В.Є. Березовський, М.М. Гузій, В.М. Дякон,
Л.Є. Ковальов, М.О. Медведєва

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ
ПРАКТИЧНИЙ КУРС

Навчальний посібник
Друге видання, перероблене і доповнене

Умань – 2021 рік

УДК 330.45(075)
Д70

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (лист № 1/11-2008 від 14.03.2011)

Д70 **Дослідження операцій. Практичний курс**: Навч. посіб. – 2-ге вид., перероб. і доп. / В.Є. Березовський, М.М. Гузій, В.М. Дякон, Л.Є. Ковальов, М.О. Медведєва. – Умань: ВПЦ «Візаві», 2021. –229 с.

Посібник містить викладення основних питань дослідження операцій. Представлені моделі управління запасами, методи прогнозування, деякі задачі систем масового обслуговування, методи мережевого планування, елементи теорії ігор, деякі методи імітаційного моделювання. Розглянуті питання застосування інтегрованого середовища MathCad для розв'язання задач дослідження операцій.

Теоретичний матеріал супроводжується значною кількістю прикладів, після кожного розділу подані питання для самоконтролю та вправи для самостійного розв'язування. В кінці посібника запропоновані варіанти підсумкової контрольної роботи.

Посібник може бути використаний як додаткова література при викладанні дисципліни «Чисельні методі» для здобувачів вищої освіти спеціальності **122** «Комп'ютерні науки».

УДК 330.45(075)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

У посібнику достатньо просто викладені необхідні основи математичного апарату і приклади його використання. Викладання матеріалу проведене майже без доведення – основний наголос зроблений на оволодіння навиків використання математичного апарату. Кожен розділ супроводжується розв'язанням характерних задач і відповідних застосувань. Посібник містить питання для самоконтролю і значну кількість вправ до кожного розділу.

У посібнику введений розділ 7, який містить основні відомості з теорії ймовірностей, необхідні для засвоєння матеріалу підручника.

У розділі 8 розглянуті основи роботи в інтегрованому середовищі MathCad та приклади розв'язування задач дослідження операцій за його допомогою.

В кінці посібника містяться варіанти завдань контрольної роботи.

Завдяки достатньому об'єму теоретичного матеріалу і значної кількості прикладів, пропонована книга може служити навчальним посібником для студентів заочної форми навчання.

Розділи 1, 2, 7 написані Березовським В.Є. та Дяконом В.М., розділи 3, 5, 6 – Ковальовим Л.Є., розділи 4, 8 – Гузієм М.М. та Медведєвою М.О.

Ми будемо вдячні читачам за відгуки про навчальний посібник. Всі зауваження і побажання щодо змісту книги просимо надсилати на електронну адресу: leokova60@ukr.net

РОЗДІЛ 1
ДЕТЕРМІНОВАНІ МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ

Як у бізнесі, так й у виробництві звичайно прийнято підтримувати розумний запас матеріальних ресурсів або комплектуючих для забезпечення безперервності виробничого процесу. Традиційно запас розглядається як неминучі витрати, коли занадто низький рівень запасу призводить до дорогоцінних зупинок виробництва, а занадто високий до „омертвіння” капіталу. Задача управління запасами визначає рівень запасу, який урівноважує два розглянутих граничних випадки.

Важливим фактором, який визначає формулювання та розв’язання задачі управління запасами, є те, що об’єм попиту на запас, який зберігається (в одиницю часу) може бути або *детермінованим* (достовірно відомим), або *стохастичним* (описаним імовірнісним розподілом). У цьому розділі розглядаються детерміновані моделі управління запасами.

1.1. Узагальнена модель управління запасами

Природа задачі управління запасами визначається неодноразовим розміщенням та отриманням замовлень заданих об’ємів продукції (у подальшому – запаси, які зберігаються) у певні моменти часу. З цієї точки зору ***стратегія управління запасами*** повинна давати відповідь на наступні два питання:

1. Яку кількість запасу, який зберігається, замовляти?
2. Коли замовляти?

Відповідь на перше питання визначає *економічний розмір замовлення* шляхом мінімізації наступної функції витрат:

$$\begin{pmatrix} \textit{Сумарні витрати системи} \\ \textit{управління запасами} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \textit{Витрати на} \\ \textit{придбання} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \textit{Організаційні} \\ \textit{витрати} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \textit{Витрати на} \\ \textit{зберігання запасу} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \textit{Втрати від} \\ \textit{дефіциту запасу} \end{pmatrix}.$$

Всі ці вартості повинні бути виражені як функції шуканого об'єму замовлення та інтервалу часу між замовленнями.

1. *Витрати на придбання* визначаються вартістю одиниці продукції (запасу, який зберігається). Ця вартість може бути сталою або із скидкою, яка залежить від об'єму замовлення.
2. *Організаційні витрати* являють собою сталі витрати, які пов'язані з оформленням та доставкою продукції. Найчастіше ці витрати не залежать від об'єму замовлення.
3. *Витрати на зберігання запасу* являють собою витрати, які пов'язані із зберіганням на складі. Цей вид витрат містить як відсоток на інвестиційний капітал, так і вартість збереження, утримання і догляду.
4. *Втрати від дефіциту запасу* – це втрати, які обумовлені відсутністю запасу необхідної продукції. Вони містять як потенційні втрати прибутку, так і більш суб'єктивну вартість, яка пов'язана з втратою довіри клієнтів.

Відповідь на друге питання (коли замовляти?) залежить від типу системи управління запасами, яка розглядається. Якщо система передбачає *періодичний контроль* стану запасу (наприклад, щотижневий, або щомісячний), момент надходження нового замовлення співпадає з початком періоду. Якщо ж в системі передбачений *неперервний контроль* стану запасу, нові замовлення розміщуються тоді, коли рівень запасу опускається до заздалегідь визначеного значення, яке називається *точкою поновлення замовлення*.

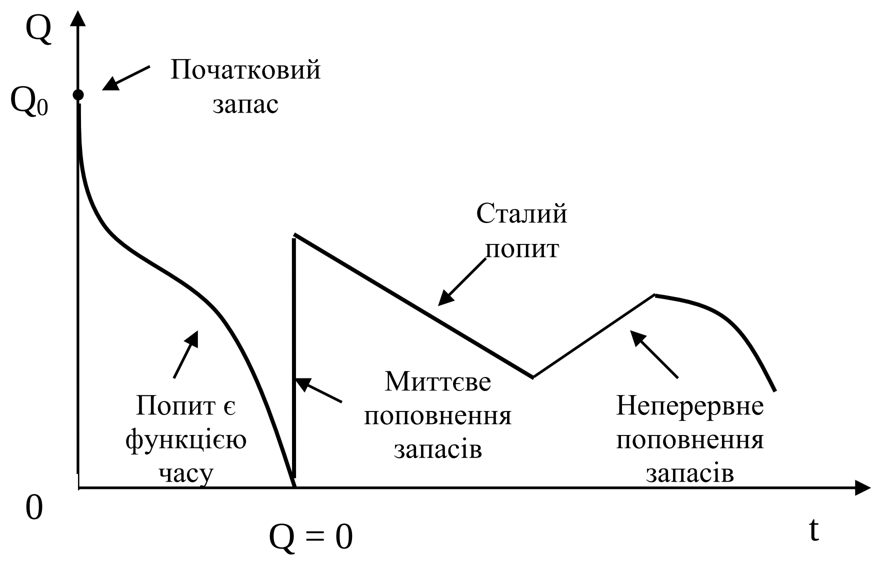


Рис. 1.1

Моделі управління запасами охоплюють два типи детермінованих моделей: *статичні* та *динамічні*. В статичних моделях розглядаються ситуації, коли об’єм попиту на продукцію, яка зберігається (запас), є сталим у часі. В динамічних моделях об’єм попиту є функцією часу. На рис. 1.1. подані можливі графіки зміни запасу Q, який є на складі, у часі t.

1.2. Класична задача економічного розміру замовлення

Найпростіші моделі управління запасами характеризуються сталим у часі попитом, миттєвим поповненням запасу та відсутністю дефіциту.

Введемо позначення:

q – об’єм замовлення (кількість одиниць продукції);

v – інтенсивність попиту (вимірюються в одиницях продукції на одиницю часу);

b – організаційні витрати (сталі витрати, які не залежать від розміру замовлення, вимірюються у грошових одиницях);

s – вартість продукції (розглядається один вид продукції, ціна одиниці якої стала);

h – витрати на зберігання (витрати на одиницю продукції, яка зберігається, в одиницю часу);

t_0 – тривалість циклу замовлення (вимірюється у часових одиницях).

Рівень запасу змінюється згідно з функцією, графік якої зображений на рис. 1.2. Замовлення об’єму q розміщується та поповнюється миттєво, коли рівень запасу дорівнює нулю. Потім запас рівномірно витрачається з сталою інтенсивністю попиту v.

