1758) (CHILOPODA: SCUTIGEROMORPHA, SCUTIGERIDAE) IN THE PERM AREA

Vladislav Kozminykh

*doctor of Chemical Sciences, Professor, Head of the Chemical Section
of the Perm State Humanitarian Pedagogical University,
Russia, Perm*

АННОТАЦИЯ

В Пермском крае впервые обнаружена многоножка-мухоловка *Scutigera coleoptrata* (Linnaeus, 1758) (Chilopoda: Scutigermorpha, Scutigeridae). Находка является самой северо-восточной в Европейской части России. Приведены 9 литературных источников, содержащих сведения о распространении мухоловки на территории России.

ABSTRACT

The house centipede *Scutigera coleoptrata* (Linnaeus, 1758) (Chilopoda: Scutigermorpha, Scutigeridae) is found in the Perm Area for the first time. This happens to be the most north-eastern record in the European Russia. Presented are 9 references, containing data on distribution of the house centipede at Russia territory.

Ключевые слова: мухоловка; *Scutigera coleoptrata* (Linnaeus, 1758); Пермский край; распространение.

Keywords: house centipede; *Scutigera coleoptrata* (Linnaeus, 1758); Perm Area; distribution.

На Урале и в Приуралье зарегистрированы 30 видов многоножек Муриарода [8; 9], для Пермского края ранее было отмечено наличие 24 видов (без приведения списка) [1]. Недавно в Прикамье найден ещё один синантропный вид многоножек – обыкновенная мухоловка *Scutigera coleoptrata* (Linnaeus, 1758), сведения о распространении которой в России и новый материал сборов приводятся ниже.

***Scutigera coleoptrata* (Linnaeus, 1758) – мухоловка обыкновенная.**

В Пермском крае этот вид обнаружен впервые. Находка является самой северо-восточной в Европейской части России и наиболее северной на Урале (в Среднем Приуралье). Мухоловка включена в список видов многоножек Урала [8]; ранее она была отмечена на Южном Урале [9], вероятно, по неопубликованным материалам из Оренбургской области.

Материал. Пермский край, Нытвенский район, дер. Оськино, в частном доме, июнь 2014 г., 1 экз., О.И. Котельников (о находке сообщила М.А. Попова).

Сравнительный материал. Оренбургская область, Сакмарский район, в 15 км сев. г. Оренбурга, гора Гребени, под камнями, 9.09.2007, 6 экз., В.О. Козьминых, А.В. Русаков. Ставропольский край, г. Ставрополь, в квартире, окрестности Сенгилеевского озера, под камнями, 20.05.–1.07.2005, 22.07.–14.08.2007, 12 экз., г. Изобильный, в доме, 16–26.09.2004, 8.06.–11.09.2005, 16.07.–15.08.2007, 8.07.–6.08.2011, 18.07.–20.08.2013, 30.06.–15.08.2014, 15.07.–21.08.2015, 38 экз., В.О. Козьминых (мухоловка впервые отмечена для Изобильненского района Ставропольского края).

Распространение на территории России. Европейская часть РФ: Пензенская область (Пенза) [7; 11], Мордовия (Саранск) [5; 6], Ижевск [10], Саратов [7], Ульяновск [3; 11], Ставропольский край [11; 12]. Средний Урал (Приуралье): Пермский край; Южный Урал: Оренбургская область. Западная Сибирь: Тюмень [2], Алтайский край (Барнаул, Бийск), Кемерово, Новосибирск [11]. Сведения об общегеографическом распространении этого вида, турано-средиземноморского по происхождению, приведены в статьях [11; 12].

Замечания. Единичная находка мухоловки в Пермском крае, по-видимому, не является случайной. Данные об обнаружении этой не характерной для средней полосы России многоножки к северу

от основного ареала, в частности на территории Удмуртии [10] и Тюменской области [2], свидетельствуют о постепенном расширении ареала этого инвазионного вида на северо-восток, связанном с потеплением. В связи с такой экспансией следует обратить внимание на критерии чужеродности (инвазивности) расселяющихся за пределы естественного ареала видов, которые подробно обсуждаются на примере жесткокрылых насекомых в статье М.Я. Орловой-Беньковской [4].

Таким образом, описана находка многоножки *Scutigera coleoptrata* (Linnaeus, 1758) (Chilopoda: Scutigermorpha, Scutigeridae) в Пермском крае и рассмотрено её распространение в связи с расширением европейской части ареала на северо-восток.

Выражаю благодарность М.А. Поповой (Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет) за информацию об обнаружении мухоловки в Пермском крае.

Список литературы:

1. Алексеевнина М.С., Есюнина С.Л., Крашенинников А.Б., Кутузова Т.М., Лямин М.Я., Паньков Н.Н., Преснова Е.В., Тиунов А.В. Атлас-определитель беспозвоночных животных города Перми. Монография. Под общей редакцией М.Я. Лямина. – [Электронный ресурс] – Пермь: Пермский гос. нац. исслед. ун-т, 2014. 152 с. – http://www.prirodaperm.ru/upload/pages/105/Atlas_11_11_2014_s-ISBN.pdf.
2. В Тюмень завезли жутких многоножек – [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://tyumen.bezformata.ru/listnews/tyumen-zavezli-zhutkih-mnogopozhek/6079504/> (Дата обращения: 10.10.2016).
3. Волкова Ю.С. Фауна хищных многоножек (Chilopoda) Ульяновской области // Природа Симбирского Поволжья. Сборник науч. трудов XVI межрегиональной науч.-практ. конф. «Естественно-научные исследования в Симбирском – Ульяновском крае». Вып. 15. Ульяновский обл. краеведческий музей им. И.А. Гончарова. Ульяновск: изд-во «Корпорация технологий продвижения», 2014. С. 95–103.
4. Орлова-Беньковская М.Я. Можно ли отличить чужеродные виды жесткокрылых (Coleoptera) от местных? // Энтомологическое обозрение. 2016. Т. 95. Вып. 2. С. 71–89.
5. Ручин А.Б. К фауне многоножек (Myriapoda) Мордовии // Молодой учёный. 2014. № 2 (61). С. 387–390.
6. Ручин А.Б., Вечканов В.С., Вечканова С.А. О находке мухоловки *Scutigera coleoptrata* (L.) (Myriapoda: Chilopoda, Scutigermorpha) в Саранске // Краеведческие записки. Мордовский респ. объединенный краеведческий музей им. И.Д. Воронина. Саранск: «Красный Октябрь», 2007. С. 140–142.

7. Стойко Т.Г., Полумордвинов О.А. Расселение мухоловки – *Scutigera coleoptrata* (Linnaeus, 1758) в Пензе // Энтомологические и паразитологические исследования в Поволжье. Сборник науч. трудов. Под ред. д.б.н. П.А. Чирова и д.б.н. В.В. Аникина. Саратов: изд-во Саратовского ун-та, 2004. Вып. 3. С. 176–178.
8. Фарзалиева Г.Ш. Определитель многоножек (Мугиарода) Урала и Приуралья // Вестник Пермского ун-та. Серия Биология. 2009. Вып. 10 (36). С. 66–72.
9. Фарзалиева Г.Ш. Фауна и хорология многоножек (Мугиарода) Урала и Приуралья. Автореф. дис. ... канд. биол. наук (03.00.08 – зоология). Москва, 2008. 24 с.
10. Что это за насекомое? Компьютерный форум Ru.Board – [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://forum.ru-board.com/topic.cgi?forum=29&topic=9116> (Дата обращения: 10.10.2016).
11. Nefediev P.S., Tuf I.H., Dyachkov Yu.V., Efimov D.A. First record of *Scutigera coleoptrata* (Linnaeus, 1758) in the South of Western Siberia, Russia (Chilopoda: Scutigermorpha: Scutigeridae) // Biological Bulletin of Bogdan Chmelnitkiy Melitopol State Pedagogical University. 2016. Vol. 6. № 1. P. 428–432. – <http://dx.doi.org/10.15421/201626>.
12. Zuev R.V. Centipedes (Chilopoda) from the Stavropol Territory, northern Caucasus, Russia // Arthropoda Selecta. 2016. Vol. 25. № 1. P. 23–38.

СЕКЦИЯ

«ТОКСИКОЛОГИЯ»

БИОАККУМУЛЯЦИЯ КАДМИЯ И СВИНЦА В НАТУРАЛЬНОМ ПЧЕЛИНОМ МЕДЕ В РАЙОНАХ С РАЗНЫМ УРОВНЕМ АНТРОПОГЕННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Зонова Екатерина

*аспирант Кафедры Гигиены Окружающей Среды и Благополучия
Животных Университета Естественных Наук во Вроцлаве,
Польша, г. Вроцлав
E-mail: yekaterina.zonova@up.wroc.pl, zonova.kate@gmail.com*

Роман Адам

*д-р естественных наук, проф. Кафедры Гигиены Окружающей Среды
и Благополучия Животных
Университета Естественных Наук во Вроцлаве,
Польша, г. Вроцлав*

BIOACCUMULATION OF CADMIUM AND LEAD IN NATURAL BEE HONEY FROM REGIONS WITH DIFFERENT ANTHROPOGENIC ACTIVITY

Yekaterina Zonova

*m.Sc., PhD Student, Department of Environment Hygiene and Animal
Welfare, Wroclaw University of Environmental and Life Sciences,
Poland, Wroclaw*

Roman Adam

*d.Sc., Assoc. prof., Department of Environment Hygiene and Animal
Welfare, Wroclaw University of Environmental and Life Sciences,
Poland, Wroclaw*

АННОТАЦИЯ

Исследован уровень аккумуляции кадмия (Cd) и свинца (Pb) в образцах натурального полифлорного меда, собранного в двух районах Польши с разным уровнем антропопрессии: экологическом и индустриальном. Содержание исследуемых химических элементов определено методом атомно-абсорбционной спектроскопии с электротермической атомизацией в графитовой кювете. Содержание кадмия и свинца в исследуемых образцах для обоих районов представлено в виде ряда: $Cd > Pb$. Более высокие концентрации исследуемых элементов установлены в меде с индустриального района. По уровню содержания кадмия в пчелином меде выявлены высокозначимые статистические различия ($p < 0,01$) между районами. Взаимодействие между Cd и Pb в образцах меда как с экологического, так и с индустриального района носит синергический характер.

ABSTRACT

The aim of the study was to determine the level of accumulation of cadmium (Cd) and lead (Pb) in multifloral honey collected from two areas with different anthropogenic activity. Content of the examined elements were determined using electrothermal atomic absorption spectroscopy (ETAAS) method. It was found that in all investigated samples the concentration of Cd was lower than Pb. Samples collected from the industrial area demonstrated higher concentration of cadmium and lead. The differences ($p < 0.01$) in the cadmium level were noted in the samples of honey between two areas. There was significant positive correlation between the content of Cd and Pb in honey samples.

Ключевые слова: биоаккумуляция; кадмий; свинец; пчелиный мед; индустриальный район; экологический район; Польша.

Keywords: bioaccumulation; cadmium; lead; honey; industrial region; ecological region; Poland.

Мониторинг уровня токсичных элементов таких, как кадмий и свинец, в биологическом материале чрезвычайно важен и актуален, особенно в районах с высоким уровнем антропопрессии [1–7; 10; 12; 19]. Как их дефицит, так и избыток приводит к серьезным негативным последствиям нормального функционирования растений и животных [4–6; 17], а также влияет на качество продуктов животного происхождения, в том числе меда [11; 15].

Пчелиный мед является одним из самых популярных натуральных продуктов, употребляемых человеком. Причиной этого является не только питательная ценность продукта, но также

его лекарственные свойства: антибактериальные, иммуностимулирующие, детоксикационные и регенерирующие.

Цель исследования – определение уровня аккумуляции кадмия и свинца в пчелином меде, собранном в двух районах с разным уровнем антропопрессии.

Материал и методы исследования. Образцы пчелиного меда для исследования были собраны в июле-августе 2015 года с 28 стационарных пчелиных пасек, находящихся в двух районах юго-западной Польши с разным уровнем антропопрессии. За район с низким уровнем антропогенного воздействия (экологический район) выбран Региональный Ландшафтный Парк «Долина Барычы», большая часть которого находится под защитой государственной программы “Natura 2000”. За район с высоким уровнем антропопрессии (индустриальный район) выбран Легницко-Глоговский Медовый Округ (LGOM) – промышленный комплекс, на территории которого расположены медные рудники и два медеплавильных завода.

Содержание химических элементов определено методом атомно-абсорбционной спектроскопии с электротермической атомизацией в графитовой кювете. Полученные данные обработаны с помощью методов описательной статистики с использованием программы STATISTICA 10.0 (StatSoft Inc., США).

Результаты исследования и их обсуждение. Средняя концентрация, стандартное отклонение, минимум и максимум содержания кадмия и свинца в меде представлены в таблице 1.

Таблица 1.

Средний уровень содержания кадмия и свинца в меде, мг/кг сухой массы

Район	N	Cd	Pb
		X ± sd (минимум – максимум)	
РЛП «Долина Барычы» – экологический район	14	0,033 ± 0,005* (0,025–0,045)	0,464 ± 0,057 (0,342–0,560)
LGOM – индустриальный район	14	0,043 ± 0,009* (0,032 – 0,059)	0,472 ± 0,089 (0,350 – 0,600)

N – количество образцов;

X – средняя концентрация;

sd – стандартное отклонение;

* – высокозначимые статистические различия между исследуемыми районами ($p < 0,01$)

Содержание кадмия и свинца в исследуемых образцах для обоих районов представлено в виде ряда: $Cd > Pb$, что совпадает с результатами ученых исследующих уровень токсичных элементов в меде [16; 18], а также в других продуктах пчеловодства – прополисе [13; 14], перге [8] и воске [18]. Результаты токсикологического исследования продуктов пчеловодства (воска, меда и прополиса), используемых при изготовлении польской косметики [13; 14] указывают на аналогичное распределение исследуемых элементов.

По уровню содержания кадмия в меде выявлены высокозначимые статистические различия ($p < 0,01$) между районами, что подтверждает целесообразность использования пчелиного меда как биоиндикатора качества окружающей среды. Также установлена положительная высокая корреляция между концентрацией кадмия и свинца в образцах как с экологического, так и с индустриального района ($P < 0,01$; $r = 0,841$ и $r = 0,840$ соответственно), что свидетельствует о синергизме Cd и Pb, удостоверенном литературными данными [9].

Вывод. Проведенные исследования свидетельствуют о более высоком уровне биоаккумуляции кадмия и свинца в образцах пчелиного меда, собранных в районе с высоким уровнем антропогенного воздействия.

Список литературы:

1. Ларионов М.В. Актуальность экотоксикологических исследований в условиях природных и нарушенных экосистем // Инновации в науке. 2016. № 57-1. С. 15–21.
2. Ларионов М.В. Анализ состояния атмосферного воздуха в условиях урбанизированной среды с помощью фитоиндикации // Вестник КрасГАУ. 2012. № 11. С. 88–92.
3. Ларионов М.В., Ларионов Н.В. Экологический анализ вторичного антропогенного загрязнения окружающей среды Саратовского региона // Вестник КрасГАУ. 2010. № 6. С. 105–108.
4. Ларионов М.В., Любимов В.Б., Логачева Е.А. Некоторые биохимические показатели древесных растений на экологически различных территориях Саратовской и Волгоградской областей // Современные проблемы науки и образования. 2016.
5. Ларионов М.В. Накопление древесными растениями тяжелых металлов в зависимости от автотранспортной нагрузки // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2014. № 4-1. С. 228–232.
6. Ларионов М.В. Экологический мониторинг городской среды: монография. – Саратов: Саратовский источник, 2015. – 104 с.

7. Любимов В.Б., Ларионов М.В., Ларионов Н.В. Содержание антропогенных поллютантов в приземной атмосфере городов Среднего и Нижнего Поволжья // *Экология-2011: материалы докладов IV молодежной научной конференции*. Архангельск, 2011. С. 101–102.
8. Golubkina N.A., Sheshnitsan S.S., Kapitalchuk M.V., Erdenotsogt E. Variations of chemical element composition of bee and beekeeping products in different taxons of the biosphere / *Ecol. Indic.* 2016. Vol. 66. P. 452–457.
9. Kabata-Pendias A., Pendias H. *Biogeochemia pierwiastków śladowych* / PWN, Warszawa, 1999.
10. Larionov M.V. Scheme technogenic stress of natural and artificial landscapes of the Saratov and Volgograd regions // *Теоретические и прикладные вопросы науки и образования: в 16 ч. Ч. 15*. Тамбов, 2015. С. 8–9.
11. Matin G., Kargar N., Buyukisik H.B. Bio-monitoring of cadmium, lead, arsenic and mercury in industrial districts of Izmir, Turkey by using honey bees, propolis and pine tree leaves / *Ecol. Eng.* 2016. Vol. 90. P. 331–335.
12. Palma P., Ledo L., Alvarenga P. Assessment of trace element pollution and its environmental risk to freshwater sediments influenced by anthropogenic contributions: the case study of Alqueva reservoir (Guadiana Basin) / *Catena* 2015. Vol. 128. P. 174–184.
13. Roman A., Popiela E., Didyk U. Toxicological state of beeswax used in the cosmetic industry / *Przem. Chem.* 2011. Vol. 90. P. 997–1000.
14. Roman A., Popiela-Pleban E., Kowalska-Góralaska M. Toxicological state of propolis used in the pharmaceutical and cosmetics industries / *Przem. Chem.* 2012. Vol. 91. P. 937–940.
15. Roman A., Popiela-Pleban E., Migdał P., Kruszyński W. As, Cr, Cd, and Pb in Bee Products from a Polish Industrialized Region / *Open Chemistry* 2016. Vol. 14. № 1. P. 33–36.
16. Silici S., Uluzlu O.D., Tuzen M., Soylak M. Honeybee and honey as monitors for heavy metal contamination near the thermal power plants in Mugla, Turkey / *Toxicol. Ind. Health* 2016. Vol. 32. № 3. P. 507–516.
17. Soetan K.O., Olaiya C.O., Oyewole O.E. The importance of mineral elements for humans, domestic animals and plants: A review / *Afr. J. Food Sci.* 2010. Vol. 4. № 5. P. 200–222.
18. Zhelyazkova I., Atanasova S., Barakova V., Mihaylova G. Content of heavy metals and metalloids in bees and bee products from areas with different degree of anthropogenic impact / *Agricultural Science and Technology* 2011. Vol. 3. № 2. P. 136–142.
19. Zonova Y., Roman A., Kowalska-Góralaska M., Opaliński S. Wpływ przemysłu miedziowego na poziom i transfer wybranych pierwiastków w roślinach miododajnych / *Przem. Chem.* 2016. Vol. 95. № 6. P. 1243–1246.

СЕКЦИЯ

«ЭКОЛОГИЯ И ПРИРОДОПОЛЬЗОВАНИЕ»

РАДИОЭКОЛОГИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА БАСЕЙНА РЕКИ ЖЫРГАЛАН

Кадырова Гулькаир Бейшебаевна

*аспирант кафедры туризма и охраны окружающей среды
Иссык-Кульский государственный университет,
Кыргызская Республика, г. Каракол*

Калдыбаев Бакыт Кадырбекович

*д-р биол. наук, доц. кафедры туризма и охраны окружающей среды
Иссык-Кульский государственный университет,
Кыргызская Республика, г. Каракол
E-mail: k_bakyt@rambler.ru*

RADIOECOLOGICAL ASSESSMENT OF THE BASIN RIVER JYRGALAN

Gulkair Kadyrova

*graduate student
of the Department of Tourism and Environmental Protection
Issyk-Kul State University,
Kyrgyzstan, Karakol*

Bakyt Kaldybaev

*sc.D., associate professor of the Department of Tourism
and Environmental Protection Issyk-Kul State University,
Kyrgyzstan, Karakol*

АННОТАЦИЯ

Цель: радиэкологическая оценка содержания, миграции и накопления радиоактивных элементов в объектах окружающей среды бассейна реки Жыргалан. Методы: полевые, радиометрический,

гамма-спектрометрический. Результаты: Определены содержания радионуклидов (^{238}U , ^{232}Th , ^{226}Ra , ^{210}Pb , ^{137}Cs) в почве, воде, донных отложениях бассейна реки Жыргалан. Выводы: установлено слабое накопление радионуклидов (^{238}U , ^{210}Pb) в донных отложениях устьевой зоны реки Жыргалан.

ABSTRACT

Background. To assess the content of radioecological, migration and accumulation of radioactive elements in the environment of the basin river Jyrgalan. Methods. Field, radiometric, gamma spectrometry. Results. To determine the content of radionuclides (^{238}U , ^{232}Th , ^{226}Ra , ^{210}Pb , ^{137}Cs) in soil, water, sediment of the basin river Jyrgalan. Conclusion. The established weak accumulation of radionuclides (^{238}U , ^{210}Pb) in the sediments of the river estuary area Jyrgalan.

Ключевые слова: радиоактивные элементы; содержание; кларк; почва; вода; донные отложения.

Keywords: radioactive elements; content; clarke; soil; water; sediments.

Реки являются наиболее подвижной частью гидросферы, характеризуются легкой изменчивостью химического состава вод в зависимости от целого ряда причин, таких как климатические и погодные условия, соотношение между атмосферным и грунтовым питанием, химический состав атмосферных вод, геологическое строение, состав пород водосборной площадки, антропогенное воздействие и т. д. Исследованиями проф. В.В. Ковальского и И.Е. Воротицкой было установлено, что Иссык-Кульская межгорная впадина представляет собой естественную урановую биогеохимическую провинцию. Её территория характеризуется повышенным естественным содержанием урана и дочерних продуктов его распада в геологической среде и подземных водах [5, с. 25].

В бассейне реки Жыргалан расположено крупное каменноугольное месторождение Жыргалан, разведаны запасы полиметаллических руд. Так как в перспективе, запасы недр данного региона будут осваиваться, необходимы детальные радиоэкологические исследования по изучению содержаний, миграции и накопления радиоактивных элементов в объектах окружающей среды [7, с. 180].

Материал и методы исследования

При отборе почвенных образцов нами была использована классификация почв, принятая при составлении почвенной карты Киргизской ССР [6, с. 222]. Отбор проб почвы выполнялся согласно требований ГОСТ 53123-2008 (ИСО 10381-5:2005) [3, с. 55]. Пробы

почвы были отобраны с 11 контрольных участков. Отбор проб воды был произведен в период межени (16 марта 2015 г.). Были отобраны разовые пробы воды согласно установленных требований с 6 пунктов наблюдения [4, с. 30]. В местах отбора проб воды был произведен отбор проб илисто-глинистых фракций донных осадков.

Для проведения гамма – съемки местности использовался дозиметр – радиометр ДКС-96. Измерения проводились в соответствии с инструкциями МАГАТЭ по наземному обследованию радиационной обстановки. Для определения изотопного состава радионуклидов в пробах почв и донных отложений был использован гамма спектрометр “Canberra” (модель GX4019 с программным обеспечением Genie-2000 S 502, S501 RUS). Для определения суммарной альфа и бета-активности проб воды использовался альфа-бета радиометр УМФ-2000.

Результаты исследований и их обсуждение

Мощность радиационного фона по гамма-излучению в бассейне реки Жыргалан варьирует в пределе 15–40 мкР/ч и не превышает установленной в республике нормы 60 мкР/ч (табл. 1). По мере удаления от берега реки в сторону склонов гор его уровень в отдельных местах возрастает до 40 мкР/ч, особенно в некоторых горных местностях, ущельях основу которых составляют горные породы, граниты, мелкие их обломки, имеющие слегка повышенную радиоактивность. Наблюдаются также незначительные вариации природного радиационного фона в устьевой зоне реки Жыргалан, вероятно, это связано с неоднородным распределением естественных радионуклидов, рассеянных в почвах, земных породах, поверхностных и подземных водах и других объектах природной среды.

