Лінійна алгебра

Частина I

Навчальний посібник

Укладач

Дубовик Віталій Васильович

2021

УДК __________

Рекомендовано до друку вченою радою факультету фізики, математики та інформатики Уманського державного педагогічного університету

(протокол №__ від __ _____)

Рецензенти:

Махомета Т. М. – кандидат педагогічних науки, доцент, професор кафедри вищої математики та методики навчання математики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини

Вакалюк Т. А. – доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри інженерії програмного забезпечення Державного університету «Житомирська політехніка» Вакалюк Т. А.

Бібліографічний опис

Дубовик В. В. Лінійна алгебра. Частина I: навчальний посібник / В. В. Дубовик – Умань: ВПЦ «Візаві»., 2021. – 119 с.

Посібник охоплює матеріал з лінійної алгебри підготовки бакалаврів спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика). Короткі систематизовані теоретичні відомості супроводжуються розв’язанням великої кількості задач, прикладів. В кінці кожного параграфу запропоновано завданнями для самостійного опрацювання у 20 варіантах. Основна змістовна частина доповнюється завдання для контрольної роботи.

Зміст

Передмова

Сучасна педагогічна освіта вимагає від майбутніх вчителів математики володіти не тільки знаннями, вміннями і навичками елементарної математики, а й іншими математичними дисциплінами для того, щоб стати висококваліфікованим фахівцем у своїй справі. Зокрема, особлива увага приділяється вивченню лінійної алгебри, адже отримані знання по закінченні курсу необхідні для оволодіння сучасним математичним апаратом із метою подальшого його застосування під час вивчення інших математичних дисциплін, а також при проведенні самостійних наукових досліджень. Опанування курсу лінійної алгебри займає важливе місце в системі підготовки майбутнього вчителя математики, оскільки сприяє як формуванню наукового світогляду в цілому, так і математичної культури зокрема.

Навчальний посібник розрахований для студентів, які навчаються за спеціальністю 014.04 Середня освіта (Математика). Посібник складається із семи параграфів, які умовно можна поділити на дві частини: теоретичні основи із зразками розв'язання вправ та завдання для самостійного опрацювання. Кожний параграф містить значну кількість прикладів та вправ із ґрунтовним розв'язанням. Деякий навчальний матеріал представлений у вигляді схем, рисунків, що сприяє кращому його засвоєнню. Також в кінці посібника представлено завдання для контрольної роботи у чотирьох варіантах.

Параграф 1. Системи лінійних рівнянь

Із деякими поняттями систем лінійних рівнянь ви знайомі зі школи. Вам добре відомі деякі способи розв'язування систем двох лінійних рівнянь із двома невідомими, зокрема метод підстановки та додавання.

Розглянемо що таке система лінійних рівнянь, що містить m рівнянь з n невідомими.

Означення 1.1. Системою лінійних рівнянь називається набір з одного чи більше лінійних рівнянь відносно однієї і тієї ж множини змінних (наприклад $x_1, x_2, \dots, x_n$).

Система лінійних рівнянь, що містить m рівнянь з n невідомими в загальному має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_{m.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Означення 1.2. Розв'язкам системи лінійних рівнянь (1.1) називається впорядкована множин чисел $(s_1, s_2, \dots, s_n)$, яка при підстановці в дану систему відповідно замість $x_1, x_2, \dots, x_n$ перетворює кожне рівняння в правильну числову рівність.

Якщо існує хоча б один розв'язок системи (1.1), то система називається сумісною, в іншому випадку – несумісною. Сумісна система називається визначеною, якщо вона має єдиний розв'язок. Система що має більш ніж один розв'язок називається невизначеною.

Наприклад система лінійних рівнянь $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5, \\ x_1 - 2x_2 = -1, \end{cases}$ є сумісною та визначеною, адже вона має розв'язок і до того ж тільки один – (1,1). Система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1.2)$$

називається однорідною і є завжди сумісною, адже (0,0, … ,0) є розв'язком цієї системи. Проте, вона може бути як визначеною так і невизначеною.

Означення 1.3. Дві системи називаються еквівалентними (рівносильними), якщо множини їх розв'язків співпадають, тобто, кожний розв'язок першої системи є розв'язком другої і навпаки.

Розв'язати систему лінійних рівнянь можна замінивши дану систему на еквівалентну їй систему, яку розв'язувати легше.

Наприклад, розв'яжемо систему $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 10, \\ 7x_1 + 4x_2 = 8. \end{cases}$ Помножимо обидві частини першого рівняння на (-2) та почленно додамо рівняння системи:

$$\left.\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 10, \\ 7x_1 + 4x_2 = 8; \end{cases}\right| \cdot (-2);$$

$$\left.\begin{cases} -10x_1 - 4x_2 = -20, \\ 7x_1 + 4x_2 = 8; \end{cases}\right| +;$$

$$\begin{cases} -10x_1 - 4x_2 = -20, \\ -3x_1 = -12; \end{cases}$$

$$x_1 = 4.$$

Підставимо знайдене значення x_1 у друге рівняння, щоб знайти x_2. Маємо $7 \cdot 4 + 4x_2 = 8$, $x_2 = -5$.

Цю систему розв'язали за допомогою деяких елементарних перетворень. До *елементарних перетворень* віднесемо:

1. множення обох частин рівняння на число відмінне від нуля;
2. додавання (віднімання) до одного рівняння іншого помноженого на деяке число;
3. перестановку рівняння місцями;

4. викреслювання рівняння виду $0 = 0$.

Означення 1.4. Елементарні перетворення кожної системи лінійних рівнянь переводить її у еквівалентну систему.

Складемо таблицю коефіцієнтів при невідомих системи (1.1) – *матрицю системи (головну матрицю системи)*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Матриця $B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ називається розширеною матрицею системи (1.1).

Наприклад, розширена матриця системи $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3, \end{cases}$ матиме вигляд:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

Матриця має східчасту форму (або рядково східчасту форму), якщо вона володіє такими властивостями:

1. всі ненульові рядки знаходяться вище всіх нульових рядків;
2. в кожному ненульовому рядку перший ненульовий елемент (він називається ведучим елементом рядка) знаходиться в стовпці справа від ведучого елемента у рядку над ним.

Одним із способів розв'язування систем лінійних рівнянь є Метод Гауса. Цей метод полягає в наступному:

1. записати розширену матрицю систем лінійних рівнянь;

2. за допомогою елементарних перетворень рядків матриці звести її до східчастої форми;

3. повернутися від одержаної матриці до системи та розв'язати її.

► **Приклад 1.1.** Розв'язати систему $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \end{cases}$ методом Гауса.

Розв'язання

Складемо розширену матрицю системи.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Утворимо нулі під одиницею із першого стовпця матриці. Для цього перший рядок залишимо без змін, а до другого рядка додаємо перший помножений на (-3):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

До третього і четвертого рядків додаємо перший помножений на (-2).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right).$$

Додамо до третього рядка другий помножений на (-1):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right).$$

Викреслимо третій рядок і отримаємо матрицю $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 3\\ 0 & 5 & -7 & -7\\ 0 & 0 & -5 & -5\end{array}\right)$, яка відповідає системі $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3,\\ 5x_2 - 7x_3 = -7,\\ -5x_3 = -5.\end{cases}$

Розв'яжемо дану систему. З третього рядка знайдемо, що $x_3 = 1$. Підставимо значення $x_3 = 1$ у друге рівняння, матимемо: $5x_2 - 7 \cdot 1 = -7$. $x_2 = 0$. Підставимо значення $x_3 = 1$ та $x_2 = 0$ в перше рівняння: $x_1 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 3$. Звідки $x_1 = -1$.

Відповідь: $(-1,0,1)$. ◄

► **Приклад 1.2.** Розв'язати методом Гауса систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 25,\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10,\\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 17.\end{cases}$$

Розв'язання

Складемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 6 & 7 & 25\\ 1 & 2 & 3 & 10\\ 1 & 4 & 6 & 17\end{array}\right).$$

З попереднього прикладу ви переконалися, що зручно, коли ведучим елементом першого рядка є число 1. Тому поміняємо перший і другий рядок місцями:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 10\\ 2 & 6 & 7 & 25\\ 1 & 4 & 6 & 17\end{array}\right).$$

До другого рядка додамо перший помножений на (-2), а до третього рядка додамо перший помножений на (-1), таким чином утворивши нулі під ведучим елементом першого рядка:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 10\\ 0 & 2 & 1 & 5\\ 0 & 2 & 3 & 7\end{array}\right).$$

Утворимо нулі під ведучим елементом другого рядка, для цього додамо до третього рядка другий помножений на (-1):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Тепер повернемося до системи:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ \quad\quad 2x_2 + x_3 = 5, \\ \quad\quad\quad\quad 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Отже, з третього рівняння знайдемо x_3 ($x_3 = 1$), підставимо отримане значення в друге рівняння і знайдемо x_2 ($x_2 = 2$), а потім отримані значення підставимо у перше рівняння та знайдемо x_1 ($x_1 = 3$).

Відповідь: (3,2,1). ◄

► **Приклад 1.3.** Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ методом Гауса.

Розв'язання

Складемо розширену матрицю системи: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$

Додамо до другого рядка перший помножений на (-2):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Другий рядок цієї системи відповідає наступному рівнянню: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -5$. Тому очевидно, що дана система несумісна.◄

► **Приклад 1.4.** Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$ методом Гауса.

Розв'язання

Складемо розширену матрицю системи: $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & -1 & 3\\ 3 & 3 & 2 & 7\end{array}\right)$.

Утворимо нулі під ведучим елементом першого рядка, для цього додамо до другого рядка перший помножений на (-2), а до третього додамо перший помножений на (-3):

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -3 & -7 & -5\\ 0 & -3 & -7 & -5\end{array}\right).$$

Додамо до третього рядка другий помножений на (-1):

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -3 & -7 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -3 & -7 & -5\end{array}\right).$$

Дана матриця відповідає системі рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ \quad\quad -3x_2 - 7x_3 = -5. \end{cases}$$

Ця система має безліч розв'язків. Виразимо змінні, що відповідають ведучим елементам рядків східчастої форми матриці (ці елементи називаються основними) через інші змінні (вони називаються вільними). В цьому прикладі x_1 та x_2 є основними змінними, а x_3 – вільною. З другого рівняння виразимо x_2:

$-3x_2 = -5 + 7x_3;$

$x_2 = \frac{5}{3} - \frac{7}{3}x_3.$

Підставимо отримане значення у перше рівняння і виразимо x_1: $\quad x_1 + 2\left(\frac{5}{3} - \frac{7}{3}x_3\right) + 3x_3 = 4;$

$x_1 = 4 - 2\left(\frac{5}{3} - \frac{7}{3}x_3\right) - 3x_3;$

$x_1 = 4 - \frac{10}{3} + \frac{14}{3}x_3 - 3x_3;$

$x_1 = \frac{2}{3} + \frac{5}{3}x_3.$

Для запису введемо відповідні параметри $a = x_3$.

Відповідь: $\left\{\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{3}a, \frac{5}{3}-\frac{7}{3}a,\ a\right) : a \in R\right\}$. ◄

► **Приклад 1.5.**

Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гауса

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 5x_3 - x_4 = 5; \\ -x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0; \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 7; \\ 2x_1 - 6x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 12; \\ -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -2. \end{cases}$$

Розв'язання

Складемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -7 & 5 & -1 & 5 \\ -1 & 6 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 5 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & 6 & -2 & 12 \\ -2 & 4 & -4 & 4 & -2 \end{array}\right).$$

Додамо до другого рядка перший, до третього, четвертого та п'ятого рядків додамо перший помножений відповідно на (-2), (-2) та 2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -7 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 9 & -5 & -1 & -3 \\ 0 & 8 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & 6 & 2 & 8 \end{array}\right).$$

Додамо до третього, четвертого та п'ятого рядків другий, помножений на 9, 8, (-10) відповідно:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -7 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 42 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 42 \\ 0 & 0 & -4 & -8 & -42 \end{array}\right).$$

Викреслимо пропорційні рядки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -7 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 42 \end{array}\right).$$

Запишемо систему, що відповідає даній матриці:

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 5x_3 - x_4 = 5; \\ \qquad -x_2 + x_3 + x_4 = 5; \\ \qquad\qquad 4x_3 + 8x_4 = 42. \end{cases}$$

Змінні x_1, x_2, x_3– основні, x_4– вільна.

Виразивши основні змінні через вільну отримаємо:

$x_1 = -9 + 4x_4$, $x_2 = \frac{11}{2} - x_4$, $x_3 = \frac{21}{2} - 2x_4$. Для запису введемо відповідні параметри $a = x_4$.

$x_1 = -9 + 4a$, $x_2 = \frac{11}{2} - a$, $x_3 = \frac{21}{2} - 2a$.

Відповідь: $\left\{\left(-9 + 4a, \frac{11}{2} - a, \frac{21}{2} - 2a,\ a\ \right) : a \in R\right\}$ ◄

Існує ще метод Жордана-Гауса розв'язування систем лінійних рівнянь. Цей метод дещо відрізняється від метода Гауса і передбачає перетворення матриці системи до зведеної східчастої форми.

Матриця має *зведену східчасту форму*, якщо:

- вона має східчасту форму;
- всі ведучі елементи кожного ненульового рядка дорівнюють 1;
- кожний стовпець, що містить ведучу одиницю якогось рядка містить у всіх інших позиціях нулі.

Щоб розв'язати систему лінійних рівнянь методом Жордана – Гауса потрібно:

- звести розширену матрицю системи до східчастої форми уже відомим вам способом;
- якщо система сумісна, то потрібно утворити нулі в стовпцях з ведучими елементами рядків матриці, утворити зведену східчасту форму;
- записати систему рівнянь, яка відповідає утвореній матриці.

► **Приклад 1.6.** Розв'язати систему рівнянь
$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ -x_1 + x_2 - x_3 \qquad = -3, \end{cases}$ методом Жордана – Гауса.

Розв'язання

Перш за все, запишемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

Зведемо цю матрицю до східчастої форми, для цього спочатку до другого рядка додамо перший помножений на -2, а до третього рядка додамо перший, матимемо:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

Додамо до третього рядка перший помножений на 2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Система сумісна. Якби завдання стояло розв'язати систему методом Гауса, то на даному етапі ми перейшли б до системи рівнянь, яка відповідає утвореній матриці. Перейдемо до зведеної східчастої форми. Для цього утворимо нулі у першій позиції третього стовпця, для цього додамо до першого рядка другий.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Система що відповідає цій матриці має вигляд:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad + x_4 = 2, \\ \qquad\qquad x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Змінні x_1 та x_3 є основними, а x_2 та x_4 вільними.

$$x_1 = x_2 - x_4 + 2,$$

$$x_3 = x_4 + 1.$$

Для запису відповіді введемо додаткові параметри $x_2 = a$, $x_4 = b$.

Відповідь: $\{(a - b + 2, a,\ b + 1, b\ ): a, b \in R\}$. ◄

Метод Гауса і Жордана–Гауса є досить зручним, адже дозволяє з легкість розв'язати системи у яких три, чотири і більше рівнянь.

Також метод Жордана–Гауса зручний при розв'язуванні систем рівнянь у яких однакові головні матриці системи, але які відрізняються стовпцем вільних членів.

► **Приклад 1.7.** Розв'язати системи:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 \qquad - x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 \qquad = -1, \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 \qquad - x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 \qquad = 5. \end{cases}$$

Розв'язання

Запишемо наступну матрицю:

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{matrix}\right).$$

Додамо до другого рядка перший помножений на (-2), а до третього перший помножений на (-1). Ці дії для зручності можна позначати наступним чином : $\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{matrix}\right) \begin{matrix} \cdot(-2) \quad \cdot(-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$.