Тривалість циклу замовлення для цього прикладу дорівнює

$$t_0 = \frac{q}{v}.$$

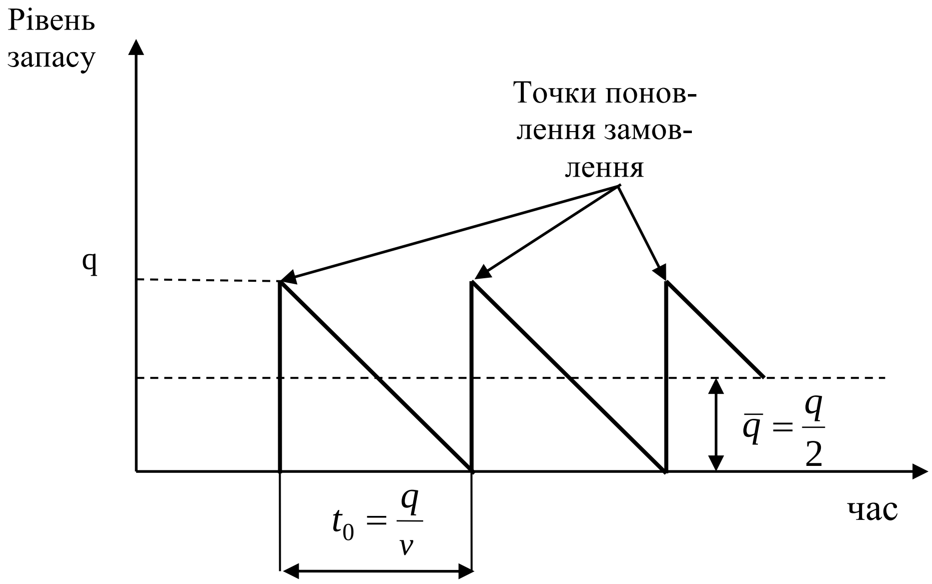


Рис. 1.2

Середній рівень запасу визначається співвідношенням

$$\bar{q} = \frac{q}{2}.$$

Сумарні витрати *в одиницю часу* можна представити як функцію від q у наступному вигляді

$$c(q)=c_1+c_2+c_3=\frac{b+svt_0+h\left(\frac{q}{2}\right)t_0}{t_0}=\frac{b}{t_0}+sv+\frac{hq}{2}=\frac{bv}{q}+sv+\frac{hq}{2},$$

де c_1 – організаційні витрати в одиницю часу;

c_2 – вартість замовленої продукції в одиницю часу;

c_3 – витрати на зберігання запасу в одиницю часу.

Оптимальне значення об'єму замовлення q визначається шляхом мінімізації за q функції $c(q)$.

Припускаючи, що q є неперервною змінною, отримуємо необхідну умову мінімуму

$$\frac{dc(q)}{dq}=-\frac{bv}{q^2}+\frac{h}{2}=0.$$

Вказана умова є також й достатньою, так як функція $c(q)$ опукла. Розв'язок даного рівняння визначає економічний об'єм замовлення

$$q^*=\sqrt{\frac{2bv}{h}}.$$

Отже, оптимальна стратегія управління запасами розглянутої моделі формулюється наступним чином: замовляти $q^*=\sqrt{\frac{2bv}{h}}$ одиниць продукції через кожні $t_0^*=\frac{q^*}{v}$ одиниць часу.

В дійсності поповнення запасу не може відбуватися миттєво у момент розміщення замовлення, як передбачалось раніше. Для більшості реальних ситуацій існує *термін виконання* замовлення L (часове запізнення) від моменту його розміщення до реального постачання, як показано на рис. 1.3. У цьому випадку точка поновлення замовлення має місце, коли рівень запасу знижується до $L\cdot v$ одиниць.

На рис. 1.3. показано зміну рівня запасу в часі у припущені, що термін виконання замовлення L менше тривалості циклу замовлення t_0^*, що у загальному випадку виконується не завжди. У протилежному випадку ($L > t_0^*$) визначається *ефективний* термін L_e виконання замовлення у вигляді

$$L_e = L - nt_0^*,$$

де n - найбільше натуральне число, що не перевищує $\frac{L}{t_0^*}$, тобто $n = \left[\frac{L}{t_0^*}\right]$ – ціла частина числа. Таке рішення виправдано тим, що після n циклів (тривалістю t_0^* кожний) ситуація управління запасами стає такою, якщо б інтервал між розміщенням одного замовлення та отриманням іншого дорівнював L_e.

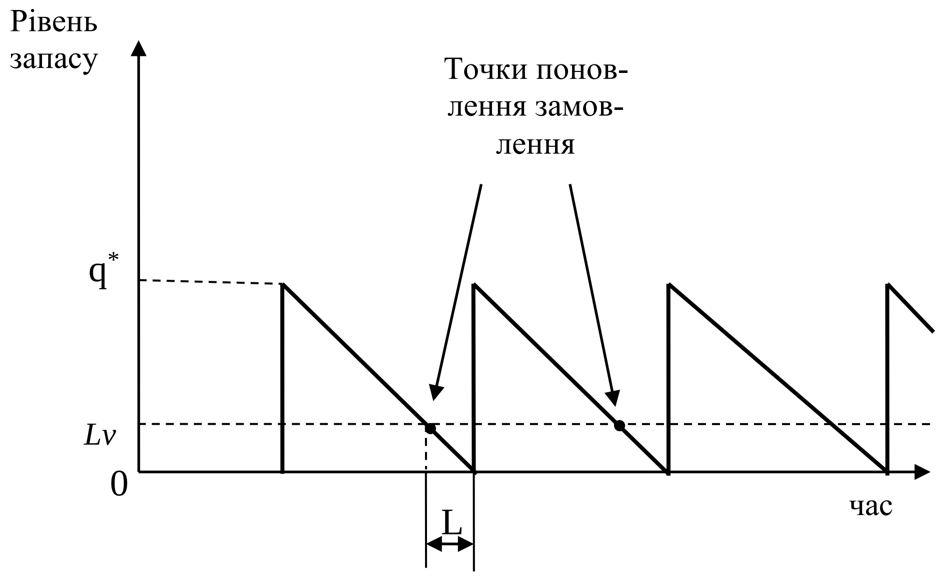


Рис. 1.3

Отже, точка поновлення замовлення має місце при рівні запасу $L_e v$ одиниць продукції та стратегія управління запасами може бути сформульована наступним чином:

замовляти q^* одиниць продукції, як тільки рівень запасу знизиться до $L_e v$ одиниць.

Приклад 1.1.

Неонові лампи замовляються на оптовому складі з інтенсивністю 100 шт. на добу. Адміністрація складу замовляє ці лампи з певною періодичністю. Вартість розміщення замовлення на закупівлю ламп складає 100 у.г.о. Вартість зберігання однієї лампи на складі оцінюється в 0,02 у.г.о. на добу. Термін виконання замовлення від моменту його розміщення до реального постачання дорівнює 12 діб. Треба визначити оптимальну стратегію замовлення неонових ламп.

Розв'язання. На основі наведених даних маємо наступне:

v = 100 одиниць на добу

b = 100 у.г.о. за замовлення

h = 0,02 у.г.о. за зберігання однієї лампи на добу

L = 12 діб.

Отже,

$$q^* = \sqrt{\frac{2bv}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 100}{0{,}02}} = 1000\,(\text{ламп})$$

Відповідна тривалість циклу складає

$$t_0^* = \frac{q^*}{v} = \frac{1000}{100} = 10\,(\text{діб}).$$

Так як термін виконання замовлення L = 12 діб перебільшує тривалість циклу $t_0^* = 10$ діб, необхідно обчислити L_e.

$$n = \left[\frac{L}{t_0^*}\right] = \left[\frac{12}{10}\right] = [1{,}2] = 1.$$

Отже,

$$L_e = L - nt_0^* = 12 - 1 \cdot 10 = 2(\text{доби}).$$

Тому точка поновлення замовлення має місце при рівні запасу

$$L_e v = 2 \cdot 100 = 200(\text{ламп}).$$

Оптимальна стратегія замовлення неонових ламп може бути сформульована наступним чином:

замовляти 1000 ламп, як тільки рівень їх запасу зменшується до 200 одиниць.

Добові витрати, які пов'язані із збереженням запасу відповідно до оптимальної стратегії, дорівнюють

$$c(q^*) = \frac{bv}{q} + \frac{hq}{2} = \frac{100 \cdot 100}{1000} + \frac{0{,}02 \cdot 1000}{2} = 20(\text{у.г.о.})$$

1.3. Задача економічного розміщення замовлення з розривами цін

Представлена у цьому підрозділі модель управління запасами відрізняється від розглянутої у попередньому підрозділі 1.2 тим, що продукція може бути придбана зі знижкою, якщо об'єм замовлення q перевищує деякий фіксований рівень y. Таким чином, ціна одиниці продукції S визначається як

$$S = \begin{cases} S_1, \text{ якщо } q \le y, \\ S_2, \text{ якщо } q > y, \end{cases}$$

де $S_1 > S_2$.