Таблица 1.

Мощность экспозиционной дозы гамма-излучения бассейна реки Жыргалан

№	Место измерения		МЭД (мкР/час)
1	Территория шахты Жыргалан	У входа в штольню	21–27
		В окрестностях штольни	18–27
		Рядом с отвалами угленосных пород	35–40
2	с. Советское	100 м от реки	18–23
3	с. Ак-Булун	100 м от реки	17–22
4	с. Качыбек	10–20 м от реки	20–24
5	с. Нововознесенка	10–20 м от реки	15–20

6	с. Отрадное	10–20 м от реки	20–25
7	с. Орлиное	10–30 м от реки	18–24
8	с. Каракол	10–30 м от реки	17–23
9	с. Тепке	20–40 м от реки	16–22
10	с. Боз-Булун	20–30 м от реки	17–23
11	с. Михайловка (мост)	5–20 м от реки	23–30

²³⁸U. Вариация содержания U для нормальных почв ограничивается пределами $12 \square 100 \text{ Бк/кг}$, а для почв урановых аномалий $600 \square 12500 \text{ Бк/кг}$. Кларк ²³⁸U в почве составляет 12,4 Бк/кг, диапазон (10–50 Бк/кг) при среднем – 25 Бк/кг [2, с. 120]. Удельная активность ²³⁸U в почве на территории шахты Жыргалан варьирует в пределе 39,3–76,4 Бк/кг. Повышенные уровни удельной активности ²³⁸U в почве характерны для участков складирования отвалов угленосных – 76,4 Бк/кг (табл. 2).

Удельная активность ²³⁸U в почвах долинной зоны бассейна реки Жыргалан не превышает установленных средне фоновых значений (10–50 Бк/кг) и варьирует в пределе 23,5–36,6 Бк/кг. Наблюдаются незначительные изменения содержания в зависимости от типа почв, в частности для горно-долинных темно-каштановых 32,3–36,3 Бк/кг, горно-долинных каштановых 26,3–28,3 Бк/кг, горно-долинных светло-каштановых 23,5–28,6 Бк/кг, лугово-светло-каштановых 23,6 Бк/кг, аллювиально-луговых тугайных лесов и кустарников 28,3 Бк/кг (табл. 3).

²²⁶Ra – промежуточный продукт распада ²³⁸U, относящийся к группе щелочноземельных элементов, т. е. представляет собой химический аналог элементов-биофилов кальция и магния. Он вносит в природный радиоактивный фон определенную дозовую нагрузку. Кларк радия в земной коре составляет 36,8 Бк/кг [2, с. 123]. В почвах бассейна реки Джергалан удельная активность ²²⁶Ra варьирует в пределе 43–54,6 Бк/кг, кларк концентрации (K_k) составил (1,2–1,5).

²³²Th. Диапазон содержаний ²³²Th в зависимости от типа почв варьирует в пределе 7–50 Бк/кг, кларк ²³²Th в почве составляет 24,6 Бк/кг, для осадочных пород – 45 Бк/кг [2, с. 128]. В почвах бассейна реки Джергалан удельная активность ²²⁶Ra варьирует в пределе 43–54,6 Бк/кг, кларк концентрации (K_k) составил (1,7–2,2).

²¹⁰Pb. Присутствие радиоактивных изотопов Pb в природной среде обусловлено не только распадом ^{238,235}U и ²³²Th, но и постоянным выпадением с аэрозольными частицами из атмосферы при распаде ²²²Rn. Фоновое значение ²¹⁰Pb для горных пород и почв варьирует

в пределах от 5–10 до 30–50 Бк/кг [2, с. 140]. В почвах бассейна реки Жыргалан удельная активность ^{210}Pb варьирует в пределе 35–124,9 Бк/кг, кларк концентрации (K_K) составил (1,2–4,2). Повышенные уровни удельной активности ^{210}Pb характерны для участков складирования отвалов угленосных пород – 124,9 Бк/кг.

^{137}Cs . Уровень вмешательства (ПДУ) ^{137}Cs в почве составляет 15 Бк/кг [8, с. 63]. Величина глобального фонового загрязнения почв мира радиоцезием оценивается в 20–25 Бк/кг [1, с. 123]. В почвах бассейна реки Жыргалан удельная активность ^{137}Cs низкая, что характерно для горной местности и варьирует в пределе 2–2,8 Бк/кг.

Таблица 2.

Содержание радионуклидов в почвах угольной провинции Жыргалан (Бк/кг)

Места отбора проб		^{238}U	^{226}Ra	^{210}Pb	^{232}Th	^{137}Cs
Территория предприятия	У входа в штольню	39,3±5,0	50,1±5,8	60,8±9,0	63,9±8,0	2±0,2
	В окрестностях штольни	52,8±10,0	50,8±5,7	101,6±11,0	44,2±5,8	2,5±0,3
	Рядом с отвалами угленосных пород	76,40±8,0	54,6±6,2	124,9±19,6	67,2±8,4	2,8±0,6

Таблица 3.

Содержание радионуклидов в почвах долинной зоны бассейна реки Жыргалан (Бк/кг)

Место отбора	Тип почвы	^{238}U	^{226}Ra	^{210}Pb	^{232}Th	^{137}Cs
с. Советское	Горно-долинные темно-каштановые	32,3±3,2	48±5,1	53±5,2	55,3±5,4	2,2±0,2
с. Ак-Булун	Горно-долинные темно-каштановые	34,1±3,5	43,2±4,5	48,2±4,9	54,2±5,5	2,4±0,3
с. Качыбек	Горно-долинные темно-каштановые	32,3±3,5	48,3±5,2	49,2±5,3	58,9±6,3	2,3±0,2
с. Нововознесеновка	Горно-долинные темно-каштановые	36,3±3,3	48,3±4,9	52,3±5,5	55,3±5,2	2,6±0,3
с. Отрадное	Горно-долинные каштановые	26,3±2,5	32,3±3,3	42,6±4,3	48,6±5,0	1,9±0,2

с. Орлиное	Лугово-светло-каштановые	23,6± 2,5	34,3± 3,5	38,3± 4,1	45,3± 4,2	2± 0,2
с. Каракол	Горно-долинные каштановые	28,3± 3,1	36,3± 3,8	39,2± 4,1	45,2± 4,7	1,6± 0,2
с. Тепке	Горно-долинные светло-каштановые	23,5± 2,2	31,2± 3,3	36,3± 3,8	43,2± 4,7	1,8± 0,2
с. Боз-Булун	Горно-долинные светло-каштановые	28,6± 3,1	35,3± 3,7	40,6± 4,7	42,3± 4,2	1,5± 0,2
Дачи (с. Михайловка)	Аллювиальные луговые тугайных лесов и кустарников	28,3± 2,5	32,3± 2,9	38,5± 4,2	40,2± 3,8	1,5± 0,2

Альфа- и бета-активность воды реки Жыргалан. В соответствии с нормами СанПиН 2.1.4.002-03 контрольные уровни для питьевой воды альфа-излучателей составляют 0,1 Бк/л, бета-излучателей – 1 Бк/л [9, с. 12]. Результаты анализов проб воды реки Жыргалан показали, что уровни суммарной альфа- активности варьируют в пределах 0,10–0,22 Бк/л, бета-активности 0,06–0,13 Бк/л (табл. 4). Наблюдается незначительное увеличение активности радионуклидов в воде по рельефу местности к устью реки.

Таблица 4.

Суммарная α - и β - активности радионуклидов в воде реки Жыргалан в период минимального весеннего стока (16 марта 2015 г.)

Место отбора пробы	Суммарная активность радионуклидов (Бк/л)	
	Альфа-активность	Бета-активность
1. р. Джергалан (пос. Шахта)	0,15±0,02	0,10±0,01
2. р. Джергалан (с. Советское)	0,10±0,02	0,06±0,01
3. р. Джергалан (р. Тюрген-Ак-Суу)	0,12±0,02	0,09±0,01
4. р. Джергалан (с. Отрадное)	0,18±0,02	0,10±0,01
5. р. Джергалан (р. Ак-Суу)	0,20±0,02	0,12±0,01
6. р. Джергалан (устье)	0,22±0,02	0,12±0,01

Так как речная вода обладает переменным химическим составом, информативным показателем присутствия радионуклидов в поверхностных водах являются илесто-глинистые фракции донных осадков. Фоновые содержания радионуклидов в них близки к содержаниям их в осадочных породах и почве [2, с. 25]. В илесто-глинистых фракциях донных осадков реки Жыргалан содержание U (1,7–23,2) выше кларковых значений, особенно в устьевой зоне 287,3 Бк/кг и радиогенного свинца ^{210}Pb – 104 Бк/кг. Содержание других радионуклидов находится в пределах нормы (Табл. 5).

Таблица 5.

**Радионуклидный состав илесто-глинистых фракций
 реки Жыргалан**

Место отбора образцов	U/Th-234		Ra-226		Th-232/ Ac-228		Pb-210		K-40		Cs-137	
	Бк/кг	±	Бк/кг	±	Бк/кг	±	Бк/кг	±	Бк/кг	±	Бк/кг	±
1. р. Джергалан (пос. Шахта)	21,3	3,7	24,2	1,3	42,6	2,2	22	3,2	889	32,7	0,2	0,01
2. р. Джергалан (р. Тюрген-Ак-Суу)	44,1	7,6	33,2	2,9	51,7	2,9	35	5,0	855	31,5	2,7	0,08
3. р. Джергалан (р. Ак-Суу)	62,5	10,8	45,5	3,1	60,9	2,9	26	3,7	806	29,9	1,2	0,04
4. р. Джергалан (устье)	287,3	52	33,3	3,1	54,2	16	104	10,6	806	29,9	-	-

Выводы

1. Мощность радиационного фона по гамма-излучению в бассейне реки Жыргалан варьирует в пределе 15–40 мкР/ч и не превышает установленной в республике нормы 60 мкР/ч.

2. Повышенные уровни удельной активности ^{238}U (76,4 Бк/кг) и ^{210}Pb (124,9 Бк/кг) в почве характерны для участков складирования отвалов угленосных пород.

3. Альфа- и бета-активность воды реки Жыргалан варьирует в пределах естественных уровней. Наблюдается незначительное увеличение активности радионуклидов в воде по рельефу местности к устью реки.

4. В илесто-глинистых фракциях донных осадков реки Жыргалан содержание U выше кларковых значений, особенно в устьевой зоне 287,3 Бк/кг и радиогенного свинца ^{210}Pb – 104 Бк/кг.

Список литературы:

1. Алексахин Р.М. Ядерная энергия и биосфера. – М.: Энергоиздат, 1982. – 215 с.
2. Виноградов А.П. Геохимия редких и рассеянных химических элементов в почвах. – М.: АН СССР, 1957. – 219 с.
3. ГОСТ 53123-2008 (ИСО 10381-5:2005). Качество почвы. Отбор проб. Часть 5. Руководство по изучению городских и промышленных участков на предмет загрязнения почвы. – М.: Стандартинформ, 2009. – 60 с.
4. ГОСТ Р 51592-2000. Вода. Общие требования к отбору проб. – М.: Госстандарт России, 2001. – 36 с.
5. Ковальский В.В., Воротницкая И.Е., Лекарев В.С. и др. Урановые биогеохимические пищевые цепи в условиях Иссык-Кульской котловины // Труды биогеохимической лаборатории. – М.: Наука, 1968. Т. XII. – С. 25–53.
6. Мамытов А.М. Почвы Иссык-Кульской области и пути их рационального использования. – Фрунзе: Илим, 1977. – 277 с.
7. Никаноров В.В. Рудные месторождения Кыргызстана. – Бишкек, 2009. – 482 с.
8. Нормы радиационной безопасности НРБ – 99/2009. – СанПиН 2.6.1.2523 – 09. 70 с.
9. Санитарно-эпидемиологические правила и нормативы СанПиН 2.1.4.002-03 «Питьевая вода. Гигиенические требования к качеству воды централизованных систем питьевого водоснабжения. Контроль качества». 15 с.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

СЕКЦИЯ

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ»

МЕТОД РАСПОЗНАВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ ПУТЕМ СРАВНЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ДЕСКРИПТОРОВ В ПРИЗНАКОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Копелиович Михаил Викторович

*аспирант, Южный федеральный университет,
РФ, г. Ростов-на-Дону*

E-mail: Kopeliovich.Mikhail@gmail.com

Курдоглян Айк Варужанович

*аспирант, Южный федеральный университет,
РФ, г. Ростов-на-Дону*

Петрушан Михаил Викторович

*научный сотрудник, Южный федеральный университет,
РФ, г. Ростов-на-Дону*

THE METHOD OF RECOGNITION OF DYNAMIC PATTERNS BY COMPARISON OF DESCRIPTOR TRAJECTORIES IN FEATURE SPACE

Mikhail Kopeliovich

*postgraduate student, Southern Federal University,
Russia, Rostov-on-Don*

Aik Kurdoglyan
*postgraduate student, Southern Federal University,
Russia, Rostov-on-Don*

Mikhail Petrushan
*research fellow, Southern Federal University,
Russia, Rostov-on-Don*

АННОТАЦИЯ

Рассматривается задача признакового описания объекта на видеоизображении с целью классификации объекта. Существующие подходы ориентированы на синтез и оптимизацию дескрипторов объекта. Предлагается альтернативный подход к описанию объекта, основанный на анализе траектории движения его дескриптора в признаковом пространстве, возникающего при перемещении объекта относительно наблюдателя.

ABSTRACT

The problem of feature description of the object in video image for object classification is considered. Current approaches are oriented on synthesis and optimization of object descriptors. We propose alternative approach to object description based on the analysis of trajectory of its descriptor in the feature space when the object moves relatively to observer.

Ключевые слова: динамический образ; дескриптор; траектория дескриптора; распознавание образов.

Keywords: dynamical image; descriptor; descriptor trajectory; pattern recognition.

Актуальность и современное состояние исследований по данной научной проблеме

Признаковое описание изображений объектов применяется для различных задач компьютерного зрения: детектирования и распознавания объектов или особых точек объекта, сравнение изображений и т. д. При этом одной из наиболее актуальных проблем остаётся выбор оптимального дескриптора для описания целевых объектов, инвариантного к ракурсу наблюдения. Оптимальность дескриптора определяется тем, насколько генерируемое им описание специфично (отличается от описаний других классов объектов) и устойчиво (инвариантно к внутриклассовым вариациям вида объекта на изображении). Разработаны различные специализированные дескрипторы, применяющиеся для описания и распознавания формы контуров [2],

текстуры [4], цветовые дескрипторы [7]. Один из подходов к выбору оптимального дескриптора заключается в синтезе объектно-специфичных дескрипторов [8; 10; 12]. Задача конструирования специфичных дескрипторов обычно сводится к структурной [12] или параметрической [11] оптимизации определенного дескриптора. В качестве методов оптимизации часто используются методы роя частиц [6; 8] и генетический алгоритм [5; 9; 12], метод оптимизации для задач с негладкой функцией ошибки [10]. В ряде работ рассмотрена и решена задача автоматического выбора комбинации дескрипторов (формы, цвета, текстуры) методами математической оптимизации [8]. Показано, что такая комбинация более эффективна, чем отдельные дескрипторы, входящие в её состав. Несмотря на показанную эффективность методов оптимизации дескрипторов, такой подход имеет принципиальные ограничения, связанные с невозможностью обеспечения инвариантности дескриптора к ракурсу (точке наблюдения), т. к. перспективный вид одного и того же объекта с различных сторон может быть совершенно разным. Альтернативный подход к описанию и распознаванию образов заключается в реализации процедуры активного осмотра объекта и анализа траектории движения дескриптора в признаковом пространстве, вызванного перемещением системы наблюдения относительно объекта. Похожий подход используется в работе [1] для распознавания динамических образов на основе прогноза изменения дескриптора. В нашей работе мы предлагаем новый метод интегрального описания траектории движения дескриптора, вызванного перемещением объекта относительно наблюдателя, в виде нового дескриптора более высокого порядка. Задача сравнения динамических образов рассматривается на примере распознавания видеозаписей лиц.

Описание эксперимента

Экспериментальная выборка состоит из 15 видеозаписей длительностью 20 секунд каждая, записанных в оттенках серого на веб-камеру Logitech C920 с частотой 30 кадров в секунду. На видеозаписи в каждом кадре видно голову испытуемого, который сидит фронтально к камере и совершает наклоны головой вниз-вверх. В эксперименте приняло участие 5 испытуемых (мужчины, от 24 до 36 лет), для каждого из них было сделано 3 видеозаписи.

Фон на видеозаписях константный, одинаковый для всей экспериментальной выборки; освещенность составляла около 500 lux. Расстояние от веб-камеры до головы испытуемого составляло около 0,3 м.

Описание метода

Суть предлагаемого метода построения и анализа траектории дескриптора головы в признаковом пространстве заключается в выделении из полного набора видеозаписей областей с лицами, построении дескриптора для каждой из этих областей, проецировании дескриптора на двумерное пространство методом главных компонент и построении дескриптора траектории в пространстве главных компонент на основе её интегральной модели.

В каждом кадре каждой обрабатываемой видеозаписи при помощи метода активных форм (Active Shape Models [3]) выделяется область головы, охватывающая области лба, волос, ушей и подбородка. Область масштабируется до стандартного размера (100×100). В качестве дескриптора головы выбирается построчная развёртка матрицы интенсивностей выделенной в кадре области.

Далее, для редуцирования размерности признакового пространства, к полному набору дескрипторов применяется метод главных компонент.

Обозначив через A_{ij} – дескриптор j -ого кадра i -ой видеозаписи, а через $C_1(A_{ij})$ и $C_2(A_{ij})$ – скалярные произведения вектора A_{ij} на первый и второй главные компоненты соответственно, для каждой видеозаписи строится траектория с координатами $(C_1(A_{ij}), C_2(A_{ij}))$.

В пространстве C_1 и C_2 выбирается квадратная область, заведомо включающая в себя все возможные значения $C_1(A_{ij})$ и $C_2(A_{ij})$, которая разбивается на регулярную сетку с одинаковым количеством строк и столбцов (равным 100). Каждые три соседние точки рассматриваемой траектории образуют угол, который округляется до одного из восьми значений (изменяющихся от 0° до 360° с шагом 45°). В зависимости от этого значения и координат расположения вершины данного угла на регулярной сетке, каждая точка траектории (кроме двух крайних) относится к одному из 8×10^4 классов. Считая эти классы упорядоченными, вводится вектор V размерности 8×10^4 . i -ый элемент вектора V равен доле принадлежащих i -му классу вершин среди всего множества вершин данной траектории. Данный вектор принимается в качестве дескриптора рассматриваемой траектории.

Близость дескрипторов траекторий понимается как евклидово расстояние между ними. Для сравнения дескрипторов траекторий выбирается пороговое значение их близости: если это расстояние меньше порогового значения, то они определяются как принадлежащие к одному классу, иначе – к разным классам.

Результаты

Для оценки качества полученного дескриптора строится так называемая ROC-кривая (receiver operating characteristic), то есть, для дескриптора траектории лица каждого испытуемого выполняется следующее: по всем дескрипторам траекторий лица того же испытуемого, кроме рассматриваемой траектории, вычисляется арифметическое среднее. Фиксируя пороговое значение, вычисляется близость полученного среднего к дескриптору рассматриваемой траектории, а также к дескрипторам траекторий, полученных по видеозаписям с другими испытуемыми, что приводит к классификации траекторий (относятся ли они к рассматриваемому лицу или нет). Данная процедура независимо повторяется для траекторий, полученных по всем видеозаписям. Зная истинную принадлежность образа к определенному классу, для всех выполненных процедур вычисляются средние значения *специфичности* классификации (доли ошибочных положительных классификаций) и *чувствительности* классификации (доли правильных положительных классификаций). По данным значениям строится точка на ROC-кривой. При переборе порогового значения (от 0 до 50) вычисляются остальные точки кривой (рис. 1). Площадь под ROC-кривой, являющаяся мерой качества классификатора, равна 0.96.

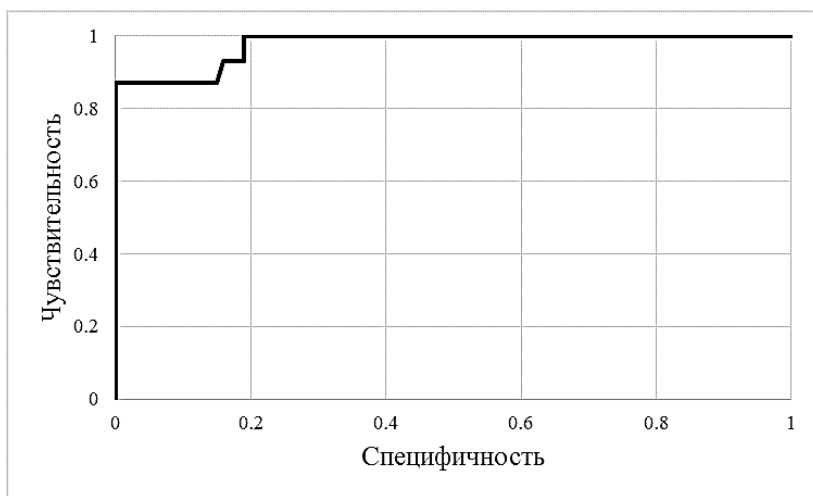


Рисунок 1. ROC-кривая, построенная по специфичности и чувствительности предложенного алгоритма классификации лиц

Заключение

Разработан метод описания и распознавания динамических образов, основанный на анализе траектории дескриптора в признаковом пространстве, обусловленной движением системы наблюдения относительно объекта. Предложен подход к описанию такой траектории и метод сравнения траекторий с помощью оценки евклидова расстояния между интегральными дескрипторами траектории. Прикладная применимость предложенного метода показана на примере задачи распознавания видеоизображений лиц. Описанный подход может быть использован как самостоятельный метод описания и распознавания динамических образов, так и в качестве компонента в составе каскадного классификатора для усиления методов распознавания статических образов при наличии движения рассматриваемых объектов.

Список литературы:

1. Фаворская М.Н. Распознавание динамических образов на основе предсказывающих фильтров // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М.Ф. Решетнева, выпуск № 1, 2009.
2. Belongie S., Malik J., and Puzicha J. Shape context: a new descriptor for shape matching and object recognition // NIPS, 2000.
3. Cootes T.F., Taylor C.J., Cooper D.H., and J. Graham. Active shape models – their training and application // Computer Vision and Image Understanding, 61, 1995. P. 38–59.
4. Haley G.M. and Manjunath B.S. Rotation-invariant texture classification using a complete space-frequency model // IEEE transactions on Image Processing, 8 (2), 2002. P. 255–269.
5. ul Hassan M., Osman A., and Sarfraz M. Comparative study of evolutionary optimization technique and Fourier descriptors in object recognition // ICCIT, 2012.
6. Kennedy J., Eberhart R.C., and Shi Y. Swarm intelligence // San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2001.
7. Koen E.A., van de Sande, Theo G., Cees G., and Snoek M. Evaluating Color Descriptors for Object and Scene Recognition // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 32 (9), 2010. P. 1582–1596.
8. Mansano A., Matsuoka J.A., Afonso L.C.S., Papa J.P., Faria F., and Torres R. da S. Improving image classification through descriptor combination // in Proc. of the 25th Conference on Graphics, Patterns and Images (SIBGRAPI). 2012.
9. Reddy A.S., Kumar S., and Garg R. Hybrid-genetic algorithm based descriptor optimization and QSAR models for predicting the biological activity of Tipranavir analogs for HIV protease inhibition J Mol Graph Model, 28(8), 2010. P. 852–862.