Продовжимо з аналогічним записом:

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{matrix}\right) \begin{matrix} \cdot(-2) \quad \cdot(-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 6 \\ -13 \\ -1 \end{matrix}\right) \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ \leftarrow \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 0 \\ -3 \\ -5 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 6 \\ -13 \\ -15 \end{matrix}\right) \begin{matrix} \\ \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \leftarrow \\ \cdot\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot\left(-\frac{3}{2}\right) \end{matrix} \sim \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\right) \begin{matrix} \leftarrow \\ \cdot(-1) \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\left|\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\right).$$

Таким чином розв'язки першої системи $(-1, 0, 1)$, а другої $(1, 2, 3)$. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

Розв'язати систему методом Гауса:	Розв'язати систему методом Жордана-Гауса:
Варіант 1	
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 = 13, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 + 2x_5 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 4, \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases}$
Варіант 2	
$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -4, \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -14, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = -4, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 = -1. \end{cases}$
Варіант 3	
$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -3, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_5 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 12, \\ -3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$
Варіант 4	
$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -1, \\ 7x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 2. \end{cases}$
Варіант 5	
$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = -2, \\ 3x_1 - 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$
Варіант 6	
$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 1, \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = -3, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$

Варіант 7	
$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + 15x_3 = -1. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = -4. \end{cases}$
Варіант 8	
$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -8, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 \qquad + x_5 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = -2, \\ 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 5. \end{cases}$
Варіант 9	
$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = -4, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$
Варіант 10	
$\begin{cases} -2x_1 - 5x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 1, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 = -6. \end{cases}$
Варіант 11	
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 4, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 1, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 12x_4 \qquad = 16, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 6. \end{cases}$
Варіант 12	
$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$	$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 3, \\ 4x_1 \qquad + 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 1, \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 = -2. \end{cases}$
Варіант 13	
$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -15, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 24, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = -5. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \qquad = 16, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = -4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 6. \end{cases}$

Варіант 14	
$\begin{cases} x_1+3x_2-3x_3=4, \\ 7x_1+3x_2-3x_3=10, \\ 4x_1-x_2+2x_3=0. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3-5x_4-x_5=0, \\ x_1-x_2-2x_3+x_4+x_5=1, \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4+x_5=12, \\ x_1+3x_2-2x_3+2x_4-3x_5=15. \end{cases}$
Варіант 15	
$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=16, \\ 3x_1-5x_2-5x_3=-7, \\ -5x_1+2x_2+3x_3=-3. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=2, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+x_4+x_5=2, \\ 8x_1+x_2-3x_3+x_4+x_5=0, \\ 3x_1-7x_2+x_3-x_4+x_5=2. \end{cases}$
Варіант 16	
$\begin{cases} 2x_1-x_2+8x_3=-20, \\ -x_1+3x_2-4x_3=5, \\ 3x_1-x_2+3x_3=-4. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3-3x_4+x_5=1, \\ x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5=3, \\ 2x_1-x_2-2x_3+x_4-3x_5=2, \\ 4x_1-x_2+2x_3+3x_4+x_5=0. \end{cases}$
Варіант 17	
$\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=10, \\ 2x_1+5x_2-x_3=-1, \\ 2x_1-2x_2+9x_3=-10. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1+x_2+5+x_4+x_5=2, \\ 4x_1-3x_2+2x_3+5x_4+3x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+3x_3+x_4+2x_5=-4, \\ 2x_1+7x_2-2x_3+3x_4+x_5=-14. \end{cases}$
Варіант 18	
$\begin{cases} 2x_1+3x_2-4x_3=8, \\ 3x_1+x_2+3x_3=-8, \\ x_1+x_2+6x_3=-19. \end{cases}$	$\begin{cases} 4x_1-x_2+2x_3+x_4+x_5=4, \\ 3x_1-x_2-x_3+x_4+x_5=1, \\ -x_1+x_2+x_3-x_4+3x_5=-4, \\ -3x_1+2x_2+x_4-x_5=0. \end{cases}$
Варіант 19	
$\begin{cases} -2x_1+x_2+3x_3=13, \\ 3x_1+2x_2+4x_3=-4, \\ 2x_1+x_2+5x_3=-1. \end{cases}$	$\begin{cases} -x_1+x_2+x_3+2x_4-x_5=4, \\ x_1-3x_2+4x_3-3x_4+x_5=20, \\ 2x_1+3x_2-2x_3+3x_4+5x_5=6, \\ 3x_1-2x_2-x_3+4x_4+5x_5=-3. \end{cases}$
Варіант 20	
$\begin{cases} -3x_1+2x_2-3x_3=2, \\ -2x_1+x_2-3x_3=5, \\ 5x_1-x_2+3x_3=-2. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+2x_3+6x_4+2x_5=7, \\ -x_1-3x_2+2x_4+x_5=10, \\ 4x_1+x_2+x_3-x_4-x_5=-2, \\ 3x_1-x_2+2x_3+x_4+x_5=1. \end{cases}$

Параграф 2. Матриці та дії над матрицями

Означення 2.1. Матрицею A над полем P розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця елементів цього поля, яка містить m рядків та n стовпців. Числа m та n визначають розмір матриці. Великими буквами латинського алфавіту будемо позначати матриці: A, B, C, D ...

Означення 2.2. Елементи поля, що входять в матрицю називаються елементами матриці або матричними елементами.

Матриці також позначають наступним чином: $A_{m\times n}$, $\|a_{ij}\|$, (a_{ij}).

Будемо позначати елементи матриці маленькими літерами латинського алфавіту з двома індексами. Перший $i = 1,2,\ldots,m$ – номер рядка, другий $j = 1,2,\ldots,n$ – номер стовпця в якому розміщений елемент. Таким чином:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{i,j} \in P, i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,n.$$

Дві матриці A і B однакового розміру називаються рівними, якщо вони співпадають поелементно, тобто $a_{ij} = b_{ij}$, для всіх $i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,n$.

Означення 2.3. Матриця $\mathrm{A} = (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n})$, яка складається із одного рядка, називається матрицею-рядком, а матриця яка складається із одного стовпця називається матрицею-стовпцем:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}.$$

Матриця називається квадратною n –ого порядку, якщо кількість рядків та стовпців співпадає:

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Наприклад, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ квадратна матриця третього порядку.

Послідовність $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ діагональних матричних елементів утворюють головну діагональ квадратної матриці, які розміщені з лівого верхнього кута в правий нижній кут. Послідовність $a_{n1}, a_{(n-1)2}, \dots, a_{1n}$ матричних елементів утворює побічну діагональ квадратної матриці.

Означення 2.4. Квадратна матриця, усі елементи якої, крім, можливо, елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називають діагональною матрицею.

Наприклад, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ – діагональна матриця другого порядку, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ – діагональна матриця третього порядку.

Означення 2.5. Квадратна матриця, усі елементи якої нижче/вище від головної діагоналі дорівнюють нулю, називають верхньою/нижньою трикутною матрицею:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ – верхня трикутна матриця;}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – нижня трикутна матриця.

Означення 2.6. Якщо у діагональній матриці $n -$ го порядку I всі діагональні елементи рівні одиниці, то така матриця називається одиничною матрицею $n -$ го порядку.

Наприклад, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ одинична матриця третього порядку.

Означення 2.7. Матриця будь-якого розміру називається нулевою, або нуль-матрицею, якщо всі її елементи рівні нулю:

$$O_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

На відміну від чисел, де число 0 єдине, нульових матриць нескінченно багато, так як кожному розміру матриці відповідає нульова матриця цього розміру.

<u>Множення матриці на число</u>

Означення 2.8. Добутком матриці А $= (a_{ij})$ на число λ називають матрицю

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \vdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \vdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \vdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix},$$

тобто, елементи отримуються із елементів матриці А множенням на число λ.

► **Приклад 2.1.** Якщо

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2\cdot 0 & 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot(-2) \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 4 & 2\cdot(-4) & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 0 & 2\cdot 0 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot(-2) & 2\cdot(-3) & 2\cdot 8 & 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & -4 \\ 6 & 8 & -8 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \\ -4 & -6 & 16 & 6 \end{pmatrix} ◄$$

Загальний множник всіх елементів матриці можна винести за знак матриці.

► **Приклад 2.2.**

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 3 & -6 & 24 \\ 0 & -9 & 18 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 8 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}. ◄$$

Матрицю $(-1)A$ називають протилежною до матриці A і позначають $-A$.

Додавання матриць

Означення 2.9. Сумою двох матриць $A = (a_{ij})$ та $B = (b_{ij})$ однакового розміру $m \times n$ називається матриця $C = (c_{ij})$ того ж розміру, елементи якої дорівнюють $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ відповідних елементів матриць A та B.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \vdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \vdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \vdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \vdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \vdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \vdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Різницю двох матриць визначають аналогічно:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \vdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \vdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \vdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \vdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \vdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \vdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

► **Приклад 2.3.**

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+0 & 4+(-2) & 5+1 \\ -1+4 & 3+1 & 2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}. ◄$$

Згідно правилу додавання матриць $A + O = A$, де A – довільна матриця, а O – нульова матриця того ж розміру, що й A.

► **Приклад 2.4.**

Сума двох матриць *C*+*B*, де $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ не визначена, оскільки матриці *C* та *B* мають різні розміри. ◄

► **Приклад 2.5.** Знайти, $A + B$ та $A - B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & -3+4 & 5+(-5) \\ 2+(-1) & 7+4 & 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 11 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 10 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}. ◄$$

► **Приклад 2.6.** Знайти $C = 2A - 3B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3\\-1&6&-3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-2&3\\1&4&-1\end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$\mathrm{C}=2\begin{pmatrix}1&0&3\\-1&6&-3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&-2&3\\1&4&-1\end{pmatrix}=$$

$$=2\begin{pmatrix}1&0&3\\-1&6&-3\end{pmatrix}+(-3)\begin{pmatrix}1&-2&3\\1&4&-1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&6\\-2&12&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&6&-9\\-3&-12&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1&6&-3\\-5&0&-3\end{pmatrix}. ◄$$

► **Приклад 2.7.** Розв'язати систему матричних рівнянь

$$\begin{cases}2X-3Y=\begin{pmatrix}-4&-2\\7&-7\end{pmatrix},\\ X+2Y=\begin{pmatrix}-1&-3\\4&-5\end{pmatrix}.\end{cases}$$

Розв'язання

Виразимо матрицю X з другого рівняння системи:

$$\mathrm{X}=\begin{pmatrix}-1&-3\\4&-5\end{pmatrix}-2Y.$$

Підставимо цей вираз в перше рівняння. В результаті отримаємо:

$$2\left(\begin{pmatrix}-1&-3\\4&-5\end{pmatrix}-2Y\right)-3Y=\begin{pmatrix}-4&-2\\7&-7\end{pmatrix};$$

$$2\begin{pmatrix}-1&-3\\4&-5\end{pmatrix}-4Y-3Y=\begin{pmatrix}-4&-2\\7&-7\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}-2&-6\\8&-10\end{pmatrix}-7Y=\begin{pmatrix}-4&-2\\7&-7\end{pmatrix};$$

$$-7Y=\begin{pmatrix}-4&-2\\7&-7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&-6\\8&-10\end{pmatrix};$$

$$-7Y=\begin{pmatrix}-2&4\\-1&3\end{pmatrix};\ 7Y=\begin{pmatrix}2&-4\\1&-3\end{pmatrix};\ Y=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2&-4\\1&-3\end{pmatrix};$$

$$X=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-11&-13\\24&-29\end{pmatrix}. ◄$$

Властивості лінійних операцій над матрицями

Нехай A, B, C – матриці однакових розмірів, $\alpha, \beta \epsilon P$. Тоді справедливі такі тотожності:

1. $A + B = B + A$ – комутативність додавання матриць.
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ – асоціативність додавання матриць.
3. $A + 0 = A$ – властивість нульової матриці.
4. $A + (-A) = O$ – властивість протилежної матриці.
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ – дистрибутивність множення матриці на число відносно додавання матриць.
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ – дистрибутивність множення матриці на число відносно додавання чисел.
7. $(\alpha\, \beta)A = \alpha(\, \beta A)$ – асоціативність множення матриці на число.
8. $1 \cdot A = A$.

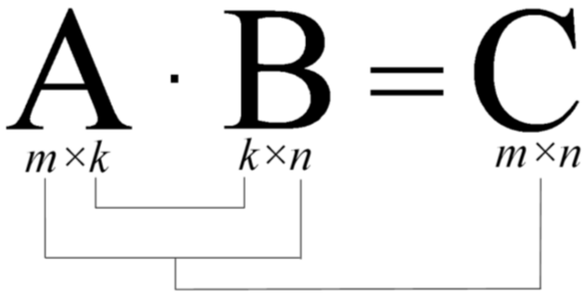
Множення матриць

Множення матриці A на матрицю B можливе лише коли число стовпців першої матриці дорівнюють числу рядків другої.

Означення 2.10. Добутком матриці $A_{m\times k}\, B_{k\times n}$ називається матриця $C_{m\times n}$, кожен елемент якої c_{ij} дорівнює сумі попарних добутків елементів $i -$ того рядка матриці A, на відповідні елементи $j -$ того стовпця матриці B, тобто

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj}.$$

Звернемо увагу на розмірність матриці C: число рядків матриці збігається з числом рядків першої, а число стовпців – з числом стовпців другої із перемножуваних матриць.

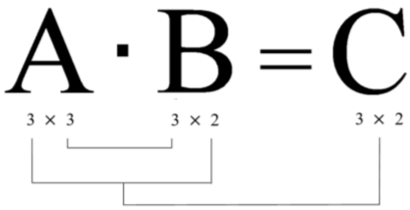


► **Приклад 2.8.** Обчислити добуток матриць AB, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

Нехай добутком буде матриця C. Визначимо її розмірність:



$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \\ -3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 3 & -3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 4 & -1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \blacktriangleleft$$

► **Приклад 2.9.** Дано матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 9 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Знайти *AC* і *AB*.

Розв'язання

Визначимо розмірність матриці виразу: $A_{2\times3}C_{3\times1}$. Добутком буде матриця розмірністю 2×1.

$$AC=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot2+(-2)\cdot3\\3\cdot1+9\cdot2+(-5)\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix}.$$

Визначимо розмірність матриці виразу: $A_{2\times3}B_{3\times3}$. Добутком буде матриця розмірністю 2×3.

$$AB=\begin{pmatrix}1\cdot(-1)+0\cdot5+(-2)\cdot0 & 1\cdot2+0\cdot6+(-2)\cdot3 & 1\cdot4+0\cdot7+(-2)\cdot(-1)\\3\cdot(-1)+9\cdot5+(-5)\cdot0 & 3\cdot2+9\cdot6+(-5)\cdot3 & 3\cdot4+9\cdot7+(-5)\cdot(-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -4 & 6\\42 & 45 & 80\end{pmatrix}.$$ ◄

► **Приклад 2.10.** Обчислити добуток матриць

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}\text{ і } B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$A_{3\times1}B_{1\times4}=\begin{pmatrix}3 & -3 & 6 & 6\\-2 & 2 & -4 & -4\\5 & -5 & 10 & 10\end{pmatrix}$$ ◄

► **Приклад 2.11.** Обчислити добуток матриці AB і AC, якшо

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4 & 5\end{pmatrix}\ ,\quad B=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Визначимо розмір матриці виразу: $A_{1\times4}B_{4\times1}=C_{3\times1}$. Обчислимо елементи матриці виразу:

$A_{1\times4}B_{4\times1}=(2-2+0-5)=(-5)$.

$A_{1\times4}C_{3\times1}$ – добуток матриць не визначений.◄

Мають місце наступні властивості:

1. Ліва дистрибутивність множення матриць відносно суми додавання: якщо суми $A+C$ і добуток AB існують, то $A(B+C)=AB+AC$.

2. Права дистрибутивність множення матриць відносно суми додавання: якщо суми $A+C$ і добуток AB існують, то $(A+B)C = AC + BC$.

3. Асоціативність множення матриць відносно числового множника: якщо добуток AB існує, то $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

4. Асоціативність множення матриць: якщо добутки AB і BC існують, то $A(BC) = (AB)C$.

Зауваження. Якщо добуток матриць AB існує, то добуток BA може не існувати.

►**Приклад 2.12.** Обчислити добуток AB та BA, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Обчислимо добуток AB. Визначимо розмірність матриці $A_{3\times2}B_{2\times2} = C_{3\times2}$. Обчислимо елементи матриці-добутку:

$$C = \begin{pmatrix} 10-1 & 0+1 \\ 0+2 & 0-2 \\ 2+0 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Добутку BA матриць B та A не існує. ◄

Зауваження**.** Якщо навіть добутки AB і BA існують, то результатом можуть виявитися матриці різних розмірностей.

Це легко перевірити на наступному прикладі.

► **Приклад 2.13.** Обчислити добутки матриць AB і BA, якщо

$$\mathrm{A} = (a_1\ a_2 \ldots a_n), \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Розв'язання

$$A_{1\times n}B_{n\times1} = (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) = \left(\sum_{s=1}^{n} a_sb_s\right).$$

$$B_{n\times 1}A_{1\times n} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}(a_1 \ \ a_2 \dots a_n) = \begin{pmatrix} b_1a_1 & b_2a_2 & \dots & b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \dots & b_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_na_1 & b_na_2 & \dots & b_na_n \end{pmatrix}. ◄$$

Зауваження. Легко зрозуміти, що обидва добутки AB і BA існують і є матрицями однакової розмірності тільки в випадку квадратних матриць A і B одного й того самого порядку. Однак, навіть в цьому випадку комутативний (переставний) закон множення може не мати місця, так як AB може не дорівнювати BA.

► **Приклад 2.14.** Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ \text{ і } \ B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

знайти AB і BA.

Розв'язання

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $AB \neq BA$. З прикладу видно, що з рівності $AB = 0$ ще не слідує, що $A = 0$ або $B = 0$! ◄

Зауваження. Якщо $AB = O$ при будь-якому B, то $A = O$. Якщо $AB = O$ при будь-якому A, то $B = O$.

Не важко впевнитись, що при множенні одинична матриця грає ту саму роль, що і число 1 при множенні чисел: одинична матриця $n -$го порядку переставна з будь-якою квадратною матрицею A того ж порядку:

$$AI = IA = A.$$

► **Приклад 2.15.** Обрахувати добутки $A(\alpha)A(\beta)$ і $A(\beta)A(\alpha)$ якщо

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Спочатку знайдемо добуток $A(\alpha)A(\beta)$:

$$\mathrm{A}(\alpha)\mathrm{A}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \blacktriangleleft$$

Для того, щоб знайти $A(\beta)A(\alpha)$, достатньо в добутку $A(\alpha)A(\beta)$ виконати заміну $\alpha \leftrightarrow \beta$. Тому $A(\beta)A(\alpha) = A(\alpha)A(\beta)$.