Отже, витрати на придбання продукції в одиницю часу дорівнюють

$$c_2 = \begin{cases} \dfrac{S_1 q}{t_0} = vS_1,\ q \le y \\ \dfrac{S_2 q}{t_0} = vS_2,\ q > y \end{cases}.$$

Запишемо загальні витрати в одиницю часу наступним чином:

$$c(q) = \begin{cases} c_1(q) = vS_1 + \dfrac{bv}{q} + \dfrac{hq}{2} \\ c_2(q) = vS_2 + \dfrac{bv}{q} + \dfrac{hq}{2} \end{cases}.$$

Графіки функцій $c_1(q)$ та $c_2(q)$ подані на рис.1.4. Так як значення цих функцій відрізняються тільки на сталу величину $v(S_1 - S_2)$, то точки їх мінімуму співпадають та знаходься у точці

$$q_m = \sqrt{\frac{2bv}{h}}.$$

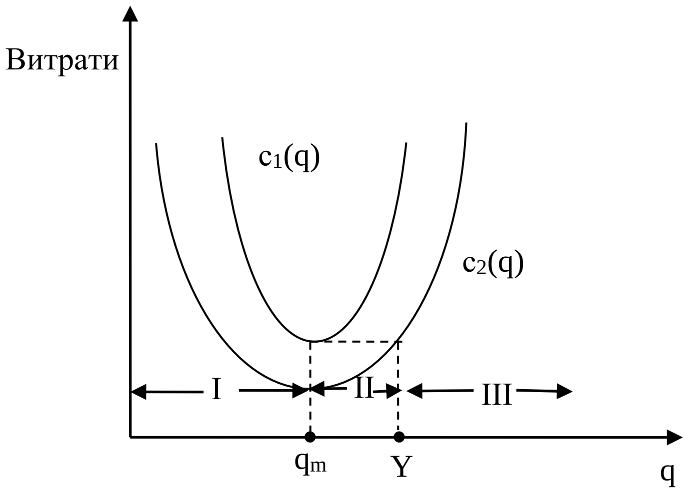
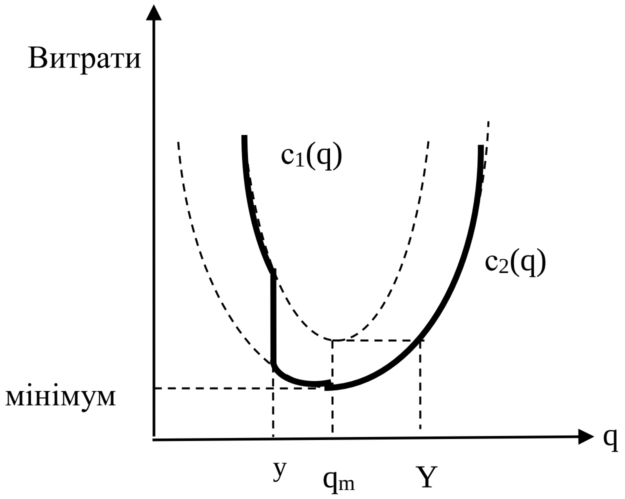
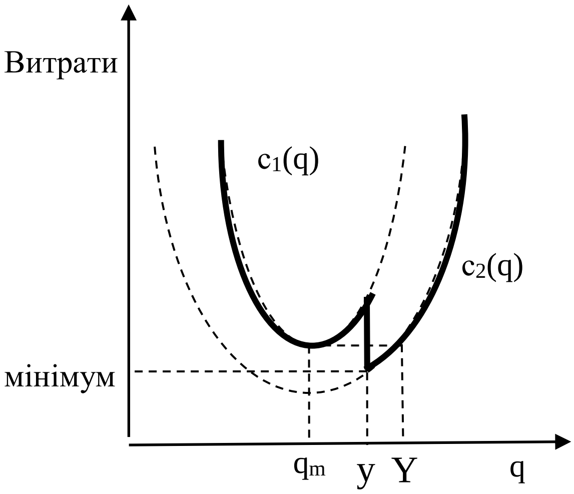


Рис. 1.4

Графік функції витрат $c(q)$, якщо йти від менших значень аргументу q, співпадає з графіком функції $c_1(q)$ до точки $q = y$, в якій змінюється ціна продукції, а потім співпадає з графіком функції $c_2(q)$. Рис.1.4. показує, що визначення оптимального об'єму замовлення q^* залежить від того, де знаходиться точка розриву ціни y по відношенню до q_m (вказаним на рис.1.4. областям I, II, та III, які визначені як інтервали $[0, q_m)$, $[q_m, Y)$ та $[Y, \infty)$ відповідно).

Величина $Y > q_m$ визначається з рівняння $c_2(Y) = c_1(q_m)$.



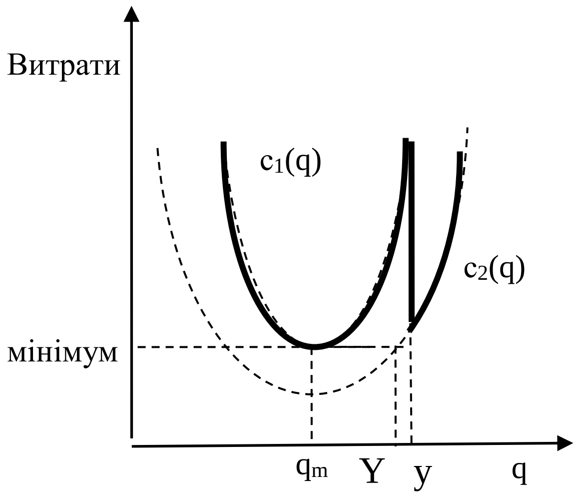


Випадок 1: y в області I,

$q^* = q_m$

Випадок 2: y в області II,

$q^* = y$



Випадок 3: y в області III,

$q^* = q_m$

Рис. 1.5

Рис. 1.5. показує, як визначається оптимальне значення q^*:

$$q^* = \begin{cases} q_m, & \text{якщо } y \text{ знаходиться в області I або III} \\ y, & \text{якщо } y \text{ знаходиться в області II} \end{cases}.$$

Приклад 1.2.

Фірма, яка виготовляє деякий виріб, закуповує у великій кількості основну сировину по 3 у.г.о. за 1 кг. Ціна може бути знижена до 2,5 у.г.о. за 1 кг при умові, що фірма закуповує більше 1000 кг. За день виготовляється біля 150 виробів, і на кожен з них треба 1,25 кг сировини. На складі зберігаються великі об'єми сировини, що коштує 0,02 у.г.о. в день за 1 кг. Вартість розміщення замовлення на великий об'єм сировини складає 20 у.г.о. Термін виконання замовлення дорівнює 2 дні. Треба визначити оптимальну стратегію управління запасами.

Розв'язання. Витрати сировини за один день складають

$$v = 150 \cdot 1{,}25 = 187{,}5 (\textit{кг}/\textit{день}).$$

Також маємо

h = 0,02 у.г.о./(кг·день)

b = 20 у.г.о

L = 2 дні

S_1 = 3 у.г.о./кг

S_2 = 2,50 у.г.о./кг

y = 1000 кг

Крок 1. Обчислюємо

$$q_m = \sqrt{\frac{2bv}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 187{,}5}{0{,}02}} = 612{,}37 (\textit{кг})$$

Так, як $y = 1000$ більше $q_m = 612{,}37$, переходимо до кроку 2.

Крок 2. Знаходимо Y з рівняння

$$c_2(Y) = c_1(q_m)$$

$$S_2 v + \frac{bv}{Y} + \frac{hY}{2} = S_1 v + \frac{bv}{q_m} + \frac{hq_m}{2}$$

$$2{,}5 \cdot 187{,}5 + \frac{20 \cdot 187{,}5}{Y} + \frac{0{,}02Y}{2} = 3 \cdot 187{,}5 + \frac{20 \cdot 187{,}5}{612{,}37} + \frac{0{,}02 \cdot 612{,}37}{2}$$

Після спрощення маємо

$$0{,}01Y^2 - 106Y + 3750 = 0$$

Розв'язком цього рівняння при виконанні умови $Y > q_m$ буде $Y = 10564{,}5$, що більше q_m.

Отже, область II: $[612{,}37;\ 10564{,}5]$,

область III: $[10564{,}5;\ \infty]$.

Так як $y = 1000$ знаходиться в області II, то оптимальний об'єм замовлення дорівнює

$$q^* = y = 1000\,кг.$$

При заданому терміну виконання замовлення в 2 дні точкою поновлення замовлення є

$$2v = 2 \cdot 187{,}5 = 375\,кг.$$

Отже, оптимальна стратегія управління запасами формулюється таким чином: замовляти 1000 кг сировини, коли рівень запасу зменшується до 375 кг.

1.4. Модель виробничих постачань

В класичній моделі передбачалось, що надходження продукції на склад відбувається або миттєво або з деяким терміном запізнення відразу всього об'єму замовлення. Розглянемо випадок, коли продукція надходить на склад безпосередньо з виробничої лінії. Вважається, що надходження продукції відбувається неперервно. Модель задачі у цьому випадку називається моделлю *виробничих постачань*. Позначимо через p швидкість надходження продукції на склад. Ця величина дорівнює кількості товарів за одиницю часу.

Потрібно визначити оптимальний розмір продукції, який мінімізує загальні витрати.

Графік змін моделі виробничих постачань поданий на рис.1.6.

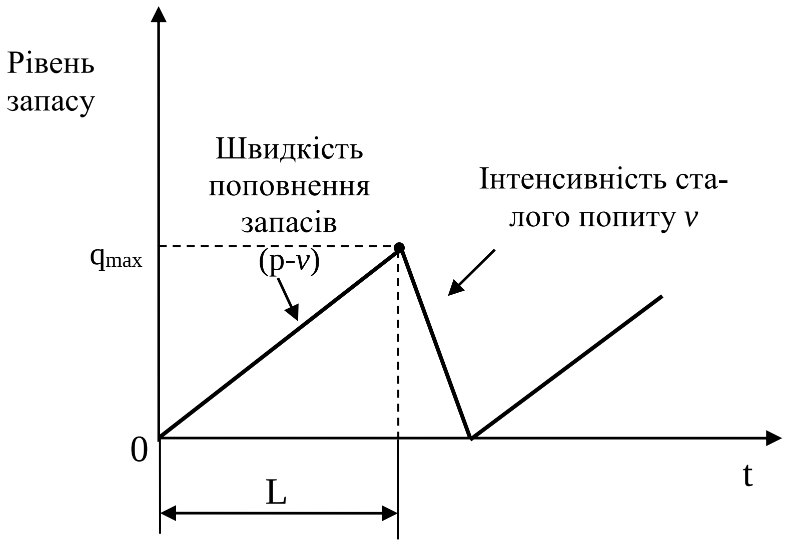


Рис. 1.6.