10. Simonyan K., Vedaldi A., and Zisserman A. Descriptor learning using convex optimisation // In: Fitzgibbon A., Lazebnik S., Perona P., Sato Y., Schmid C. (eds.) ECCV 2012. LNCS, vol. 7578, P. 243–256. Springer, Heidelberg, 2012.
11. Taati B. Generation and optimization of local shape descriptors for point matching in 3-d surfaces // Ph.D thesis, Queens University, 2009.
12. Trujillo L., Legrand P., Olague G., Pérez C. Optimization of the hölder image descriptor using a genetic algorithm // in Proc. of the 12th annual conference on Genetic and evolutionary computation. 2010. P. 1147–1154.

АНАЛИЗ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ СОЗДАНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛИ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЁТКИ ЛОНСДЕЙЛИТА

Фомин Денис Васильевич

аспирант, Амурский государственный университет,

РФ, г. Благовещенск

E-mail: gefest-uni@yandex.ru

ANALYSIS OF SOFTWARE FOR THE CREATION AND STUDY OF MODELS OF CRYSTAL LATTICE OF LONSDALEITE

Denis Fomin

postgraduate student, Amur State University,

Russia, Blagoveshchensk

АННОТАЦИЯ

Целью данной работы является выбор программного инструмента, подходящего для проведения исследования применимости к лонсдейлиту метода описания кристаллической структуры Сычёва М.С. Автором формулируются требования к программному инструменту, производится анализ существующего программного обеспечения и перспектива разработки специализированного приложения, и делается заключение о целесообразности разработки специального программного обеспечения.

ABSTRACT

The aim of this work is the choice of software tool suitable for the study of the applicability of the method of describing the crystal structure by Sychev M.S. to lonsdeylite. The author formulates the requirements for software tool, analyzes of existing software and the prospect of the development of a dedicated app and makes a conclusion about expediency of development of special software.

Ключевые слова: кристаллография; кристаллическая решётка; лонсдейлит; гексагональная сингония; постоянная маделунга; коэффициент компактности; матричная модель; кубическая сетка; анализ программного обеспечения.

Keywords: crystallography; crystal cell; lonsdaleite; hexagonal syngony; constant madelung; coefficient of compactness; matrix model; cubic grid; analysis of software.

На данный момент актуальны задачи разработки новых и исследования существующих соединений, находящихся в конденсированном состоянии. А также задачи, связанные с разработкой и совершенствованием методов расчёта параметров кристаллических решёток таких соединений. Одними из наиболее важных параметров считаются постоянная Маделунга и коэффициент компактности [1, с. 410–424; 3, с. 5–6; 10–15].

Среди различных методов описания кристаллических решёток и основанных на них методов расчёта названных ключевых параметров определённый интерес предлагают методы предложенные Сычёвым М.С. в работах [3, с. 33–54; 57–82; 4, с. 86–101] и ряде других. Его методы имеют ряд достоинств, однако на данный момент, они применимы только к соединениям с кристаллической структурой кубической сингонии.

В работе [5] предлагается способ проверки возможности распространения метода компактного матричного описания кристаллических структур и основанных на нём методов расчёта коэффициента компактности и постоянной Маделунга на кристаллические решётки гексагональной сингонии. Предложенный способ состоит в построении моделей кристаллической структуры гексагонального алмаза и кубической сетки с последующим их совмещением. При этом задача состоит в подборе такого взаимного расположения моделей структур и таких значений их размеров друг относительно друга, чтобы при совмещении все узлы модели лонсдейлита совпали с некоторыми узлами кубической сетки [5].

Для построения моделей кристаллической структуры лонсдейлита и кубической сетки, а также выполнения над ними описанных выше действий, применение компьютеров и специального программного обеспечения является целесообразным. Но возникает вопрос, какое программное обеспечение обладает необходимыми возможностями для проведения данного исследования? И будет ли целесообразной разработка соответствующего собственного программного обеспечения, обладающего необходимыми возможностями? Для ответа на эти вопросы нужно решить следующие задачи:

1. определить критерии оценки программного обеспечения, по которым можно определить, подходит ли оно для создания и исследования моделей структуры гексагонального алмаза и кубической сетки;
2. составить список программного обеспечения, которое может отвечать названным критериям;
3. провести анализ отобранного программного обеспечения по заданным критериям;
4. сделать выводы о целесообразности использования проанализированных программных продуктов и о целесообразности разработки специального собственного программного обеспечения.

Критерии оценки программного обеспечения в контексте данной статьи следуют из задачи, которую предстоит решить. А именно из задачи о поиске и проверке вариантов взаимного расположения и относительных размерах модели структуры гексагонального алмаза и кубической сетки посредством построения и наложения моделей, а так же их визуализации и проведения численного анализа. Соответственно программный продукт, пригодный для решения этой задачи, должен удовлетворять следующим критериям:

1. должен обеспечивать возможность построения визуальной модели структуры кристалла гексагонального алмаза с заданными длиной ребра тетраэдра, количеством базисных элементов (тетраэдров) по трём направлениям, ориентацией в пространстве;
2. должен обеспечивать возможность построения визуальной модели кубической сетки с заданными длиной ребра куба, количеством базисных элементов (кубов) по 3-м направлениям, ориентацией в пространстве;
3. должен обеспечивать возможность наложения этих структур друг на друга;
4. должен обеспечивать возможность просмотра построенных структур и результата их наложения с разных точек и углов обзора;

5. должен предоставлять заключение о результате наложения структур друг на друга, соответствующее формату <совпадение | не совпадение> [список идентификаторов узлов тетраэдрической структуры не совпавших ни с одним из узлов кубической структуры] или в аналогичной форме;

6. программа должна давать результат за приемлемое время;

7. программа должна быть удобна в обращении и использовании.

Для построения моделей кристаллических структур на практике применяется как специализированные, так и не специализированные программные инструменты. К специализированным программным инструментам относятся молекулярные редакторы. К числу не специализированных программных продуктов можно отнести различные программы построения чертежей, САПР, 3D-редакторы и математические пакеты. Стоит отметить, что поставленная задача является весьма специфичной и сформулированные критерии наследуют это свойство. Поэтому подобрать существующий программный инструмент, подходящий для решения этой задачи, представляется затруднительным и предстоящий анализ может выявить потребность в создании специального программного обеспечения.

Специализированное программное обеспечение

OlexSys Crystallography – программа направленная прежде всего на помощь в разработке и исследовании полимеров [11, с. 339–341; 16]. Данная программа является мощным комплексным инструментом с открытым исходным кодом. Однако версия OlexSys Crystallography для платформы Windows x64 показала не вполне стабильную. Кроме того, данная программа в силу многообразия своих возможностей сложна в использовании, что усугубляется состоянием официальной документации. К тому же OlexSys Crystallography не содержит возможностей, обеспечивающих соответствие критериям № 3-5, 7.

CrystalMaker – программа предназначена для моделирования и визуализации кристаллов и молекул любых типов, выполнять над ними различные преобразования, производить измерения, сохранять результат моделирования в графических и видеофайлах [9; 10]. Данная программа позволяет создавать из базовой ячейки структуру требуемого размера. Так же к достоинствам CrystalMaker можно отнести удобный интерфейс, в особенности элементы, связанные с отображением и редактированием текущей кристаллической или молекулярной структуры. Кроме того, документацию, входящую в состав пакета установки, и почти полнофункциональную пробную версию, позволяющую использовать все возможности программы.

Недостатками программы является её дороговизна: стандартная лицензия для персонального использования стоит 750 \$ [9], что на момент написания статьи составляет примерно 48 000 рублей. Кроме того, данная программа не соответствует предложенным критериям № 3-5.

Crystal Studio – программа предназначенная для создания, манипуляции и визуализации кристаллических и высокомолекулярных структур и поверхностей. А также для моделирования дефектов различного типа и моделирования дифракции в случае рентгеновского, нейтронного или электронного воздействия [8]. Данная программа обладает большим набором возможностей, удобным, хорошо продуманным интерфейсом и качественным отображением текущей структуры. Недостатком данной программы так же можно назвать её цену: на момент написания статьи 1 персональная лицензия на профессиональную версию Crystal Studio стоила 1398 \$, что составляет примерно 84 500 рублей. Кроме того, эта программа не соответствует критериям № 3-5.

Avogadro – кроссплатформенная программа с открытым исходным кодом, предназначенная для создания и редактирования молекулярных и кристаллических структур. Программа обладает простым, удобным, интуитивно понятным интерфейсом, возможностью расширения функций с помощью дополнительных модулей. Avogadro позволяет создавать, редактировать и визуализировать кристаллические и молекулярные структуры [7; 15, с. 1–17]. Так же, Avogadro позволяет формировать кристалл заданного размера по 3 направлениям, используя элементарную ячейку. К минусам данной программы можно отнести не совсем стабильную работу на платформе Windows x64, дублирование частиц при формировании структуры из элементарной ячейки, возникновение «замираний» при выделении и изменении группы частиц большой структуры. Данная программа не соответствует критериям № 3-5.

Не специализированное программное обеспечение

Bender – свободный профессиональный пакет для создания трёхмерной компьютерной графики. В возможности этого программного продукта входит создание и обработка, анимация трёхмерных сцен, моделирование динамики мягких и твёрдых тел, базовые функции редактирования видео, создание и обработка python-скриптов [13]. Blender не содержит необходимых возможностей в явном виде, но он может быть использован для решения поставленной задачи благодаря возможности использования скриптов и хорошему документальному сопровождению. Однако, соответствие

критерию № 7 нужно признать не полным, так как работа с программой требует специальной подготовки.

Autodesk 3ds Max – программная система во многом аналогичная пакету Blender. Autodesk 3ds Max так же содержит средства создания, редактирования, визуализации и анимации трёхмерных сцен. Данная программная система так же хорошо документирована, имеет возможности видео монтажа и моделирования динамики твёрдых и мягких тел, поддерживает скрипты на собственном встроенном языке. Система распространяется под несколькими типами лицензий, в том числе присутствует бесплатная полнофункциональная версия, доступная для учащихся после регистрации на сайте разработчиков [6]. Соответственно, в отношении Autodesk 3ds Max можно сделать такой же вывод, как и о программном пакете Blender.

Компас-3D – программная система, предназначенная для создания трёхмерных моделей деталей и их чертежей в разных проекциях [2]. Данная программная система позволяет создать модель элементарной ячейки кристалла. Но, так как Компас-3D не предназначен для таких построений и, тем более, для манипуляций с ними, создать такую модель будет не очень просто, а построение на её основе большего фрагмента кристаллической решётки оказывается очень неудобным и долгим. Кроме того, данная программа Система Компас-3D не удовлетворяет критериям № 3-7.

GeoGebra – кроссплатформенная программа, предназначенная для построения геометрических и стереометрических чертежей, выполнение алгебраических вычислений, а так же ряд возможностей, связанных с различными разделами математики [12]. Данная программа обладает простым и удобным интерфейсом; позволяет построить необходимые структуры с помощью соответствующих средств создания стереометрических чертежей. Но при этом построение больших фрагментов кристаллической структуры и кубической сетки оказывается весьма трудоёмким и долгим процессом. К тому же, программа не содержит возможностей, позволяющих выполнить расчёты. Соответственно GeoGebra не удовлетворяет критериям № 3-7.

Scilab – пакет прикладных математических программ, предоставляющий открытое окружение для инженерных, технических и научных расчётов, представляющий собой свободный аналог пакета MatLab [14]. Данная программа хорошо документирована, имеет удобный, хорошо продуманный интерфейс и работает стабильно. Так же данный пакет программ содержит инструменты для 2D и 3D визуализации. Scilab позволяет создать требуемые модели структур, но во-первых, для визуализации полученных моделей отсутствует

подходящий встроенный инструмент, значит для отображения моделей придётся писать специальный алгоритм на встроенном языке данной системы, во-вторых, построение моделей в этом пакете так же придётся программировать на встроенном языке. Таким образом по-сути, использование пакета SciLab приводит к необходимости разрабатывать специальное программное обеспечение. То же относится и к другим математическим пакетам.

В ходе анализа были рассмотрены некоторые другие специализированные и не специализированные программные продукты, но они обладали теми же недостатками, что и программы, описанные выше.

Анализ существующего программного обеспечения показал, что среди всего многообразия рассмотренных инструментов, есть несколько, которые могут быть использованы для решения задачи о проверке применимости методов Сычёва М.С. [5]:

1. Blender и Autodesk 3d Max – данные программные продукты обладают избыточными возможностями по отношению к поставленной задаче; их использование потребует специальной подготовки; для решения поставленной задачи придётся разрабатывать соответствующие алгоритмы на языках программирования, поддерживаемых данными программными продуктами;

2. математические пакеты — не содержат специальных средств, что означает необходимость разработки алгоритмов, выполняющих все необходимые для решения поставленной задачи действия, на встроенном языке программирования выбранного пакета.

Таким образом можно сделать вывод, что предположение об отсутствии подходящих готовых инструментов в силу специфичности поставленной задачи и выбранных критериев подтвердилось: необходимо создать специальное программное обеспечение, предназначенное для проверки применимости методов из работы [3, с. 33–54; 57–83] и удовлетворяющее сформулированным критериям. Такое программное обеспечение может быть создано как часть программ Blender и Autodesk 3d Max или в качестве программы для одного из математических пакетов, или в качестве отдельной самостоятельной прикладной программы.

Список литературы:

1. Ерёмин И.Е. Моделирование коэффициента компактности кристаллической решетки крystalлита [Текст] / И.Е. Ерёмин, А.А. Остапенко, М.С. Сычёв // В мире научных открытий. – 2015. – № 2. – С. 410–424.

2. КОМПАС-3D V16. Инструмент создателя – официальный сайт САПР КОМПАС – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://kompas.ru/>. – (Дата обращения: 13.07.2016).
3. Сычёв М.С. Моделирование структурных параметров кубических кристаллических решёток. [Текст]: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.18: защищена 22.05.2015 / Сычёв Михаил Сергеевич. – Благовещенск, 2015. – 130.
4. Сычёв М.С. Численный расчет компактности простых кубических решеток [Текст] / М.С. Сычёв, А.А. Горевой // В мире научных открытий. – 2013. – № 2. – С. 86–101.
5. Фомин Д.В. Расширение применимости метода компактного матричного описания кристаллических структур М.С. Сычёва [Текст] / Д.В. Фомин // Интерактивная наука. – 2016. – № 8.
6. 3ds Max – Программа для 3D моделирования и визуализации – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.autodesk.ru/products/3ds-max/>. – (Дата обращения: 23.07.2016).
7. Avogadro – Free cross-platform molecule editor – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://avogadro.cc>. – (Дата обращения: 1.08.2016).
8. Crystal Studio: Crystallography Software for Crystal and Molecular Structures – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.crystalsoftcorp.com>. – (Дата обращения: 23.08.2016).
9. CrystalMaker Software: Crystal & Molecular Structures Modelling and Diffraction – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.crystallmaker.com/index.html>. – (Дата обращения: 21.08.2016).
10. CrystalMaker: Interactive Crystal & Molecular Modeling – [Электронный ресурс]: руководство пользователя. — Режим доступа: справочная система программы CrystalMaker. – (Дата обращения: 21.08.2016).
11. Dolomanov O.V. OLEX2: A complete structure solution, refinement and analysis program [Текст] / O.V. Dolomanov [и др.] // J. Appl. Cryst. – 2009. – № 42. – С. 339–341.
12. GEOGEBRA – графический калькулятор для функций, геометрии, статистики и 3D геометрии – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.geogebra.org/>. – (Дата обращения: 26.08.2016).
13. Home of the Blender project – Free and Open 3D Creation Software – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.blender.org/>. – (Дата обращения: 25.08.2016).
14. Home-Scilab – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.scilab.org/>. – (Дата обращения: 28.08.2016).
15. Marcus D.H. Avogadro: an advanced semantic chemical editor, visualization, and analysis platform [Текст] / D.H. Marcus [и др.] // Journal of Cheminformatics. – 2012. – № 4. – С. 1–17.
16. Olex Crystallographic Software & Services – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.olexsys.org/>. – (Дата обращения: 20.08.2016).

МАТЕМАТИКА

СЕКЦИЯ

«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ»

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОБ ИСТОЧНИКЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Матанова Калыскан Базарбаевна

*канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель отделения математики
Кыргызско-Турецкого университета «Манас»,
Кыргызская Республика, г. Бишкек
E-mail: mkalyskan@gmail.com*

Темиров Бекжан Кайыпбекович

*д-р физ.-мат. наук,
Кыргызского Национального Университета им. Ж. Баласагына,
Кыргызская Республика, г. Бишкек
E-mail: bekjant@mail.ru*

AN INVERSE SOURCE PROBLEM FOR THE THIRD ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Kalyskan Matanova

*candidate of Science, Department of mathematics,
Faculty of Sciences, Kyrgyz-Turkish Manas University,
Kyrgyzstan, Bishkek*

Bekzhan Temirov

*doctor of science, Kyrgyz national university named after J. Balasagun,
Kyrgyzstan, Bishkek*

АННОТАЦИЯ

В данной статье получена функция Грина для краевой задачи для уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, удовлетворяющими определенным условиям, а также методом резольвент и методом функции Грина найдены условия существования и единственности решения обратной задачи об источнике для уравнения третьего порядка с частными производными.

ABSTRACT

In this paper the Green function of the boundary value problem for the second order differential equations with variable coefficients satisfying certain conditions is obtained. Conditions for the existence and uniqueness of the solution of inverse source problem for the third-order differential equation with partial derivatives are found by using the method of resolvents and the Green function method.

Ключевые слова: обратная задача, уравнение третьего порядка с частными производными третьего порядка, резольвента, интегральное уравнение Вольтерра второго рода, функция Грина.

Keywords: inverse problem, third-order partial differential equation, resolvent, Volterra integral equation of the second kind, Green function.

С точки зрения физических приложений большой интерес представляют дифференциальные уравнения, в частности, дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков. Уравнения в частных производных третьего порядка возникают во многих областях физики и техники, например, при изучении движения дисперсионной волны, плазменной волны, волн в упругой среде [8], импульсивного движения плоской пластины [9], при изучении задач моделирования фильтрации жидкости в пористых средах и процесса влагопереноса в почве [3]. Вопросы разрешимости обратных задач для дифференциальных уравнений с частными производными изучены многими авторами [4; 6; 7; 10]. В настоящей статье рассматриваются вопросы существования и единственности обратной задачи для уравнения третьего порядка с частными производными с неизвестной правой частью составного вида.

1. Построение функции Грина для уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

Рассмотрим уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (1)$$

где: $x \in (a, b)$, $a < b$, $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – заданные функции на $[a, b]$

Как известно, решение краевой задачи может быть записано с помощью функции Грина. Построим функцию Грина для уравнения (1) с граничными условиями

$$y(a) = 0, \quad (2)$$

$$y(b) = 0. \quad (3)$$

Теорема 1. Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям

$$q(x) = K^2(x) + \beta^2(x) + K'(x) - \frac{\beta'(x)}{\beta(x)} K(x), \quad (4)$$

$$K(x) = \frac{1}{2} \left[p(x) + \frac{\beta'(x)}{\beta(x)} \right], \quad x \in (a, b) \quad (5)$$

где: $K'(x)$, $\beta'(x)$ – производные функций $K(x)$ и $\beta(x)$, $p^2(x) - 4q(x) < 0$, $\beta(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$ [5]. Тогда функция Грина краевой задачи (1), (2), (3) имеет вид

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{e^{-\int_a^x K(s) ds}}{\beta(\xi)} \left[\sin \left(\int_a^\xi \beta(s) ds \right) \operatorname{ctg} \left(\int_a^b \beta(s) ds \right) - \cos \left(\int_a^\xi \beta(s) ds \right) \right] \sin \left(\int_a^x \beta(s) ds \right), & x \leq \xi, \\ \frac{e^{-\int_a^\xi K(s) ds}}{\beta(\xi)} \left[\sin \left(\int_a^x \beta(s) ds \right) \operatorname{ctg} \left(\int_a^b \beta(s) ds \right) - \cos \left(\int_a^x \beta(s) ds \right) \right] \sin \left(\int_a^\xi \beta(s) ds \right), & x \geq \xi. \end{cases} \quad (6)$$

Доказательство. Фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

имеет вид [5]:

$$y_1(x) = e^{-\int_a^x K(s)ds} \cos\left(\int_a^x \beta(s)ds\right), \quad (7)$$

$$y_2(x) = e^{-\int_a^x K(s)ds} \sin\left(\int_a^x \beta(s)ds\right), \quad (8)$$

Найдем производные (7) и (8):

$$y_1'(x) = -K(x)e^{-\int_a^x K(s)ds} \cos\left(\int_a^x \beta(s)ds\right) - \beta(x)e^{-\int_a^x K(s)ds} \sin\left(\int_a^x \beta(s)ds\right), \quad (9)$$

$$y_2'(x) = -K(x)e^{-\int_a^x K(s)ds} \sin\left(\int_a^x \beta(s)ds\right) + \beta(x)e^{-\int_a^x K(s)ds} \cos\left(\int_a^x \beta(s)ds\right) \quad (10)$$

Функцию Грина $G(x, \xi)$ краевой задачи будем искать в виде

$$G(x, \xi) = \begin{cases} (a_1(\xi) + b_1(\xi))y_1(x) + (a_2(\xi) + b_2(\xi))y_2(x), & a \leq x \leq \xi, \\ (a_1(\xi) - b_1(\xi))y_1(x) + (a_2(\xi) - b_2(\xi))y_2(x), & \xi \leq x \leq b. \end{cases} \quad (11)$$

Так как по определению [2] функция $G(x, \xi)$ непрерывна в точке $x = \xi$, из (11) получим равенство

$$\begin{aligned} & (a_1(\xi) + b_1(\xi))y_1(\xi) + (a_2(\xi) + b_2(\xi))y_2(\xi) = \\ & = (a_1(\xi) - b_1(\xi))y_1(\xi) + (a_2(\xi) - b_2(\xi))y_2(\xi), \end{aligned}$$

или

$$b_1(\xi)y_1(\xi) + b_2(\xi)y_2(\xi) = 0.$$

При любом фиксированном $\xi \in (a, b)$ первая производная $G'_x(x, \xi)$ функции Грина краевой задачи (1), (2), (3) в точке $x = \xi$ претерпевает скачок, равный 1:

$$\begin{aligned} & (a_1(\xi) - b_1(\xi))y_1'(\xi) + (a_2(\xi) - b_2(\xi))y_2'(\xi) = \\ & = (a_1(\xi) + b_1(\xi))y_1'(\xi) + (a_2(\xi) + b_2(\xi))y_2'(\xi) + 1. \end{aligned}$$

Отсюда $-2b_1(\xi)y_1'(\xi) - 2b_2(\xi)y_2'(\xi) = 1$. Таким образом, для нахождения неизвестных $b_1(\xi)$, $b_2(\xi)$ получили систему уравнений

$$\begin{cases} b_1(\xi)y_1(\xi) + b_2(\xi)y_2(\xi) = 0, \\ b_1(\xi)y_1'(\xi) + b_2(\xi)y_2'(\xi) = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

решая которую, найдем

$$b_1(\xi) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{2\beta(\xi)} e^{\int_a^\xi K(s)ds} \sin\left(\int_a^\xi \beta(s)ds\right), \quad (12)$$

$$b_2(\xi) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{2\beta(\xi)} e^{\int_a^\xi K(s)ds} \cos\left(\int_a^\xi \beta(s)ds\right). \quad (13)$$

Для отыскания функций $a_1(\xi)$, $a_2(\xi)$, воспользуемся граничными условиями (2) и (3):

$$G(a, \xi) = (a_1(\xi) + b_1(\xi))y_1(a) + (a_2(\xi) + b_2(\xi))y_2(a) = 0, \quad (14)$$

$$G(1, \xi) = (a_1(\xi) - b_1(\xi))y_1(b) + (a_2(\xi) - b_2(\xi))y_2(b) = 0. \quad (15)$$

Так как из (7) и (8) видно, что $y_1(a) = 1$, $y_2(a) = 0$, то из (14) получим

$$a_1(\xi) = -b_1(\xi). \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), найдем

$$a_2(\xi) = b_2(\xi) + \frac{2b_1(\xi)y_1(b)}{y_2(b)}.$$

Запишем суммы и разности найденных неизвестных функций:

$$a_1(\xi) + b_1(\xi) = 0,$$

$$a_2(\xi) + b_2(\xi) = \frac{e^{\int_a^\xi K(s) ds}}{\beta(\xi)} \left[\sin \left(\int_a^\xi \beta(s) ds \right) \operatorname{ctg} \left(\int_a^b \beta(s) ds \right) - \cos \left(\int_a^\xi \beta(s) ds \right) \right],$$

$$a_1(\xi) - b_1(\xi) = -\frac{1}{\beta(\xi)} e^{\int_a^\xi K(s) ds} \sin \left(\int_a^\xi \beta(s) ds \right),$$

$$a_2(\xi) - b_2(\xi) = \frac{1}{\beta(\xi)} e^{\int_a^\xi K(s) ds} \sin \left(\int_a^\xi \beta(s) ds \right) \operatorname{ctg} \left(\int_a^\xi \beta(s) ds \right).$$

Подставляя их в (11), получим функцию Грина (6).