Означення 2.11. Переставними матрицями називаються матриці якщо виконується умова $AB = BA$.

► **Приклад 2.16.** Довести, що матриця

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

переставна з матрицею

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 3\varepsilon - 3\alpha - \gamma & \varepsilon - 3\beta - \delta & \varepsilon \end{pmatrix},$$

в якій $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ – довільні дійсні числа.

Розв'язання

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 3\varepsilon - 3\alpha - \gamma & \varepsilon - 3\beta - \delta & \varepsilon \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 6\varepsilon - 3\alpha - \gamma & 2\varepsilon - 3\beta - \delta & 2\varepsilon \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 3\varepsilon - 3\alpha - \gamma & \varepsilon - 3\beta - \delta & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 6\varepsilon - 3\alpha - \gamma & 2\varepsilon - 3\beta - \delta & 2\varepsilon \end{pmatrix} = AB. ◄$$

► **Приклад 2.17.** Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 26 \\ 21 & 24 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Очевидно, що матриця X повинна бути квадратною матрицею другого порядку. Нехай $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 & 3x_2 + x_4 \\ -x_1 + 2x_3 & -x_2 + 2x_4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 & 3x_2 + x_4 \\ -x_1 + 2x_3 & -x_2 + 2x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 & 15x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \\ -4x_1 - x_2 + 8x_3 + 2x_4 & -5x_1 - x_2 + 10x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}.$$

Отже, отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 12x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 21, \\ -4x_1 - x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 21, \\ 15x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 26, \\ -5x_1 - x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 24. \end{cases}$$

Складемо матрицю цієї системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 12 & 3 & 4 & 1 & 21 \\ -4 & -1 & 8 & 2 & 21 \\ 15 & 3 & 5 & 1 & 26 \\ -5 & -1 & 10 & 2 & 24 \end{array}\right).$$

Розв'язавши цю систему, наприклад, методом Гауса, отримаємо:

$x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = 2; \ x_4 = 4.$ ◄

<u>Зауваження</u>. Є ще один спосіб розв'язування подібних систем лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці. Проте із цим навчальним матеріалом ми ознайомимося у параграфі 4.

Піднесення матриці до степені

Цілим додатнім степенем $a^m\,(m>1)$ числа a називається добуток m чисел, рівних a, отже $a^m = \underbrace{a\cdot a \dots a}_{m \text{ раз}}$, при чому $a^0 = 1$ якщо $a \neq 0$.

Аналогічну операцію можна визначити і в випадку матриць, розуміючи під цілим додатнім степенем A^m матриці A добуток $A^m = \underbrace{A\,A \dots A}_{m \text{ разів}}$. Цей добуток має сенс тільки в випадку, коли число стовбців матриці рівне числу рядів матриці A. Тому операцію піднесення матриці до цілого додатного степеня вдається визначити тільки для квадратних матриць.

Під нульовим степенем квадратної матриці A розуміється одинична матриця того ж порядку що і A, отже $A^0 = I$.

Мають місце наступні співвідношення :

1. $A^m A^k = A^{m+k}$.

Справді:

$$\mathrm{A}^m\mathrm{A}^k = \begin{cases} \underbrace{A\,A \dots A}_{m\text{раз}}\underbrace{A\,A \dots A}_{k\text{раз}} = \underbrace{A\,A \dots A}_{m+k \text{ раз}} = A^{m+k}, & \text{при } m\neq 0, k\neq 0; \\ I\,\underbrace{A\,A \dots A}_{k\text{раз}} = \underbrace{A\,A \dots A}_{k\text{раз}} = A^k = A^{0+k}, & \text{при } m = 0, k\neq 0; \\ \underbrace{A\,A \dots A}_{m\text{раз}}E = \underbrace{A\,A \dots A}_{m\text{раз}} = A^m = A^{m+0}, & \text{при } m\neq 0, k = 0 \\ II = A^0 = A^{0+0}, & \text{при } m = 0, k = 0. \end{cases};$$

отже, $\mathrm{A}^m\mathrm{A}^k = A^{m+k}$.

2. $(A^m)^k = A^{mk}$

► **Приклад 2.18.** Обчислити $\begin{pmatrix} 7 & -18 & 11 \\ 21 & 15 & 21 \\ 9 & -8 & 13 \end{pmatrix}^2$.

Розв'язання

При піднесенні даної матриці до квадрату, достатньо виконати множення:

$$\begin{pmatrix} 7 & -18 & 11 \\ 21 & 15 & 21 \\ 9 & -8 & 13 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & -18 & 11 \\ 21 & 15 & 21 \\ 9 & -8 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -18 & 11 \\ 21 & 15 & 21 \\ 9 & -8 & 13 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7\cdot 7 + (-18)\cdot 21 + 11\cdot 9 & 7\cdot(-18) + (-18)\cdot 15 + 11\cdot(-8) & 7\cdot 11 + (-18)\cdot 21 + 11\cdot 13 \\ 21\cdot 7 + 15\cdot 21 + 21\cdot 9 & 21\cdot(-18) + 15\cdot 15 + 21\cdot(-8) & 21\cdot 11 + 15\cdot 21 + 21\cdot 13 \\ 9\cdot 7 + (-8)\cdot 21 + 13\cdot 9 & 9\cdot(-18) + (-8)\cdot 15 + 13\cdot(-8) & 9\cdot 11 + (-8)\cdot 21 + 13\cdot 13 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -230 & -484 & -158 \\ 651 & -321 & 819 \\ 12 & -386 & 100 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

► **Приклад 2.19.** Знайти A^n, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Маємо $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{O}$;

$A^n = A^2 A^{n-2} = OA^{n-2} = O$ при $n \geq 3$.

Цей приклад показує , що з рівності $\mathrm{A}^m = O$ ще не означає, що $A = O$. ◄

Нехай задані квадратна матриця A і многочлен від змінної x $f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \cdots + a_{m-2}x^2 + a_{m-1}x + a_m$, де $a_0, a_1, \dots, a_m$ – числові коефіцієнти. Тоді вираз

$f(x) = a_0A^m + a_1A^{m-1} + a_2A^{m-2} + \cdots + a_{m-2}A^2 + a_{m-1}A + a_mE$, називається многочленом від матриці A (тут $E = A^0$) – одинична матриця того ж порядку, що і матриця A.

► **Приклад 2.20.** Знайти значення многочлена

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$ від матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 10 & 12 \\ -2 & -4 & -8 \\ -4 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 4 =$$

$$= A^3 + 2A^2 - 3A + 4E =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 10 & 12 \\ -2 & -4 & -8 \\ -4 & 6 & 6 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 10 & 12 \\ -2 & -4 & -8 \\ -4 & 6 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 8 & 12 \\ -4 & 0 & -4 \\ -2 & 6 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 15 & 18 \\ -3 & -3 & -12 \\ -6 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

► **Приклад 2.21.** Показати, що матриця $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ є коренем многочлена $f(x) = x^2 - 3x + 5$.

Розв'язання

Підставимо в даний многочлен замість x матрицю A, отримаємо:

$$f(A) = A^2 - Ax + 5E = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -9 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ ◄

► **Приклад 2.22.** Знайти дійсні числа p і q, при яких матриця

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

задовольняє рівності $A^3 = pA^2 + qA$.

Розв'язання

Маємо:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Підставляємо і в рівність $A^3 = pA^2 + qA$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p & 0 & 2p \\ 0 & p & 0 \\ 2p & 0 & 2p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q & 0 & q \\ 0 & q & 0 \\ q & 0 & q \end{pmatrix}.$$

Отримуємо наступну система рівнянь для визначення $p\ i\ q$:

$$\begin{cases} 2p + q = 4 \\ p + q = 1 \end{cases};$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо : $p = 3, q = -2$◄

► **Приклад 2.23.** Нехай

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де $\alpha -$ деяке дійсне число.

1. Знайти A^n.

2. Показати, що матриця A задовольняє рівність

$2x^4 - 3x^3 + x^2 - x + x^0 = O$, в якій $O -$нульова матриця того ж порядку що і A.

3. Довести, що матриця A переставна з матрицею $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, в якій $\alpha, \beta -$довільні дійсні числа.

4. Знайти $\sum\limits_{m=1}^{n} A^m$.

Розв'язання

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

$$A^4 = AA^3 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приведенні рівності дозволяють нам припустити, що для будь-якого $n = 1,2,\ldots$ $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Для того щоб впевнитись в цьому, доведемо справедливість результату для довільного значення n, використовуючи метод математичної індукції:

$$A^{n+1} = AA^n = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.1)$$

Отриманий результат означає, що якщо формула (2.1) справедлива для $n = 4$, то вона справедлива і при $n = 5$; якщо (2.1) справедлива для $n = 5$, то вона справедлива і при $n = 6$, і так далі.

2. Підставивши знайдені вирази для $A^n (n = 1,2,3,4)$ в рівності $2x^4 - 3x^3 + x^2 - x + x^0 = O$, отримаємо:

$$2\begin{pmatrix} 1 & 4\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 3\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-3+1-1+1 & 8\alpha - 9\alpha + 2\alpha - \alpha + 0 \\ 0 & 2-3+1-1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

3. Доведемо, що $AB = BA$. Маємо:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta + \alpha a \\ 0 & \alpha \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha a + \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = AB.$$

4. Знайдемо $\sum_{m=1}^{n} A^m$:

$$\sum_{m=1}^{n} A^m = \sum_{m=1}^{n} \begin{pmatrix} 1 & m\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^{n} 1 & \alpha \sum_{m=1}^{n} m \\ 0 & \sum_{m=1}^{n} 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \alpha s_n \\ 0 & n \end{pmatrix}.$$

Тут

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} m = \underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n}_{n \text{ доданків}} = \frac{n(n+1)}{2},$$

де вираз $\frac{n(n+1)}{2}$ – сума перших n доданків арифметичної прогресії. Маємо:

$$\sum_{m=1}^{n} A^m = n\begin{pmatrix} 1 & (n+1)a/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. ◄$$

Транспонування матриці

Транспонованою до матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ називається матриця $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Таким чином, рядками матриці A^T є стовпці матриці A, а стовпцями – рядки.

► **Приклад 2.24.** Транспонованою матрицею до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & 8 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ є матриця $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 1 & 8 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. ◄

► **Приклад 2.25.** Транспонованою матрицею до матриці $A = (1 \;\; 2 \;\; -5 \;\; 4)$ є матриця $A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$. ◄

Мають місце наступні властивості відносно операції транспонування (якщо відповідні операції для матриць A і B визначені, $\lambda \in \mathbb{R}$):

1. $(A^T)^T = A$.
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

3. $(A+B)^T = A^T + B^T$.
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Квадратична матриця A називається симетричною, якщо $A^T = A$, тобто $a_{ji} = a_{ij}$ і кососиметричною, якщо $A^T = -A$.

Зокрема, симетричною є будь-яка діагональна матриця.

Наприклад, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 5 & -2 & 7 \\ -4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ симетрична матриця 3-го порядку.

Наприклад, матриця $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 7 \\ -2 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 8 \\ 7 & -5 & -8 & 0 \end{pmatrix}$ є кососиметричною матрицею 4-го порядку.

Відзначимо деякі властивості операції над симетричними і кососиметричними матрицями:

1. Якщо A і B – симетричні (кососиметричні) матриці, то і $A+B$ симетрична (кососиметрична) матриця.
2. Якщо A – симетрична (кососиметрична) матриця, то αA також є симетричною (кососиметричною) матрицею.
3. Вираз AB двох симетричних або двох кососиметричних матриць A і B є матриця симетрична при $AB = BA$ і кососиметрична при $AB = -BA$.
4. Якщо A – симетрична матриця, то і A^m $(m = 1,2,3,\dots)$ – симетрична матриця. Якщо A – кососиметрична матриця, то A^m $(m = 1,2,3,\dots)$ є симетричною матрицею при парному m і кососиметричною при непарному.
5. Довільну квадратну матрицю A можна представити у вигляді суми

$$A = A^{(s)} + A^{(a)}$$

матриць

$$A^{(s)} = \frac{1}{2}(A + A^T) \quad \text{і} \quad A^{(a)} = \frac{1}{2}(A - A^T),$$

де $A^{(s)}$ є симетричною, а $A^{(a)}$ - кососиметричною.

Блочні матриці

Припустимо, що деяка матриця $A = (a_{ij})$ за допомогою горизонтальних та вертикальних прямих розбита на окремі прямокутні клітинки, кожна із яких утворює матрицю менших розмірностей і називається блоком початкової матриці. В цьому випадку можливість розглядати початкову матрицю A як нову, так звану блочну матрицю, елементами якої є указані блоки. Блоки позначають великими латинськими літерами для того, щоб підкреслити, що вони є матрицями.

Наприклад, матрицю $\mathrm{A} = \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{array}\right)$

Можна розглядати як блочну матрицю $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{pmatrix}$, елементами якої є наступні блоки: $A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \end{pmatrix}$, $A_{21} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{pmatrix}$, $A_{22} = \begin{pmatrix} a_{34} & a_{35} \\ a_{44} & a_{45} \\ a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$.

Цікавим є той факт, що основні операції над блочними матрицями виконуються по тим же правилам, по яким вони виконуються над звичайними числовими матрицями, тільки в ролі елементів виступають блоки.

► **Приклад 2.26**. (IMC, 2004). Нехай A – матриця розмірності 4×2 з дійсними елементами та B – матриця розмірності 2×4 з дійсними елементами, такі, що $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Знайти BA.

Розв'язання

Нехай $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ та $B = (B_1 \;\; B_2)$, де $A_1,\ A_2, B_1,\ B_2$ – матриці розмірності 2×2.

Тоді $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} (B_1 \;\; B_2) = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 \\ A_2B_1 & A_2B_2 \end{pmatrix}$,

звідки $A_1B_1 = A_2B_2 = I_2$, а також $A_1B_2 = A_2B_1 = -I_2$.

Тоді $B_1 = {A_1}^{-1},\ B_2 = {A_2}^{-1}$ та $A_2 = {B_2}^{-1} = -A_1$.

Отже, $BA = (B_1 \;\; B_2) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = B_1A_1 + B_2A_2 = 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. ◄

Завдання для самостійного розв’язання

Завдання 1. Виконати операції $(A-B)\cdot 2$ над матрицями A, B та числом a:

Варіант 1	Варіант 2
$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & -2 & 4\\ 0 & -3 & -6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 6 & 5 & -5\end{pmatrix}$, $a=3$.	$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 3\\ 2 & -2 & 4\\ 0 & 7 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 4\\ 3 & 1 & 2\\ 6 & 2 & -5\end{pmatrix}$, $a=4$.
Варіант 3	Варіант 4
$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & -2 & 7\\ 0 & -3 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ 2 & 6 & 4\\ -5 & 4 & 7\end{pmatrix}$, $a=5$.	$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 6\\ 2 & 4 & 7\\ 0 & -3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ 0 & 2 & 4\\ 5 & 7 & 6\end{pmatrix}$, $a=2$.
Варіант 5	Варіант 6
$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 3\\ 2 & 7 & 4\\ 0 & -3 & -6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 2 & 6 & 0\end{pmatrix}$, $a=4$.	$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 3\\ 8 & -2 & 4\\ 0 & 9 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 4\\ 3 & 1 & 7\\ 5 & 6 & -5\end{pmatrix}$, $a=3$.
Варіант 7	Варіант 8
$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 7\\ 4 & -3 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ 2 & 0 & 4\\ 0 & 4 & -7\end{pmatrix}$, $a=5$.	$A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 6\\ 2 & 4 & 7\\ 0 & -8 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ 0 & 3 & 4\\ -9 & -7 & 6\end{pmatrix}$, $a=2$.
Варіант 9	Варіант 10
$A=\begin{pmatrix}2 & -5 & -3\\ 6 & 7 & 0\\ 8 & -3 & -6\end{pmatrix}$,	$A=\begin{pmatrix}-1 & 7 & 3\\ 8 & -2 & 2\\ 0 & 9 & -2\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}3&-1&-4\\6&7&42\\2&6&0\end{pmatrix}, a=4.$	$B=\begin{pmatrix}5&-1&4\\-3&1&7\\5&0&-5\end{pmatrix}, a=3.$
Варіант 11	Варіант 12
$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&0&7\\4&-3&6\end{pmatrix}, B$ $=\begin{pmatrix}3&-1&4\\2&0&4\\0&4&-7\end{pmatrix}, a=5.$	$A=\begin{pmatrix}-1&0&3\\2&-7&4\\0&-3&6\end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix}3&-1&4\\2&-3&2\\9&5&4\end{pmatrix}, a=3;$
Варіант 13	Варіант 14
$A=\begin{pmatrix}1&5&3\\2&-2&4\\0&7&-2\end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix}5&-1&4\\3&1&2\\6&2&-5\end{pmatrix}, a=4.$	$A=\begin{pmatrix}0&-7&6\\2&4&8\\9&-3&0\end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix}3&-1&4\\0&2&4\\5&4&6\end{pmatrix}, a=2.$
Варіант 15	Варіант 16
$A=\begin{pmatrix}3&-5&-3\\6&7&5\\8&7&-6\end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix}3&-3&-4\\-6&7&42\\2&2&0\end{pmatrix}, a=6$	$A=\begin{pmatrix}-1&7&3\\0&4&2\\0&5&-2\end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix}5&-1&-2\\-3&1&7\\7&8&-5\end{pmatrix}, a=3.$
Варіант 17	Варіант 18
$A=\begin{pmatrix}-3&4&3\\4&5&7\\4&-3&6\end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix}3&-1&4\\2&-7&4\\6&7&-7\end{pmatrix}, a=5.$	$A=\begin{pmatrix}1&-7&6\\2&4&2\\-3&-3&-1\end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix}4&-1&4\\5&2&4\\5&4&6\end{pmatrix}, a=2.$
Варіант 19	Варіант 20
$A=\begin{pmatrix}3&7&3\\2&-2&4\\-4&7&-2\end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix}5&-1&4\\3&-5&2\\6&2&-5\end{pmatrix}, a=4.$	$A=\begin{pmatrix}-1&7&3\\1&4&2\\2&5&-2\end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix}-7&-1&-2\\-3&1&9\\7&4&-5\end{pmatrix}, a=3.$

Завдання 2. Виконати множення матриці A на B :

Варіант 1	Варіант 2
$A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 1\\ 2 & -2 & 5\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.	$A=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 4\\ 1 & 2 & -2 & 0\end{pmatrix}$.
Варіант 3	Варіант 4
$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & -7 & 5\\ 2 & 4 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-9 & 3 & 2\\ 2 & 3 & -9\\ 3 & 6 & 7\end{pmatrix}$.	$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 6\\ 2 & 4 & 7\\ 0 & -3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\\ 5 & 7\end{pmatrix}$.
Варіант 5	Варіант 6
$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 3 & 1\\ 2 & 7 & 4 & -2\\ 0 & -3 & -6 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.	$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 5\\ -3 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\\ 2 & 7\end{pmatrix}$.
Варіант 7	Варіант 8
$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -3 & 5\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\ 2 & 3 & -9\\ 3 & 6 & 7\end{pmatrix}$.	$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 2 & 4 & 7\\ 1 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -4 & 3\\ 5 & 8\end{pmatrix}$.
Варіант 9	Варіант 10
$A=\begin{pmatrix}-1 & -7 & 3 & 1\\ 1 & 7 & 4 & -2\\ 0 & 4 & 8 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.	$A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 6\\ 2 & 4 & -7\\ 5 & -3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & -2\\ 5 & 7\end{pmatrix}$.