Загальні витрати за одиницю часу, як і для загальної задачі, складають

$$c = c_1 + c_2 + c_3$$

$$c_1 = \frac{bv}{q},\ c_2 = Sv.$$

Для отримання середнього рівня запасів треба врахувати, що максимальний рівень запасів

$$q_{max} = (p - v)L,$$

а $q = pL$ - кількість продукції, що постачається за один виробничий цикл.

Тоді середній рівень запасів складає половину максимального та дорівнює

$$\overline{q} = \frac{q_{max}}{2} = \frac{(p-v)L}{2} = \frac{(p-v)q}{2p}$$

($L = \dfrac{q}{p}$ - тривалість постачання).

Отже,

$$c = \frac{bv}{q} + Sv + \frac{(p-v)h}{2p}q$$

Знаходячи розв'язок рівняння

$$\frac{dc}{dq} = 0,$$

отримуємо оптимальний розмір партії моделі виробничих постачань:

$$q_{опт} = \sqrt{\frac{2pbv}{(p-v)h}}.$$

Приклад 1.3.

Інтенсивність рівномірного попиту на телевізори, які випускаються фірмою, складає 2000 шт. у рік. Організаційні витрати дорівнюють 20 тис. грн. Ціна телевізора складає 1 тис. грн., витрати на зберігання дорівнюють 0,1 тис. грн. у розрахунку на один телевізор на рік. Запаси на складі поповнюються з швидкістю 4000 телевізорів у рік. Виробнича лінія починає діяти, як тільки рівень запасів на складі стає рівним нулю та продовжує працювати доти, доки не буде виготовлено q телевізорів.

Знайти розмір партії, яка мінімізує всі витрати. Визначити кількість постачань протягом року, час тривалості постачання, тривалість циклу, максимальний рівень запасів при умові, що розмір партії оптимальний.

Розв'язання. Дана модель задачі є моделлю виробничих постачань з наступними параметрами:

v = 2000 шт/рік; b = 20 тис. грн.; h = 0,1 тис. грн./(шт. рік);

S = 1 тис. грн./шт.; p = 4000 шт/рік.

Графік зміни запасів поданий на рис.1.7.

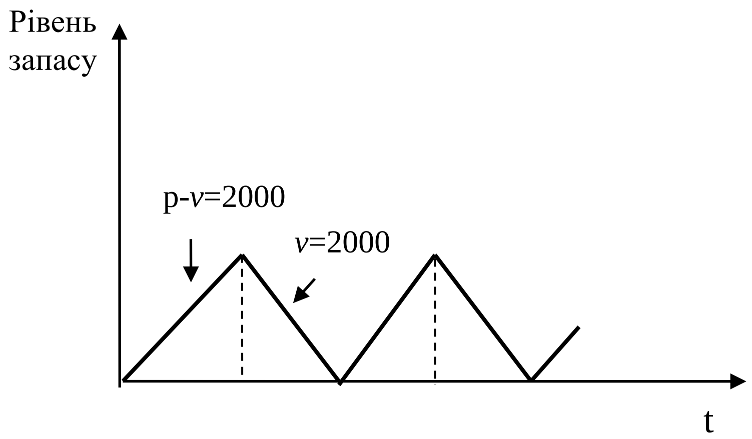


Рис. 1.7

Максимальний рівень запасів:

$$q_{\max} = \frac{(p-v)q}{p} = \frac{2000 \cdot q}{4000} = \frac{q}{2}$$

Середній рівень запасів:

$$\bar{q} = \frac{q_{\max}}{2} = \frac{q}{4}$$

Знайдемо оптимальні об'єми постачань, тривалість постачання, тривалість циклу.

$$q_{опт} = \sqrt{\frac{2pbv}{(p-d)h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4000 \cdot 20 \cdot 2000}{2000 \cdot 0,1}} = 1265(шт).$$

Кількість партій за рік:

$$n = \frac{v}{q} = \frac{2000}{1265} \approx 1,58.$$

Тривалість постачання:

$$L = \frac{q}{p} = \frac{1265}{4000} = 0,31625(років) \approx 115(днів).$$

Тривалість циклу:

$$t_0 = \frac{1}{n} = \frac{365}{1,6} \approx 231(день).$$

Отже, оптимальна стратегія управління запасами полягає в наступному:

отримувати на склад 1265 телевізорів протягом 115 днів. Тривалість циклу – 231 день, а кількість постачань протягом року – 1,58.

Питання для самоконтролю

1. Які моделі управління запасами називаються детермінованими? Які стохастичними?
2. У чому полягає стратегія управління запасами?
3. Типи детермінованих моделей управління запасами.
4. Основні характерні ознаки класичної задачі управління запасами.
5. Як залежить розв'язок задачі управління запасами від точки розриву цін?
6. Які задачі відносяться до моделі виробничих постачань?

Вправи

1.1. Протягом 10 днів спостерігалися наступні зміни запасів:

- початковий запас дорівнює нулю, а наступні дві доби товари надходили на склад неперервно і рівномірно по 500 шт. в день, витрати запасів не відбувалося;
- в наступні чотири дні попит на товари, що є в запасі був неперервним і рівномірним та дорівнював 250 шт. в день, поповнення запасів не відбувалося;
- в наступні чотири дні попит у товарах змінився до 200 шт. в день, з метою задоволення попиту і поповнення запасів кожного дня на склад доставлялось 300 шт. (постачання на склад і з складу проходили рівномірно і неперервно).

Накресліть графік зміни запасів для 10-деного періоду, визначте величину запасів на складі до кінця періоду. Вирахуйте середній рівень запасів для всього періоду.

1.2. Фірмі, яка займається будівництвом пароплавів, необхідно 20 000 заклепок у рік, які витрачаються з сталою інтенсивністю. Організаційні витрати складають 0,5 тис. грн. за партію, ціна однієї заклепки – 10 грн. Витрати на зберігання однієї заклепки оцінені у 12,5 % її вартості.

Знайти оптимальний розмір партії постачання, оптимальну тривалість циклу та оптимальну кількість постачань у рік.

1.3. Відомо, що витрати на виконання замовлення – 2 гр. од., кількість товару, який реалізується за рік – 1000 шт., закупівельна ціна одиниці товару – 5 гр. од., витрати на зберігання – 20 % від закупівельної ціни. Знайти найбільш оптимальний розмір замовлення.

1.4. Система управління запасами деякого товару описується основною моделлю. Кожен рік з сталою інтенсивністю попит складає

15 000 од. товару, витрати на організацію постачання складають 10 грн. на партію, ціна одиниці товару – 30 грн., а витрати на її зберігання 7,5 грн. у рік. Знайти оптимальний розмір партії, кількість постачань, тривалість циклу.

1.5. Інтенсивність рівномірного попиту – 2000 од. товару у рік. Організаційні витрати для однієї партії – 20 тис. грн., ціна одиниці товару – 1 тис. грн., витрати на зберігання запасу – 100 грн. за од. товару у рік. Знайти оптимальний розмір партії, припускаючи, що система описується основною моделлю.

1.6. Відділ постачання компанії запропонував дві стратегії управління запасами.

Стратегія 1. Об’єм замовлення 150 одиниць при точці поновлення замовлення в 50 одиниць та терміну виконання замовлення 10 днів.

Стратегія 2. Об’єм замовлення 200 одиниць при точці поновлення замовлення в 75 одиниць та терміну виконання замовлення 15 днів.

Яку з двох стратегій слід затвердити? Якби ви відповідали за розробку стратегії управління запасами, яка була б ваша рекомендація?

1.7. Комплектуючі продаються по 25 грн. за одиницю, але передбачається 10% знижка при закупівлі партії від 150 одиниць та вище. Компанія за день використовує 20 одиниць комплектуючих. Вартість розміщення замовлення складає 50 грн., вартість зберігання одиниці товару складає 0,30 грн. за день. Чи варто компанії скористатися знижкою?

1.8. Підприємець має стабільний місячний попит на товар у кількості 50 од. Товар він закуповує у постачальника за ціною 6 гр. од. за штуку, до того ж витрати на оформлення постачання та інші підготовчі операції складають у кожному випадку 10 гр. од.

Як часто підприємець повинен поповнювати свій запас товарів, якщо витрати на зберігання дорівнюють 20 % ціни товару?

1.9. Фірма замість оптимального об'єму партії товару q в основній моделі постачань замовила на 50% більше. На скільки зміняться загальні витрати на зберігання запасів і організацію постачань порівняно з оптимальним варіантом постачань товару?

1.10. Фірма замість оптимального об'єму партії товару q в основній моделі постачань замовила на 50% менше. На скільки зміняться загальні витрати на зберігання запасів і організацію постачань порівняно з оптимальним варіантом постачань товару?