Пример 1. Построить функцию Грина для краевой задачи

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = f(x),$$

$$y(1) = 0, \quad y(2) = 0$$

Решение. Здесь $p(x) = \frac{2}{x}$, $q(x) = 1$, $p^2(x) - 4q(x) = \frac{4}{x^2} - 4 < 0$

для всех $x \in (1, 2)$. Условия (4) – (5) будут выполняться, если выбрать

$K(x) = \frac{1}{x}$ и $\beta(x) = 1$. Тогда по формуле (6) функция Грина будет иметь вид:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\xi}{x} [\sin(\xi - 1) \operatorname{ctg} 1 - \cos(\xi - 1)] \sin(x - 1), & x \leq \xi, \\ \frac{\xi}{x} [\sin(x - 1) \operatorname{ctg} 1 - \cos(x - 1)] \sin(\xi - 1), & x \geq \xi. \end{cases}$$

2. Обратная задача об источнике для уравнения третьего порядка с частными производными

Пусть требуется найти функции $u(t, x) \in C^{1,2}(G)$ и $\varphi(t) \in C[0, T]$, удовлетворяющие уравнению

$$u_t = \alpha (Au)_t' + \beta (Au) + \varphi(t) f(t, x), \quad (17)$$

начальному условию

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [0, 1], \quad (18)$$

граничным условиям

$$u(t, a) = 0, \quad u(t, b) = 0, \quad (19)$$

и дополнительному условию

$$u(t, x_0) = g(t), \quad (20)$$

где:

$$Au = u_{xx}'' + p(t, x)u_x' + q(t, x)u \quad (21)$$

$t \in [0, T]$, $x \in [a, b]$, $G = [0, T] \times [a, b]$ и выполняются условия согласования

$$u_0(a) = u_0(b) = 0, \quad u_0(x_0) = g(0). \quad (22)$$

Введем обозначение

$$v(t, x) = u_t(t, x). \quad (23)$$

Тогда

$$u = \int_0^t v(s, x) ds + u_0(x) \quad (24)$$

и уравнение (17), граничные условия (19) относительно $v(t, x)$ запишутся в виде

$$v(t, x) = \alpha Av + \beta \int_0^t Av(s, x) ds + \beta Au_0(x) + \varphi(t) f(t, x), \quad (25)$$

$$v(t, a) = v(t, b) = 0. \quad (26)$$

Уравнение (25) выразим через Av :

$$Av = -\frac{\beta}{\alpha} \int_0^t Av(s, x) ds + \frac{1}{\alpha} v(t, x) - \frac{1}{\alpha} \varphi(t) f(t, x) - \frac{\beta}{\alpha} Au_0(x). \quad (27)$$

(27) относительно $Av(t, x)$ есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода с ядром-константой $-\frac{\beta}{\alpha}$. Применяя его резольвенту

$$R(t, s) = -\frac{\beta}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha}(t-s)}, \text{ получим:}$$

$$\begin{aligned} Av &= \frac{1}{\alpha} v(t, x) - \frac{1}{\alpha} \varphi(t) f(t, x) - \frac{\beta}{\alpha} Au_0(x) + \\ &+ \frac{1}{\alpha} \int_0^t R(t, s) [v(s, x) - \varphi(s) f(s, x) - \beta Au_0(x)] \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} Av - \frac{1}{\alpha} v(t, x) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^t R(t, s) v(s, x) ds - \frac{1}{\alpha} \int_0^t R(t, s) \varphi(s) f(s, x) ds - \\ &- \frac{1}{\alpha} \varphi(t) f(t, x) - \frac{\beta}{\alpha} Au_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} \int_0^t R(t, s) Au_0(x) ds. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\alpha} \int_0^t R(t, s) Au_0(x) ds &= \frac{\beta}{\alpha} Au_0(x) \int_0^t R(t, s) ds, \\ \int_0^t R(t, s) ds &= \int_0^t \left(-\frac{\beta}{\alpha} \right) e^{-\frac{\beta}{\alpha}(t-s)} ds = -\int_0^t e^{-\frac{\beta}{\alpha}(t-s)} d\left(\frac{\beta}{\alpha}(t-s) \right) = \\ &= -e^{-\frac{\beta}{\alpha}(t-s)} = -e^0 + e^{-\frac{\beta}{\alpha}t} = e^{-\frac{\beta}{\alpha}t} - 1 \end{aligned}$$

то последнее уравнение примет вид

$$\begin{aligned}
 \Delta v - \frac{1}{\alpha} v(t, x) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^t R(t, s) v(s, x) ds - \frac{1}{\alpha} \int_0^t R(t, s) \varphi(s) f(s, x) ds - \\
 & - \frac{1}{\alpha} \varphi(t) f(t, x) - \frac{\beta}{\alpha} Au_0(x) + \frac{\beta}{\alpha} \left(e^{-\frac{\beta t}{\alpha}} - 1 \right) Au_0(x). \quad (28)
 \end{aligned}$$

Если считать правую часть (28) известной функцией, то это уравнение вместе с условиями (26) представляет собой краевую задачу для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка по переменной x . Ее решение с помощью функции Грина $G(t; x, \xi)$ запишется в виде [3]

$$\begin{aligned}
 v(t, x) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^t \int_a^b G(t; x, \xi) R(t, s) v(s, \xi) d\xi ds - \\
 & - \frac{1}{\alpha} \int_0^t \int_a^b G(t; x, \xi) R(t, s) \varphi(s) f(s, \xi) d\xi ds - \frac{1}{\alpha} \varphi(t) \int_a^b G(t; x, \xi) f(t, \xi) d\xi + \\
 & + \frac{\beta}{\alpha} \left(e^{-\frac{\beta t}{\alpha}} - 2 \right) \int_a^b G(t; x, \xi) Au_0(\xi) d\xi, \quad (29)
 \end{aligned}$$

где:

$$G(t; x, \xi) = \begin{cases} \frac{e^{-\int_{\xi}^x K(t, \tau) d\tau}}{\beta(t, \xi)} \left[\sin \left(\int_a^{\xi} \beta(t, \tau) d\tau \right) \operatorname{ctg} \left(\int_a^{\xi} \beta(t, \tau) d\tau \right) - \right. \\ \left. - \cos \left(\int_a^{\xi} \beta(t, \tau) d\tau \right) \right] \sin \left(\int_a^x \beta(t, \tau) d\tau \right), & x \leq \xi \\ \frac{e^{-\int_{\xi}^x K(t, \tau) d\tau}}{\beta(t, \xi)} \left[\sin \left(\int_a^x \beta(t, \tau) d\tau \right) \operatorname{ctg} \left(\int_a^b \beta(t, \tau) d\tau \right) - \right. \\ \left. - \cos \left(\int_a^x \beta(t, \tau) d\tau \right) \right] \sin \left(\int_a^{\xi} \beta(t, \tau) d\tau \right), & x \geq \xi \end{cases} \quad (30)$$

$$q(t, x) = K^2(t, x) + \beta^2(t, x) + K'_x(t, x) - \frac{\beta'_x(t, x)}{\beta(t, x)} K(t, x),$$

$$K(t, x) = \frac{1}{2} \left[p(t, x) + \frac{\beta'_x(t, x)}{\beta(t, x)} \right].$$

Введя обозначения

$$\frac{1}{\alpha} \int_a^b G(t; x, \xi) f(t, \xi) d\xi = r(t, x),$$

$$F(t, x) = \frac{\beta}{\alpha} \left(e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} - 2 \right) \int_a^b G(t; x, \xi) Au_0(\xi) d\xi,$$

(29) перепишем в виде

$$\begin{aligned} v(t, x) + r(t, x)\varphi(t) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^t \int_a^b G(t; x, \xi) R(t, s) v(s, \xi) d\xi ds - \\ &- \frac{1}{\alpha} \int_0^t \int_a^b G(t; x, \xi) R(t, s) \varphi(s) f(s, \xi) d\xi ds + F(t, x). \end{aligned} \quad (31)$$

В силу обозначения (23) из дополнительного условия (20) имеем

$$u'_t(t, x_0) = v(t, x_0) = g'(t),$$

а при $x = x_0$ из (31) получим уравнение

$$\begin{aligned} r(t, x_0)\varphi(t) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^t \int_a^b G(t; x_0, \xi) R(t, s) v(s, \xi) d\xi ds - \\ &- \frac{1}{\alpha} \int_0^t \int_a^b G(t; x_0, \xi) R(t, s) \varphi(s) f(s, \xi) d\xi ds + F(t, x_0) - g'(t). \end{aligned} \quad (32)$$

Таким образом, обратная задача (17) – (20) эквивалентна системе линейных интегральных уравнений Вольтерра 2 рода (31) – (32). Эта система имеет единственное решение, если выполняется условие

$$r(t, x_0) = \frac{1}{\alpha} \int_a^b G(t; x_0, \xi) f(t, \xi) d\xi \neq 0. \quad (33)$$

Тем самым доказана

Теорема 2. Если заданные функции принадлежат пространствам $p(t, x) \in C(G)$, $q(t, x) \in C(G)$, $f(t, x) \in C(G)$, $u_0(x) \in C^2[a, b]$, $g(t) \in C'[0, T]$ и выполняется условие (33), то обратная задача (17) – (20) имеет единственное решение $\{u(t, x), \varphi(t)\}$, принадлежащее пространству $C^{1,2}(G) \times C[0, T]$.

Пример 2. Доказать существование единственного решения обратной задачи

$$\begin{aligned}u_t &= \frac{1}{2}(Au)_t' + Au + \varphi(t)(1+x) \\u(0, x) &= x^2, \quad 1 < x < 2 \\u(t, 1) &= u(t, 2) = 0, \quad 0 < t \leq 2 \\u(t, 1.2) &= 1 - t\end{aligned}$$

в пространстве $C^{1,2}(G) \times C[0, 2]$, $G = \{(t, x): 0 < t \leq 2, 1 < x < 2\}$.

Решение.

Здесь $p(t, x) = \frac{2t}{x}$, $q(t, x) = t^2$, $f(t, x) = \frac{1}{x'}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$,

$u_0(x) = x^2 - 3x + 2$, $g(t) = 0.84 - e^t$. Все заданные функции удовлетворяют условиям теоремы 2, а также выполняются условия согласования

$$\begin{aligned}u_0(1) &= 1 - 3 + 2 = 0, \\u_0(2) &= 4 - 6 + 2 = 0, \\g(0) &= 0.84 - 1 = -0.16, \\u_0(1.2) &= -0.16,\end{aligned}$$

т. е. $u_0(1) = u_0(2) = 0$, $g(0) = u_0(1.2)$. Необходимо проверить условие (33). Если взять

$$K(t, x) = \frac{t}{x}, \quad \beta(t, x) = t^2,$$

то

$$e^{-\int_{\xi}^x K(t, \tau) d\tau} = e^{-\int_{\xi}^x \frac{t}{\tau} d\tau} = e^{-t \int_{\xi}^x \frac{d\tau}{\tau}} = e^{-t[\ln x - \ln \xi]} =$$

$$= e^{-t \ln \frac{x}{\xi}} = e^{\ln \left(\frac{x}{\xi}\right)^{-t}} = \left(\frac{x}{\xi}\right)^{-t} = \left(\frac{\xi}{x}\right)^t,$$

$$\int_1^{\xi} \beta(t, \tau) d\tau = \int_1^{\xi} t^2 d\tau = t^2 (\xi - 1); \quad \int_1^2 t^2 d\tau = t^2$$

и функция Грина по формуле (30) имеет вид

$$G(t; x, \xi) = \begin{cases} \left(\frac{\xi}{x}\right)^t \left[\frac{\left(\frac{\xi}{x}\right)^t}{t^2} \left[\sin(t^2 (\xi - 1)) ctgt^2 - \cos(t^2 (\xi - 1)) \right] \sin(t^2 (x - 1)) \right], & x \leq \xi, \\ \left(\frac{\xi}{x}\right)^t \left[\frac{\left(\frac{\xi}{x}\right)^t}{t^2} \left[\sin(t^2 (x - 1)) ctgt^2 - \cos(t^2 (x - 1)) \right] \sin(t^2 (\xi - 1)) \right], & x \geq \xi. \end{cases}$$

Найдем функцию $r(t, x)$:

$$r(t, x) = 2 \int_1^2 G(t; x, \xi) \frac{1}{\xi^t} d\xi = 2 \int_1^x G(t; x, \xi) \frac{1}{\xi^t} d\xi + 2 \int_x^2 G(t; x, \xi) \frac{1}{\xi^t} d\xi =$$

$$= 2 \int_1^x \frac{\xi^t}{x^t t^2} \left[\sin(t^2 (x - 1)) ctgt^2 - \cos(t^2 (x - 1)) \right] \sin(t^2 (\xi - 1)) \frac{1}{\xi^t} d\xi +$$

$$+ 2 \int_x^2 \frac{\xi^t}{x^t t^2} \left[\sin(t^2 (\xi - 1)) ctgt^2 - \cos(t^2 (\xi - 1)) \right] \sin(t^2 (x - 1)) \frac{1}{\xi^t} d\xi =$$

$$= \frac{2}{x^t t^2} \sin(t^2 (\xi - 1)) ctgt^2 \int_1^x \sin(t^2 (\xi - 1)) d\xi -$$

$$- \frac{2}{x^t t^2} \cos(t^2 (x - 1)) \int_1^x \sin(t^2 (\xi - 1)) d\xi +$$

$$+ \frac{2}{x^t t^2} \sin(t^2 (\xi - 1)) ctgt^2 \int_1^x \sin(t^2 (\xi - 1)) d\xi -$$

$$- \frac{2}{x^t t^2} \sin(t^2 (x - 1)) \int_1^x \cos(t^2 (\xi - 1)) d\xi =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{x't^4} \sin(t^2(\xi-1)) ctgt^2 [-\cos(t^2(x-1))+1] - \\
 &\quad - \frac{2}{x't^4} \cos(t^2(\xi-1)) [-\cos(t^2(x-1))+1] + \\
 &+ \frac{2}{x't^4} \sin(t^2(x-1)) ctgt^2 [\cos(t^2(x-1)) - \cos t^2] - \\
 &\quad - \frac{2}{x't^4} \sin(t^2(x-1)) [\sin(t^2) - \sin(t^2(x-1))] = \\
 &= -\frac{2}{x't^4} \sin(t^2(x-1)) \cos(t^2(x-1)) ctgt^2 + \\
 &+ \frac{2}{x't^4} \sin(t^2(x-1)) ctgt^2 + -\frac{2}{x't^4} \cos^2(t^2(x-1)) - \\
 &- \frac{2}{x't^4} \cos(t^2(x-1)) + \frac{2}{x't^4} \sin(t^2(x-1)) \cos(t^2(x-1)) ctgt^2 - \\
 &- \frac{2}{x't^4} \sin(t^2(x-1)) ctgt^2 \cos t^2 - \frac{2}{x't^4} \sin(t^2(x-1)) \sin t^2 + \\
 &\quad + \frac{2}{x't^4} \sin^2(t^2(x-1)) = \frac{2}{x't^4} \sin(t^2(x-1)) [ctgt^2 - \\
 &\quad - ctgt^2 \cos t^2 - \sin t^2] - \frac{2}{x't^4} \cos(t^2(x-1)) + \frac{2}{x't^4} = \\
 &= \frac{2}{x't^4} [1 - \cos(t^2(x-1)) + \sin(t^2(x-1)) \left(\frac{\cos t^2}{\sin t^2} - \frac{\cos^2 t^2}{\sin t^2} - \right. \\
 &\left. - \sin t^2 \right)] = \frac{2}{x't^4} \left[1 - \cos(t^2(x-1)) - \sin(t^2(x-1)) \frac{1 - \cos t^2}{\sin t^2} \right] = \\
 &= \frac{2}{x't^4} \left[1 - \cos(t^2(x-1)) - tg \frac{t^2}{2} \sin(t^2(x-1)) \right],
 \end{aligned}$$

т. е.

$$r(t, x) = \frac{2}{x't^4} \left[1 - \cos(t^2(x-1)) - tg \frac{t^2}{2} \sin(t^2(x-1)) \right]$$

При $x=1.2$, получим

$$r(t, 1.2) = \frac{2}{1.2' t^4} \left[1 - \cos \frac{t^2}{5} - tg \frac{t^2}{2} \sin \frac{t^2}{5} \right]$$

В силу $t \in (0, 2]$ имеем $1.2' t^4 > 0$, а корни уравнения

$$1 - \cos \frac{t^2}{5} - tg \frac{t^2}{2} \sin \frac{t^2}{5} = 0 \quad (*)$$

были найдены с помощью программы Maple и они не принадлежат рассматриваемому промежутку $(0, 2]$. Значит, $r(t, 1.2) \neq 0$ при всех $t \in (0, 2]$. Все условия теоремы 2 для обратной задачи (2.2.18) – (2.2.21) выполнены и ее решение существует и единственно в пространстве $C^{1.2}(G) \times C[0, 2]$.

Список литературы:

1. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 5. С. 852–866.
2. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1968. – 504 с.
3. Краснов М.Л. Интегральные уравнения: введение в теорию. – М.: Наука, 1975. – 304 с.
4. Юлдашев Т.К. Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2014, выпуск 1(34), страницы 56–65. DOI: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1299> (Дата обращения: 10.10.2016).
5. Asanov A., Haluk Chelik M., Asanov R. One Formula for Solution of the Linear Differential Equations of the Second Order with the Variable Coefficients // Global Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2012. – Volume 8, Number 3, P. 321–328.
6. Isakov V., Inverse Problems for Partial Differential Equations, Second Edition, Springer, New York, 2006, 284 pages.
7. Kozhanov A.I. Composite Type Equations and Inverse Problems, VSP, Utrecht, Netherlands, 1999.
8. Robert A. Meyers (Ed.), Mathematics of Complexity and Dynamical Systems, Springer-Verlag New York, 2011.
9. Robert A. Van Gorder K. Vajravelu, Third-order partial differential equations arising in the impulsive motion of a flat plate // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Volume 14, Issue 6, June 2009, Pages 2629–2636.

10. Shitao Liu, Roberto Triggiani, An inverse problem for a third order PDE arising in high-intensity ultrasound: Global uniqueness and stability by one boundary measurement // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. Volume 21, Issue 6, Pages 825–869, 10.1515/jip-2012-0096, 2013.

МЕТОД ПОГРАНСЛОЙНЫХ ЛИНИЙ ПОСТРОЕНИЯ РЕГУЛЯРНЫХ И СИНГУЛЯРНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Алыбаев Курманбек Сарманович

*д-р физ.-мат. наук, проректор Жалал-Абадского
государственного университета,
Кыргызская Республика, г. Жалал-Абад
E-mail: alybaevkurmanbek@rambler.ru*

Тампагаров Куштарбек Бекмуратович

*канд. физ.-мат. наук, директор Кочкор-Атинского
технического колледжа,
Кыргызская Республика, г. Кочкор-Ата
E-mail: tkb-dj@mail.ru*

METHOD OF BOUNDARY-LAYER LINES TO CONSTRUCT REGULAR AND SINGULAR DOMAINS FOR SINGULARLY PERTURBED DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH ANALYTICAL FUNCTIONS

Kurmanbek Alybaev

*doctor of phys.-math. sciences, prorector of Jalal-Abad state university,
Kyrgyzstan, Jalal-Abad*

Kushtarbek Tampagarov

*candidate of phys.-math. sciences, director of Kochkor-Ata technical college,
Kyrgyzstan, Kochkor-Ata*

АННОТАЦИЯ

В предыдущих работах авторов было доказано, что для сингулярно возмущенных уравнений в области изменения аргумента возникают погранслойные линии. Эти линии можно рассматривать как специфическое свойство таких уравнений. В данной статье, в общем случае, для линейных обыкновенных сингулярно возмущенных уравнений с использованием топологических и аналитических методов построены погранслойные линии, регулярные и сингулярные области.

ABSTRACT

It was proven in the authors' preceding works that boundary-layer lines arise in the domain for singularly perturbed differential equations. These lines can be considered as a specific property of such equations. In this paper, boundary-layer lines, regular and singular domains for linear ordinary singularly perturbed differential equations are constructed with assistance of topological and analytical methods in general case.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное уравнение, обыкновенное дифференциальное уравнение, погранслойная линия, регулярная область, сингулярная область, аналитическая функция, гармоническая функция, линия уровня.

Keywords: singularly perturbed equation, ordinary differential equation, boundary-layer line, regular domain, singular domain, harmonic function, contour line.

Введение

Объектом исследования данной работы будут линейные сингулярно возмущенные обыкновенные дифференциальные уравнения (с.в.у.) [3].

В [2] на основе метода [1], для с.в.у. второго порядка, получены условия для возникновения на плоскости изменения аргумента линии в форме петли, названной авторами «простирающимся пограничным слоем».

В [5] показано, что такие линии естественно возникают для сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями, что можно рассматривать, как специфическое свойство таких уравнений.

Было предложено назвать их – погранслойными линиями (п.с.л.). В [6; 7] предложены другие методы определения п.с.л. В [4] разработан алгоритм приближенного поиска погранслойных линий с точками ветвления для с.в.у. с аналитическими функциями.

Данная работа посвящена вычислению п.с.л. и определению регулярных и сингулярных областей (далее используем краткие обозначения (р.о.), (с.о.)) на основе методов, предложенных в работах [6; 7].

1. Постановка задачи

Рассматривается задача

$$\varepsilon z'(t, \varepsilon) = a(t)z(t, \varepsilon) + b(t), \quad (1)$$

$$z(0, \varepsilon) = z^0, \quad (2)$$

где: $0 < \varepsilon$ – малый параметр;

$t \in \Omega \subset \mathbb{C}$ – комплексная плоскость и Ω – односвязная область;

0 является внутренней точкой области Ω ;

$z(t, \varepsilon)$ – скалярная функция; $z^0 = \text{const} \in \mathbb{C}$.

У.1. Пусть $a(t), b(t) \in Q(\Omega)$ – пространство аналитических функций в Ω .

Для простоты изложения потребуем

У.2. $\forall t \in \Omega: a(t) \neq 0$.

Из [5] заимствуем следующие определения.

Определение 1. Если $|Z(t_1, \varepsilon)|$ ограничено при $\varepsilon \rightarrow 0$, то будем называть точку t_1 регулярной для задачи (1) – (2), в противном случае – нерегулярной.

Определение 2. Точку, в любой окрестности которой существуют как регулярные, так и нерегулярные точки, будем называть погранслошной точкой.