Варіант 11	Варіант 12
$A=\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.	$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.
Варіант 13	Варіант 14
$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -2 & 4 & 7 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$.	$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 7 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -2 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.
Варіант 15	Варіант 16
$A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \\ -3 & 8 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$.	$A=\begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ -3 & -\;4 & 2 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 8 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 7 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$.
Варіант 17	Варіант 18
$A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.	$A=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.
Варіант 19	Варіант 20
$A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.	$A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & -2 \\ 8 & -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -2 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Завдання 3. Виконати дії: $(A+B)^T \times (A-B)^T$.

Варіант 1	Варіант 2
$A=\begin{pmatrix}1 & -9 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 2\\ 0 & 7 & 3\end{pmatrix}.$	$A=\begin{pmatrix}3 & 9 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 7 & 4 & -2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}8 & 1 & 0\\ 2 & 9 & 2\\ 4 & -3 & 3\end{pmatrix}.$
Варіант 3	Варіант 4
$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ 5 & -4 & 5\end{pmatrix}, =\begin{pmatrix}8 & 1 & 0\\ 2 & -6 & -2\\ 1 & 7 & -3\end{pmatrix}.$	$A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 2 & 7 & 2\\ -1 & 2 & 6\end{pmatrix}.$
Варіант 5	Варіант 6
$A=\begin{pmatrix}1 & -9 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 2\\ 0 & 7 & 3\end{pmatrix}.$	$A=\begin{pmatrix}3 & 9 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 7 & 4 & -2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}8 & 1 & 0\\ 2 & 9 & 2\\ 4 & -3 & 3\end{pmatrix}.$
Варіант 7	Варіант 8
$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ 5 & -4 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}8 & 1 & 0\\ 2 & -6 & -2\\ 1 & 7 & -3\end{pmatrix}.$	$A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 2 & 7 & 2\\ -1 & 2 & 6\end{pmatrix}.$
Варіант 9	Варіант 10
$A=\begin{pmatrix}1 & -9 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 2\\ 0 & 7 & 3\end{pmatrix}.$	$A=\begin{pmatrix}3 & 9 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 7 & 4 & -2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}8 & 1 & 0\\ 2 & 9 & 2\\ 4 & -3 & 3\end{pmatrix}.$
Варіант 11	Варіант 12
$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ 5 & -4 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}8 & 1 & 0\\ 2 & -6 & -2\\ 1 & 7 & -3\end{pmatrix}.$	$A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 2 & 7 & 2\\ -1 & 2 & 6\end{pmatrix}.$

Варіант 13	Варіант 14
$A = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$	$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 4 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$
Варіант 15	Варіант 16
$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & -2 \\ 1 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$	$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$
Варіант 17	Варіант 18
$A = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$	$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 4 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$
Варіант 19	Варіант 20
$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & -2 \\ 1 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$	$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$

Завдання 4. Знайти значення многочлена $(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ від матриці A:

Варіант 1	$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	Варіант 2	$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
Варіант 3	$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 4 & -2 \end{pmatrix}$	Варіант 4	$A = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$
Варіант 5	$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	Варіант 6	$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix}$
Варіант 7	$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 4 & -2 \end{pmatrix}$	Варіант 8	$A = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

Варіант 9	$A = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$	Варіант 10	$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 4 & -2 \end{pmatrix}$
Варіант 11	$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix}$	Варіант 12	$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
Варіант 13	$A = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$	Варіант 14	$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 4 & -2 \end{pmatrix}$
Варіант15	$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$	Варіант 16	$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & -2 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$
Варіант 17	$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \\ 1 & 7 & -3 \end{pmatrix}$	Варіант 18	$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}$
Варіант 19	$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & -2 \\ 1 & 7 & -3 \end{pmatrix}$	Варіант 20	$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Завдання 5. (Завдання однакове для всіх варіантів).

Обчислити H^n квадратної матриці:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Параграф 3. Визначники

Існує декілька підходів до введення поняття визначника. Найпоширенішими із них є індуктивний, тобто визначник матриці n −ого порядку вводиться через визначник 1-ого порядку, комбінаторний (визначник матриці виражається через її елементи), аксіоматичний (визначник як індикатор лінійної залежності системи векторів). Скористаємося комбінаторним підходом.

Попередньо введемо деякі допоміжні поняття.

Означення 3.1. Перестановкою з n елементів називається будь-яка упорядкована множина цих елементів.

Перестановки відрізняються між собою лише порядком елементів. Число усіх можливих перестановок з n елементів дорівнює $P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$.

Означення 3.2. Якщо елементами перестановки розміщені в порядку зростання, то таку перестановку називають нормально впорядкованою.

Означення 3.3. Інверсією називають таке розташування двох чисел у перестановці, коли більше число стоїть попереду меншого.

Означення 3.4. Перестановка в якій кількість інверсій є парним числом називається парною, якщо непарним числом – непарною.

Число інверсій у перестановці позначають $N(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

► **Приклад 3.1.** Визначити число інверсії в перестановці

$$5,2,1,4,3.$$

Розв'язання.

Маємо послідовність:

5,2,1,4,3 - 2 числа перед 1,

5,2,4,3 - 1 число перед 2,

5,4,3 - 2 числа перед 3,

5,4 - 1 число перед 4,

5 - 0 чисел перед 5.

Таким чином, $N = (5, 2, 1, 4, 3) = 2 + 1 + 2 + 1 + 0 = 6$. ◄

Означення 3.5. Визначником $n-$ого порядку, який відповідає квадратній матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, називається алгебраїчна сума $n!$ членів виду $a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$. Ці члени представляють собою всі можливі добутки N елементів матриці A, взятих по одному із кожного рядка та кожного стовпця матриці. Добуток береться зі знаком$(-1)^N$, де N – число інверсій у перестановці $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, яка складена із других індексів елементів матриці, які входять в добуток.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^N a_{1_{\alpha 1}} a_{2_{\alpha 2}} \dots a_{n_{\alpha n}}.$$

Визначник матриці позначають Δ або $|A|$ або $detA$.

Позначення $detA$ походить від англійського слова *determinant* – визначник.

Означення 3.6. Визначником |A| матриці першого порядку $\mathrm{A} = (a_{11})$, або визначником першого порядку, називається число Δ_1, рівне матричному елементу a_{11}:

$$\Delta_1 = |A| = a_{11}.$$

Означення 3.7. Визначником |A| матриці другого порядку $\mathrm{A} = (a_{ij})$, або визначником другого порядку, називається число Δ_2, що знаходиться за формулою:

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Вирази $a_{11}a_{22}$ і $a_{12}a_{21}$ називаються членами визначника. Таким чином, визначник другого порядку являє собою алгебраїчну суму 2! членів, кожний з яких представляє собою вираз 2-х матричних елементів, взятих по одному з кожного рядка і кожного стовпця. Один із членів визначника входить в алгебраїчну суму з знаком «+», а другий зі знаком «–».

► **Приклад 3.2.** Обчислити визначник

$$\Delta_2 = |\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Маємо: $\Delta_2 = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7$. ◄

Відповідь: $\Delta_2 = 7$.

►**Приклад 3.3.** Обчислити визначник $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$.

Розв'язання

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - 4 \cdot (-3) = 2$$

Відповідь: $\Delta_2 = 2$ ◄

Означення 3.8. Визначником $|\mathrm{A}|$ матриці третього порядку $\mathrm{A} = (a_{ij})$, або визначником третього порядку, називається число Δ_3, що знаходиться за формулою:

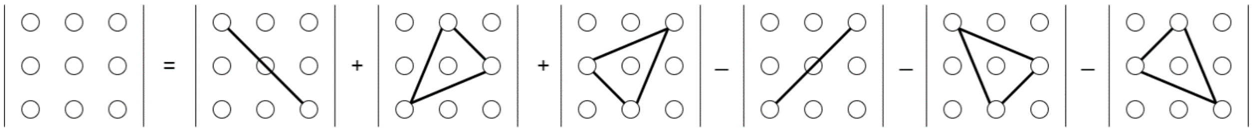
$$\Delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

З цього слідує, що визначник третього порядку являє собою алгебраїчну суму 3! членів, кожний з яких являє собою вираз 3–х матричних елементів, взятих по одному із кожного рядка і кожного стовпця. Три члена визначника входять в алгебраїчну суму зі знаком «+» і три зі знаком «–».

Формула обчислення визначника третього порядку на перший погляд, тому можна запам'ятати, так зване правило трикутників:



► **Приклад 3.4.** Обчислити визначник

$$\Delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Маємо:

$$\Delta_3 = +1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 -$$
$$-1 \cdot 1 \cdot 1 = 5. ◄$$

► **Приклад 3.5.** Обчислити визначник третього порядку: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$.

Розв'язання

Визначник третього порядку обчислюємо за правилом трикутника:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) \cdot 4 + (-3) \cdot 3 \cdot (-2) -$$

$$-(-3) \cdot 0 \cdot 4 - 1 \cdot 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-1) \cdot (-2) = 0 - 4 + 18 + 0 - 15 - 4$$
$$= -5$$

Відповідь: $\Delta = -5$. ◄

► **Приклад 3.6.** Чи є вираз $a_{13}a_{24}a_{41}a_{23}a_{55}$ членом визначника

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}?$$

Розв'язання

В виразі $a_{13}a_{24}a_{41}a_{23}a_{55}$ є два елементи з другого рядка (a_{24} і a_{23}) і, відповідно, воно не може бути членом даного визначника. ◄

► **Приклад 3.7.** Чи є вираз $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ членом визначника

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} \end{vmatrix}?$$

Розв'язання

Вираз $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65} = a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ має по одному елементу з кожного рядка і кожного стовпця даного визначника і, відповідно, є його членом. ◄

► **Приклад 3.8.** З яким знаком у визначник 6-го порядку входить член

$$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}?$$

Розв'язання

Упорядкуємо матричні елементи в виразі таким чином, щоб їх перші індекси були розташовані в порядку зростання: $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$. Тоді другі індекси утворюють перестановку

$$4, 3, 1, 2, 6, 5.$$

Визначимо число, що містить в ній інверсію. Маємо послідовність:

4, 3, 1, 2, 6, 5	-	2 числа перед 1,
4, 3, 2, 6, 5	-	2 числа перед 2,
4, 3, 6, 5	-	1 число перед 3,
4, 6, 5	-	0 чисел перед 4,
6, 5	-	1 число перед 5,
6	-	0 чисел перед 6.

Таким чином, $N(1,3,1,2,6,5) = 2+2+1+0+1+0 = 6$. Відповідно, перестановка є парною і розглядуваний член $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ входить в визначник зі знаком «+».◄

Властивості визначників

Пригадаємо, що перетворення при якому рядки визначника замінюються на стовпці називається транспонуванням визначника.

Властивість 1. При транспонуванні матриці її визначник не змінюється $|A^T| = |A|$.

Ця властивість *встановлює рівноправність рядків і стовпців визначника. Тому в подальшому властивості ми будемо формулювати і доводити тільки для рядків.*

Властивість 2. При перестановці місцями двох рядків матриці її визначник зберігає свою абсолютну величину, але змінює знак на протилежний .

Властивість 3. Якщо хоча б один рядок визначника складається із нулів, то визначник дорівнює нулю.

Властивість 4. Визначник, який містить два однакових рядки, дорівнює нулю.

Властивість 5. Якщо всі елементи деякого рядка помножити на число k, то визначник помножиться на це число.

Властивість 6. Визначник, який містить пропорційні рядки, дорівнює нулю.

Властивість 7. Якщо всі елементи a_{ij} i −рядка визначника n −го порядку представлені у вигляді суми двох доданків, тобто $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких всі рядки, крім i −ого такі ж, як і у початкового визначника, а i −й рядок у першому доданку складається з елементів b_{ij}, у другому – з елементів c_{ij}. Таким чином:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{12+}c_{12} & b_{22+}c_{22} & \cdots & b_{n2+}c_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Властивість 8. Визначник не змінюється, якщо до елементів одного його рядка додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на одне і те ж число.

Властивість 9. Якщо один із рядків визначника є лінійною комбінацією інших його рядків, то цей визначник дорівнює нулю.

► **Приклад 3.9.** Скориставшись властивостями визначників, обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} -274 & -138 & -272 \\ 520 & 261 & 516 \\ 749 & 375 & 743 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Віднімемо від першого стовпця третій, а від третього другий, помножений на 2. Одержимо: $\begin{vmatrix} -2 & -138 & 4 \\ 4 & 261 & -6 \\ 6 & 375 & -7 \end{vmatrix}$.

Винесемо з першого стовпчика спільний множник 2:

$$2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -138 & 4 \\ 2 & 261 & -6 \\ 3 & 375 & -7 \end{vmatrix}.$$

Додамо до другого стовпця перший стовпець, помножений на (-100) і третій стовпець, помножений на 10: $2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -6 \\ 3 & 5 & -7 \end{vmatrix}$.

Обчислимо за відомими правилом: $\Delta = -6$. ◄

► **Приклад 3.10.** Визначник $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ дорівнює d**.** Чому дорівнює визначник $\begin{vmatrix} 2b-3c & a+2c & a-b+c \\ 2b_1-3c_1 & a_1+2c_1 & a_1-b_1+c_1 \\ 2b_2-3c_2 & a_2+2c_2 & a_2-b_2+c_2 \end{vmatrix}$?