1.11. Відомо, що витрати на виконання замовлення рівні 10 гр. од., річний попит на товар – 1470 т, оптимальний розмір партії постачань – 35 т. Визначити річні витрати на виконання замовлення.

1.12. Товар, що користується попитом, продається з середньою швидкістю 45 од. на день, а виготовляється з швидкістю 450 од. на день. Витрати на організацію і доставку товару складає 5 тис. грн. за партію, витрати на зберігання запасів дорівнюють 20 % вартості товару. Вартість товару складається наступним чином: заробітна плата обслуговуючого персоналу складає 0,4, витрати на матеріали – 0,5, накладні витрати 0,6 грн. за одиницю товару (для кожної одиниці товару ці значення додаються). Знайти оптимальний розмір партії і мінімальні загальні витрати, пов'язані з утворенням запасу (в розрахунку на одиницю товару за рік). У році – 300 робочих днів.

1.13. Інтенсивність попиту в моделі виробничих постачань складає чверть швидкості виробництва, яка дорівнює 20 000 од. товару за рік. Організаційні витрати для однієї партії дорівнюють 150 грн., а витрати на зберігання одиниці товару протягом року – 5 грн. Визначити оптимальний розмір партії.

1.14. Фірма, яка виступає в якості посередника, зобов'язується постачати заводу 5 одиниць необхідного вузла агрегату в день. Керівництво фірми вирішило доставляти вузли на свій склад партіями, кожна з яких містить 150 од. і вони розраховані на 30-дений термін. За один прострочений день у постачанні вузлів заводу фірма виплачує штраф 200 грн. Витрати на зберігання одного вузла були оцінені в 250 грн. за тиждень, організаційними витратами можна знехтувати.

Знайти оптимальний рівень запасів і тривалість періоду дефіциту, що йому відповідає. Обчисліть зменшення витрат при оптимальній політиці управління запасами у порівнянні з політикою, коли на початок кожного періоду на склад поступає 150 вузлів.

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИ ПРОГНОЗУВАННЯ

2.1. Вступ

Приймаючи рішення, ми визначаємо плани на майбутнє. Отже, дані, які при цьому використовуються, повинні відповідати майбутнім подіям. Наприклад, при фінансовому плануванні необхідно передбачити структуру грошового потоку у майбутньому на основі структури поточних грошових потоків. Майже у кожній галузі людської діяльності зустрічаються явища, які необхідно вивчати в розвитку у часі. При цьому практично завжди у закономірний хід явища втручається випадкова компонента у вигляді випадкових імпульсів, випадкових шумів, випадкових похибок і т.д.

Прогнозування – це передбачення майбутнього стану того чи іншого фактору, яке базується на наукових методах та індукції.

В економічному прогнозуванні використовують такі дві групи методів прогнозування:

1. Евристичні, в основі яких покладено використання логічних прийомів, методичних правил, підходів.

2. Фактографічні, в основу яких покладено використання фактичних матеріалів, які дають характеристику змін в досліджуваному об'єкті.

Ми розглянемо три найпростіші методи прогнозування, що відносяться до другої групи та мають справу з часовими рядами.

Часовий ряд – це послідовність чисел; його елементи – це значення деякого процесу, який відбувається у часі. Вони виміряні у послідовні моменти часу, звичайно, через рівні проміжки.

Як правило, числа, які складають часовий ряд і називаються елементами часового ряду, нумеруються відповідно номера моменту часу (t), до якого вони відносяться (наприклад, x_1, x_2, x_3 і т.д.).

Введемо позначення:

y_t – дійсне (спостережуване) значення випадкової величини y в момент часу t;

y_t^* – розрахункове значення (оцінка) випадкової величини y в момент часу t;

ε_t – випадковий компонент (шум) в момент часу t.

2.2. Прогнозування з використанням змінного середнього

При використанні цього методу основне припущення полягає в тому, що числовий ряд є стійким у тому *змісті*, що його елементи суть реалізації наступного випадкового процесу:

$$y_t = b + \varepsilon_t ,$$

де b - невідомий сталий параметр, який оцінюється на основі поданої інформації.

Припускається, що випадкова похибка ε_t має нульове математичне сподівання та сталу дисперсію (тобто дисперсія випадкової величини ε_t однакова для всіх спостережуваних значень y_t). Крім того, припускається, що дані для різних періодів часу некорельовані.

Метод з використанням змінного середнього передбачає, що останні n спостережень є рівнозначно важливими для оцінки параметра b. Іншими словами , якщо у поточний момент часу t останніми n спостереженнями є y_{t-n+1}, y_{t-n+2}, ..., y_t, то значення, що оцінюється для моменту часу $t+1$ обчислюється за формулою:

$$y_{t+1}^* = \frac{y_{t-n+1} + y_{t-n+2} + \ldots + y_t}{n} .$$

Не існує чіткого правила для вибору кількості n бази методу середнього. Якщо є вагомі аргументи припущення, що спостереження протягом тривалого часу задовольняють моделі $y_t = b + \varepsilon_t$, то рекомендується обирати великі значення n. Якщо ж спостережувані значення, задовольняють наведеній моделі протягом коротких термінів часу, може бути достатнім і мале значення n. Звичайно, n обирають в межах від 2 до 10.

Приклад 2.1. В таблиці 2.1 представлені об'єми попиту на деякий виріб за минулі 24 місяці. Треба за допомогою змінного середнього дати прогноз попиту на наступний місяць ($t = 25$).

Таблиця 2.1

Місяць t	Попит y_t	Місяць t	Попит y_t	Місяць t	Попит y_t
1	46	9	50	17	70
2	56	10	56	18	66
3	54	11	47	19	57
4	43	12	56	20	55
5	57	13	54	21	52
6	56	14	42	22	62
7	67	15	64	23	70
8	62	16	60	24	72

Для того щоб перевірити придатність методу змінного середнього, проаналізуємо наведені дані. На рис.2.1 подані значення часового ряду y_t.

Графік показує, що спостерігається тенденція до зростання значень y_t з часом. Це взагалі-то означає, що змінне середнє не буде гарним прогнозом для майбутнього попиту. Зокрема, використання великої бази n для змінного середнього не придатне у цьому випадку, так як це призведе до пригнічення спостережуваній тенденції у зміні даних. Отже, якщо ми використаємо невелике значення для бази n, то тенденція у зміні даних буде відображена краще.

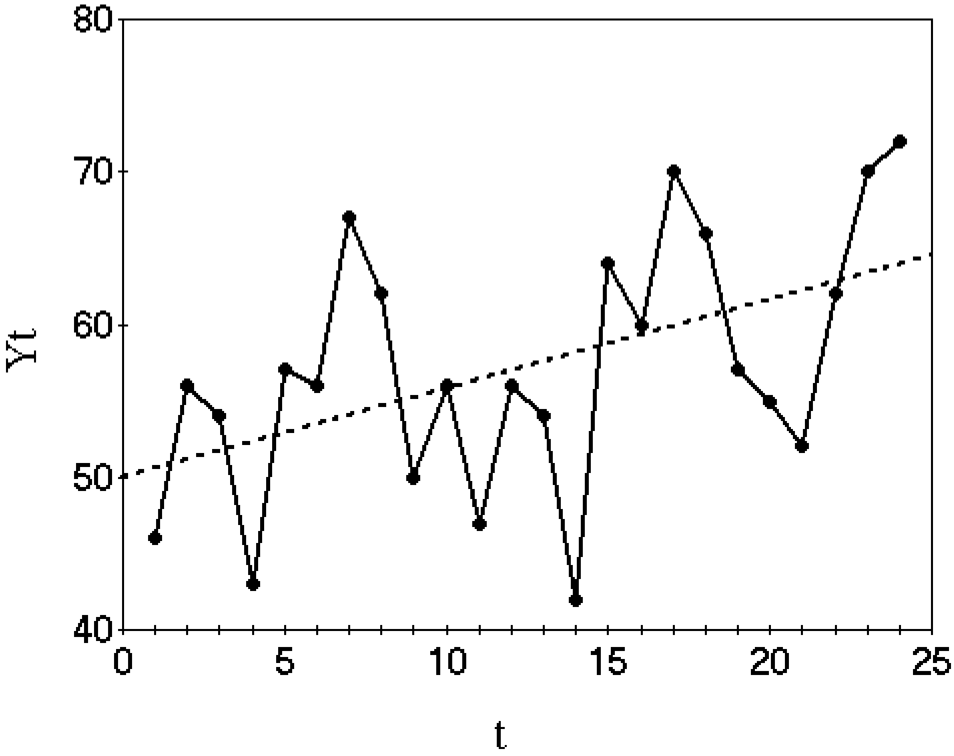


Рис.2.1

Приймемо значення $n=3$ в якості бази змінного середнього. Тоді оцінка попиту на наступний місяць $(t=25)$ буде дорівнювати середній величині попиту за 22, 23 та 24 місяці.

$$y_{25}^{*}=\frac{62+70+72}{3}=68\,(\text{одиниць}).$$

Оцінка величини попиту в 68 одиниць для 25 місяця буде використовуватись також при прогнозі попиту для $t=26$:

$$y_{26}^{*}=\frac{y_{23}+y_{24}+y^{*}{}_{25}}{3}=\frac{70+72+68}{3}=70\,(\text{одиниць}).$$

Коли значення реального попиту у 25 місяці буде відомим, його слід використати для обчислення нової оцінки об'єму попиту для 26 місяця у вигляді середньої величини попиту 23, 24 і 25 місяців.