Определение 3. Любое множество регулярных (погранслошных) точек будем называть регулярным (погранслошным) множеством.

Определение 4. Погранслошное множество, являющееся непрерывным, локально взаимно-однозначным образом отрезка, будем называть погранслошной линией.

Задача. Для решения начальной задачи (1) – (2), согласно принятых определений, построить п.с.л. и р.о., с.о.

Метод решения задачи. Из (1) при $\varepsilon = 0$ получим вырожденное уравнение

$$a(t)z_0(t) + b(t) = 0 \quad (3)$$

В силу У.2 уравнение (3) имеет единственное решение $z_0(t) = -\frac{b(t)}{a(t)} \in Q(\Omega)$.

В (1) произведем замену

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t) + \zeta(t, \varepsilon), \quad (4)$$

где: $\zeta(t, \varepsilon)$ – новая неизвестная функция.

Поставляя (4) в (1), получим задачу

$$\varepsilon \zeta'(t, \varepsilon) = a(t)\zeta(t, \varepsilon) + \varepsilon \varphi(t), \quad (5)$$

$$\zeta(t_0, \varepsilon) = \zeta^0 \equiv z^0 - z_0(t_0), \quad (6)$$

где: $\varphi(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{b(t)}{a(t)} \right)$.

Теперь задачу (5)-(6) заменим следующей

$$\zeta(t, \varepsilon) = \zeta^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} F(t)\right) + \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (F(t) - F(\tau))\right) \varphi(\tau) d\tau, \quad (7)$$

где: $F(t) = \int_0^t a(s) ds$.

Решение поставленной задачи разделим на две части.

В первой части изложим топологические основы применяемого метода. В частности, с применением линий уровней гармонических функций область Ω будет разделена на несколько частей и указан выбор путей интегрирования.

Вторая часть – аналитическая. Вычисление п.с.л. и р.о., с.о.

2. Топологическая часть решения задачи

В [6; 7] для вычисления п.с.л. и определения р.о., с.о. предложено использовать метод характеризующих функций. Основу метода составляет использование линий уровня функций $Re F(t)$ и $Im F(t)$.

Полагая $t = t_1 + it_2$, t_1, t_2 – действительные переменные, $i = \sqrt{-1}$, введем обозначения $Re F(t) = F_1(t_1, t_2)$, $Im F(t) = F_2(t_1, t_2)$.

Функции $F_k(t_1, t_2)$ ($k = 1, 2$) являются гармоническими в Ω .

Определение 5. Множество $\{(t_1, t_2) \in \Omega | F_k(t_1, t_2) = p_k = const\}$ назовём линией уровня функций $F_k(t_1, t_2)$ ($k = 1, 2$) и обозначим (p_k) .

В силу условия U.2 имеем

$$F'(t) = a(t) = \frac{dF_1}{dt_1} + i \frac{dF_1}{dt_2} = \frac{dF_1}{dt_2} - i \frac{dF_2}{dt_1} \neq 0.$$

Отсюда следует, что

$$\forall t \in \Omega: \left(\frac{dF_1}{dt_1} \neq 0 \text{ или } \frac{dF_1}{dt_2} \right) \text{ или } \left(\frac{dF_1}{dt_2} \neq 0 \text{ или } \frac{dF_1}{dt_1} \neq 0 \right).$$

Теперь нам надо решить, в каких частях области Ω выполняется $\frac{dF_1}{dt_1} \neq 0$ или $\frac{dF_1}{dt_2}$.

Для конкретизации и наглядности предположим

$$\forall t \in \Omega: \frac{dF_1}{dt_2} \neq 0. \quad (8)$$

Тогда

$$\forall t \in \Omega: \frac{dF_2}{dt_1} \neq 0. \quad (9)$$

Лемма 1. Функция $F_1(t_1, t_2)$ строго монотонна вдоль линии (p_2) .

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$F_2(t_1, t_2) = p_2. \quad (10)$$

Согласно условия (9), из (10) определяется однозначная, бесконечно дифференцируемая функция $t_1 = \varphi_2(t_2)$, $-\infty \leq a_1 < t_2 < b_1 \leq +\infty$, причем $t'_1 = -\frac{dF_2/dt_2}{dF_1/dt_1}$.

Вычислим производную функции $F_1(\varphi_2(t_2), t_2) \equiv F_{11}(t_2)$. Имеем $F'_{11}(t_2) = -\frac{|a'(t)|^2}{dF_2/dt_1}$. Отсюда следует, что $F_{11}(t_2)(F_{11}(t_1, t_2))$ строго монотонна вдоль линии (p_2) .

Аналогично доказывается строгая монотонность $F_2(t_1, t_2)$ вдоль линии (p_{10}) , где $p_1 = 0$. Лемма доказана.

Линия (p_{10}) проходит через точку O и делит область Ω на части Ω_1 и Ω_2 .

Возьмём произвольную точку $\tilde{t} \in (p_{10})$. Вдоль линии (p_{10}) функция $F_1(t_1, t_2)$ строго монотонна, следовательно, если исходить из точки \tilde{t} , то существует два направления. По одному из них $F_1(t_1, t_2)$ возрастает, а по другому - убывает. Учтём, что $F_1(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2) = 0$, $(\tilde{t} = \tilde{t}_1 + i\tilde{t}_2)$.

Тогда в части области, соответствующей направлению убывания $F_1(t_1, t_2)$, функция $F_1(t_1, t_2) < 0$, а в другой части $F_1(t_1, t_2) > 0$.

Без ограничения общности считаем, что

$$\forall t \in \Omega_1: F_1(t_1, t_2) < 0, \forall t \in \Omega_2: F_1(t_1, t_2) > 0; \quad \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2 = (p_{10}).$$

Далее рассмотрим линии уровня

$$(p_{11\varepsilon}) = \{(t_1, t_2) \in \Omega | F_1(t_1, t_2) = \varepsilon \ln \varepsilon\},$$

$$(p_{12\varepsilon}) = \{(t_1, t_2) \in \Omega | F_1(t_1, t_2) = -\varepsilon \ln \varepsilon\}.$$

Часть Ω_1 , ограниченную линиями (p_{10}) и $(p_{11\varepsilon})$, обозначим $\Omega_{11\varepsilon}$, а оставшуюся часть - $\Omega_{12\varepsilon}$. Часть Ω_2 , ограниченную линиями (p_{10}) и $(p_{11\varepsilon})$, обозначим $\Omega_{21\varepsilon}$, а оставшуюся часть - $\Omega_{22\varepsilon}$.

В силу U.1 для интеграла в (7) выберем путь интегрирования, который будем обозначать $p(0, t)$.

$\forall t \in \Omega$: $p(0, t)$ состоит из части линии (p_{10}) , соединяющей точки t_0 и \tilde{t} , и части линии (p_2) , соединяющей точки \tilde{t} и t . Такой выбор пути обусловлен тем, что в каждой части пути одна из функций $F_k(t_1, t_2)$ ($k = 1, 2$) постоянна и это позволяет применить известные методы.

3. Аналитическая часть решения задачи

Учитывая выбранный путь, $\forall t \in \Omega$ получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}(t, \varepsilon) = \mathfrak{Z}^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} F(t)\right) + \int_{t_{10}}^{\tilde{t}_1} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} i(F_{21}(\tilde{t}_1) - F_{21}(\tau_1))\right) g_1(\tau_1) d\tau_1 + \\ + \int_{\tilde{t}_2}^{t_2} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (F_{11}(t_2) - F_{11}(\tau_2))\right) g_2(\tau_2) d\tau_2, \end{aligned} \quad (11)$$

где: $F_{21}(t_1) \equiv F_2(t_1, \varphi_1(t_1))$, а функция $t_2 = \varphi_1(t_1)$ однозначно определяется из уравнения $F_1(t_1, t_2) = 0$ с областью определения $-\infty \leq a_2 < t_1 < b_2 \leq +\infty$;

$$g_1(\tau_1) \equiv \varphi(\tau_1 + i\varphi_1(\tau_1)) \cdot (1 + i\varphi'_1(\tau_1));$$

$$g_2(\tau_2) \equiv \varphi(\varphi_2(\tau_2) + i\tau_2) \cdot (\varphi'_2(\tau_2) + i).$$

Применяя интегрирования по частям к интегралам в (11) и обозначая $g_{11}(\tau_1) = \left(\frac{ig_1(\tau_1)}{F'_{21}(\tau_1)}\right)'$; $g_{21}(\tau_2) = -\left(\frac{g_2(\tau_2)}{F'_{11}(\tau_2)}\right)'$, получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}(t, \varepsilon) = \mathfrak{Z}^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} F(t)\right) + \varepsilon \left[\frac{ig_1(\tilde{t}_1)}{F'_{21}(\tilde{t}_1)} - \frac{ig_1(t_{10})}{F'_{21}(t_{10})} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} iF_{21}(\tilde{t}_1)\right) - \right. \\ \left. - \frac{g_2(t_2)}{F'_{11}(t_2)} - \frac{g_2(\tilde{t}_2)}{F'_{11}(\tilde{t}_2)} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} F_{11}(t_2)\right) - \right. \\ \left. - \int_{t_{10}}^{\tilde{t}_1} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} i(F_{21}(\tilde{t}_1) - F_{21}(\tau_1))\right) g_{11}(\tau_1) d\tau_1 - \right. \end{aligned}$$

$$- \int_{\bar{t}_2}^{t_2} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(F_{11}(t_2) - F_{11}(\tau_2))\right) g_{21}(\tau_2) d\tau_2 \Big]. \quad (12)$$

Рассмотрим следующие случаи.

1. $t \in (p_{10})$. В этом случае $\zeta(t, \varepsilon) = \zeta^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} F_{21}(t_1)\right) + O(\varepsilon)$.

2. $t \in \Omega_{11\varepsilon}$. Тогда $\zeta(t, \varepsilon) = \zeta^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(F_{11}(t_2) + ip_2)\right) + O(\varepsilon)$,

причем $\varepsilon \ln \varepsilon \leq F_{11}(t_2) \leq 0$.

3. $t \in \Omega_{12\varepsilon}$. Имеем $\zeta(t, \varepsilon) = \zeta^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(F_{11}(t_2) + ip_2)\right) + O(\varepsilon)$,

$F_{11}(t_2) \leq \varepsilon \ln \varepsilon$.

Заметим, что интегралы в (12) для рассматриваемых случаев ограничены.

4. $t \in \Omega_{21\varepsilon}$. $\zeta(t, \varepsilon) = \zeta^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(F_{11}(t_2) + ip_2)\right) + O(\varepsilon) \leq F_{11}(t_2) \leq -\varepsilon \ln \varepsilon$.

5. $t \in \Omega_{22\varepsilon}$. $\zeta(t, \varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} F_{11}(t_2)\right) \left[\zeta^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} ip_2\right) + O(\varepsilon) \right]$,
 $-\varepsilon \ln \varepsilon \leq F_{11}(t_2) < b_1 (b_1 > 0)$.

Отсюда для решения задачи (1) – (2) имеем следующие асимптотические представления в области Ω .

1. $t \in (p_{10})$: $z(t, \varepsilon) = z_0(t) + \zeta^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} F_{21}(t_1)\right) + O(\varepsilon)$;

2. $t \in \Omega_{11\varepsilon}$: $z(t, \varepsilon) = z_0(t) + \zeta^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(F_{11}(t_2) + ip_2)\right) + O(\varepsilon)$;

3. $t \in \Omega_{12\varepsilon}$: $z(t, \varepsilon) = z_0(t) + \zeta^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(F_{11}(t_2) + ip_2)\right) + O(\varepsilon)$;

4. $t \in \Omega_{21\varepsilon}$: $z(t, \varepsilon) = z_0(t) + \zeta^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(F_{11}(t_2) + ip_2)\right) + O(\varepsilon)$;

5. $t \in \Omega_{22\varepsilon}$: $z(t, \varepsilon) = z_0(t) + \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} F_{11}(t_2)\right) \left[\zeta^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} ip_2\right) + O(\varepsilon) \right]$.

Заключение

Из асимптотических представлений и на основании определений 1–4 вытекает, что (p_{10}) – п.с.л., а $(\Omega_{11} \cap \Omega_{12})$ – р.о.

Часть Ω_{21} содержит регулярные и нерегулярные точки и является переходным слоем, т. е. переходом от регулярной части к сингулярной.

Область Ω_{22} является с.о.

Список литературы:

1. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости // Вестник Кыргызского государственного национального университета. – Серия 3, Выпуск 6. – Бишкек, 2001. – С. 190–200.
2. Алыбаев К.С., Нарбаев М.Р. Явление простирающегося пограничного слоя для сингулярно возмущенных уравнений при потере устойчивости // Вестник Жалал-Абадского государственного университета. – 2008, № 1. – С. 122–126.
3. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с.
4. Панков П.С., Алыбаев К.С., Тампагаров К.С. Алгоритм приближенного поиска погранслойных линий с точками ветвления для сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями // Доклады Национальной академии наук Кыргызской Республики, 2015, № 2. – С. 15–18.
5. Панков П.С., Алыбаев К.С., Тампагаров К.Б., Нарбаев М.Р. Явление погранслойных линий и асимптотика решений сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями // Вестник Ошского государственного университета, 2013. – № 1 (специальный выпуск). – С. 227–231.
6. Тампагаров К.Б. Метод характеризующих функций исследования асимптотического поведения решений сингулярно возмущенных уравнений в комплексной плоскости // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 47. – Бишкек: Илим, 2014. – С. 98–102.
7. Alybaev K.S., Tampakarov K. Criterion of existence of boundary layer lines of regular and singular domains for singularly perturbed equations with analytical functions // Abstracts of the Issyk-Kul International Mathematical Forum / Edited by Acad. A. Borubaev. – Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2015. – P. 32.

ПОГРАНСЛОЙНЫЕ ЛИНИИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО И РЕГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Тампагаров Куштарбек Бекмуратович

*канд. физ.-мат. наук, директор Кочкор-Атинского
технического колледжа,*

Кыргызская Республика, г. Кочкор-Ата

E-mail: tkb-dj@mail.ru

BOUNDARY-LAYER LINES OF SOLUTIONS FOR SINGULARLY AND REGULARLY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH ANALYTICAL FUNCTIONS

Kushtarbek Tampagarov

*candidate of phys.-math. sciences, director of Kochkor-Ata
technical college,*

Kyrgyzstan, Kochkor-Ata

АННОТАЦИЯ

Ранее, с участием автора было введено понятие погранслошной линии в теории сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями на комплексной плоскости. В данной статье для сингулярно и регулярно возмущенных уравнений доказано существование погранслошных линий.

ABSTRACT

Earlier, the notion of boundary-layer line was introduced in the theory of singularly perturbed linear differential equations with analytical functions on the complex plane. Existence of boundary-layer lines is proven for both singularly and regularly perturbed equations in this paper.

Ключевые слова: аналитическая функция, гармоническая функция, обыкновенное сингулярно возмущенное дифференциальное уравнение, асимптотическая оценка, погранслошная линия, линия уровня.

Keywords: analytical function, harmonic function, ordinary singularly perturbed differential equation, asymptotical estimation, boundary-layer line, contour line

1. Введение

Пусть функция $z(t, \varepsilon) \in Q(\Omega)$ – пространство аналитических функций в Ω ;

$\Omega \subset \mathbb{C}$ – комплексная плоскость и Ω – односвязная область; $0 < \varepsilon$ – малый параметр.

Из [3] заимствуем следующие определения.

Определение 1. Если $|z(t', \varepsilon)|$ ограничена при $\varepsilon \rightarrow 0$, то точка $t' \in \Omega$ называется регулярной для $z(t, \varepsilon)$, в противном случае – нерегулярной (сингулярной).

Определение 2. Точка, в любой окрестности которой существуют как регулярные, так и нерегулярные точки, называется погранслошной точкой.

Определение 3. Любое множество погранслошных точек называется погранслошным множеством.

Определение 4. Погранслошное множество, являющееся непрерывным, локально взаимно-однозначным образом отрезка, называется погранслошной линией.

В [2] на основе метода [1], получены условия для возникновения на плоскости изменения аргумента линии в форме петли, названной авторами «простирающимся пограничным слоем». В статье [3] показано, что такие линии естественно возникают для сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями, что можно рассматривать, как специфическое свойство таких уравнений. Также предложено называть их более кратко – погранслошными линиями. В [3] получено уравнение погранслошной линии в дифференциалах, для линейного однородного сингулярно возмущенного уравнения. Для общего случая получить такое уравнение не удастся.

2. Предварительные результаты

Пусть задано уравнение

$$\varepsilon z'(t, \varepsilon) = a(t) z(t, \varepsilon) + \varepsilon g(t, z(t, \varepsilon)), t \in \Omega \quad (1)$$

и выполняются условия:

0 является внутренней точкой области Ω ;

U. 1. $a(t) \in Q(\Omega) \wedge (\forall t \in \Omega)(a(t) \neq 0)$;

U. 2. $g(t, z) \in Q(H)$, $H = \{(t, z) | t \in \Omega, |z| \leq \delta = \text{const}\}$;

$g(t, 0) \equiv 0$; $|g(t, z) - g(t, \bar{z})| \leq M|z - \bar{z}|$, $M = \text{const} > 0$.

Определим функции

$$F(t) = \int_0^t a(u)du, \operatorname{Re} F(t) = F_1(t_1, t_2), \operatorname{Im} F(t) = F_2(t_1, t_2),$$

$t = t_1 + it_2, i = \sqrt{-1}, t_1, t_2$ – действительные переменные.

Определение 5. Множество $(p_k) = \{t \in \Omega | F_k(t_1, t_2) = p_k - \text{const}\}$ назовем линией уровня функции $F_k(t_1, t_2)$ ($k=1, 2$).

Согласно У. 1. через каждую точку области Ω проходит единственная линия уровня функции $F_k(t_1, t_2)$.

Линии уровня $F_1(t_1, t_2)$ и $F_2(t_1, t_2)$ взаимно ортогональны в точках пересечения.

Область Ω полностью заполняется сетью взаимно ортогональных линий уровней функций $F_k(t_1, t_2)$.

Пусть $(p_{10}) = \{t \in \Omega | F_1(t_1, t_2) = 0\}$, $(p_{20}) = \{t \in \Omega | F_2(t_1, t_2) = 0\}$.

Линии $(p_{10}), (p_{20})$ пересекаются в точке 0.

Справедлива следующая

Лемма. Функция $F_k(t_1, t_2)$ строго монотонна вдоль линии (p_{20}) , а функция $F_2(t_1, t_2)$ – вдоль линии (p_{10}) .

Доказательство. Имеем $F'(t) = \frac{\partial F_1}{\partial t_1} - i \frac{\partial F_1}{\partial t_2} = \frac{\partial F_2}{\partial t_2} + i \frac{\partial F_2}{\partial t_1}$.

Если учесть У. 1, то $\forall t \in \Omega: (\frac{\partial F_1}{\partial t_1} \neq 0 \vee \frac{\partial F_1}{\partial t_2} \neq 0) \wedge (\frac{\partial F_2}{\partial t_2} \neq 0 \vee \frac{\partial F_2}{\partial t_1} \neq 0)$.

Для определенности возьмем

$$\forall t \in \Omega: \frac{\partial F_1}{\partial t_2} \neq 0. \text{ Тогда } \forall t \in \Omega: \frac{\partial F_2}{\partial t_1} \neq 0. \quad (2)$$

Из уравнения $F_1(t_1, t_2) = 0$ определяется однозначная, бесконечно дифференцируемая функция $t_2 = \varphi(t_1)$ с областью определения $\gamma_1 < t_1 < \gamma_2$.

Эта функция определяет ориентированную кривую (p_{10}) .

Рассмотрим $F_2(t_1, t_2)$ вдоль (p_{10}) . Имеем $F_2(t_1, \varphi(t_1))$ или

$$(F'_2(t_1, \varphi(t_1)))'_t = \frac{\partial F_2}{\partial t_1} + \frac{\partial F_2}{\partial t_2} \varphi'(t_1) = - \frac{|a(t)|^2}{\partial F_1 \partial t_2}$$

Отсюда следует строгая монотонность $F_2(t_1, t_2)$ вдоль (p_{10}) , по заданной ориентации. Для $F_1(t_1, t_2)$ доказательство проводится аналогично.

Лемма доказана.

3. Основной результат

Теорема (существование локальной погранслошной линии).

Пусть выполнены условия U.1, U.2. Тогда существует некоторая кривая (p_0) , проходящая через точку 0 и полностью принадлежащая подобласти $\Omega_0 \subset \Omega$, и (p_0) является погранслошной линией.

Доказательство. Задачу (1) – (2) заменим следующим эквивалентным интегральным уравнением

$$z(t, \varepsilon) = z^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} F(t)\right) + \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (F(t) - F(\tau))\right) g(\tau, z(\tau, \varepsilon)) d\tau. (3)$$

В (3) путь интегрирования – произвольный, соединяющий точки 0 и t и полностью принадлежащий области Ω .

Доказательство разделим на несколько этапов.

3.1. Определение подобласти $\Omega_0 \subset \Omega$, такой, что 0 является её внутренней точкой.

3.2 Определение некоторой кривой $(p_{10}) \in \Omega_0$, проходящей через точку 0 .

3.3. Доказательство существования и ограниченности решения задачи (1) – (2) ((3)) на $(p_0) \subset (p_{10})$.

3.4. Доказательство того, что (p_0) является погранслошной линией.

Изложим доказательство.

3.1. Определение области Ω_0 .

По определению, $F_2(t_{10}, t_{20}) = 0$, следовательно в части (p_{10}) справедливо неравенство $F_2(t_1, t_2) > 0$, а в другой части $-F_2(t_1, t_2) < 0$. В той части (p_{10}) , где $F_2(t_1, t_2) > 0$, возьмём точку $\tilde{t}_1 = \tilde{t}_{11} + i\tilde{t}_{21}$, а в части (p_{10}) , где $F_2(t_1, t_2) < 0$, возьмем точку $\tilde{t}_2 = \tilde{t}_{12} + i\tilde{t}_{22}$.

Через эти точки проходят линии уровня

$$(p_{21}) = \{t \in \Omega \mid F_2(t_1, t_2) = F_2(\tilde{t}_{11}, \tilde{t}_{21})\},$$

$$(p_{22}) = \{t \in \Omega \mid F_2(t_1, t_2) = F_2(\tilde{t}_{12}, \tilde{t}_{22})\}.$$

Часть области Ω , ограниченную кривыми (p_{21}) , (p_{22}) , возьмем за Ω_0 .

3.2. Часть кривой (p_{10}) , содержащейся в Ω_0 , обозначим через (p_0) . Кривая (p_0) проходит через точку O .

3.3. Доказательство существования и ограниченности решения уравнения (3) на кривой (p_{10}) в силу его громозкости приводить здесь не будем.

3.4. Доказательство существования погранслошной линии. На линии (p_0) возьмем произвольную точку $\tilde{t} = \tilde{t}_1 + i\tilde{t}_2$.

Рассмотрим следующую задачу: уравнение (1) с условием

$$z(\tilde{t}, \varepsilon) = \tilde{z}^0. \quad (4)$$

Теперь нам надо доказать, что в окрестности точки \tilde{t} для решения задачи (1) – (4) существуют как регулярные, так и сингулярные точки.

Задачу (1) – (4) заменим следующим интегральным уравнением

$$z(t, \varepsilon) = \tilde{z}^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} F_1(t)\right) + \int_{\tilde{t}}^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (F_1(t) - F_1(\tau))\right) g(\tau, z(\tau, \varepsilon)) d\tau, \quad (5)$$

где: $F_1(t) = \int_{\tilde{t}}^t a(u) du = F(t) - F(\tilde{t})$.