Розв'язання

Розкладемо визначник у суму визначників:

$$d_1 = \begin{vmatrix} 2b & a+2c & a-b+c \\ 2b_1 & a_1+2c_1 & a_1-b_1+c_1 \\ 2b_2 & a_2+2c_2 & a_2-b_2+c_2 \end{vmatrix} \text{ та}$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} -3c & a+2c & a-b+c \\ -3c_1 & a_1+2c_1 & a_1-b_1+c_1 \\ -3c_2 & a_2+2c_2 & a_2-b_2+c_2 \end{vmatrix}.$$

Кожний із визначників d_1 та d_2 розкладемо за їхніми другими стовпцями:

$$d_1 = \begin{vmatrix} 2b & a & a-b+c \\ 2b_1 & a_1 & a_1-b_1+c_1 \\ 2b_2 & a_2 & a_2-b_2+c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & 2c & a-b+c \\ 2b_1 & 2c_1 & a_1-b_1+c_1 \\ 2b_2 & 2c_2 & a_2-b_2+c_2 \end{vmatrix};$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} -3c & a & a-b+c \\ -3c_1 & a_1 & a_1-b_1+c_1 \\ -3c_2 & a_2 & a_2-b_2+c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3c & 2c & a-b+c \\ -3c_1 & 2c_1 & a_1-b_1+c_1 \\ -3c_2 & 2c_2 & a_2-b_2+c_2 \end{vmatrix}.$$

Позначимо отримані визначники $d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22}$ (запишемо $d_1 = d_{11} + d_{12}, d_2 = d_{21} + d_{22}$).

$$d_{11} = \begin{vmatrix} 2b & a & a \\ 2b_1 & a_1 & a_1 \\ 2b_2 & a_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & a & -b \\ 2b_1 & a_1 & -b_1 \\ 2b_2 & a_2 & -b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & a & c \\ 2b_1 & a_1 & c_1 \\ 2b_2 & a_2 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} b & a & a \\ b_1 & a_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 & a_2 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} b & a & b \\ b_1 & a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} b & a & c \\ b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Перший та другий визначник дорівнюють нулю, оскільки отримали два однакові стовпці.

$$d_{11} = 2\begin{vmatrix} b & a & c \\ b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Оскільки за умовою задачі $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = d$, а d_{11} відрізняється лише поміняними стовпцями, то $d_{11} = 2\begin{vmatrix} b & a & c \\ b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \end{vmatrix} = -2d.$

$$d_{12} = \begin{vmatrix} 2b & 2c & a-b+c \\ 2b_1 & 2c_1 & a_1-b_1+c_1 \\ 2b_2 & 2c_2 & a_2-b_2+c_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2b & 2c & a \\ 2b_1 & 2c_1 & a_1 \\ 2b_2 & 2c_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & 2c & -b \\ 2b_1 & 2c_1 & -b_1 \\ 2b_2 & 2c_2 & -b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & 2c & c \\ 2b_1 & 2c_1 & c_1 \\ 2b_2 & 2c_2 & c_2 \end{vmatrix} = 4d$$

$$d_{21} = \begin{vmatrix} -3c & a & a-b+c \\ -3c_1 & a_1 & a_1-b_1+c_1 \\ -3c_2 & a_2 & a_2-b_2+c_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -3c & a & a \\ -3c_1 & a_1 & a_1 \\ -3c_2 & a_2 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3c & a & -b \\ -3c_1 & a_1 & -b_1 \\ -3c_2 & a_2 & -b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3c & a & c \\ -3c_1 & a_1 & c_1 \\ -3c_2 & a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 3d$$

$d_{22} = 0$, оскільки є два пропорційні стовпці.

$$\begin{vmatrix} 2b-3c & a+2c & a-b+c \\ 2b_1-3c_1 & a_1+2c_1 & a_1-b_1+c_1 \\ 2b_2-3c_2 & a_2+2c_2 & a_2-b_2+c_2 \end{vmatrix} = -2d+4d+3d = 5d \blacktriangleleft$$

Знаходження визначників зведенням до трикутного виду

Досить часто властивості визначників можна використати для знаходження визначників, а саме звівши його до трикутного вигляду. Такий визначник дорівнює добутку елементів його головної діагоналі, незалежно від порядку матриці.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Визначником трикутної матриці відносно побічної діагоналі називається визначник, всі елементи якого, що стоять вище або нижче побічної діагоналі, дорівнюють нулю.

Такий визначник складається лише з одного добутку елементів побічної діагоналі. Знак при цьому добутку визначається як $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, де n– порядок матриці.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot a_{1n} \cdot a_{2(n-1)} \cdot \dots \cdot a_{n1}.$$

► **Приклад 3.11.** Вирахувати визначник $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & a & -a \end{vmatrix}$, де $a -$ деяке дійсне число.

Розв'язання

Приведемо визначник до трикутного вигляду. Для цього помножимо елементи 1-го рядка визначника на (–1) і додамо їх до відповідних елементів 2-го і 3-го рядків. Маємо:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & -a & a \\ 0 & 2a & -2a \\ 0 & 0 & -2a \end{vmatrix} = -4a^3. \blacktriangleleft$$

► **Приклад 3.12.** Обчислити визначник $\Delta_3 = \begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$, де x – деяке дійсне число.

Розв'язання

Додамо елементи 1-го рядка визначника до відповідних елементів 3-го рядка:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Поміняємо місцями 2-й і 3-й стовпці визначника. Відповідно до Властивості 2, при цьому перетворені визначник змінює свій знак на протилежній:

$$\Delta_3 = -\begin{vmatrix} -x & x & 1 \\ 0 & -1 & -x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Ми отримали в першій частині визначник, який має трикутний вигляд.

Тому $\Delta_3 = -(-x)(-1)2 = -2x$. ◄

► **Приклад 3.13.** Знайти, при яких значеннях числа x

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язання

Використовуючи Властивість 4, виділимо з $\Delta(x)$ визначник, що містить два однакові ряди. Отримуємо:

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix}.$$

Визначник, що залишився має трикутний вигляд і відповідно до теореми визначник дорівнює $-x(1-x)(2-x)$.

Таким чином, рівняння $\Delta(x) = 0$ має три корені:

$x = 0, 1, 2$. ◄

► **Приклад 3.14.** Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування

Перший стовпчик визначника ненульовий, і в ньому на першому місці стоїть ненульовий елемент. Тому можна в першому стовпчику одержати нулі на всіх місцях, починаючи з другого. Для цього від другого рядка віднімаємо перший, помножений на 2:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

Далі від третього рядка віднімаємо перший, помножений на 3:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6\\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2\\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10\end{vmatrix}.$$

Від четвертого рядка віднімаємо перший, помножений на 2:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6\\ 0 & -11 & 1 & -1 & -8\\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10\end{vmatrix}.$$

Нарешті від п’ятого рядка віднімемо перший:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6\\ 0 & -11 & 1 & -1 & -8\\ 0 & 2 & 2 & -1 & 5\end{vmatrix}.$$

У другому стовпчику одержаного визначника на другом місці знаходиться ненульовий елемент. Тому одержуємо нулі у другому стовпчику на всіх місцях, починаючи з третього. Для цього від третього рядка віднімемо другий, від четвертого віднімемо другий, помножений на 11, і до п’ятого рядка додамо другий, помножений на два.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -10 & -23 & -41\\ 0 & 0 & 4 & 3 & 11\end{vmatrix}.$$

У третьому стовпчику одержаного визначника на другому місці знаходиться ненульовий елемент. Одержуємо нулі у третьому стовпчику, починаючи з четвертого місця. Для цього до четвертого рядка додамо третій помножений на 10, а від п’ятого віднімемо третій, помножений на 4:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 \end{vmatrix}.$$

У даному визначнику четвертий елемент четвертого стовпчика не дорівнює нулю. Тому можна від п'ятого рядка відняти четвертий, помножений на $\frac{5}{3}$ і одержати визначник трикутного вигляду відносно головної діагоналі

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{52}{3} \end{vmatrix}.$$

Тоді $\Delta = 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-3) \cdot \frac{52}{3} = 52.$

На практиці рекомендується при обчисленні визначників з цілими елементами на кожному кроці одержувати визначники також з цілими елементами. У нашому випадку перед виконанням останнього кроку перетворень можна було, наприклад, перейти від визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

до визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 21 \end{vmatrix}$$

Для цього можна відняти від п'ятого рядка четвертого, помноженого на 2. Далі переставити четвертий і п'ятий рядки. Як відомо, при цьому змінюється знак визначника:

$$\Delta=-\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 21\\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11\end{vmatrix}.$$

Нарешті до п'ятого рядка додамо четвертий, помножений на 3:

$$\Delta=-\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 21\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 52\end{vmatrix}.$$

Таким чином, $\Delta = -(1\cdot(-1)\cdot 1\cdot 1\cdot 52) = 52.$ ◄

Розглянемо тепер деякі приклади обчислення визначників $n-$го порядку методом зведення до трикутного вигляду. При обчисленні визначників $n-$го порядку будемо суттєво користуватись закономірностями в будові цих визначників.

► **Приклад 3.15.** Обчислити визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 1 & 2 & 5 & \cdots & n-1 & n\\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-3 & n\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 2n-1\end{vmatrix}.$$

Розв'язування

Зрозуміло, що порядок визначника дорівнює n (наприклад, у першому рядку елементами є всі натуральні числа від 1 до n, кількість їх дорівнює n). Кожен рядок визначника, починаючи з другого, відрізняється від першого рядка лише єдиним елементом, а саме елементом, який стоїть на головній діагоналі. Тому можна від кожного рядка, починаючи з другого, відняти перший рядок. Одержуємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \end{vmatrix}.$$

Всі елементи одержаного визначника, що знаходяться нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю. Таким чином, ми одержали визначник трикутного вигляду відносно головної діагоналі, а тому

$$\Delta = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) = (n-1)! \blacktriangleleft$$

► **Приклад 3.16.** Обчислити визначник порядку n

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x & x & \cdots & x & x \\ y & x & x & \cdots & x & x \\ y & y & x & \cdots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ y & y & y & \cdots & x & x \\ y & y & y & \cdots & y & x \end{vmatrix}.$$

Розв'язування

В цьому визначнику всі елементи, які знаходяться вище головної діагоналі, а також всі елементи головної діагоналі однакові. Визначник можна звести до трикутного вигляду відносно головної діагоналі, одержуючи нулі вище діагоналі. Віднімемо від першого рядка визначника другий. Одержуємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} x-y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y & x & x & \cdots & x & x \\ y & y & x & \cdots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ y & y & y & \cdots & x & x \\ y & y & y & \cdots & y & x \end{vmatrix}.$$

Далі, аналогічно від другого рядка віднімемо $3-$й, від $3-$го - $4-$й і нарешті, від $(n-1)-$го – $n-$й.

$$\Delta=\begin{vmatrix} x-y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x-y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-y & 0 \\ y & y & y & \cdots & y & x \end{vmatrix}.$$

Порядок визначника дорівнює n, а тому $\Delta= x\cdot(x-y)^{n-1}$. ◄

► **Приклад 3.17.** Обчислити визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n & n & \cdots & n & n & n \\ n & n & n & \cdots & n & 2n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування

Порядок визначника дорівнює n (елементи першого рядка – всі натуральні числа від 1 до n, тобто кількість їх дорівнює n). Всі елементи визначника на побічній діагоналі і нижче побічної діагоналі однакові. Тому визначник можна звести до трикутного вигляду відносно побічної діагоналі. Для цього віднімемо від $n-$ го стовпчика визначника $(n-1)-$ й стовпчик.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 0 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n & n & \cdots & n & n & 0 \\ n & n & n & \cdots & n & n & 0 \end{vmatrix}.$$

В останньому стовпчику залишається лише один ненульовий елемент. Далі аналогічно від $(n-1)-$ го стовпчика віднімемо $(n-2)-$ й, від $(n-2)-$ го віднімаємо $(n-3)-$ й і, нарешті, від $2-$ го стовпчика віднімемо $1-$ й. Одержуємо визначник трикутного вигляду відносно побічної діагоналі:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Порядок визначника дорівнює n, а тому $\Delta=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot n$. ◄

Розкладання визначника за елементами рядка чи стовпця

Існує ще один чудовий метод для знаходження визначника довільного порядку. Цей метод називається «метод пониження порядку визначника» чи «розкладання визначника за елементами рядка чи стовпця». Проте щоб з ним ознайомитися введемо поняття мінора та алгебраїчного доповнення.

Означення 3.10. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} квадратної матриці $n-$ого порядку A називається визначник $(n-1)-$ого порядку, отриманого із визначника матриці A шляхом викреслення $i-$ого рядка і j-ого стовпця (того рядка і стовпця, на перетині яких розміщений елемент a_{ij}).

► **Приклад 3.18.** Для матриці $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ мінорами другого порядку будуть, наприклад, визначники:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Мінорами третього порядку – $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. ◄

Всього для матриці $A_{m\times n}$ можно скласти $C_m^k \cdot C_n^k$ мінорів порядку k, де $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$. Так для матриці $A_{3\times 4}$ існує всього

$C_3^2 \cdot C_4^2 = \frac{3!}{2!\cdot 1!} \cdot \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ мінорів другого порядку.

► **Приклад 3.19.** Мінор M_{23} матриці третього порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

рівний $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}$. ◄

► **Приклад 3.20.** Знайти мінори всіх елементів матриці третього порядку

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1;$	$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3;$	$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$
$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3;$	$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$	$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$
$M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$	$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1;$	$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$

Означення 3.11. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} матриці $n -$ ого порядку A називається число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

► **Приклад 3.21.** Знайти алгебраїчне доповнення A_{22} та A_{23}, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 9 - 3 \cdot 7) = -12;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 8 - 2 \cdot 7) = 6. \blacktriangleleft$$

Теорема Лапласа (про розкладання визначника за елементами рядка чи стовпця). Визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів деякого рядка чи стовпця і відповідних до них алгебраїчних доповнень.

$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, i = 1,2,\ldots,n$ – формула розкладу визначника за елементами i–го рядка. (3.1)

$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}, j = 1,2,\ldots,n$ – формула розкладу визначника за елементами j–го стовпця. (3.2)

Сума добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення елементів будь-якого іншого рядка чи стовпця дорівнює нулю.

► **Приклад 3.22.** Знайдено визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, розклавши її за елементами першого рядка.

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 + 5 \cdot 7) =$$

$$= -93 - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot 67 = 120.$$ ◄

► **Приклад 3.23.** Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

Розв'язання

Розкладемо визначник за елементами третього рядка:

$$\Delta = a(-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + b(-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+c(-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} + d(-1)^7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 8a + 15b + 12c - 19d.$$ ◄

Ви звернули увагу, що легше знайти визначник, розклавши його за тим рядком чи стовпцем, у якому більше нулів. Тому, інколи, перед розкладанням визначника за рядком чи стовпцем, за допомогою властивостей визначників варто утворити нулі в якомусь рядку чи стовпці.

► **Приклад 3.24.** Обчислити визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & 3 & 2 & -1\\ -1 & 2 & -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 4 & 3 & -3\end{vmatrix}.$$

Розв'язання

У другому стовпці вже є два нулі, отже, найзручніше нулі зробити саме у цьому стовпці, не змінюючи при цьому величини самого визначника. З цією метою за властивістю 8 елементи першого рядка даного визначника помножимо на (-2) і додамо до відповідних елементів третього рядка. Потім елементи першого рядка додамо до елементів четвертого рядка. Дістанемо визначник:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 1 & 2\\ -2 & 0 & 3 & 2 & -1\\ -3 & 0 & 0 & -1 & -3\\ 3 & 0 & 1 & 0 & 4\\ 1 & 0 & 4 & 3 & -3\end{vmatrix},$$

який дорівнює даному. Тоді, визначник, у якого елементи $i-$го рядка всі, крім одного, рівні нулю, дорівнює добутку цього відмінного від нуля елемента на його алгебраїчне доповнення.

$$\Delta= 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-2 & 3 & 2 & -1\\ -3 & 0 & -1 & -3\\ 3 & 1 & 0 & 4\\ 1 & 4 & 3 & -3\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}-2 & 3 & 2 & -1\\ -3 & 0 & -1 & -3\\ 3 & 1 & 0 & 4\\ 1 & 4 & 3 & -3\end{vmatrix}.$$

У цього визначника найзручніше зробити нулі у другому рядку. Тому можна від елементів першого стовпця відняти елементи четвертого стовпця, а потім до елементів четвертого стовпця додати елементи третього стовпця помножені на (-3). Матимемо:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & -12 \end{vmatrix} = -(-1)\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 3 & -7 \\ -1 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & -12 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 & -7 \\ -1 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & -12 \end{vmatrix}.$$

Дістали визначник третього порядку, який обчислюємо безпосередньо або, застосувавши попередні міркування. Звернемо увагу на те, що елементи третього рядка отриманого визначника мають спільний множник 4, який можна винести за знак визначника. Отже,

$$\Delta = -4\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 & -7 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Найзручніше зробити нулі у першому стовпці отриманого визначника. Для цього до елементів першого рядка визначника потрібно додати елементи третього і до елементів третього рядка додати елементи другого. Одержимо:

$$\Delta = -4\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 & -10 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4\cdot(-1)\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & -10 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\cdot\big(4\cdot 1 - 2\cdot(-10)\big) = -4\cdot 10 = -96.$$

Відповідь : $\Delta = -96$. ◄

Завдання для самостійного розв'язання

Завдання 1. Обчислити визначники зведенням до трикутного виду та розкладанням за елементами 3 рядка:

Варіант 1	Варіант 2
$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & -5 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & -7 \end{vmatrix}$
Варіант 3	Варіант 4
$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & -6 & -4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -5 & -3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$
Варіант 5	Варіант 6
$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & -5 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & -7 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 4 & -3 & -1 & 3 \\ -8 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$
Варіант 7	Варіант 8
$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 8 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -5 & 7 & 5 & -4 \end{vmatrix}$
Варіант 9	Варіант 10
$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & -6 & -4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & -5 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & -7 \end{vmatrix}$
Варіант 11	Варіант 12
$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 0 & -4 \\ 1 & 7 & 3 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -7 & -3 & -1 & 3 \\ 7 & -1 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

Варіант 13	Варіант 14
$\begin{vmatrix} -1 & -3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 4 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -5 & 4 \\ -3 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & -7 \end{vmatrix}$
Варіант 15	Варіант 16
$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & -4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 3 & -3 \end{vmatrix}$
Варіант 17	Варіант 18
$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \\ 6 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -5 & -3 & -1 & 3 \\ -4 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$
Варіант 19	Варіант 20
$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & -6 & -4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -5 & -4 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -6 & -7 \end{vmatrix}$

Завдання 2. Знайти визначник (завдання для всіх варіантів)

а). $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$;

б). $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \vdots & n \\ n & 2 & n & \vdots & n \\ n & n & 3 & \vdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ n & n & n & \vdots & n \end{vmatrix}$.