2.3. Метод експоненціального згладжування

Прогнозування шляхом експоненціального згладжування передбачає, що імовірнісний процес визначається моделлю

$$y_t = b + \varepsilon_t .$$

Це припущення використовувалось і при розгляді методу змінного середнього. Метод експоненціального згладжування розроблений для того, щоб усунути недолік методу змінного середнього, який полягає у тому, що всі дані які використовуються при обчисленні середньої, мають однакову вагу. Зокрема метод експоненціального згладжування приписує більший ваговий коефіцієнт останньому спостереженню.

Визначимо величину α (0< α <1), як *константу згладжування*, і нехай відомі значення часового ряду для минулих t моментів часу

$$y_1, y_2, \ldots, y_t .$$

Тоді оцінка y_{t+1}^* для моменту часу $t+1$ обчислюється за формулою:

$$y_{t+1}^* = \alpha y_t + \alpha(1-\alpha) y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \ldots$$

Коефіцієнти при y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, ... поступово зменшуються. Тим самим ця процедура приписує більшу вагу останнім (за часом) даним.

Формулу для обчислення y_{t+1} можна привести до наступного (більш простого) вигляду:

$$y_{t+1}^* = \alpha y_t + (1-\alpha)\{\alpha y_t + \alpha(1-\alpha) y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-3} + \ldots\} = \alpha y_t + (1-\alpha) y_t^*$$

Отже, значення y_{t+1}^* можна обчислити рекурентно на основі значення y_t^*.

Обчислення згідно з цим рекурентним рівнянням починаються з того, що пропускається оцінка y_1^* та в якості оцінки для $t=2$ приймається спостережувана величина для $t=1$, тобто

$$y_2^* = y_1$$

Вибір константи згладжування є вирішальним моментом при обчисленні значення прогнозованої величини. Більше значення α приписує більшу вагу останнім спостереженням. На практиці значення α беруть в межах від 0,01 до 0,30.

Приклад 2.2. Застосуємо метод експоненціального згладжування до даних прикладу 2.1 при $\alpha = 0{,}1$.

В таблиці 2.2 містяться результати обчислень. При обчисленнях пропускається y_1^* та приймається, що

$$y_2^* = y_1 = 46 \text{ (одиниць)}$$

Таблиця 2.2

t	y_t	y_t^*	t	y_t	y_t^*
1	46	–	13	54	$0{,}1\cdot 56+0{,}9\cdot 51{,}63=52{,}07$
2	56	46	14	42	$0{,}1\cdot 54+0{,}9\cdot 52{,}07=52{,}26$
3	54	$0{,}1\cdot 56+0{,}9\cdot 46=47$	15	64	$0{,}1\cdot 42+0{,}9\cdot 52{,}26=51{,}23$
4	43	$0{,}1\cdot 54+0{,}9\cdot 47=47{,}7$	16	60	$0{,}1\cdot 64+0{,}9\cdot 51{,}23=52{,}50$
5	57	$0{,}1\cdot 43+0{,}9\cdot 47{,}7=47{,}23$	17	70	$0{,}1\cdot 60+0{,}9\cdot 52{,}50=53{,}26$
6	56	$0{,}1\cdot 57+0{,}9\cdot 47=48{,}21$	18	66	$0{,}1\cdot 70+0{,}9\cdot 53{,}26=54{,}93$
7	67	$0{,}1\cdot 56+0{,}9\cdot 48=48{,}98$	19	57	$0{,}1\cdot 66+0{,}9\cdot 54{,}93=56{,}04$
8	62	$0{,}1\cdot 67+0{,}9\cdot 48{,}98=50{,}79$	20	55	$0{,}1\cdot 57+0{,}9\cdot 56{,}04=56{,}14$
9	50	$0{,}1\cdot 62+0{,}9\cdot 50{,}79=51{,}91$	21	52	$0{,}1\cdot 55+0{,}9\cdot 56{,}14=56{,}02$
10	56	$0{,}1\cdot 50+0{,}9\cdot 51{,}91=51{,}72$	22	62	$0{,}1\cdot 52+0{,}9\cdot 56{,}02=55{,}62$
11	47	$0{,}1\cdot 56+0{,}9\cdot 51{,}72=52{,}15$	23	70	$0{,}1\cdot 62+0{,}9\cdot 55{,}62=56{,}26$
12	56	$0{,}1\cdot 47+0{,}9\cdot 52{,}15=51{,}63$	24	72	$0{,}1\cdot 70+0{,}9\cdot 56{,}26=57{,}63$

З наведених даних випливає, що оцінка для $t = 25$ дорівнює

$y_{25}^* = \alpha y_{24} + (1-\alpha)\cdot y_m^* = 0{,}1\cdot 72 + 0{,}9\cdot 57{,}63 = 59{,}07$ (одиниць).

Ця оцінка значно відрізняється від отриманої за допомогою методу змінного середнього (68 одиниць). Більше значення для α дасть оцінку більш близьку до оцінки методу змінного середнього.

2.4. Регресійний аналіз

Регресійний аналіз визначає зв'язок між *залежною* змінною (наприклад, попит на продукцію) та *незалежною* змінною (наприклад, часом). Часто застосовується формула регресії, яка описує наступну залежність (поліномна регресія) $y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \varepsilon$, де $b_0, b_1, \ldots, b_n$ - невідомі параметри. Випадкова похибка ε має нульове математичне сподівання та сталу дисперсію (тобто дисперсія випадкової величини ε однакова для всіх спостережуваних значень y).

Сама проста регресійна модель передбачає, що залежна змінна лінійна відносно незалежної змінної, тобто:

$$y^* = a + bx.$$

Слід відмітити, що деякі нелінійні залежності, які використовуються в економічних дослідженнях можуть бути зведені шляхом алгебраїчних перетворень та введення замін до лінійної залежності (табл. 2.3).

Таблиця 2.3

Функціональна залежність	Аналітичний вираз	Перетворення	Позначення
Степенева	$y = kx^{\lambda}$	$\ln y = \ln k + \lambda \ln x$	$\ln x = X$, $\ln y = Y$, $\ln k = A$, $\lambda = B$
Показникова	$y = kp^{x}$	$\ln y = \ln k + x \ln p$	$\ln y = Y$, $\ln k = A$, $\ln p = B$
Модифікована експоненціальна	$y = ke^{bx}$	$\ln y = \ln k + bx$	$\ln y = Y$, $\ln k = A$
Логістична	$y = \dfrac{p}{1 + ke^{-bx}}$	$\ln\left(\dfrac{p}{y} - 1\right) = \ln k - bx$	$\ln\left(\dfrac{p}{y} - 1\right) = Y$, $\ln k = A$
	$y = \dfrac{p}{1 + \left(\dfrac{k}{x}\right)^{b}}$	$\ln\left(\dfrac{p}{y} - 1\right) = b\ln k - b\ln x$	$\ln x = X$, $\ln\left(\dfrac{p}{y} - 1\right) = Y$, $b\ln k = A$
Ірраціональна	$y = \sqrt[n]{a + bx}$	$y^{n} = a + bx$	$y^{n} = Y$

Гіперболічна	$y=\dfrac{1}{a+bx}$	$\dfrac{1}{y}=a+bx$	$\dfrac{1}{y}=Y$
Дрібно-раціональна	$y=\dfrac{1}{(a+bx)^n}$	$\dfrac{1}{\sqrt[n]{y}}=a+bx$	$\dfrac{1}{\sqrt[n]{y}}=Y$
Функція Джон-сона	$\ln y=-\dfrac{p}{q+x}+c$	$\dfrac{1}{\ln y-c}=-\dfrac{q}{p}-\dfrac{1}{p}x$	$-\dfrac{q}{p}=A$, $-\dfrac{1}{p}=B$, $\dfrac{1}{\ln y-c}=Y$

Константи a і b лінійної регресії визначаються з часового ряду з використанням *методу найменших квадратів*, згідно з яким знаходяться значення цих констант при яких досягає мінімуму сума квадратів різниць між спостережуваними та обчисленими величинами.

Нехай (x_i , y_i) являє i -ту точку вихідних даних часового ряду ($i=1,2,\ldots,n$). Визначимо суму квадратів відхилень між спостережуваними та обчисленими величинами

$$S=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2$$

Значення коефіцієнтів a і b визначаються з відповідних умов мінімуму функції S:

$$\frac{\partial S}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)=0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)x_i=0.$$

Після алгебраїчних перетворень отримуємо наступний розв'язок рівнянь

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_ix_i-n\bar{y}\,\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$$

$$a=\bar{y}-b\bar{x},$$

де $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$.

Наведені співвідношення показують, що спочатку потрібно обчислити b, а потім величину коефіцієнту a.

Для того, щоб перевірити, наскільки лінійна модель $y^* = a + bx$ відповідає вихідним даним, необхідно обчислити *коефіцієнт кореляції* r за формулою

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - n\bar{y}\,\bar{x}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2\right)}},$$

де $-1 \le r \le 1$.

Якщо $r = \pm 1$, лінійна модель ідеально підходить для опису залежності між y та x. У загальному випадку, чим ближче $|r|$ до 1, тим лінійна модель краще описує експериментальні дані. Вважається, як правило, що лінійна модель підходить для вихідних даних, якщо

$$0{,}75 \le |r| \le 1.$$

Якщо ж $r = 0$, величини y та x можуть бути незалежними. В дійсності рівність $r = 0$ є лише необхідною, але недостатньою умовою незалежності змінних, так як можливий випадок, коли для двох залежних величин коефіцієнт кореляції буде дорівнювати нулю.