Введем в рассмотрение линии уровня

$$(p_0) = \{t \in \Omega_0 \mid \operatorname{Re} F(t) = 0\},$$

$$(p_2) = \{t \in \Omega_0 \mid \operatorname{Im} F(t) = \operatorname{Im} F(\tilde{t})\}.$$

Заметим, что $\operatorname{Re} F(\tilde{t}_0) = 0$.

Согласно лемме, по линии (\tilde{p}_2) функция $\operatorname{Re} F(t)$ строго монотонна. Тогда в одном направлении от точки \tilde{t} по линии (\tilde{p}_2) будет $\operatorname{Re} F(t) < 0$, а в другом направлении $-\operatorname{Re} F(t) > 0$.

Часть области Ω_0 , где $\operatorname{Re} F(t) < 0$, обозначим Ω_1 , а часть, где $\operatorname{Re} F(t) > 0$, обозначим Ω_2 .

Пусть $t \in \Omega_1$. В (5) будем считать, что путь интегрирования идет по линии (\tilde{p}_2) . Согласно предположению $\forall t \in \Omega_0: \left(\frac{\partial F_2}{\partial t_1} \neq 0\right)$. Следовательно, из уравнения $F_2(t_1, t_2) = F_2(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)$ определяется однозначная, бесконечно дифференцируемая функция $t_1 = \psi(t_2)$ с областью определения $\beta_1 < t_2 < \beta_2$.

Учитывая все сказанное, из (5) имеем

$$z(t, \varepsilon) = \tilde{z}_0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} F_1(t)\right) + \int_{\tilde{t}_2}^{t_2} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (F_1(t) - F_1(\psi(\tau_2) + i(\tau_2)))\right) \times \\ \times g(\psi(\tau_2) + i\tau_2, z(\psi(\tau_2) + i\tau_2, \varepsilon)) (\psi'(\tau_2) + i) d\tau_2. \quad (6)$$

С использованием того, что по выбранному направлению $Re F(t)$ убывает, доказывается существование решения уравнения (6) и справедливость оценки

$$|z(t, \varepsilon)| \leq |\tilde{z}^0| \frac{1}{1 - c_1 \varepsilon}, c = const.$$

Таким образом, все точки области Ω_1 являются регулярными.

Теперь докажем, что все точки области Ω_2 - сингулярные. Пусть $t \in \Omega$. Предположим противное, т. е. $|z(t, \varepsilon)| \leq \delta$.

Из (6) имеем

$$|z(t, \varepsilon)| \geq \left(|\tilde{z}_0| - c_2 \int_{\tilde{t}_2}^{t_2} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} Re F(\tau)\right) d\tau \right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} F(t)\right), \\ c_2 = const. \quad (7)$$

Теперь, учитывая, что $Re F(t) > 0$, из (7) получим оценку

$$|z(t, \varepsilon)| \geq (|\tilde{z}_0| - c_2 \varepsilon) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} Re F(t)\right), \quad (8)$$

Для точек t , далеких от кривой (p_0) , функция $\exp\left(\frac{1}{\varepsilon} Re F(t)\right) \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Таким образом, наше предположение неверно.

Это показывает, что в области Ω_2 существуют сингулярные точки.

Вывод: кривая (p_0) состоит из точек, в любой окрестности которых существуют регулярные, так и сингулярные точки. С другой стороны, (p_0) определяется однозначной функцией с областью определения $\alpha_1 < t_1 < \alpha_2$. Это указывает на то, что кривая (p_0) является непрерывным локально взаимно-однозначным образом отрезка.

Согласно определения 4 (p_0) – погранслоиная линия. Теорема доказана.

Список литературы:

1. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости // Вестник Кыргызского государственного национального университета. – Серия 3, Выпуск 6. – Бишкек, 2001. – С. 190–200.
2. Алыбаев К.С., Нарбаев М.Р. Явление простирающегося пограничного слоя для сингулярно возмущенных уравнений при потере устойчивости // Вестник Жалал-Абадского государственного университета. – 2008, № 1. – С. 122–126.
3. Панков П.С., Алыбаев К.С., Тампагаров К.Б., Нарбаев М.Р. Явление пограничных слоев и асимптотика решений сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями // Вестник Ошского государственного университета, 2013. – № 1 (специальный выпуск). – С. 227–231.

НАУКИ О ЗЕМЛЕ

СЕКЦИЯ

«ФИЗИЧЕСКАЯ ГЕОГРАФИЯ И ЛАНДШАФТОВЕДЕНИЕ»

ЛАНДШАФТНО-ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УСЛОВИЙ ЗЕМЛЕПОЛЬЗОВАНИЯ В ГЕОСИСТЕМАХ СМЕШАННЫХ ЛЕСОВ ВОДНО-ЛЕДНИКОВЫХ РАВНИН МОРДОВИИ

Ямашкин Анатолий Александрович

*д-р геогр. наук, зав. кафедрой землепользования и ландшафтного планирования, проф. Мордовского государственного университета, РФ, Республика Мордовия, г. Саранск
E-mail: yamashkin56@mail.ru*

Ямашкин Станислав Анатольевич

*старший преподаватель кафедры автоматизированных систем обработки информации и управления Мордовского государственного университета, РФ, Республика Мордовия, г. Саранск
E-mail: yamashkinsa@mail.ru*

Москалева Светлана Александровна

*канд. геогр. наук, доц. кафедры землепользования и ландшафтного планирования Мордовского государственного университета, РФ, Республика Мордовия, г. Саранск
E-mail: moskaleva-s-a@yandex.ru*

Орлова Ольга Алексеевна

аспирант кафедры землепользования и ландшафтного планирования Мордовского государственного университета, РФ, Республика Мордовия, г. Саранск

Елистратова Алина Сергеевна
*магистрант кафедры землепользования и ландшафтного
планирования Мордовского государственного университета,
РФ, Республика Мордовия, г. Саранск*

LANDSCAPE-ECOLOGICAL ANALYSIS OF LAND USE IN MIXED FOREST GEOSYSTEMS OF WATER-GLACIAL PLAINS OF MORDOVIA

Anatoly Yamashkin
*doctor of Sciences, Head of the Chair of Land Use and Landscape
Planning, Professor of Mordovia State University,
Russia, Republic of Mordovia, Saransk*

Stanislav Yamashkin
*senior Lecturer, Department of Automated Systems of Information
Processing and Control, Mordovia State University,
Russia, Republic of Mordovia, Saransk*

Svetlana Moskaleva
*candidate of Science, Associate Professor, Chair of Land Use and
Landscape Planning, Mordovia State University,
Russia, Republic of Mordovia, Saransk*

Olga Orlova
*postgraduate Student, the Chair of Land Use and Landscape
Planning, Mordovia State University,
Russia, Republic of Mordovia, Saransk*

Alina Elistratova
*student, Chair of Land Use and Landscape
Planning, Mordovia State University,
Russia, Republic of Mordovia, Saransk*

АННОТАЦИЯ

В статье излагаются результаты полевых и камеральных ландшафтно-экологических исследований условий землепользования в геосистемах смешанных лесов водно-ледниковых равнин на терри-

тории Мордовии. Дана характеристика морфологической структуры ландшафтов и устойчивость природных комплексов к антропогенным нагрузкам.

ABSTRACT

The article presents the results of field and cameral studies of landscape and environmental conditions of land use in forest ecosystems of mixed water-glacial plains in the territory of Mordovia. The characteristic of morphological structure of landscapes and stableness of natural systems to anthropogenic stress is shown.

Ключевые слова: морфологическая структура, водно-ледниковая равнина, устойчивость природных комплексов.

Keywords: morphological structure, water-glacial plain, the stability of natural systems.

Водно-ледниковые равнины Окско-Донской на территории Мордовии, относящиеся к низинному подклассу ландшафтов, распространены в бассейне реки Вад, в Мокша-Алатырском междуречье, правобережью Мокши; в восточной Мордовии аналогичные образования узкой полосой протягиваются по левобережью Алатыря (зона прорыва водно-ледниковых потоков в долину Суры) [1]. В эпоху максимального оледенения низины покрывались тальми ледниковыми водами, оставившими здесь обширный песчаный покров. На отдельных участках пески подверглись эоловой обработке и образовался бугристо-дюнный рельеф. Склоны и пологоволнистые приводораздельные пространства довольно часто осложнены суффозионными, а в междуречье Мокши и Алатыря карстовыми западинами. Отдельные котловинные формы рельефа, вероятно, имеют термокарстовое происхождение [14]. Особенности литогенной основы и характера хозяйственного освоения определяют функционирование геосистем смешанных лесов водно-ледниковых равнин, с доминированием лесохозяйственных ландшафтов [4].

Методика исследования. Ландшафтно-экологический анализ условий землепользования основывается на использовании в ландшафтном картографировании ГИС-технологий [3; 8].

Основные объекты ландшафтных исследований. При разработке ландшафтного плана оптимизации хозяйственного использования территории важно учитывать соразмерность ее природной дифференциации, геотехнических систем и изучаемых геоэкологических процессов. Объяснение развития геоэкологических процессов на локальном уровне требует крупномасштабного ландшафтного картографирования.

Региональные же процессы хозяйственного освоения, взаимодействие социально-экономических и природных факторов достаточно отчетливо проявляются при среднемасштабном ландшафтном картографировании [7; 15; 12]. Основными объектами картографирования являются урочища и географические местности, объединяемые в ландшафты.

Классификаторы отдельных компонентов природных территориальных комплексов. При ландшафтном картографировании определяются следующие показатели: особенности строения их литогенной основы; генетические варианты почв и их сочетания с характеристикой механического состава почв; восстановленный растительный покров; особенности хозяйственного освоения и использования.

Общая схема синтетического ландшафтного картографирования основывается на дешифрировании многозональных космических снимков. Их анализ позволяет определить особенности генезиса и эволюции геоконплексов, сопряженности морфологических единиц ландшафта, характер географического соседства природных территориальных комплексов. По совокупности дешифровочных признаков на них хорошо проявляются склоновая мезозональность природных территориальных комплексов (местностей и урочищ) от приводораздельных пространств к долинам средних и малых рек.

При синтетическом картографировании с использованием многозональных космических снимков используются расчеты ландшафтного разнообразия [5], алгоритмы выделения краев [10], нейронных сетей прямого распространения [6], ансамбль-системы, комплексный анализ цветовых, статистических, текстурных дескрипторов окрестности.

Помимо морфологической структуры ландшафтов и характеристик свойств природных территориальных комплексов необходимо отображать: 1) техногенные комплексы и объекты, оказывающие воздействие на природные территориальные комплексы; 2) характер техногенных воздействий геотехнических систем на природные территориальные комплексы; 3) изменение природных территориальных комплексов под воздействием техногенных факторов; 4) рекомендации по оптимизации природопользования и формированию культурного ландшафта [13; 11; 9].

Объект исследования. Большая часть водно-ледниковых равнин имеет абсолютные отметки до 180 м, с общим уклоном к долинам средних и малых рек. Они характеризуются широкими водоразделами – до 8–10 км, пологими и слабо расчлененными склонами. Глубина эрозионного вреза не превышает 30–40 м.

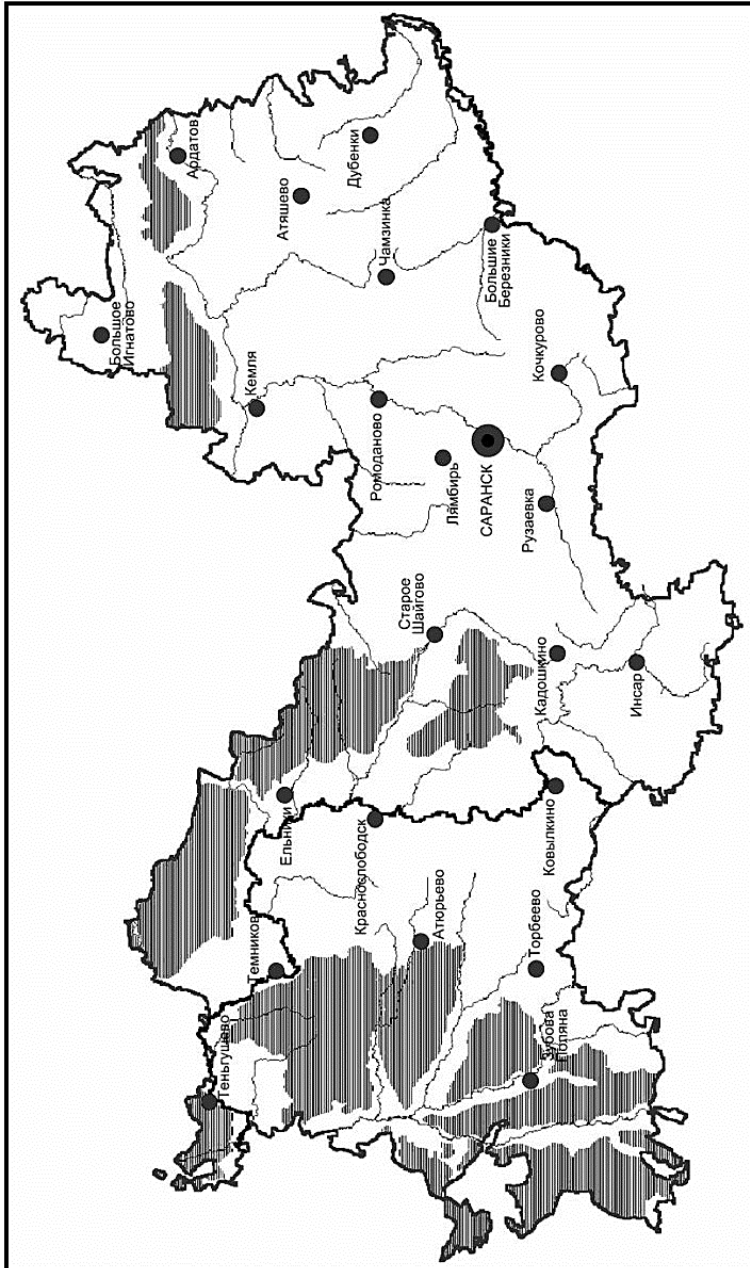


Рисунок 1. Ландшафты водно-ледниковых равнин

В подклассе низменных водно-ледниковых равнин распространены **лесные типы ландшафтов**. На междуречьях, сложенные мощной толщей песков с дерново-подзолистыми почвами доминируют *хвойные леса* с участием сосны обыкновенной и *смешанными лесами* с участием лиственных видов деревьев в подчиненных ярусах и неморальных видов кустарников в травяных ярусах и *таежных и подтаежных* видов: ели обыкновенной (*Picea abies*), вереска обыкновенного (*Calluna vulgaris*), плауна булавовидного (*Lycopodium clavatum*), п. годичного (*Lycopodium annotinum*), можжевельника обыкновенного, ежевики несской, или куманика, (*Rubus nessensis*) и др.

Распределение типов леса находится в тесной связи с особенностями свойств литогенной основы и распределением почвенного покрова. Чистые сосновые леса распространены преимущественно на надпойменных террасах. На супесях и суглинках к сосне в большей или меньшей степени постоянно примешивается ель и лиственные породы – берёза, осина и реже дуб.

Смешанные леса произрастают на серых и светло-серых оподзоленных почвах более тяжёлого механического состава, развившиеся на моренных суглинках и глинистых песках. На фрагментах надпойменных террас, песчаных буграх и гривах, не заливаемые полыми водами, встречаются травянистые боры.

В ландшафтах водно-ледниковых равнин часто выражена высотная смена географических местностей. Так, например в Заалатырье, на мощных древнеаллювиальных песках надпойменных террас Алатыря доминируют сосняки зеленомошники, во втором ярусе которых встречаются ель и берёза. На сухих дюнообразных возвышениях распространены лишайниковые боры с элементами степной флоры. По мере движения к водоразделу Алатыря и Пьяны на аллювиально-флювиогляциальных отложениях появляются смешанные леса, где наряду с сосной произрастают ель, дуб, ясень, липа и осина.

На приводораздельных пространствах, сложенных маломощными флювиогляциальными песками, подстилаемыми элювиальными, и моренными суглинками господствуют **широколиственные леса**, представленные дубравами. В структуре лесов наряду с дубом в первом ярусе встречаются липа, ясень, клён и вяз. В сырых ложбинах и западинах произрастают осинники и березняки. В подлеске обычны липа, орешник, калина, крушина, черёмуха, рябина; в кустарниковом ярусе – жимолость, бересклет, шиповник. В травяном покрове господствуют типичные представители чернолесья.

Перераспределение тепла, влаги, внутригодовой режим тепло- и влагообеспеченности определяют обособление в ландшафтах смешанных лесов водно-ледниковых равнин следующих **родов ландшафтов**.

- С_к – междуречные пространства с западными и котловинными формами рельефа суффозионного и карстового происхождения, сложенные флювиогляциальными песками, залегающими на известняках и доломитах каменноугольного возраста, трансаккумулятивные, гидро-литоморфные, с вариациями почв от подзолистых до болотных под хвойными и смешанными лесами, ограниченно распаханых. Местности типа С_к распространены на Мокша-Алатырском междуречье.

- С₁ – слабоволнистые междуречные пространства с суффозионными и эоловыми формами рельефа, сложенных мощной толщей флювиогляциальных песков, залегающих на днепровской морене, трансаккумулятивные, гидро-литоморфные, с вариациями почв от подзолистых до болотных под смешанными лесами, ограниченно распаханых.

- С₂ – междуречные пространства, сложенные флювиогляциальными песками на моренных и коренных суглинках и глинах, трансаккумулятивные, литоморфные, с дерново-подзолистыми и светло-серыми лесными почвами под смешанными лесами, выборочно распаханые. Местности этого типа отмечены во всех ландшафтах смешанных лесов водно-ледниковых равнин.

- С₃ – волнистые междуречные пространства с эоловыми формами рельефа, сложенные флювиогляциальными и эоловыми песками трансаккумулятивные, гидро-литоморфные, на моренных и коренных суглинках и глинах с подзолистыми и серыми лесными почвами под смешанными лесами, выборочно распаханые.

Инженерно-геологические условия и геоэкологические процессы. Для оценки инженерно-геологических условий в пределах исследованной территории выделены следующие стратиграфо-генетические комплексы для четвертичных образований: современный аллювиальный комплекс; озерно-ледниковый комплекс; моренный комплекс; элювиально-делювиальный комплекс. Современный аллювиальный комплекс представлен четвертичными аллювиальными отложениями, слагающими днище балки, расположенной в центральной части территории поселка. Он представлен песками с прослоями и линзами суглинков мощностью до 1,0 м. Днище балки частично заболочено.

Пески желтовато-серые, серые, разной крупности, преимущественно мелкие, кварцевые. Гранулометрический состав песков изменя-

ется как по разрезу, так и по простиранию. Более грубые расположены в основании разреза пойменного аллювия, пылеватые разности прослеживаются вверх разреза. По данным гранулометрического анализа в разрезе выделяются пески мелкие и пылеватые.

Пылеватые пески полупроницаемы – коэффициент фильтрации 0,54 м/сут, мелкие – водопроницаемые с величиной коэффициента фильтрации 3,65 м/сут. По значению коэффициента пористости (0,53) пылеватые пески плотные, мелкие – средней плотности сложения – значение коэффициента пористости 0,75.

Озерно-ледниковый комплекс представлен преимущественно суглинками серовато-коричневыми с прослоями и линзами песков мелких кварцевых коричневых, светло-коричневых.

В частности, довольно крупная линза песков мелких отмечена по результатам изысканий под строительство поликлиники. Пески имеют плотное сложение, что подтверждается значениями коэффициента пористости и плотности скелета. Нормативные значения для данных песков: удельное сцепление – 0,001 МПа, угол внутреннего трения – 29, модуль общей деформации – 20 МПа. Значение коэффициента фильтрации в среднем 6,8 м/сут.

Суглинки в природном залегании находятся в полутвердом, тугопластичном и мягкопластичном состояниях, консистенция изменяется от 0,18 у полутвердых до 0,31 у тугопластичных и до 0,60 у мягкопластичных. Полутвердые суглинки в естественном залегании имеют более плотное сложение, чем тугопластичные и мягкопластичные, что видно из значений физических показателей грунтов. Для полутвердых суглинков плотность естественного грунта соответствует 2,02–2,05, скелета 1,68, минеральной части 2,7 г/см³, пористость 37–38 %, коэффициент пористости 0,55–0,62. Те же показатели для тугопластичных суглинков соответственно равны 2,00; 1,64; 2,69; 39 %; 0,64 г/ см³. Для мягкопластичных – 1,94; 1,52; 2,69; 44 %; 0,77 г/ см³. Естественная степень увлажненности у полутвердых – 0,19–0,21, тугопластичных – 0,23, мягкопластичных – 0,28. Прочностные показатели для полутвердых суглинков следующие: удельное сцепление – 0,20 МПа, угол внутреннего трения – 16, модуль деформации – 33 МПа. Для тугопластичных: удельное сцепление – 0,18 МПа, угол внутреннего трения – 13, модуль деформации – 26 МПа. Для мягкопластичных: удельное сцепление – 0,15 МПа, угол внутреннего трения – 7, модуль деформации – 23 МПа.

Прочностные показатели позволяют рекомендовать грунты в качестве основания при наземном строительстве. Но при этом необходимо учитывать, что в этих отложениях встречаются участки расп-

роstrанения биогенных отложений, которые снижают несущие свойства грунтов, кроме этого, следует принять во внимание повсеместное близкое залегание уровня грунтовых вод и их агрессивные свойства.

На территории поселка встречаются участки, сложенные моренными суглинками красновато-коричневыми, плотными, полутвердой и тугопластичной консистенции с включением небольших прослоев песка и гальки кристаллических пород. В отличие от других связных пород моренные суглинки по числу пластичности (0,13–0,15) относятся к тяжелым суглинкам с высокой плотностью скелета грунта (1,73–1,78 г/см³) и сравнительно небольшим значением коэффициента пористости (0,51–0,55). Они имеют следующие несущие способности: сцепление в зависимости от консистенции – 0,27–0,47 МПа, угол внутреннего трения – 20, модуль деформации – 18 МПа. Являются надежным основанием при строительстве зданий и сооружений.

Элювиально-делювиальный комплекс представлен суглинками тугопластичными и мягкопластичными. Грунты в естественном залегании находятся в тугопластичном и мягкопластичном состояниях; имеют среднюю плотность сложения, слабо- или неводостойкие, слабонабухающие (величина относительного набухания 0,04–0,08); полупроницаемые с коэффициентом фильтрации 0,05–0,48 м/сут, среднесжимаемые. Отложения комплекса могут служить хорошим основанием под строительство, но инженерно-геологические условия осложняются близким залеганием уровня грунтовых вод. Плотность естественного грунта изменяется от 1,94 до 2,02 г/см³, плотность скелета от 1,59 до 1,65 г/см³, коэффициент пористости от 0,63 до 0,7. Удельное сцепление в зависимости от консистенции 0,18–0,21 МПа, угол внутреннего трения – 9–13, модуль общей деформации – 19–23 МПа.

Образования миоценового комплекса залегают на размытой поверхности меловых напластований. Отложения представлены преимущественно песками желтовато-серыми, разной крупности, кварцевыми. Пески по гранулометрическому составу характеризуются как мелкие. В толще аллювиальных отложений они хорошо отсортированы, по плотности сложения близки к рыхлым, коэффициент фильтрации 1–5 м/сут. Нормативные характеристики: удельное сцепление – 0,001 МПа, угол внутреннего трения – 29, модуль общей деформации – 19 МПа.