Параграф 4. Обернена матриця

Означення 4.1. Квадратна матриця A^{-1} називається оберненою до матриці A, якщо

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I.$$

Означення 4.2. Квадратна матриця A називається виродженою, якщо $detA = 0$, і невиродженою, якщо $detA \neq 0$.

Для невиродженої матриці A обернену матрицю можна обчислити за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{det(A)} \tilde{A} =, (detA \neq 0),$$

де $A_{ij} (i, j = 1,2, \dots, n)$ – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A.

Теорема. Будь яка невироджена матриця має свою обернену матрицю.

Дійсно. Нехай дана матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, причому $detA \neq 0$. Складемо матрицю B наступним чином

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij}– алгебраїчні доповнення відповідних елементів a_{ij} матриці А. Знайдемо добуток $A \cdot B$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + \cdots + a_{1n}A_{n1} & \dots & a_{11}A_{1n} + a_{12}A_{2n} + \cdots + a_{1n}A_{nn} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{21} + \cdots + a_{2n}A_{n1} & \dots & a_{21}A_{12} + a_{22}A_{2n} + \cdots + a_{2n}A_{nn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}A_{11} + a_{n2}A_{21} + \cdots + a_{nn}A_{n1} & \dots & a_{n1}A_{1n} + a_{n2}A_{2n} + \cdots + a_{nn}A_{nn} \end{pmatrix}.$$

На діагоналі отриманої матриці суми добутків елементів рядків на їх алгебраїчні доповнення. Вони рівні визначнику матриці A (дивись параграф 3 (формула 3.1)). На інших місцях стоять суми добутків елементів рядків на відповідні алгебраїчні доповнення елементів других рядків, які дорівнюють нулю (дивись також параграф 3 (формула 3.2)). Тому

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} detA & 0 & \dots & 0 \\ 0 & detA & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & detA \end{pmatrix} = detA \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= detA \cdot I.$$

Таким чином, $A \cdot B = detA \cdot E$. Аналогічно можна отримати $B \cdot A = detA \cdot I$.Звідки

$$\mathrm{A} \cdot \frac{B}{detA} = \frac{B}{detA} \cdot A = I.$$

Алгоритм знаходження оберненої матриці

1. Знайти визначник матриці. Якщо він не рівний нулю, то виконуємо наступні дії. В іншому випадку дана матриця вироджена і для неї не існує оберненої.

2. Знайти алгебраїчні доповнення елементів матриці A.

3. Скласти матрицю з алгебраїчних доповнень елементів матриці A та транспонувати її. Ця матриця називається приєднаною і позначається $\widetilde{\mathrm{A}}$.

4. Помножити приєднану матрицю на число $\frac{1}{\Delta}$. Отримана матриця буде оберненою.

► **Приклад 4.1.** Для матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ знайти A^{-1}.

Розв'язання

Так як $detA = 1 \neq 0$, то обернена матриця існує. Знайдемо алгебраїчні доповнення:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 7 = 7,$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 4 = -4,$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 5 = -5,$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 3 = 3.$

Складаємо матрицю із алгебраїчних доповнень, та транспонуємо її. Знаходимо $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Зробимо перевірку:

$$A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 7 + 5 \cdot (-4) & 3 \cdot (-5) + 5 \cdot 3 \\ 4 \cdot 7 + 7 \cdot (-4) & 4 \cdot (-5) + 7 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I. \blacktriangleleft$$

► **Приклад 4.2.** Для матриці $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ знайти B^{-1}.

Розв'язання

Так як $detB = 28 + 25 + 60 - 21 - 40 - 50 = 113 - 11 = 2 \neq 0$, то обернена матриця існує. Знайдемо алгебраїчні доповнення:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -6, A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2,$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4,\ A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -5,$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1,\ A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5,$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 13,\ A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -3,$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -11.$

Отже, $B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -5 & 13 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{5}{2} & \frac{13}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & \frac{5}{2} & -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$.

Виконаємо перевірку:

$$B \times B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & -\frac{5}{2} & \frac{13}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & \frac{5}{2} & -\frac{11}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6+5+2 & -5+\frac{5}{2}+\frac{5}{2} & 13-\frac{15}{2}-\frac{11}{2} \\ -15+7+8 & -\frac{25}{2}+\frac{7}{2}+10 & \frac{65}{2}-\frac{21}{2}-22 \\ -9+5+4 & -\frac{15}{2}+\frac{5}{2}+5 & \frac{39}{2}-\frac{15}{2}-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I. \blacktriangleleft$$

Властивості оберненої матриці:

1. $det(A^{-1}) = (detA)^{-1} = \frac{1}{detA}$;
2. $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$;
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Зауваження. Обернену матрицю можна знаходити і способом елементарних перетворень.

Розглянемо, у чому ж полягає суть цього методу.

Для цього введемо поняття елементарна матриця.

Означення 4.2. Елементарна матриця – матриця $n-$ого порядку одержана із відповідної одиничної матриці шляхом елементарного перетворення над її рядками.

Теорема. Нехай $E-$ елемнтарна матриця $n-$ ого порядку, яку одержано з одиничної матриці I_n з допомогою певного рядкового елементарного перетворення. Якщо ж це саме перетворення застосувати до матриці A, то результатом буде матриця EA.

Дана теорема дає можливість відшукання обернених матриць за наступним алгоритмом: випишемо поруч задану матрицю А та одиничну матрицю I і дістанемо розширену матрицю $(A \mid I)$. За допомогою рядкових елементарних перетворень зведемо матрицю до виду $(I \mid B)$. Тоді матриця B є оберненою до даної.

► **Приклад 4.3.** Знайти матрицю, обернену до матриці
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Запишемо матрицю $(A|\, I)$ і за допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду $(I|\, A^{-1})$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Отже, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -13 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. ◄

Розв'язування матричних рівнянь

В параграфі 1 ми вже розглядали приклад з матричними системами, зокрема розв'язували матричні рівняння. Там використовували такі дії над матрицями: додавання, віднімання матриць, множення матриці на число. В цьому параграфі будемо використовувати обернену матрицю для розв'язання матричного рівняння.

► **Приклад 4.4.** Розв'язати матричне рівняння:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;

Розв'язання

Позначимо матриці $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = B$, тоді рівняння запишуться так: $AX = B, XA = B$. З'ясуємо, чи є матриця A невиродженою. Для цього обчислимо визначник матриці A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1 \neq 0.$$

Домножимо рівняння $AX = B$ на A^{-1} зліва, а рівняння $XA = B$ на A^{-1} справа. Отже, рівняння мають розв'язки:

$$a)\ AX = B,\ A^{-1}AX = A^{-1}B,\ X = A^{-1}B;$$

$$b)\ XA = B,\ XAA^{-1} = BA^{-1},\ X{=}BA^{-1}.$$

Обчислюємо обернену матрицю до матриці А:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо розв'язки рівнянь:

$$a).\ X = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix};$$

$$b).\ X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: *a)*. $X = \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$; *b)*. $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$. ◄

► **Приклад 4.5.** Знайти матрицю X з рівняння:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Нехай $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = A$, а $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B$.

Помножимо обидві частини рівняння з лівого боку на матрицю обернену до матриці A.

$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *(читачеві пропонуємо самостійно перевірити обчислення).*

$$A^{-1}AX = X = A^{-1}B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13/5 & -1 & 13/5 \\ 21/5 & 1 & 16/5 \\ 1/5 & 0 & 6/5 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} 13/5 & -1 & 13/5 \\ 21/5 & 1 & 16/5 \\ 1/5 & 0 & 6/5 \end{pmatrix}$. ◄

► **Приклад 4.6.** Знайти матрицю X з рівняння $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Нехай $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$. Оскільки $|A| = 0$, то оберненої матриці до матриці A не існує. Запишемо $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тоді рівняння матиме вид $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$. Виконаємо множення матриць у лівій частині рівняння:

$$\begin{pmatrix} 2a - 2b & 3a - 3b \\ 2c - 2d & 3c - 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пригадаймо, що дві матриці називаються рівними, якщо рівні між собою відповідні елементи, тому:

$$\begin{cases} 2a - 2b = 4; \\ 3a - 3b = -1; \\ 2c - 2d = 8; \\ 3c - 3d = -2. \end{cases}$$

Легко переконатися, що система несумісна. Отже рівняння не має розв'язку. ◄

Завдання для самостійного опрацювання

Завдання 1. Знайти матриці обернені до даних двома способами: за допомогою приєднаної матриці та елементарних перетворень.

Варіант 1	Варіант 2
$A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}.$	$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ 5 & -4 & 5\end{pmatrix}.$
Варіант 3	Варіант 4
$A=\begin{pmatrix}3 & 9 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 7 & 4 & -2\end{pmatrix}.$	$A=\begin{pmatrix}1 & -9 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 7\end{pmatrix}.$
Варіант 5	Варіант 6
$A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}.$	$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ 5 & -4 & 5\end{pmatrix}.$
Варіант 7	Варіант 8
$A=\begin{pmatrix}3 & 9 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 7 & 4 & -2\end{pmatrix}.$	$A=\begin{pmatrix}1 & -9 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 7\end{pmatrix}.$
Варіант 9	Варіант 10
$A=\begin{pmatrix}1 & -9 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 7\end{pmatrix}.$	$A=\begin{pmatrix}3 & 9 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 7 & 4 & -2\end{pmatrix}.$
Варіант 11	Варіант 12
$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ 5 & -4 & 5\end{pmatrix}.$	$A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}.$
Варіант 13	Варіант 14
$A=\begin{pmatrix}1 & -9 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 7\end{pmatrix}.$	$A=\begin{pmatrix}3 & 9 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 7 & 4 & -2\end{pmatrix}.$

Варіант 15	Варіант 16
$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 2 & 7 & 2\\ -1 & 2 & 6\end{pmatrix}.$	$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 2 & -6 & -2\\ -1 & 3 & -3\end{pmatrix}.$
Варіант 17	Варіант 18
$A=\begin{pmatrix}9 & 1 & 0\\ 2 & 7 & -2\\ 1 & 7 & -3\end{pmatrix}.$	$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & 9 & 2\\ 4 & -3 & 3\end{pmatrix}.$
Варіант 19	Варіант 20
$A=\begin{pmatrix}8 & 1 & 0\\ 2 & -6 & -2\\ 1 & 7 & -3\end{pmatrix}.$	$A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}.$

Завдання 2. Розв’язати матричне рівняння.

Варіант 1	$\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ 5 & -4 & 5\end{pmatrix}.$
Варіант 2	$\begin{pmatrix}3 & 9 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 7 & 4 & -2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ 5 & -4 & 5\end{pmatrix}.$
Варіант 3	$X\cdot\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 2 & 7 & 2\\ -1 & 2 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}.$
Варіант 4	$\begin{pmatrix}3 & 9 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 7 & 4 & -2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ 5 & -4 & 5\end{pmatrix}.$
Варіант 5	$X\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 2 & -6 & -2\\ -1 & 3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -9 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 7\end{pmatrix}.$
Варіант 6	$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ 5 & -4 & 5\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ 5 & -4 & 5\end{pmatrix}.$

Варіант 7	$X\cdot\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 2 & 7 & 2\\ -1 & 2 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -9 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 7\end{pmatrix}.$
Варіант 8	$\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 2 & 7 & 2\\ -1 & 2 & 6\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ 5 & -4 & 5\end{pmatrix}.$
Варіант 9	$X\cdot\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 2 & 7 & 2\\ -1 & 2 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 1 & 0\\ 2 & 7 & -2\\ 1 & 7 & -3\end{pmatrix}.$
Варіант 10	$\begin{pmatrix}8 & 1 & 0\\ 2 & -6 & -2\\ 1 & 7 & -3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ 5 & -4 & 5\end{pmatrix}.$
Варіант 11	$X\cdot\begin{pmatrix}3 & 9 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 7 & 4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -9 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 7\end{pmatrix}.$
Варіант 12	$X\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 2 & -6 & -2\\ -1 & 3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 9 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 7 & 4 & -2\end{pmatrix}.$
Варіант 13	$\begin{pmatrix}3 & 9 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 7 & 4 & -2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}.$
Варіант 14	$X\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 2 & -6 & -2\\ -1 & 3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 9 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 7 & 4 & -2\end{pmatrix}.$
Варіант 15	$X\cdot\begin{pmatrix}3 & 9 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 7 & 4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 2 & -6 & -2\\ -1 & 3 & -3\end{pmatrix}.$
Варіант 16	$\begin{pmatrix}1 & 9 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ -7 & 4 & -2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}.$
Варіант 17	$\begin{pmatrix}3 & -9 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 7 & 4 & -2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}.$
Варіант 18	$\begin{pmatrix}3 & 9 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 7 & 4 & -2\end{pmatrix}=X\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 2 & -3 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$

Варіант 19	$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & з3 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$
Варіант 20	$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 7 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -7 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$

Параграф 5. Розв'язування квадратних систем

В параграфі 1 ви вже знайомилися із методом Гауса розв'язування систем лінійних рівнянь. Вивчений матеріалу параграфів 2, 3, 4 дають можливість розв'язувати системи лінійних рівнянь ще декількома методами.

Поряд із розглянутими в параграфі 1 записами систем лінійних рівнянь, а саме $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$ розглянемо ще один:

$$AX = B,$$

де A – матриця системи $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Тоді, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Якщо в системі $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$ покласти $m = n$, то така система рівнянь називається квадратною:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Метод Крамера

Припустимо, що визначник матриці цієї системи не дорівнює нулю ($detA \neq 0$).

Розглянемо визначник $\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, який отримано з Δ заміною $k-$ого стовпця A_k на стовпець B.

Теорема (теорема Крамера). Якщо визначник матриці системи не дорівнює нулю, то вона сумісна і має єдиний розв'язок:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta};\ k = 1,2,3,\ldots,n;\ detA \neq 0. \quad (5.1)$$

Дійсно, запишемо систему $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$ у матричній формі $AX = B$.

Після множення зліва на A^{-1} одержимо:

$$A^{-1} \cdot (AX) = (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1}B = \frac{\tilde{A} \cdot B}{\Delta};$$

$$X = A^{-1}B.$$

Перепишемо у розгорнутому вигляді:

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n);$$

……………………………………………..

$$x_n = \frac{1}{\Delta}(A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n).$$

$$A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n = \sum_{i=1}^{n} A_{i1}b_1,$$

що є, очевидно, розклад Δ_1 за елементами першого стовпця, тобто $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$.

Аналогічно, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$, … , $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$.

► **Приклад 5.1.** Розв'язати систему $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

Розв'язання

Знаходимо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 14.$$

Отже, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{7} = 0$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{7}{7} = 1$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{14}{7} = 2$. ◄

► **Приклад 5.2.** Розв'язати систему лінійних рівнянь за допомогою правила Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 = -17, \\ 7x_1 + 12x_3 - 7x_4 = -9, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_4 = -6. \end{cases}$$

Розв'язання

Знайдемо визначник цієї системи *(читачеві пропонується самостійно знайти визначник будь-яким зручним для нього способом)*:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 5 & 5 \\ 7 & 0 & 12 & -7 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 81.$$

Визначник відмінний від нуля, отже застосуємо правило Крамера *(читачеві пропонується самостійно знайти визначники будь-яким зручним для нього способом)*:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 & -5 \\ -17 & -3 & 5 & 5 \\ -9 & 0 & 12 & -7 \\ -6 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -324; \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 & -5 \\ 2 & -17 & 5 & 5 \\ 7 & -9 & 12 & -7 \\ 3 & -6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 243;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 8 & -5 \\ -17 & -3 & 17 & 5 \\ -9 & 0 & -9 & -7 \\ -6 & 1 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 81; \ \Delta_4 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 & -5 \\ -17 & -3 & 5 & 5 \\ -9 & 0 & 12 & -7 \\ -6 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -324.$$

Отже, $x_1 = -4, x_2 = 3, x_3 = 1, x_4 = -1$. ◄

Матричний метод

Запишемо систему $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$ у матричній формі $AX = B$. Після множення зліва на A^{-1} одержимо:

$A^{-1} \cdot (AX) = (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1}B, X = A^{-1}B$ та розв'яжемо як матричне рівняння.

► **Приклад 5.3.** Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3; \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10; \\ 9x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 14. \end{cases}$$

матричним методом.

Розв'язання

Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}$,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Знайдемо обернену матрицю A^{-1}.

1. Обчислимо визначник матриці A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 4.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то обернена матриця A^{-1} існує.

2. Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -4$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = 12$; $A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = -12$;
$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -2$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = 1$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 2$;
$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2$.

Складемо матрицю із алгебраїчних доповнень

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -4 & 12 & -12 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Транспонуємо отриману матрицю і помножимо на $\frac{1}{\Delta}$.

Обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 1/2 \\ 3 & 1/4 & -3/4 \\ -3 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 1/2 \\ 3 & 1/4 & -3/4 \\ -3 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-5+7 \\ 9+\frac{5}{2}-\frac{21}{2} \\ -9+5+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$. ◄

► **Приклад 5.4.** Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$ матричним методом.

Розв'язання

Нехай $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Знаходимо визначник матриці $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 7$.

2. Оскільки $\Delta \neq 0$, то обернена матриця A^{-1} існує.

2. Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$; $A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$;

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$;

$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5$.

Складемо матрицю із алгебраїчних доповнень:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

3. Транспонуємо отриману матрицю $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

і помножимо на $\frac{1}{\Delta}$.