Приклад 2.3. Застосуємо модель лінійної регресії до даних прикладу 2.1.

Спочатку отримуємо наступне

$$\sum_{i=1}^{24} y_i t_i = 17824,\ \sum_{i=1}^{24} t_i = 300,\ \sum_{i=1}^{24} t_i^2 = 4900,\ \sum_{i=1}^{24} y_i = 1374,\ \sum_{i=1}^{24} y_i^2 = 80254.$$

Отже, $\bar{t} = 12{,}5$, $\bar{y} = 57{,}25$.

$$b = \frac{17842 - 24 \cdot 57{,}25 \cdot 12{,}5}{4900 - 24 \cdot 12{,}5^2} = 0{,}58,$$

$$a = 57{,}25 - 0{,}58 \cdot 12{,}5 = 50.$$

Оцінка попиту задається формулою

$$y^* = 50 + 0{,}58t\,.$$

Наприклад, при $t = 25$ отримуємо

$$y^* = 50 + 0{,}58 \cdot 25 = 64{,}5 \text{ одиниці.}$$

Обчислимо коефіцієнт кореляції

$$r = \frac{17842 - 24 \cdot 57{,}25 \cdot 12{,}5}{\sqrt{\left(4900 - 24 \cdot 12{,}5^2\right)\left(80254 - 24 \cdot 57{,}25^2\right)}} = 0{,}493\,.$$

Відносно невелике значення коефіцієнту кореляції вказує на те, що лінійна кореляція $y^* = 50 + 0{,}58t$ не зовсім придатна для вихідних даних.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. На які групи поділяються методи економічного прогнозування?
2. Які основні відмінності методу прогнозування з використанням змінного середнього та методу експоненціального згладжування?
3. У чому полягає завдання регресійного аналізу?

Вправи

2.1. Кількість мобільних телефонів, які продані за останні 24 місяці, наведена в таблиці 2.4.

Таблиця 2.4.

Місяць	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Продаж	25	15	30	38	58	62	85	88	60	40	40	38
Місяць	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Продаж	40	35	50	60	66	90	105	85	60	55	50	45

Дайте прогноз об'єму продаж на наступний місяць ($t = 25$) застосовуючи методи змінного середнього, експоненціального згладжування та лінійної регресії.

2.2. У табл. 2.5. містяться данні за десятирічний період про кількість людей, які відвідали туристичну зону на автобусі та автомобілі. Дайте прогноз на наступний 2010 рік.

Таблиця 2.5.

Рік	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Автобус	1042	1182	1224	1338	1455	1613	1644	1699	1790	1885
Автомобіль	500	522	540	612	715	790	840	900	935	980

2.3. У таблиці 2.6. подані данні про об'єм продаж універмагу (в мільйонах грн.) дайте прогноз про об'єм продаж на 2010 рік.

Таблиця 2.6.

Рік	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Продаж	21,0	23,2	23,2	24,0	24,9	25,6	26,6	27,4	28,5	29,6

РОЗДІЛ 3
СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ (СМО)

3.1. Марковські процеси. Потік подій

Марковський процес описує поведінку стохастичної системи, в якій для будь-якого моменту часу t_k, імовірнісні характеристики процесу у майбутньому залежать тільки від її стану у даний момент часу t_k і не залежать від того, коли і як система прийшла у цей стан.

Розглянемо дискретні моменти часу $\{t_n\}$, $n = 1,2,3,\ldots$ і нехай S_n - випадкова величина, яка характеризує стан системи у момент t_n. Сукупність випадкових величин $\{S_n\}$ утворює стохастичний процес. Отже, такий випадковий процес буде марковським, якщо настання наступного стану залежить тільки від безпосередньо попереднього стану системи:

$$P\{S_{k+1} = x_{k+1} | S_k = x_k, S_{k-1} = x_{k-1}, \ldots, S_1 = x_1\} = P\{S_{k+1} = x_{k+1} | S_k = x_k\}$$

для всіх можливих значень випадкових величин $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Імовірність $P\{S_{k+1} = x_{k+1} | S_k = x_k\}$ (іноді її називають *перехідною*) являє собою умовну ймовірність того, що система буде знаходитись в стані x_{k+1} в момент t_{k+1}, якщо в момент t_k вона знаходилась у стані x_k.

В стохастичних задачах дослідження операцій найчастіше дуже важко побудувати навіть математичну модель, яка б дозволила у явному (аналітичному) вигляді знайти величини, що нас цікавлять, в залежності від умов операції і елементів розв'язку. Однак в деяких особливих випадках таку математичну модель вдається побудувати.

Це відбувається як раз тоді, коли досліджувана операція являє собою (точно або наближено) *марковський процес.*

Приклад марковського процесу: система S – лічильник Гейгера, який реєструє радіоактивні частинки; стан системи у момент часу t характеризується показами лічильника – кількістю частинок, які надійшли до даного моменту. Нехай в момент t_0 лічильник показує S_0. Ймовірність того, що в момент $t_1 > t_0$ лічильник буде показувати якусь кількість частинок S_1, зрозуміло залежить від S_0, але не залежить від того, в які моменти надходили частинки до моменту t_0.

На практиці часто зустрічаються процеси, які якщо не точно марковські, то можуть у певному наближені розглядатися як марковські. По суті, будь-який процес можна розглядати як марковський, якщо всі параметри з «минулого», від яких залежить «майбутнє», включити у «теперішнє». Однак таке збагачення теперішнього за рахунок передісторії далеко не завжди буває корисним, так як часто приводить до величезної кількості параметрів, які треба враховувати (так зване «прокляття багатовимірності»).

В досліджені операцій найбільше значення мають так звані *марковські процеси з дискретними станами і неперервним часом*.

Процес називається *процесом з дискретним станом*, якщо його можливі стани S_1, S_2, S_3,... утворюють числову послідовність, та перехід системи із стану в стан відбувається «стрибком», практично миттєво.

Процес називається *процесом з неперервним часом*, якщо моменти можливих переходів із стану в стан не фіксовані заздалегідь, а невизначені, випадкові, якщо перехід може відбуватися у будь-який момент.

Введемо дуже важливе поняття теорії ймовірностей – поняття «потоку подій».

Потоком подій називається послідовність однорідних подій, які настають одна за одною у будь-які випадкові моменти. Наприклад: потік викликів оператора мобільного зв’язку; потік частинок, які реєструє лічильник Гейгера ; потік залізничних потягів.

Кажучи про «потік подій» треба мати на увазі, що тут термін «подія» має значення, яке дещо відрізняється від поняття «подія» в теорії ймовірностей. Там випадковою подією називається результат досліду, який має ту або іншу ймовірність. Події, що утворюють потік, самі по собі ймовірностей не мають. Ймовірностями характеризуються інші, похідні від них події, наприклад: «на інтервал часу Δt припадає хоч одна подія» або «проміжок часу між двома сусідніми подіями буде не менший t ».

Важливою характеристикою потоку подій є його *інтенсивність* λ – середня кількість подій, які припадають на одиницю часу. Інтенсивність потоку може бути як сталою ($\lambda = const$), так і змінною, яка залежить від часу t .

Потік подій називається *регулярним*, якщо події відбуваються одна за одною через певні, рівні проміжки часу. На практиці частіше зустрічаються потоки не регулярні, із випадковими інтервалами.

Потік подій називається *стаціонарним*, якщо ймовірність настання певної кількості подій протягом певного проміжку часу залежить тільки від довжини цього проміжку.

Потік подій називається *потоком без післядії*, якщо настання події не залежить від того, коли і скільки подій відбулося до цього моменту. Якщо K – час, який пройшов з моменту настання попередньої події, то властивість відсутності післядії виражається співвідношенням

$$P\{t > T + K \mid t > K\} = P\{t > T\}.$$

Потік подій називається *ординарним*, якщо неможлива одночасна поява двох або більше подій.

Потік подій називається ***простішим*** або ***стаціонарним пуасонівським***, якщо він володіє відразу трьома властивостями: стаціонарний, ординарний та немає післядії.

Для простішого потоку з інтенсивністю λ час між послідовними настаннями подій кількісно описується ***експоненціальним розподілом***, густина ймовірності якого має вигляд

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \qquad t > 0,$$

де математичне сподівання $M\{t\} = 1/\lambda$.

Для того щоб з'ясувати властивості експоненціального розподілу, сформулюємо основні аксіоми, на яких він ґрунтується.

Аксіома 3.1 Якщо $N(t)$ – кількість подій, які відбулися протягом часу $(0,t)$, то імовірнісний процес, що описує $N(t)$, має незалежні стаціонарні прирости; ймовірність настання події в інтервалі $(K, K+T)$ залежить тільки від його довжини T.

Аксіома 3.2 Ймовірність того, що подія настане на достатньо малому часовому інтервалі $h>0$, додатна, але менше 1.

Аксіома 3.3 На достатньо малому часовому інтервалі $h>0$ може відбуватися не більше однієї події, тобто $P\{N(h)>1\}=0$.