Грунты нижнемелового комплекса в естественном состоянии представлены глинами темно-серыми, черными полутвердой и тугопластичной консистенции. Для глин комплекса свойственны явления набухания и усадки (величина относительного набухания 0,04–0,08,

реже – 0,09–0,12). По водопроницаемости грунты ведут себя как водоупоры и полупроницаемые породы. Значения коэффициента фильтрации для полутвердых глин до 0,00019 м/сут, для тугопластичных 0,004–0,03 м/сут. Плотность естественного грунта 1,76–1,82 г/см³, плотность скелета 1,22–1,3 г/см³, пористость 52–54 %, коэффициент пористости 1,09–1,18. Удельное сцепление 0,36–0,47 МПа, угол внутреннего трения 17–21, модуль общей деформации 8–15 МПа.

При градостроительном освоении территории необходимо обращать внимание на почти повсеместное близкое залегание уровня грунтовых вод, что в большей мере снижает несущие способности грунтов и требует тщательной инженерной подготовки стройплощадок в отношении водоотведения или изоляции фундаментов зданий от агрессивного воздействия грунтовых вод на 16 %, а 84 % района грунтовые воды не способствуют разрушению фундаментов и подземных коммуникаций.

Близкое залегание грунтовых вод в сочетании со значительной глубиной промерзания грунтов (1,5–1,8 м) создает условия для увеличения пучинистости, поэтому грунты на территории поселка относятся к пучинистым и сильно пучинистым.

Учитывая значительную изменчивость инженерно-геологических условий и развития ряда неблагоприятных природных процессов для целей конкретного строительства необходимо производство изыскательских работ с отбором монолитов и образцов, проведением лабораторных испытаний, разбивкой грунтов на ИГЭ (инженерно-геологические элементы) и определение несущей способности грунтов.

Важнейшей геоэкологической характеристикой литогенной основы ландшафтов является проявление и активность развития экзодинамических процессов.

Оползнеобразование. Благоприятными природными предпосылками для развития оползней являются крутые склоны, сложенные песчано-глинистыми отложениями, в которых имеются один или несколько водоносных горизонтов. На склонах встречаются сплывы – мелкие смещения вниз по склону рыхлых продуктов выветривания. Эти процессы наиболее распространены на коренных бортах долин рек Мокша, Вад, Алатырь.

Заболочивание, подтопление и затопление. Наибольшей заболоченностью отличаются долины рек Мокши (0,36 %), Парцы, Вада (0,25 %). Из междолинных ландшафтов процессы заболочивания характерны для Вадского, Мокша-Алатырского и Варма-Кивчейского. В зонах геотехнических систем, расположенных на плоских водораздельных пространствах водно-ледниковых равнин, в неглубо-

ких депрессиях рельефа за счет подпруживания временных поверхностных водотоков и грунтовых вод на локальных участках развиваются процессы подтопления, формируются болотные комплексы. На вторичных моренных и эрозионно-денудационных равнинах процессы подтопления и заболачивания приурочены к смене типов литогенной основы, участкам разгрузки подземных вод.

Суффозионные процессы. Их развитие связано с нарушением микроагрегатной структуры литогенной основы за счет выщелачивания тончайших механических частиц, сульфатных и карбонатных солей нисходящими токами подземных вод с образованием воронок оседания и просадок. Следствием развития суффозионных процессов являются неравномерная просадка и разрушение гидротехнических сооружений.

Эоловые процессы. Наибольшая пораженность геокомплексов дефляционными процессами характерна для водно-ледниковых равнин и надпойменным террасам долин Алатыря, Мокши, Сивини, где незакрепленные пески часто формируют песчано-пустошные антропогенные комплексы. В меньшей степени эоловые процессы, вызывающие иссушение пахотного горизонта, развиты в местностях приводораздельных пространств со светло-серыми лесными почвами. Наиболее устойчивы почвы гидроморфных и полугидроморфных комплексов.

Карстовые процессы. Развитие карстовых процессов проявляется на Мокша-Алатырском междуречье. В морфологической структуре ландшафта карстовые геокомплексы выделяются в виде простых и сложных урочищ с пятнистым рисунком. Разрушительных последствий от карстовых процессов в республике не отмечалось, однако наличие благоприятных условий для их развития на значительной части территории обуславливает необходимость отнесения их к разряду опасных.

Устойчивость геосистем к антропогенным нагрузкам. Геоэкологический анализ процесса хозяйственного освоения территории Мордовии (морфологической структуры ландшафтов, последовательности хозяйственного освоения, особенностей развития деструктивных процессов) позволяет выделить по степени устойчивости к хозяйственному освоению три основных вида ландшафтов: неустойчивые, относительно устойчивые и устойчивые [2].

Неустойчивые природные комплексы с возможным развитием опасных геоэкологических ситуаций при отсутствии инженерной защиты. В эту группу входят ландшафты смешанных лесов водно-ледниковых равнин и лесные ландшафты возвышенных останцово-

водораздельных массивов вторичных моренных и эрозионно-денудационных равнин. Их хозяйственное освоение сопровождалось значительной активизацией природных процессов, обусловленной особенностями литогенной основы. Преобладающая их часть была вовлечена в сельскохозяйственное использование во второй половине XIX в

Относительно устойчивые с вероятным развитием относительно опасных локальных геоэкологических ситуаций при неудовлетворительном состоянии или отсутствии инженерной защиты. В эту группу включены типы местности приводораздельных пространств вторичных моренных и эрозионно-денудационных равнин. С ранних стадий хозяйственного освоения ландшафтов характерна активизация эрозионных, оползневых и других экзогенных процессов. Геотехнические системы имеют неустойчивый характер функционирования.

Устойчивые с развитием геоэкологических ситуаций разной сложности при удовлетворительном состоянии геотехнических систем и инженерной защиты. Эту группу образуют природные комплексы лесостепных и лугово-степных комплексов вторичных моренных, эрозионно-денудационных равнин и долин рек, активно вовлекаемые в хозяйственное использование с XVII в. и характеризующиеся высокой распаханностью. Эти природные комплексы отличаются сравнительно высокой селитебной освоенностью.

Геоэкологический анализ процесса хозяйственного освоения территории Мордовии (морфологической структуры ландшафтов, последовательности хозяйственного освоения, особенностей развития деструктивных процессов) позволяет выделить по степени устойчивости к хозяйственному освоению три основных вида ландшафтов: неустойчивые, относительно устойчивые и устойчивые.

С точки зрения *строительства* природные территориальные комплексы целесообразно разделить на следующие группы: 1) устойчивые – природные комплексы водно-ледниковых и аллювиально-водно-ледниковых равнин; 2) слабоустойчивые – природные комплексы древнеаллювиальных равнин; 3) неустойчивые – природные комплексы пойм, балок, лощин и долин ручьев; 4) весьма неустойчивые – природные комплексы торфяников.

В устойчивых к строительству природных комплексах покрывающий чехол четвертичных образований служит хорошим основанием для разного типа сооружений. Он представлен преимущественно связными типами грунтов в виде суглинков и супесей. Встречаются сыпучие песчаные грунты. Среди них преобладают мелкие пески. На отдельных участках распространены пористые

лессовидные суглинки, которые обладают просадочными свойствами при замачивании. Они относятся к типу сильно сжимаемых грунтов.

В пределах рассматриваемых геосистем широко распространен горизонт грунтовых вод, приуроченный преимущественно к песчаным разностям пород. Средняя глубина залегания подземных вод 1–2 м. На участках со средними и тяжелыми суглинками грунтовые воды или отсутствуют, или встречаются на глубине 3–4 м. Подземные воды характеризуются слабой минерализацией и агрессивностью к бетону.

Слабоустойчивые природные комплексы (условно благоприятные для инженерного освоения) функционируют на надпойменных террасах. В эту группу объединяются три выровненные ступенчатые площадки, отделенные друг от друга выположенными, а местами крутыми уступами. Они сложены аллювиальными песчаными разностями пород, включающими в себя прослой и линзы суглинков, реже глин.

В песках отмечается постоянно действующий водоносный горизонт, глубина залегания которого колеблется от 0,5 до 3,0 м. Весной зеркало грунтовых вод поднимается к поверхности земли, участками достигая ее. В пределах распространения первой надпойменной террасы воды обладают слабой карбонатной агрессивностью по отношению к бетону.

Неустойчивые природные комплексы (непригодные для инженерного освоения) находятся в пределах распространения пойменных террас. Поверхность рассматриваемого района ровная, периодически затопляемая паводковыми водами. Грунты представлены разной крупности неуплотненными водонасыщенными песками и влажными текучепластичными суглинками. Строительство и эксплуатация инженерных сооружений в этом районе сопряжена с дорогостоящими мероприятиями по защите от затопления.

Весьма неустойчивыми природными комплексами являются болота и торфяники. Следует учитывать, что подземные воды в биогенных грунтах и илах, как правило, сильно агрессивны к материалам подземных конструкций.

Разную устойчивость имеют природные комплексы и к *рекреационной деятельности*. Здесь выделены следующие группы: 1) устойчивые – природные комплексы водно-ледниковых и аллювиально-водно-ледниковых равнин; 2) слабоустойчивые – природные комплексы надпойменных террас; 3) неустойчивые – природные комплексы котловин и западин.

Наибольшей устойчивостью к рекреационным нагрузкам отличаются геоконструкции вторичных моренных равнин. Моренные суглинки обладают достаточным запасом влаги, что позволяет

растительности более стойко переносить вытаптывание и делает более легким ее восстановление. При рекреационной деятельности в почвах этих геоконплексах происходит уплотнение генетических горизонтов, но деструктивные процессы развиваются редко. Устойчивы к рекреационным нагрузкам и природные комплексы лиственных лесов на водно-ледниковой равнине. В то же время широко распространенные здесь маломощные пески часто обуславливают активизацию эрозионных процессов. Деградация ландшафта ослаблена в силу значительного разнообразия травяного покрова, хорошо скрепляющего почву. Разрушения отмечаются только в тех случаях, когда происходит искусственное уничтожение травостоя. Особенно хорошо это прослеживается на грунтовых дорогах. Высокой устойчивостью к рекреационным нагрузкам отличаются луговые пойменные природные комплексы с нормальным увлажнением.

Слабоустойчивы геоконплексы местности надпойменных террас с хвойными лесами. При их хозяйственном освоении часто формируются участки интенсивного разрушения. Особенно активно эти геоэкологические процессы протекают в ландшафтах с глубоким уровнем залегания грунтовых вод. В господствующих здесь сосняках в местах стоянок туристов происходит быстрое разрушение мохово-лишайникового покрова и почв.

При организации природопользования необходимо обратить внимание на встречающиеся в парке торфяники, которые легко уязвимы при всех видах хозяйственной деятельности. При сильном вытаптывании здесь часто наблюдаются процессы переувлажнения почв.

С точки зрения устойчивости к *загрязнению тяжелыми металлами* наиболее существенным является то обстоятельство, что на водно-ледниковых равнинах преобладают почвы легкого механического состава с хорошей водопроницаемостью, которые не способствуют накоплению загрязняющих веществ.

Грунтовые воды на территории парка подвержены *органогенному загрязнению*. Обладая высоким коэффициентом фильтрации, водно-ледниковые и древнеаллювиальные пески слабо защищают первый от поверхности водоносный горизонт, который часто является основным источником водоснабжения населения в мелких населенных пунктах, кордонах, лесничествах. Это требует соблюдения условий, исключающих возможность загрязнения воды в результате антропогенного воздействия. Радиус его влияния в ненапорных пластах зависит от коэффициента фильтрации перекрывающих пород. Для территорий, высланных мелкими песками, он равен 50 м,

песками средней крупности – 80 м. Очевидно, что этим расстоянием должна ограничиваться санитарная зона родника или колодца, в которой крайне нежелательно размещение объектов, способствующих ухудшению качества воды.

Разнообразии природно-территориальных комплексов и степень их устойчивости к различного рода воздействиям необходимо учитывать при планировании и размещении объектов хозяйственного и культурно-бытового назначения, при организации форм активного отдыха, таких, как экологическая тропа с намеченными на ней местами привалов и пунктами питания, грибными и ягодными местами.

Список литературы:

1. Географический атлас Республики Мордовия / редкол.: д-р геогр. наук проф. А.А. Ямашкин (пред. кол.), С.М. Вдовин, Н.П. Макаркин [и др.]. – Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2012. – 204 с.
2. Мордовский национальный парк «Смольный» / А.А. Ямашкин, Т.Б. Силаева, Л.Д. Альба [и др.]. – Саранск: НИИ регионологии при Мордов. ун-те, 2000. – 88 с.
3. Ямашкин А.А. Геоинформационные технологии в ландшафтном планировании и прогнозировании деструктивных геоэкологических процессов / А.А. Ямашкин, А.К. Коваленко // Мордовия: наука, инновации, новые технологии. – 2004. – № 2. – С. 16.
4. Ямашкин А.А. Геоэкологический анализ процесса хозяйственного освоения ландшафтов Мордовии / А.А. Ямашкин. – Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2001. – 232 с.
5. Ямашкин А.А. ГИС-моделирование ландшафтного разнообразия / А.А. Ямашкин, С.А. Ямашкин, А.Г. Акашкина // Геодезия и картография. – 2013. – № 11. – С. 40–45.
6. Ямашкин А.А. Использование нейронных сетей прямого распространения для ландшафтного картографирования на базе космических снимков / А.А. Ямашкин, С.А. Ямашкин // Геодезия и картография. – 2014. – № 11. – С. 52–58.
7. Ямашкин А.А. Ландшафтная карта и пространственные закономерности природной дифференциации Пензенской области / А.А. Ямашкин, С.Н. Артемова, Л.А. Новикова, Н.А. Леонова, Н.С. Алексеева // Проблемы региональной экологии. – 2011. – № 1. – С. 49–57.
8. Ямашкин А.А. Ландшафтное планирование устойчивого развития природно-социально-производственных систем / А.А. Ямашкин, А.В. Ларина, С.А. Москалева // Вестн. Ворон. гос. ун-та. Сер: География. Геоэкология. – 2007. – № 2. – С. 68–77.

9. Ямашкин А.А. Ландшафтно-экологическое зонирование староосвоенного лесостепного региона на примере Пензенской области / Ямашкин А.А., Кликунов А.А. Проблемы региональной экологии. 2013. № 3. С. 58–62.
10. Ямашкин А.А. Применение алгоритма выделения краев к решению задачи моделирования границ ландшафтов / А.А. Ямашкин, С.А. Ямашкин // Вест. Ворон. гос. ун-та. Сер.: География. Геоэкология. – 2013. – № 2. – С. 28–34.
11. Ямашкин А.А. Применение ГИС в анализе морфологической структуры ландшафтов / А.А. Ямашкин, С.А. Ямашкин, А.А. Кликунов, А.Г. Акашкина, Ю.С. Шукшин // Вест. Удмурт. ун-та. Сер. Биология. Науки о Земле. – 2013. – № 6–3. – С. 115–122.
12. Ямашкин А.А. Пространственная модель ландшафтов западных склонов Приволжской возвышенности / А.А. Ямашкин, Л.А. Новикова, С.А. Ямашкин, Е.Ю. Яковлев, О.М. Уханова // Вест. Удмурт. ун-та. Сер. Биология. Науки о Земле. – 2015. – Т. 25. – № 3. – С. 124–132.
13. Ямашкин А.А. Структура региональной ГИС для целей ландшафтного планирования / А.А. Ямашкин, С.А. Ямашкин // Изв. Смолен. гос. ун-та. – 2014. – № 4 (28). – С. 305–314.
14. Ямашкин А.А. Физико-географические условия и ландшафты Мордовии / А.А. Ямашкин. – Саранск: Изд-во Мордов. ун-та. 1998. – 156 с.
15. Ямашкин А.А. Электронная ландшафтная карта Пензенской области / А.А. Ямашкин, С.Н. Артемова, Л.А. Новикова, Н.А. Леонова, Н.С. Алексеева // Изв. Пенз. гос. пед. ун-та им. В.Г. Белинского. – 2011 – № 25. – С. 665–673.

ФИЗИКА

СЕКЦИЯ

«МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ПЛАЗМЫ»

БИФУРКАЦИИ ТРАНСЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ В СИММЕТРИЧНЫХ КАНАЛАХ С ЦЕНТРАЛЬНЫМ ТЕЛОМ

Кузьмин Александр Григорьевич

*д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. С-Петербургского
государственного университета,
РФ, г. Санкт-Петербург
E-mail: a.kuzmin@spbu.ru*

Бабарыкин Константин Валентинович

*канд. физ.-мат. наук, науч. сотр. С-Петербургского
государственного университета,
РФ, г. Санкт-Петербург*

TRANSONIC FLOW BIFURCATION IN SYMMETRIC CHANNELS WITH CENTERBODIES

Alexander Kuzmin

*dr. Sc., Head Researcher, St. Petersburg State University,
Russia, St. Petersburg*

Konstantin Babarykin

*ph.D., Researcher, St. Petersburg State University,
Russia, St. Petersburg*

АННОТАЦИЯ

Численно исследовано дву- и трехмерное турбулентное течение воздуха в сужающихся-расширяющихся каналах с центральным телом в виде двустороннего клина, пластины или гладкого профиля, образованного дугами окружности. Изучены возможные режимы течения при сверхзвуковой скорости набегающего потока. Решения нестационарных уравнений Навье-Стокса, осредненных по Рейнольдсу, получены с помощью вычислительных программ, основанных на методе конечных объемов. Найден диапазон числа Маха, в котором существует гистерезис и асимметричные режимы при нулевом угле атаки.

ABSTRACT

We study numerically 2D and 3D turbulent air flow in convergent-divergent channels with centerbodies whose profile is a double wedge, thin plate, or smooth circular-arc airfoil. Diverse flow regimes in the channels at supersonic free-stream velocities are revealed and discussed. Solutions of the unsteady Reynolds-averaged Navier-Stokes equations are obtained with a few finite-volume solvers. Mach number bands, in which there exist flow hysteresis and asymmetric flow fields at the vanishing angle of attack, are determined.

Ключевые слова: каналы прямоугольного сечения; транзвуковой поток; торможение; ударные волны; неустойчивость; гистерезис.

Keywords: channels of rectangular section; transonic flow; deceleration; shock waves; instability; hysteresis.

1. Введение. Вопросы торможения сверхзвуковых течений в каналах представляют интерес в связи с необходимостью повышения эффективности входных устройств воздушно-реактивных двигателей летательных аппаратов. Для снижения потерь полного давления при торможении сверхзвукового потока во входных устройствах используются каналы с центральным телом [1, с. 416; 4]. Плоские каналы с симметричным центральным телом (спаренные воздухозаборники) нашли свое применение, в частности, при проектировании и производстве самолетов дальней авиации Ту-160 [5]. На расчетном режиме работы такого воздухозаборника происходит формирование косых скачков уплотнения, которые, отражаясь от стенок и центрального тела в сужающейся части канала, достигают минимального сечения/горла. Однако эта система ударных волн оказывается весьма чувствительной к изменениям числа Маха

набегающего потока M_∞ и угла атаки. При меньших значениях M_∞ по сравнению с расчетным значением происходит “выбивание” системы ударных волн из канала и формирование одного скачка, расположенного перед входом в канал.

Близкие вопросы, связанные с устойчивостью ударных волн при торможении сверхзвукового потока в каналах с продольной перегородкой, изучались численными и экспериментальными методами в работах [2; 3]. В [8] исследовался гистерезис положения ударных волн как функции числа Маха в канале с центральным телом для моделей невязкого и вязкого течения.

Настоящая работа посвящена вопросу неединственности режимов течения в симметричных каналах с центральным телом для простых конфигураций, которые получены видоизменением геометрии классического биплана Буземана [6]. Особое внимание уделено асимметричным режимам, при которых с одной стороны от центрального тела реализуется система косых скачков, достигающих горла канала, а с другой стороны формируется выбитый скачок перед входом в канал.

2. Постановка задачи и численный метод. Входной и выходной внешними границами расчетной области на плоскости (x, y) являются отрезки $x=-1, -5 \leq y \leq 5$ и $x=1, -5 \leq y \leq 5$, соответственно. Верхней и нижней границами являются отрезки $y=\pm 5, -1 \leq x \leq 1$, которые расположены на достаточном удалении для исключения их влияния на течение в канале.

На стенках канала и на центральном теле ставится условие нулевой скорости и адиабатичности потока. На входной границе задана продольная сверхзвуковая компонента скорости U_∞ , нулевое значение вертикальной и поперечной компонент скорости, статическое давление $p_\infty=100000$ н/м² и статическая температура $T_\infty=250$ К, которой соответствует скорость звука $a_\infty=317,02$ м/с при показателе адиабаты 1,4. На выходной границе ставится условие сверхзвуковой скорости течения, а на стенках – условие прилипания и отсутствие теплового потока. В качестве начальных данных в расчетной области использовались параметры набегающего потока или параметры, полученные для некоторого предыдущего значения $M_\infty = U_\infty/a_\infty$.

Численные решения системы уравнений Навье-Стокса были найдены, в основном, с помощью программы ANSYS CFX-15 второго порядка точности на неструктурированных сетках с числом ячеек около 8×10^5 и 14×10^6 для двумерных и трехмерных течений, соответственно. Кроме того, некоторые расчеты были выполнены с помощью вычислительных программ Fluent-14 и SU2 [9], которые

основаны, как и CFX-15, на методе конечных объемов. Использовалась модель турбулентности k - ω SST и глобальные шаги по времени для нахождения установившегося течения. Тестирование программ проводилось, в частности, на задаче трансзвукового течения газа в канале с круговым выступом на верхней стенке [7].

3. Результаты расчетов плоских течений. В канале № 1 стенки взяты такими же, как и в биплане Буземана [6]. Профилем верхней стенки является равнобедренный треугольник с основанием $y=0,25$, $-0,5 \leq x \leq 0,5$ и вершиной в точке $x=0$, $y=0,20$; все линейные величины здесь и далее указаны в метрах. Нижняя стенка симметрична верхней стенке относительно оси x . В центр канала поместим тонкую продольную перегородку

$$y = \pm 0,001, -0,5 \leq x \leq 0,5$$

с торцами

$$x = \pm 0,5, -0,001 \leq y \leq 0,001.$$

Для получения асимметричных режимов двумерного течения были проведены сначала расчеты со ступенчатым профилем скорости на входной границе: $M^+_{\infty} = 2,4$ при $y > 0$ и $M^-_{\infty} = 1,8$ при $y \leq 0$. После установления течения при таком профиле значения M^+_{∞} и M^-_{∞} сближались шаг за шагом до одного и того же M_{∞} . На рис. 1 представлены изолинии числа Маха в канале при $M_{\infty} = 2,22$. Второй асимметричный режим может быть получен путем зеркального отражения поля течения относительно оси x . Расчеты показали, что такие асимметричные режимы течения реализуются в диапазонах

$$1.895 \leq M_{\infty} \leq 2.225 \text{ для турбулентного течения,} \quad (1)$$

$$1.839 \leq M_{\infty} \leq 2.210 \text{ для невязкого течения.}$$

Симметричный режим течения с выбитой ударной волной (в котором течение выше и ниже перегородки имеет тот же вид, что и в нижней части рис. 1) сохраняется при увеличении M_{∞} от значений, незначительно превышающих 1, до значения 2,245. Симметричный режим течения с косыми скачками, достигающими горла в обеих частях канала, (в котором течение выше и ниже перегородки имеет тот же вид, что и в верхней части рис. 1)

сохраняется при уменьшении M_∞ от 2,40 до 1,68. Полученный гистерезис симметричных режимов для чисел Маха

$$1,680 \leq M_\infty \leq 2,245 \quad (2)$$

несколько шире интервала гистерезиса $1,66 \leq M_\infty \leq 2,18$ при обтекании биплана Буземана без продольной перегородки [6]. Сравнение (1) и (2) позволяет сделать вывод, что при числах Маха из диапазона (1) возможны два асимметричных и два симметричных режима течения в канале № 1.