Обернена матриця має вигляд $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix}$.

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} + 0 - \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} + 0 + \frac{1}{7} \\ \frac{9}{7} + 0 + \frac{5}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Звіримо отримані результати із результатами з прикладу 5.1. Отже, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. ◄

Завдання для самостійного розв’язання

Завдання 1. Розв’язати систему методом Крамера та матричним методом:

Варіант 1	Варіант 2
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 = 13, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8. \end{cases}$	$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = -2. \end{cases}$
Варіант 3	Варіант 4
$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -4, \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -14, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$	$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -4, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = -1. \end{cases}$
Варіант 5	Варіант 6
$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ -3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -3, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 8, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = -8, \\ x_1 + x_2 + 6x_3 = -19. \end{cases}$
Варіант 7	Варіант 8
$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -1, \\ 7x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 8x_3 = -20, \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -4. \end{cases}$
Варіант 9	Варіант 10
$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$	$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -4, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = -1. \end{cases}$
Варіант 11	Варіант 12
$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 1, \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 16, \\ 3x_1 - 5x_2 - 5x_3 = -7, \\ -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$
Варіант 13	Варіант 14
$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + 15x_3 = -1. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4, \\ 7x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 10, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант 15	Варіант 16
$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -8, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 4, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$
Варіант 17	Варіант 18
$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$	$\begin{cases} -2x_1 - 5x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$
Варіант 19	Варіант 20
$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 1, \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 16, \\ 3x_1 - 5x_2 - 5x_3 = -7, \\ -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$

Параграф 6. Арифметичний $\boldsymbol{n}$ – вимірний простір. Ранг матриці

Означення 6.1. n –вимірним вектором над полем P назвемо впорядкований набір з n елементів цього поля. Впорядкований набір чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ позначається позначається $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ або $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_т \end{pmatrix}$. n –вимірний вектор позначають $\vec{x}$ або $\boldsymbol{x}$.

Два вектори називаються рівними, якщо їх відповідні компоненти рівні. Вектор $(0, 0, \dots, 0)$ називається нульовим і позначається $\vec{0}$.

Множину всіх n –вимірних векторів заданих над полем P позначають P^n. Надалі будемо розглядати випадок, коли $P = \mathbb{R}$.

Сумою двох n-вимірних векторів $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ називається вектор $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + + y_2, \dots, x_n + y_n)$.

Добутком вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ на число $\alpha\epsilon\mathbb{R}$ називається вектор $\alpha\vec{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$.

Серед властивостей вказаних операцій додавання і множення на число наступні:

1. $\forall\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$: $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ – асоціативність.
2. $\forall\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ – комунікативність.
3. $\forall\vec{x} \in \mathbb{R}^n$: $\vec{x} + 0 = \vec{x}$.
4. $\forall\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \forall\alpha\epsilon\mathbb{R} : \alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$.
5. $\forall\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \forall\alpha, \beta\epsilon\mathbb{R} : (\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$.
6. $\forall\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \forall\alpha, \beta\epsilon\mathbb{R} : (\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$.
7. $\forall\vec{x} \in \mathbb{R}^n$: $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.
8. $\forall\vec{x} \in \mathbb{R}^n$: $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

Означення 6.2. Множина усіх $n-$вимірних векторів з дійсними компонентами, що розглядаються з визначеними у ній операціями додавання та множення на число, називається n $-$вимірним арифметичним векторним простором.

Нехай $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k)$ – система векторів простору $\mathbb{R}^n$ – скінченна сукупність векторів, в якій чітко визначене місце кожного вектора.

Означення 6.3. Вектор $\vec{b}$ є лінійною комбінацією системи векторів $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k)$ якщо існують дійсні числа α_1, $\alpha_1, \dots$, α_k такі, що $\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k$.

► **Приклад 6.1.** Нехай $\vec{a}_1 = (\,3, -4{,}0)$, $\vec{a}_2 = (-12, 6, -4)$, $\vec{a}_3 = (3, 2, -1)$ – елементи векторного простору $\mathbb{R}^3$. Знайти лінійну комбінацію векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ з коефіцієнтами $3, \frac{1}{2}, -5$.

Розв'язання

$$3\vec{a}_1 + \frac{1}{2}\vec{a}_2 - 5\vec{a}_3 = 3 \cdot (\,3, -4{,}0) + \frac{1}{2} \cdot (-12, 6, -4) - 5 \cdot (3, 2, -1) =$$

$$= (\,9, -12{,}0) + (-6, 3, -2) + (-15, -10, 5) = (-12, -19, 3).◄$$

Система векторів $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k)$ називається лінійно залежною, якщо існують такі числа α_1, $\alpha_1, \dots$, α_k, серед яких хоча б одне відмінне від нуля, що виконується рівність $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}$.

Якщо ж $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}$ виконується при умові $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$, то система векторів називається лінійно незалежною.

► **Приклад 6.2.** Покажемо, що система векторів $\vec{a}_1 = (1, 2)$, $\vec{a}_2 = (4{,}8)$ є лінійно залежною.

Розв'язання

Розглянемо, наприклад, лінійну комбінацію $4\vec{a}_1 - \vec{a}_2$.

$4\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = 4 \cdot (1, 2) - (4{,}8) = (4, 8) - (4, 8) = (0, 0).$

Отже, ми знайшли лінійну комбінацію векторів $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$ з коефіцієнтами 4 та (-1). ◄

► **Приклад 6.3.** Дослідити, лінійно залежною чи незалежною є система векторів $\vec{a}_1 = (1, 2, -1)$, $\vec{a}_2 = (2, 1, 1)$ $\vec{a}_3 = (1, 1, 1)$.

Розв'язання

Припустимо, що $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 = (0, 0, 0)$.

Тоді, $\alpha_1 \cdot (1, 2, -1) + \alpha_2 \cdot (2, 1, 1) + \alpha_3 \cdot (1, 1, 1) = (0, 0, 0)$.

$(\alpha_1, 2\alpha_1, -\alpha_1) + (2\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2) + (\alpha_3, \alpha_3, \alpha_3) = (0, 0, 0)$.

$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3,\ \ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,\ \ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = (0, 0, 0)$.

Складемо систему лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Знайдемо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Визначник відмінний від нуля, отже система має єдиний розв'язок: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Отже система лінійно незалежна ◄

Теорема. Для того, щоб система векторів $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k)$ була лінійно залежною, необхідно і достатньо, щоб хоча б один із векторів цієї системи лінійно виражався через інші.

Теорема. Якщо система векторів $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k)$ містить лінійно залежну підсистему $\left(\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \dots, \vec{a}_{i_l}\right)$, то вихідна система лінійно залежна.

Теорема. Якщо кожний вектор системи із більшою кількістю векторів лінійно виражається через вектори системи з меншою кількістю векторів, то перша система лінійно залежна.

Підсистема векторів $\left(\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \dots, \vec{a}_{i_l}\right)$ системи $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k)$ називається базисом цієї системи, якщо виконуються умови:

1. підсистема $\left(\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \dots, \vec{a}_{i_l}\right)$ є лінійно незалежною;

2. для довільного вектора $\vec{a}_s$ системи $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k)$ підсистема $\left(\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \dots, \vec{a}_{i_l}\right)$ є лінійно залежною.

Отже сформулюємо наступне означення.

Підсистема векторів $\left(\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \dots, \vec{a}_{i_l}\right)$ системи $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k)$ називається її базисом, якщо ця підсистема є лінійно незалежною і через її вектори лінійно виражається будь-який вектор даної системи.

► **Приклад 6.4.** Знайти базис системи векторів $\vec{a}_1 = (1, 0, 2)$, $\vec{a}_2 = (1, 0, 1)$ $\vec{a}_2 = (1, 0, 0)$.

Розв'язання

Рівність $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 = \vec{0}$, складена для цих векторів приводить до системи

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \qquad\qquad\quad 0 = 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \qquad = 0, \end{cases}$$

яка має безліч розв'язків. Це означає, що вихідна система векторів є лінійно залежною, тому її базис містить два або менше векторів. Вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_3$ є лінійно незалежними, а тому утворюють базис даної системи. Аналогічно в якості базису можна було б узяти підсистему $(\vec{a}_1,\ \vec{a}_2)$, $(\vec{a}_2,\ \vec{a}_3)$. ◄

Означення 6.4. Кількість векторів базису системи векторів $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k)$ називається рангом системи цих векторів і позначається як позначають як $r, r(A), rangA$.

Теорема. При елементарних перетвореннях системи векторів її ранг не зміниться.

До елементарних перетворень системи векторів віднесемо:

- перестановка місцями будь-яких векторів системи;

- множення будь-якого вектора системи на число $c \neq 0$;

- додавання до будь-якого вектора системи іншого вектора помноженого на c;

- відкидання від векторів системи $\vec{0}$.

Матрицю системи векторів-рядків простору $\mathbb{R}^{n+1}$ можна розглядати як систему лінійних рівнянь з n невідомими з розширеною матрицею $\left(A\middle|\vec{b}\right)$, а виконання рядкового елементарного перетворення матриці відповідатиме елементарному перетворенню для системи цих векторів.

Теорема. Ненульові вектори-рядки матриці у східчастій формі є лінійно незалежними.

Отже, рангом матриці називається кількість ненульових рядків у східчастій формі.

Теорема. Рядковий і стовпцевий ранг матриці співпадають.

<u>Властивості рангу матриці:</u>

1. При транспонуванні матриці її ранг не змінюється.

2. Якщо із матриці забрати нульовий рядок (нульовий стовпець), то ранг матриці не зміниться.

3. Ранг матриці не змінюється при її елементарних перетвореннях.

4. Ранг матриці рівний числу ненульових рядків у її ступінчатому вигляді.

►**Приклад 6.5.** Знайдемо ранг матриць**:**

а). $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

б). $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 10 \\ -1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$;

в). $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

г). $D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

а). В матриці A всі рядки нульові, отже система не має жодної лінійно незалежної підсистеми, тобто $r(A) = 0$.

б). Оскільки другий стовпець матриці B нульовий, а третій та четвертий лінійно виражається через перший, то підсистема, яка складена із першого стовпця є максимально лінійно незалежною підсистемою системи стовпців матриці B, а значить $r(B) = 1$.

в). Три перших стовпці матриці C лінійно незалежні. Її четвертий стовпець є лінійною комбінацією першого, другого та третього з коефіцієнтами $\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ відповідно. П'ятий стовпець матриці дорівнює першому, помноженому на $\frac{7}{3}$. Отже, максимальне число лінійно незалежних стовпців матриці C дорівнює числу 3, тобто $r(C) = 3$.

г). Оскільки ранг матриці трикутного вигляду дорівнює кількості діагональних елементів, які не дорівнюють нулю то $r(D) = 3$.

► **Приклад 6.6.** Обчислити ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 11 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

1. Поміняємо перший і другий рядок місцями для того, щоб елемент $a_{11} \neq 0$.

2. Щоб отримати в першому стовпці всі нулі крім першого (a_{11}), перший рядок помножимо на (-1) і додамо до третього рядка; перший рядок помножимо на (-2) і додамо до четвертого

рядка.

3. Щоб отримати нулі у другому стовпчику під елементом a_{22}, другий рядок додамо до третього рядка; другий рядок помножимо на 3 і додамо до четвертого рядка.

4. Вилучимо нульові рядки.

$$\begin{pmatrix}0&1&7&1\\1&3&11&3\\1&2&4&2\\2&3&1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&11&3\\0&1&7&1\\1&2&4&2\\2&3&1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&11&3\\0&1&7&1\\0&-1&-7&-1\\0&-3&-21&-3\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&3&11&3\\0&1&7&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&11&3\\0&1&7&1\end{pmatrix}.$$

Ранг матриці $r(A) = 2$.

Відповідь: $r(A) = 2$. ◄

► **Приклад 6.7.** Знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&2&4&3\\2&5&1&-1&0\\-3&-16&-1&7&3\\5&4&3&3&3\end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Від першого рядка матриці віднімемо другий:

$$\begin{pmatrix}1&-6&1&5&3\\2&5&1&-1&0\\-3&-16&-1&7&3\\5&4&3&3&3\end{pmatrix}.$$

До другого, третього та четвертого рядків матриці додамо перший помножений відповідно на числа (-2), 3 і (-5):

$$\begin{pmatrix}1&-6&1&5&3\\0&17&-1&-11&-6\\0&-34&2&22&12\\0&34&-2&-22&-12\end{pmatrix}.$$

До третього та четвертого рядків матриці додамо другий помножений на числа 2 та (-2):

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 17 & -1 & -11 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці $r(A) = 2$.

Відповідь: $r(A) = 2$. ◄

Обчислення рангу матриця за допомогою обвідних мінорів

Означення 6.5. Мінором обвідним до мінора $r -$ го порядку будемо називати мінор порядку більшого за r, що містить в собі даний мінор $r -$ го порядку.

Метод обвідних мінорів полягає в тому, що потрібно переходити від мінорів менших порядків до мінорів більших порядків; якщо вже знайдено мінор $r -$ го порядку M_r, відмінний від нуля, то далі потрібно обчислювати лише ті мінори $(r+1) -$ ого порядку, які обводять мінор M_r (а не всі підряд). Якщо вони всі дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює r. За початковий мінор $2 -$ го порядку, зручно вибирати той мінор, що стоїть у лівому верхньому куті (так зручніше тоді обраховувати обвідні мінори); якщо ж цей мінор дорівнює нулю, то за початковий беруть інший.

► **Приклад 6.8.** Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Для знаходження рангу даної матриці, скористаємось методом обвідних мінорів.

$$M_2 = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

$$M_3^I = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_3^{II} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_3^{III} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_3^{IV} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки обвідні мінори третього порядку дорівнюють нулю, а мінор другого порядку відмінний від нуля, то ранг матриці A дорівнює 2.

Відповідь: $r(A) = 2$. ◄

Інколи все таки зручно знаходити ранг матриці зведенням її до ступінчастого вигляду, адже метод обчислення рангу матриці за допомогою обвідних мінорів є громіздким, бо іноді потрібно обраховувати більше десяти визначників, що не зовсім зручно.

Завдання для самостійного опрацювання

Завдання 1. Знайти ранг матриці методом елементарних перетворень.

Варіант 1	Варіант 2
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -6 & -1 & 13 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Варіант 3	Варіант 4
$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 6 & 13 \end{pmatrix}$
Варіант 5	Варіант 6
$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
Варіант 7	Варіант 8
$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$
Варіант 9	Варіант 10
$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -6 & -1 & 13 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
Варіант 11	Варіант 12
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 4 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & -3 \\ 4 & -2 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ 7 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 6 & 13 \end{pmatrix}$
Варіант 13	Варіант 14

$\begin{pmatrix}6 & -2 & 2 & 0\\ 2 & 4 & -4 & 3\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 3 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 1 & 2 & -1 & 2\\ 1 & 3 & 0 & -1 & 1\\ 4 & 1 & 2 & -2 & 3\\ 0 & 5 & -2 & -1 & 1\end{pmatrix}$
Варіант 15	Варіант 16
$\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 2 & -3\\ 1 & 1 & -3 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 2 & -5\\ 3 & 4 & -2 & 2 & -2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 1 & -2 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 2 & 2 & 3\\ 5 & 7 & 4 & 3 & 6\end{pmatrix}$
Варіант 17	Варіант 18
$\begin{pmatrix}0 & -3 & 2 & 0\\ 2 & 1 & -4 & 3\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 3 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5 & 4 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 3 & 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & -5 & 3\\ 0 & 5 & -2 & -1 & 1\end{pmatrix}$
Варіант 19	Варіант 20
$\begin{pmatrix}5 & -2 & 2 & 0\\ 2 & 4 & -5 & 3\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 3 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 1 & 2 & -1 & 5\\ -1 & 5 & 0 & -1 & 1\\ 4 & 1 & 2 & 7 & 3\\ 0 & 5 & -2 & -1 & 1\end{pmatrix}$

Параграф 7. Дослідження СЛАР

Означення 7.1. Якщо A є $m \times n$ матрицею зі стовпцями $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ і $\vec{x} \epsilon \mathbb{R}^n$, то добутком матриці A на вектор $\vec{x}$ називається лінійна комбінація стовпців матриці A з використанням відповідних координат вектора $\vec{x}$:

$$A\vec{x} = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \dots\ \vec{a}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n.$$

Розглянемо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_{m.} \end{cases}$$

Введемо позначення $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$,…, $\vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{m.} \end{pmatrix}$. Тоді систему можна записати у вигляді векторного рівняння

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

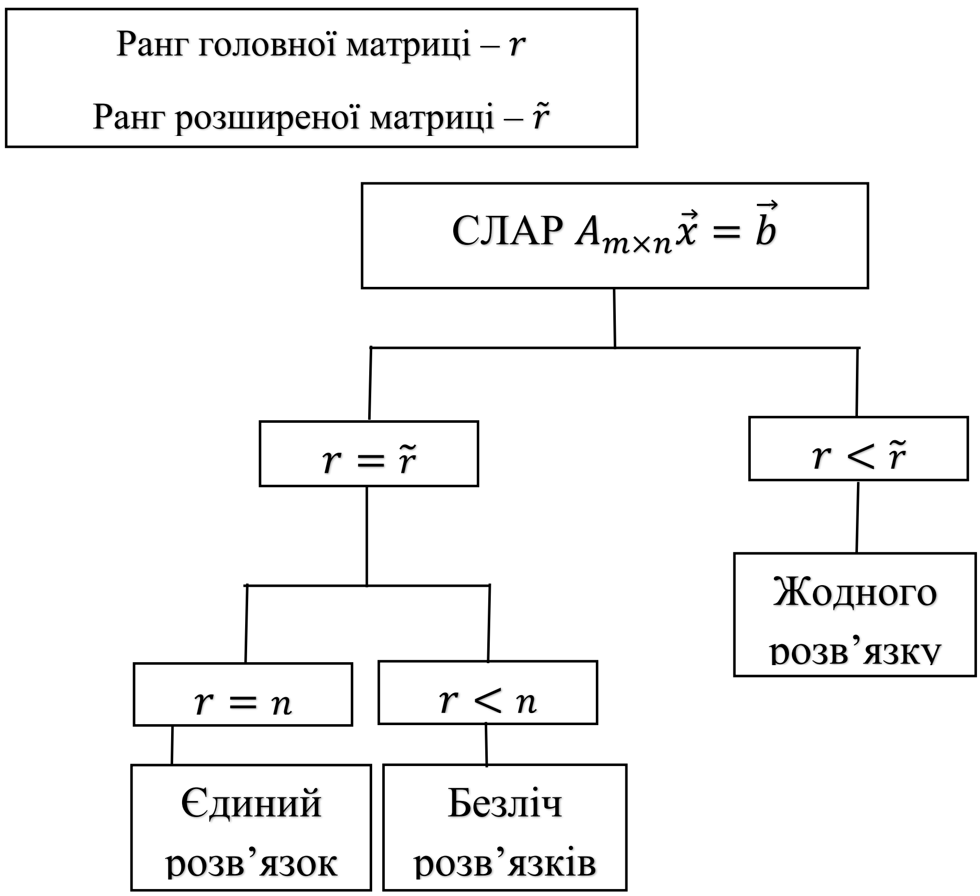
Цю рівність називатимемо векторною формою запису систем лінійних рівнянь.

Якщо головну матрицю системи позначити через A і ввести вектор невідомих $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, то систему можна записати у так званому матрично-векторному вигляді $A\vec{x} = \vec{b}$.

Теорема. (Кронекера – Капеллі). Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг головної матриці цієї системи співпадав із рангом її розширеної матриці.

<u>Наслідки із теореми.</u>

1. Якщо ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює кількості невідомих, то система має єдиний розв’язок.
2. Якщо ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці, але менший за кількість невідомих, то система має безліч розв’язків.



Розглянемо приклад 1.4. із параграфа 1 в якому потрібно було розв’язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$ методом Гауса. Звівши систему до ступінчастого вигляду отримали матрицю $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -7 & -5 \end{array}\right)$.

Ранг цієї головної матриці цієї системи дорівнює 2, і ранг розширеної матриці дорівнює 2. Отже система сумісна, а оскільки ранг менший за кількість невідомих то система має безліч розв’язків.

Записавши систему у матрично-векторному вигляді і надавши змінним, що відповідають вільній змінній деякого значення C, виразимо базисні змінні:

$x_2 = \frac{5}{3} - \frac{7}{3}C$, $x_1 = \frac{2}{3} + \frac{5}{3}C$. Запишемо загальний розв’язок у векторному вигляді:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{5}{3}C \\ \\ \frac{5}{3} - \frac{7}{3}C \\ \\ C \end{pmatrix}.$$

► **Приклад 7.1.** Дослідити на сумісність і знайти загальний розв’язок системи рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 \qquad - x_5 = 2. \end{cases}$

Розв’язання

Запишемо розширену матрицю системи.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Зведемо елементарними перетвореннями рядків розширену матрицю до східчастого вигляду.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

Оскільки ранг головної матриці дорівнює рангу розширеної матриці, тоді система лінійних рівнянь сумісна. Продовжимо перетворення.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -1/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, x_1 та x_3 – базисні змінні, а x_2, x_4, x_5 – вільні змінні, яким надамо довільних значень $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. Випишемо систему, яка відповідає перетвореній розширеній матриці і виразимо базисні змінні.

$$\begin{cases} x_1 + 2C_1 - \dfrac{1}{3}C_2 = 1; \\ x_3 - \dfrac{2}{3}C_2 + C_3 = 0. \end{cases}$$

Звідки
$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2C_1 + \frac{1}{3}C_2; \\ x_3 = \frac{2}{3}C_2 - C_3. \end{cases}$$

Загальний розв'язок системи:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 - 2C_1 + \frac{1}{3}C_2 \\ C_1 \\ \frac{2}{3}C_2 - C_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Дослідження однорідних СЛАР.

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \text{тобто } A\vec{x} = \vec{0}.$$

Властивості однорідної СЛАР:

1. Однорідна СЛАР завжди сумісна (вона завжди має нульовий розв'язок $\vec{x} = \vec{0}$).

2. Сума розв'язків однорідної СЛАР також є її розв'язком.

3. Добуток розв'язку однорідної СЛАР на будь-яке число також є розв'язком системи.

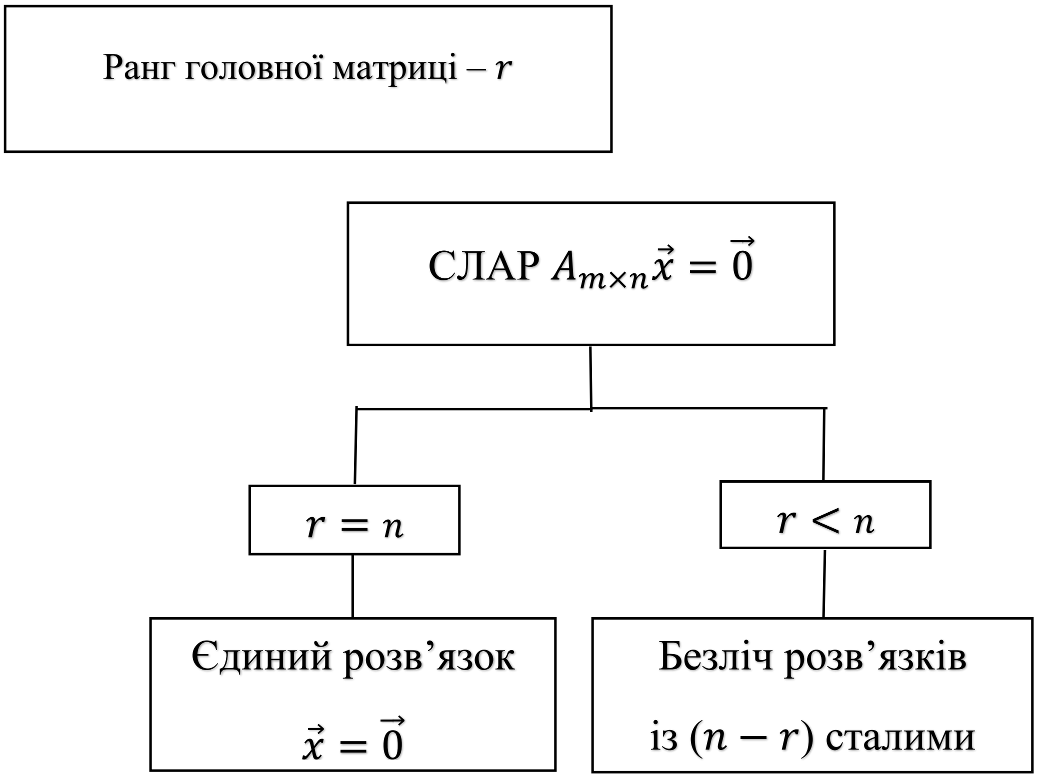
4. Будь-яка лінійна комбінація розв'язків однорідної СЛАР є розв'язком цієї системи.

Якщо ранг матриці $A_{m\times n}$ однорідної СЛАР дорівнює r, то система має $n-r$ лінійно незалежних (а, отже, ненульових) розв'язків.

Будь-яку сукупність з $n-r$ лінійно незалежних розв'язків однорідної СЛАР називають фундаментальною системою розв'язків (ФСР).

Теорема (про структуру загального розв'язку однорідної СЛАР). Якщо $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-r}\}$ – фундаментальна система розв'язку однорідної СЛАР, то загальний розв'язок цієї системи є лінійною комбінацією розв'язків $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-r}$:

$$\vec{x}_{\text{заг.одн.}} = C_1\vec{e}_1 + C_2\vec{e}_2 + \ldots + C_{n-r}\vec{e}_{n-r}.$$



► **Приклад 7.2**. Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0; \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0; \\ 4x_1 - 4x_2 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Розв'яжемо систему методом Жордана-Гауса. Складемо матрицю системи:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \\ -4 & -4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&3&-1&1\\0&1&1&0&0\\0&0&1&-1/2&5/8\\0&0&-8&4&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1/2&-7/8\\0&1&0&1/2&-5/8\\0&0&1&-1/2&5/8\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Отже, ранг матриці дорівнює 3, x_1, x_2, x_3 – базисні змінні, $x_4 = C_1,\ x_5 = C_2$ – вільні змінні. Перетворена матриця відповідає системі:

$$\begin{cases}x_1+\dfrac{1}{2}C_1-\dfrac{7}{8}C_2=0;\\x_2+\dfrac{1}{2}C_1-\dfrac{5}{8}C_2=0;\\x_3-\dfrac{1}{2}C_1+\dfrac{5}{8}C_2=0.\end{cases}$$

Звідки
$$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}C_1+\frac{7}{8}C_2;\\x_2=-\frac{1}{2}C_1+\frac{5}{8}C_2;\\x_3=\frac{1}{2}C_1-\frac{5}{8}C_2.\end{cases}$$

Отже, загальний розв’язок системи:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}C_1+\dfrac{7}{8}C_2\\-\dfrac{1}{2}C_1+\dfrac{5}{8}C_2\\\dfrac{1}{2}C_1-\dfrac{5}{8}C_2\\C_1\\C_2\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\\-\dfrac{1}{2}\\\dfrac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\dfrac{7}{8}\\\dfrac{5}{8}\\-\dfrac{5}{8}\\0\\1\end{pmatrix}=$$
$$=C_1\vec{e}_1+C_2\vec{e}_2.$$

Фундаментальна система розв’язків: $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$. ◄

Дослідження неоднорідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо неоднорідну систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad A\vec{x} = \vec{b}$$

і відповідну їй однорідну систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \quad A\vec{x} = \vec{0}.$$

Теорема (про структуру загального розв'язку неоднорідної СЛАР). Загальний розв'язок неоднорідної СЛАР дорівнює сумі загального розв'язку відповідної однорідної СЛАР і деякого частинного розв'язку неоднорідної СЛАР.

Продемонструємо на прикладі 7.1, де потрібно було дослідити на сумісність і знайти загальний розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 \qquad - x_5 = 2, \end{cases}$ теорему про структуру загального розв'язку системи.

Перепишемо загальний розв'язок системи:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 - 2C_1 + \frac{1}{3}C_2 \\ C_1 \\ \frac{2}{3}C_2 - C_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійного опрацювання

Завдання 1. Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь.

Варіант 1	Варіант 2
$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_3 - x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_2 - 6x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$
Варіант 3	Варіант 4
$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ -2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 0. \end{cases}$
Варіант 5	Варіант 6
$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 0. \end{cases}$
Варіант 7	Варіант 8
$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_5 = 0, \\ x_2 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 0. \end{cases}$

Варіант 9	Варіант 10
$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3+3x_4=0, \\ 2x_1+x_2-3x_3+x_5=0, \\ 4x_1+7x_2+2x_3+3x_4+x_5=0, \\ -x_1-7x_2-3x_3-15x_4+2x_5=0. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1-x_3+x_4+3x_5=0, \\ x_2-2x_3+x_4+x_5=0, \\ x_1+2x_2-x_4-4x_5=0, \\ x_1+x_2+x_3+5x_5=0. \end{cases}$
Варіант 11	Варіант 12
$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_4+2x_5=0, \\ x_1+2x_3+x_4-2x_5=0, \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_1+2x_2-4x_3-x_4+6x_5=0. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1-2x_2+2x_3+x_4=0, \\ -x_1+3x_2-2x_3+x_4=0, \\ 5x_1-x_2+2x_3-4x_4=0, \\ 6x_1+3x_2+3x_4=0. \end{cases}$
Варіант 13	Варіант 14
$\begin{cases} 2x_1-x_3+x_4+5x_5=0, \\ x_1-x_3+x_4+3x_5=0, \\ x_1+3x_3+x_3+x_4=0, \\ -3x_2+2x_3+4x_4+x_5=0. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1+x_3+2x_4=0, \\ 2x_1-3x_3+x_4=0, \\ 3x_2-5x_3-3x_4=0, \\ x_1-x_2+x_3+x_4=0. \end{cases}$
Варіант 15	Варіант 16
$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_4-x_5=0, \\ x_1-x_2-2x_3-x_4-2x_5=0, \\ 2x_1+3x_2-2x_3+x_4+x_5=0, \\ -2x_2+2x_3-x_4+3x_5=0. \end{cases}$	$\begin{cases} -x_1-3x_2+2x_3+2x_4=0, \\ 3x_1+3x_2-2x_3+x_4=0, \\ 5x_1-x_2+2x_3+9x_4=0, \\ 3x_1+3x_2+3x_4=0. \end{cases}$

Підсумкова контрольна робота

Варіант 1.

1. Знайти значення многочлена $(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ від матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гауса, Крамера та матричним методом:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 1, \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$$

3. Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду та розкладанням за елементами третього рядка.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & -4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & 8 & 5 \end{vmatrix}.$$

4. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

5. Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Варіант 2.

1. Знайти значення многочлена $(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ від матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гауса, Крамера та матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

3. Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду та розкладанням за елементами третього рядка.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 7 & 5 \end{vmatrix}.$$

4. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \cdots & \ldots & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}.$

5. Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Варіант 3.

1. Знайти значення многочлена $(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ від матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гауса, Крамера та матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -1, \\ 7x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases}$$

3. Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду та розкладанням за елементами третього рядка.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$

5. Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 \phantom{{}+2x_3} + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Варіант 4.

1. Знайти значення многочлена $(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ від матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Розв’язати систему лінійних рівнянь методом Гауса, Крамера та матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -1, \\ 7x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases}$$

3. Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду та розкладанням за елементами третього рядка.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 4 & -4 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

5. Знайти фундаментальну систему розв’язків та загальний розв’язок однорідної системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 \qquad + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Список використаних джерел

1. Авдєєва Т. В., Шраменко В. М. Лінійна алгебра в задачах та прикладах. Збірник задач для студентів І курсу ФМФ НТУУ «КПІ» / Т. В. Авдєєва, В. М. Шраменко. – Київ, НТУУ «КПІ», 2016. – 206 с.

2. Апатенок Р. Ф. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии / Р. Ф. Апатенок, А. М. Маркина, В. Б. Хейнман. – Минск: Вышэйшая школа, 1990. – 287 с.

3. Апатенок Р. Ф. Элементы линейной алгебры / Рогнеда Федоровна Апатенок. – Минск: Вышэйшая школа, 1977. – 256 с.

4. Безущак О. О., Ганюшкін О. Г., Кочубінська Є. А. Завдання до практичних занять з лінійної алгебри: навч. посіб. / О. О. Безущак, О. Г. Ганюшкін, Є. А. Кочубінська – К. : Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2016. – 255 с.

5. Белоусов И. В. Матрицы и определители: учебное пособие по линейной алгебре. –Кишинев, 2006. – 101 с.

6. Гриньов Б. Г., Кириченко І. К. Вища алгебра: Підручник для технічних навчальних закладів. – Харків: Гімназія, 2008. – 182.

7. Давидов О. С., Шестаков С. С. Визначники та методи їх обчислення : методична розробка для студ. усіх спец. / Національний авіаційний ун-т; уклад. О. С. Давидов, С. С. Шестаков. – К. : НАУ, 2002. – 68 с

8. Збірник задач по алгебрі / Під ред.. А.І.Косторкіна: Посібник для ВНЗ.–Вид.3, вип. і доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ,2001. – 464 с.

9. Ильин А.В., Позняк Э.Г.. Линейная алгебра. - М.: Наука, 1974.

10. Махомета Т. М. Аналітична геометрія і лінійна алгебра. Частина 1. Модуль 1: Елементи лінійної алгебри. Модуль 2: Елементи векторної алгебри : Навчальний посібник для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів : / укл. Т.М. Махомета, 3-тє вид. за редакц. канд. фіз.-мат. наук, доцента Хазіна Г.А. – Умань. – Алмі. – 2013. – 122с**.**

11. Панасенко О. Б. Лекції з лінійної алгебри / О. Б. Панасенко. – Вид. 2-е, доповн. – Вінниця : ТОВ «Нілан-ЛТД», 2015. – 222 с.

12. Проскурняков І. В. Збірник задач по лінійній алгебрі: Навч. Посібник. – СПб.: Лань, 2010.– 480 с.

13. Шуб Ц. О. Вища алгебра. Випуск III: Методичні рекомендації до проведення практичних занять. – Харків : Видавництво Харківського університету, 1964.

14. Шихобалов Л. С. Матрицы и определители. – СПб., 2015. – 55 с.