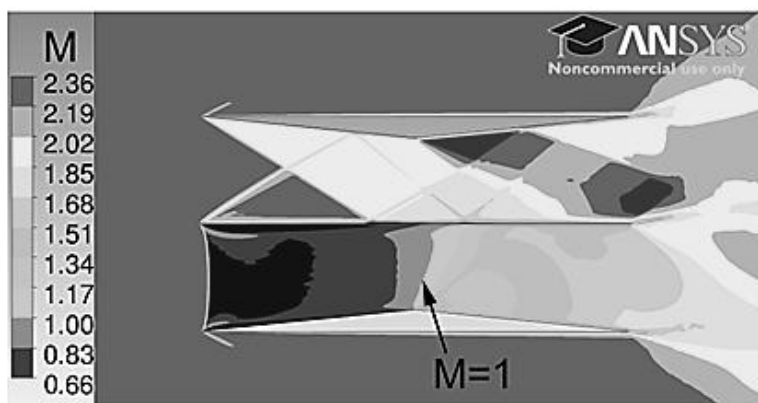


Рисунок 1. Изомахи в канале № 1 с продольной перегородкой при нулевом угле атаки и $M_\infty = 2,22$

Канал № 2. Рассмотрим теперь канал с центральным телом в виде двустороннего клина/ромба, составленного из равнобедренных треугольников того же размера, что и в предыдущем примере. Верхней и нижней стенками канала являются пластины той же толщины 0,002, что и перегородка в предыдущем примере; внутренние поверхности стенок расположены при $y = \pm 0,25$, $-0,5 \leq x \leq 0,5$, а внешние – при $y = \pm 0,252$, $-0,5 \leq x \leq 0,5$ (рис. 2). Численное моделирование показало, что асимметричные режимы турбулентного течения в канале № 2 при нулевом угле атаки реализуются в диапазоне $1,85 \leq M_\infty \leq 2,215$.

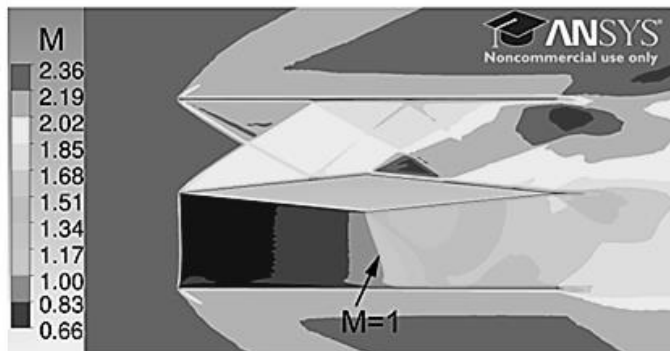


Рисунок 2. Изомахи в канале № 2 с центральным телом в виде ромба толщины 10 %. Верхняя и нижняя стенки имеют толщину 0,002; $M_\infty = 2,20$

Канал № 3 отличается от предыдущего тем, что толщина верхней и нижней стенок увеличена до 0,005, так что их внешние поверхности расположены при $y = \pm 0,255$, $-0,5 \leq x \leq 0,5$. Эти же стенки используются в остальных рассмотренных ниже каналах. Расчеты показали, что асимметричные режимы реализуются в диапазонах

$$1,890 \leq M_\infty \leq 2,250 \text{ для турбулентного течения,}$$

$$1,846 \leq M_\infty \leq 2,200 \text{ для невязкого течения.}$$

Симметричный режим турбулентного течения с выбитым скачком в обеих частях канала сохраняется при увеличении M_∞ до 2,31. Симметричный режим с системой косых скачков, достигающих горла, сохраняется при уменьшении M_∞ до 1,73. Использование вычислительных программ SU2 и Fluent-14 для численного моделирования течения в канале № 3 дало близкие результаты.

Канал № 4 отличается от канала № 3 тем, что центральное тело укорочено на 1/4 путем исключения из рассмотрения хвостовой части, расположенной при $x > 0,25$ (рис. 3). В этом случае асимметричное турбулентное течение реализуется в диапазоне

$$1,879 \leq M_\infty \leq 2,250.$$

При $M_\infty \leq 1,89$ под действием внешнего импульсного возмущения происходит развитие автоколебаний в следе за клином. Автоколебания сохраняются с увеличением M_∞ до 2,13 (рис. 3) и прекращаются

по достижении $M_\infty = 2,14$. При последующем постепенном уменьшении M_∞ до 1,90 колебания отсутствуют, однако при $M_\infty = 1,89$ они развиваются вновь.

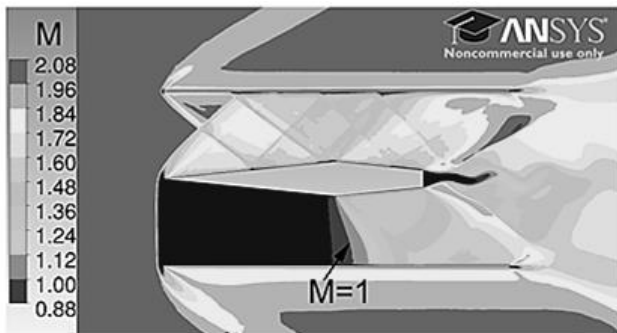


Рисунок 3. Автоколебания в следе в случае канала № 4 (с укороченным центральным клином) при $M_\infty = 2,0$; данный режим получен при увеличении M_∞ от 1,89 до 2,0

В канале № 5 центральный клин заменен на гладкий профиль толщины 10%, который образован двумя дугами окружности и симметричен относительно осей x и y (рис. 4). При этом расчеты показали, что диапазон существования асимметричного турбулентного течения незначительно смещается в сторону меньших чисел Маха: $1,878 \leq M_\infty \leq 2,23$.

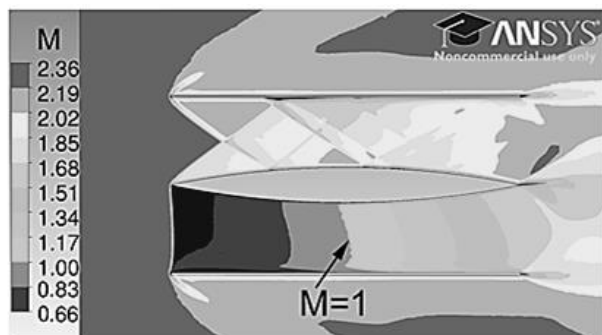


Рисунок 4. Изомахи в канале № 5 с центральным телом в виде профиля толщины 10 %, образованного дугами окружности; $M_\infty = 2,20$

В канале № 6 в качестве центрального тела выбран двусторонний клин, как и в канале № 3, но его толщина увеличена до 12 %. В этом случае диапазон M_∞ , в котором реализуются асимметричные режимы турбулентного 2D течения, расширяется до $2,040 \leq M_\infty \leq 2,615$.

4. Результаты расчетов трехмерных течений. Расчеты 3D течения в канале № 2 проводились при размахе стенок и центрального клина $-0,4 \leq z \leq 0,4$ с торцевыми стенками при $z = \pm 0,4$. Использовалось предположение о симметрии течения относительно вертикальной плоскости $z=0$, что позволило ограничить расчетную область по размаху этой плоскостью и внешней границей $z=1,2$. Положение прочих внешних границ такое же, как и в 2D модели. Расчеты подтвердили существование режимов асимметричного течения относительно горизонтальной плоскости $y=0$ (рис. 5), что согласуется с результатами, указанными выше для двумерного течения.

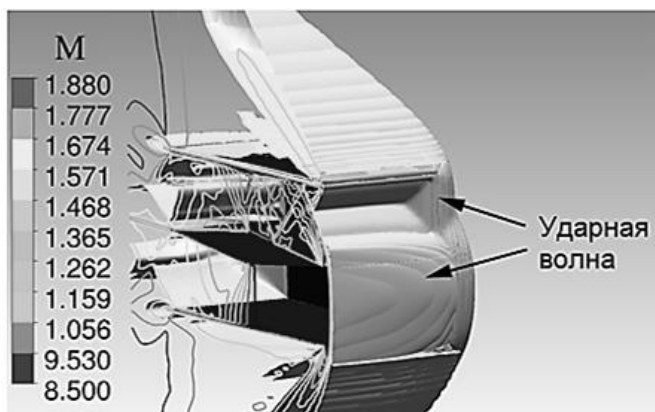


Рисунок 5. ИзоМахи в плоскости симметрии $z=0$ и поверхность $M(x,y,z)=1,695$ в канале № 2 с торцевыми стенками при $z=\pm 0,4$ в случае асимметричного по у режима течения и $M_\infty = 1,70$. Показана часть канала, расположенная при $z \geq 0$

Были проведены, кроме того, расчеты трехмерного течения в канале без торцевых стенок, с удвоенным размахом $-0,8 \leq z \leq 0,8$ и внешней боковой границей $z=2$. Толщина центрального клина взята 12 %, толщина верхней и нижней стенок 0,002. Так же, как и выше, использовалось предположение о симметрии течения относительно плоскости $z=0$. Установлено существование асимметричных режимов

относительно плоскости $y=0$ в диапазоне $1,74 \leq M_\infty \leq 1,78$. При этом наблюдается обширная зона отрыва пограничного слоя от верхней или нижней стенки (рис. 6), что может являться возможной причиной возникновения асимметрии.

5. Заключение. При увеличении толщины центрального клина с 10 % до 12 % происходит расширение диапазона чисел Маха, в котором наблюдаются асимметричные по y режимы 2D течения в канале при нулевом угле атаки. Замена клина на гладкий профиль той же толщины не оказывает существенного влияния на этот диапазон.

Расчеты 3D течения в канале размаха $-0,4 \leq z \leq 0,4$ с центральным клином 10 %-й толщины и торцевыми стенками подтвердили, что причиной возникновения асимметричных режимов является неустойчивость сверхзвукового течения в сужающейся части канала и связанное с этим выбивание и «проглатывание» скачков. При отсутствии торцевых стенок в канале с клином 12 %-й толщины и увеличенного вдвое размаха установлено существование в узком диапазоне M_∞ асимметричных режимов, возможной причиной которых является отрыв пограничного слоя от одной из стенок канала.

Авторы выражают благодарность А.Н. Рябинину за полезные обсуждения и проведение ряда расчетов с помощью программы SU2.

Данное исследование проведено с использованием ресурсов Вычислительного центра Санкт-Петербургского государственного университета.

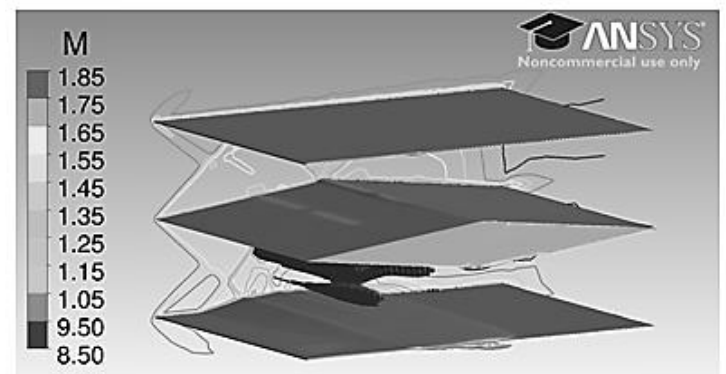


Рисунок 6. *ИзоМахи в плоскости симметрии $z=0$ и поверхность $M(x,y,z)=1$ при $M_\infty = 1,78$ и асимметричном по y режиме течения в канале без торцевых стенок. Показана часть канала, расположенная при $z \geq 0$*

Список литературы:

1. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. – М., Наука. — 1969 – 824 с.
2. Гурьева Н.В., Иванькин М.А., Лапинский Д.А., Мартынов А.А., Медведев С.Ю., Терешин А.М. Расчеты сверхзвукового обтекания клинообразных перегородок в канале // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2016 – № 45, 18 с.
3. Зубков А.Ф. Автоколебательный процесс в плоском диффузоре с продольной перегородкой // Современные проблемы аэрокосмической науки и техники. Тезисы докладов Международной научно-технической конференции молодых ученых и специалистов (г. Жуковский, 23–26 мая 2000 г.).
4. Ремеев Н.Х. Аэродинамика воздухозаборников сверхзвуковых самолетов. Изд. ЦАГИ. – 2002 – 178 с.
5. Стратегический сверхзвуковой Ту-160 // Портал «Современная армия». – 2010. – URL: <http://www.modernarmy.ru/article/100> (Дата обращения: 04.10.2016).
6. Kusunose K., Matsushima K., Maruyama D.: Supersonic biplane – A review // Progress in Aerospace Sciences. – 2011 – Vol. 47, P. 53–87.
7. Kuzmin A. Shock wave bifurcation in channels with a bend // Archive of Applied Mechanics. – 2016 – Vol. 86, № 5, P. 787–795.
8. Riabinin A., Suleymanov A. Bifurcation of transonic flow in the channel with a central body // Conference Topical Problems of Fluid Mechanics 2016. Proceedings – 2016 – P. 185–190.
9. SU2: The Open-Source CFD Code // Stanford University. – 2016. – URL: <http://su2.stanford.edu> (Дата обращения: 04.10.2016).

СЕКЦИЯ

«ФИЗИКА ПЛАЗМЫ»

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ИСПАРЕНИЯ АЛЮМООКСИДНОЙ КЕРАМИКИ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ

Золотухин Денис Борисович

*аспирант кафедры физики Томского государственного университета
систем управления и радиоэлектроники,
РФ, г. Томск*

E-mail: zolutukhinden@gmail.com

Юшков Юрий Георгиевич

*канд. техн. наук, ст. науч. сотр., кафедры физики
Томского государственного университета
систем управления и радиоэлектроники,
РФ, г. Томск*

E-mail: yuyushkov@gmail.com

Тюньков Андрей Владимирович

*канд. техн. наук, ст. науч. сотр., кафедры физики
Томского государственного университета
систем управления и радиоэлектроники,
РФ, г. Томск*

E-mail: andrew71@sibmail.com

MODELING OF EVAPORATION ALUMINA CERAMIC ELECTRON BEAM

Denis Zolotukhin

*graduate student of the Department of Physics at Tomsk State University
of Control Systems and Radio Electronics,
Russia, Tomsk*

Yury Yushkov

*ph.D., Senior Research Fellow, Department of Physics
at Tomsk State University of Control Systems and Radio Electronics,
Russia, Tomsk*

Andrey Tyunkov

*ph.D., Senior Research Fellow, Department of Physics
at Tomsk State University of Control Systems and Radio Electronics,
Russia, Tomsk*

АННОТАЦИЯ

В статье изложена численная модель генерации пучковой плазмы при электронно-лучевом испарении алюмооксидной керамики. Показано, что при плотностях мощности энергии, меньших чем необходимо для испарения керамики, состав ионы плазмы являются газовыми, а с некоторой пороговой плотности мощности в плазме появляются ионы материала испаряемой керамики.

ABSTRACT

The article presents a numerical model for the generation of the beam plasma during the electron-beam evaporation of aluminum oxide ceramic. It is shown that if the beam energy density is less than is needed for the evaporation of ceramic, plasma contains only gas ions, and from a certain threshold of power density, the ions of evaporated ceramic material appear in plasma.

Ключевые слова: электронный пучок, плазма, испарение керамики.
Keywords: electron beam, plasma, ceramics evaporation.

Метод электронно-лучевого испарения керамики [1] является относительно новым и отличается простотой реализации процесса, достаточно высокими скоростями осаждения, возможностью регулирования параметров нанесения в широких пределах. Поскольку ранее такие процессы осуществлялись при рабочих давлениях, не превышающих 10^{-2} Па. Однако при таких давлениях в случае обработки диэлектрических мишеней пучками электронов с энергиями в несколько килоэлектронвольт, происходит их зарядка, приводящая к существенному снижению первичной энергии электронного пучка [2]. Формирование электронного пучка форвакуумным плазменным источником при давлениях 1–100 Па обеспечивает образование в области транспортировки пучка плотной плазмы [3]. Ионы генерируемой пучком плазмы обеспечивают нейтрализацию

заряда изолированной мишени и открывают возможность непосредственной электронно-лучевой обработки непроводящих диэлектриков без создания специальных условий для нейтрализации заряда ее поверхности. Данный факт существенно расширяет применение электронных пучков для обработки, распыления и последующего нанесения керамических покрытий, поэтому важной задачей является изучение процесса испарения керамики.

Рассмотрим модель испарения алюмооксидной керамики (Al_2O_3). В качестве исходных положений модели примем следующее. Электронный пучок диаметром d , площадью поперечного сечения S_b , током I_b и энергией U_a , задаваемой источником ускоряющего напряжения, распространяется в газе (азоте) при давлении p , равном 1–15 Па, и комнатной температурой T_g , и в результате ударной ионизации молекул газа создает пучковую плазму с концентрацией n_{ig} и электронной температурой T_e . Считаем, что пучок проходит путь $l_b = 20$ см по оси цилиндрической камеры радиусом $R_{ch} = 15$ см. Электронная температура упомянутой газовой плазмы считается равной 1 эВ, что типично для пучковой плазмы в форвакууме [4]. Концентрацию пучковой плазмы n_{ig} можно оценить по формуле:

$$n_{ig} = \frac{\sigma_{iN_2}(U_a)n_b n_g \sqrt{2eU_a/m_e} S_b l_b}{0.4 S_l \sqrt{2kT_e/M_{N_2}}}, \quad (1)$$

где: $\sigma_{iN_2}(U_a)$ – сечение ионизации молекулы азота электронным ударом, зависящее от энергии пучка [5], и для $U_a = 7$ кэВ имеющее величину $4,8 \cdot 10^{-22}$ м²;

n_b – концентрация электронов в пучке;

n_g – концентрация молекул газа;

e, m_e – заряд и масса электрона;

$S_l = 2\pi R_{ch}^2 + \pi R_{ch} l$ – площадь, с которой плазма теряет ионы;

k – постоянная Больцмана;

M_{N_2} – масса молекулы азота.

Ускоренный и сфокусированный электронный пучок после прохождения слоя газа попадает на мишень, выполненную из алюмооксидной керамики Al_2O_3 , что приводит к нагреву, плавлению и испарению материала мишени. Считаем, что потеря тепла керамической мишени при ее нагреве происходит в основном за счет уноса лучистой энергии. Сказанное позволяет записать уравнение баланса энергий, откуда выразить температуру керамики T_c как функцию плотности мощности пучка:

$$T_c = \sqrt[4]{I_b U_a / S_b \sigma}, \quad (2)$$

где: σ – постоянная Стефана-Больцмана.

Считаем, что при нагреве керамической мишени до температуры испарения T_{cev} (3250 К), ее материал начинает испаряться, причем каждая молекула Al_2O_3 разлагается под пучком на $2Al$ и $3O$, унося энергию связи $\omega = 31$ эВ. С учетом сказанного, а также считая, что испаряющиеся частицы обладают тепловой скоростью, соответствующей T_{cev} , концентрацию испаренных пучком молекул можно оценить:

$$n_c = \frac{I_b U_a - \sigma T_{cev}^4 S_b}{\omega S_b \sqrt{8kT_{cev} / \pi M_{Al_2O_3}}}, \quad (3)$$

где: $M_{Al_2O_3} \approx 101,96$ а. е. м. – масса молекулы Al_2O_3 .

Концентрацию образовавшихся под воздействием пучка атомов алюминия и кислорода можно оценить с учетом массовых долей соответствующих атомов в молекуле:

$$n_{Al} = 2/5 n_c, \quad n_O = 3/5 n_c \quad (4)$$

а концентрацию ионов алюминия и кислорода, образующихся под воздействием пучка, оценим по формуле:

$$n_{i\alpha} = \frac{\sigma_{i\alpha} n_b n_\alpha \sqrt{2eU_a / m_e} S_b l_b}{0,4 \sqrt{2kT_e / M_\alpha} S_l}, \quad (5)$$

где: индекс α соответствует сорту ионов (Al, O).

Таким образом, состав и концентрация пучковой плазмы будет зависеть от плотности мощности энергии, доставляемой пучком к керамической мишени. При низких уровнях плотности мощности, меньших, чем необходимо для испарения керамики, состав ионов пучковой плазмы будет газовый, а концентрация газовых ионов в плазме будет определяться выражением (1). С повышением уровня плотности мощности до величин, достаточных для испарения керамики, в пучковой плазме начнут появляться ионы продуктов испарения керамики (Al, O), концентрация которых (определяемая выражением 5) будет расти с ростом плотности мощности пучка. Сказанное иллюстрируется рассчитанной зависимостью суммарной концентрации пучковой плазмы от температуры керамической мишени (рис. 1).

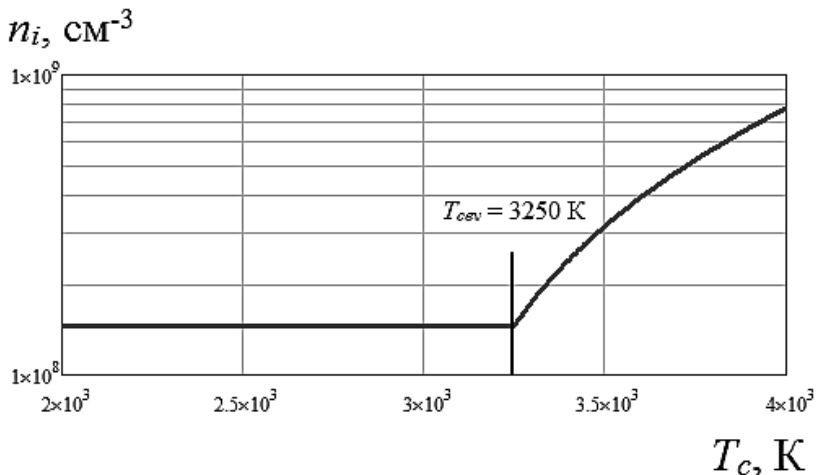


Рисунок 1. Концентрация пучковой плазмы в зависимости от температуры керамической мишени

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта РФФИ № 16-38-60059 мол_а_дк.

Список литературы:

1. Бурдовичин В.А., Окс Е.М., Скробов Е.В., Юшков Ю.Г. Модификация поверхности керамики импульсным электронным пучком, генерируемым форвакуумным плазменным источником. // Перспективные материалы. 2011. № 6. С. 1.
2. Бурдовичин В.А., Медовник А.В., Окс Е.М., Скробов Е.В., Юшков Ю.Г. Потенциал диэлектрической мишени при ее облучении импульсным электронным пучком в форвакуумной области давлений. // Журнал технической физики. 2012. Т. 82. № 10. С. 103–108.
3. Oks E., Burdovitsin V., Medovnik A., Yushkov Y. Plasma electron source for the generation of wide-aperture pulsed beam at forevacuum pressures. // Review of Scientific Instruments. 2013. Т. 84. № 2. С. 023301.
4. Manheimer W.M., R.F. Fernsler, M. Lampe, R.A. Meger. Theoretical overview of the large-area plasma processing system (LAPPS) // Plasma Sources Sci. Technol. – 2000. – Vol. 9, № 3. – P. 370–386.
5. Hwang W., Y.-K. Kim, M.E. Rudd. New model for electron-impact ionization cross section for molecules // J. Chem. Phys. – 1996. – Vol. 104, № 8. – P. 2956.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Научное издание

**«ЕСТЕСТВЕННЫЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
НАУКИ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ»**

Сборник статей по материалам
XLVII международной научно-практической конференции

№ 10 (45)
Октябрь 2016 г.

В авторской редакции

Подписано в печать 17.10.16. Формат бумаги 60x84/16.
Бумага офсет №1. Гарнитура Times. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 6,625. Тираж 550 экз.

Издательство АНС «СибАК»
630049, г. Новосибирск, Красный проспект, 165, офис 4.
E-mail: mail@sibac.info

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного
оригинал-макета в типографии «Allprint»
630004, г. Новосибирск, Вокзальная магистраль, 3