3.2. Формулювання задачі, характеристики та класифікація СМО

Часто у нашому повсякденному житті ми стикаємося з такими ситуаціями: черга покупців біля кас магазинів, поштових відділень і банків, очікування обслуговування в ресторані. Однак феномен очікування характерний не тільки для людей: група пасажирських літаків, які очікують дозволу на посадку в аеропорту; автомобілі, рух яких призупинено сигналом світлофора на шляху їх слідування; ряд станків, які вийшли з ладу і очікують ремонту; роботи, які поставлені в чергу для виконання на станку і т.п. Очікування є наслідком стохастичного характеру виникнення потреб в обслуговуванні і розкиду показників обслуговуючих систем, які називаються *системами масового обслуговування* (СМО).

Мета вивчення СМО полягає в тому щоб взяти під контроль деякі характеристики системи, встановити залежність між кількістю обслуговуємих одиниць та якістю обслуговування.

Результати дослідження СМО також можна використати для оптимізації моделі з вартісними характеристиками, в яких мінімізуються сумарні витрати, пов'язані з наданням послуг, та втрати, які обумовленні затримками в їх наданні. На рис. 3.1 зображена типова вартісна модель СМО. Витрати на обслуговування зростають із зростанням його рівня. У той же час, втрати які обумовлені затримками в наданні послуг, зменшуються із зростанням рівня обслуговування. Головною проблемою у такій моделі є труднощі оцінки втрат в одиницю часу, які обумовлені затримками в наданні послуг.

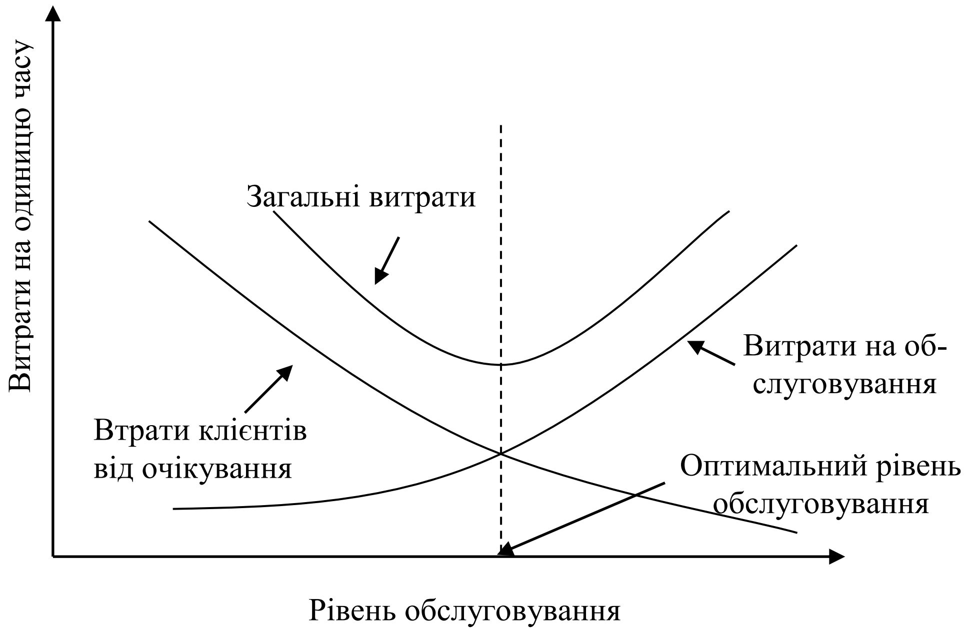


Рис. 3.1

Основними елементами СМО є джерело замовлень, їх вхідний потік, черга, канали обслуговування, вихідний потік. Схематично, це зображено на рис. 3.2.

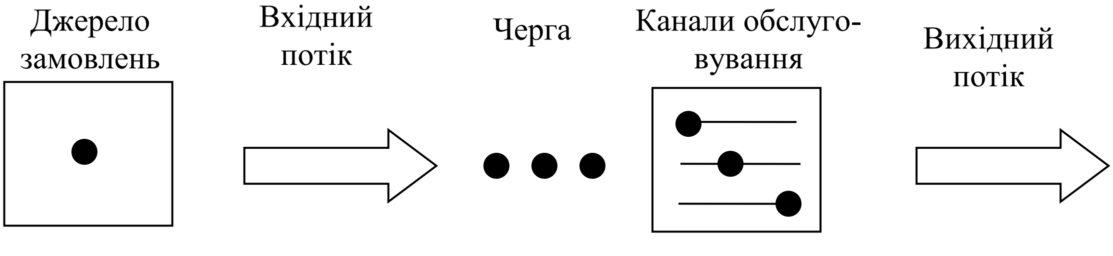


Рис. 3.2

В залежності від характеру формування черги СМО розрізняють:

1) системи з відмовами, в яких при зайнятості всіх каналів обслуговування замовлення не встає у чергу та покидає систему обслуговування;
2) системи з чергами, в яких замовлення встає у чергу, якщо на момент його надходження всі канали були зайняті.

СМО з чергою поділяються на різні види, в залежності від принципу побудови черги.

Черги можуть бути *обмежені* або *необмежені*. Обмеження можуть торкатися як довжини черги так й часу очікування.

За дисципліною черги розрізняють наступні СМО:

1) «перший прийшов – перший обслуговується» (FIFO – від англійського First-In-First-Out);
2) «останній прийшов – перший обслуговується» (LIFO – від англійського Last-In-First-Out);
3) випадковий відбір замовлень;
4) обслуговування з пріоритетом:
   а) абсолютний пріоритет, коли замовлення з більш високим пріоритетом «виштовхує» з обслуговування замовлення з нижчим пріоритетом;
   б) відносний пріоритет, коли обслуговування, яке вже розпочато, доводиться до кінця, а замовлення з більш високим пріоритетом має лише право на краще місце в черзі.

Існують СМО з так званим багатофазним обслуговуванням, які складаються з декількох етапів або фаз (наприклад, покупець в оптовому магазині повинен спочатку вибрати товар, потім оплатити його в касі, потім отримати на контролі).

За кількістю каналів обслуговування СМО поділяються на одноканальні і багатоканальні.

В залежності від розміщення джерела замовлень системи можуть бути відкритими (джерело знаходиться поза системою) і закритими (джерело знаходиться у самій системі). Приклад першої – дзвінки, які надходять на телефонну станцію; приклад другої – один робітник обслуговує групу станків, які час від часу потребують ремонту.

Найбільш застосовуваними характеристиками СМО є наступні:

1) Ймовірність простою обслуговування, коли немає замовлень $(n=0)$ – p_0;
2) Ймовірність відмови в обслуговуванні, тобто того, що замовлення залишить СМО без обслуговування – $P_{відм}$;
3) Відносна пропускна здатність (ймовірність обслуговування) – $Q=1-P_{відм}$;
4) Абсолютна пропускна здатність, тобто середня кількість замовлень, які обслуговуються в одиницю часу – $A=\lambda Q$;
5) Середня кількість зайнятих каналів – $\bar{c}$;
6) Середня кількість замовлень, що знаходяться в системі – L_s;
7) Середня кількість замовлень у черзі – L_q;
8) Середня тривалість перебування замовлення в системі – W_s;
9) Середня тривалість перебування замовлення у черзі – W_q.

3.3. Моделі народження і загибелі

Якщо СМО представити як марковський процес, то можна отримати аналітичні розв’язки для характеристик системи. При розгляді марковських процесів з дискретними станами та неперервним часом, зручно представляти, що всі переходи СМО із стану в стан відбуваються під дією потоків подій (вхідний потік, вихідний потік). Якщо всі потоки подій, що переводять систему з одного стану в інший – простіші (стаціонарні пуасонівські), то процес, який відбувається в системі, буде марковським.

Як ми вже вказували, простіші потоки подій описуються експоненціальним розподілом. Надалі буде показано, що експоненціальний розподіл автоматично визначає розподіл Пуассона і навпаки.

1. Модель чистого народження. У систему замовлення тільки надходять (приклад, оформлення свідоцтв про народження дітей). При заданій інтенсивності λ надходження замовлень в СМО та достатньо малому інтервалі часу $h>0$ з аксіом 3.1. – 3.3. випливає, що ймовірність відсутності в СМО замовлень дорівнює

$$p_0(h)=e^{-\lambda h}.$$

Дійсно, нехай $f(t)$ - густина ймовірності розподілу довжини часового інтервалу між послідовними настаннями випадкових подій ($t>0$). Очевидно, що

$$P\left\{\begin{matrix}\textit{інтервал часу між моментами}\\ \textit{настання двох послідовних}\\ \textit{випадкових подій не менше } h\end{matrix}\right\}=P\left\{\begin{matrix}\textit{протягом } h\\ \textit{подія не}\\ \textit{настає}\end{matrix}\right\}$$

У математичній формі це записується наступним чином:

$$\int_h^{\infty} f(t)dt=p_0(h).$$

Отже,

$$p_0(h)=\int_h^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}dt=\left(-e^{-\lambda t}\right)\Big|_h^{\infty}=e^{-\lambda h}.$$

Розкладемо вираз для $p_0(h)$ в ряд Маклорена:

$$p_0(h)=e^{-\lambda h}=1-\lambda h+\frac{(\lambda h)^2}{2!}-\ldots=1-\lambda h+0(h^2),$$

де $0(h^2)$ – залишковий член другого порядку малості за h.

Згідно з аксіомою 3.3 на достатньо малому інтервалі часу $h>0$ може настати не більше однієї події (надходження замовлення). Отже, при $h>0$

$$p_1(h)=1-p_0(h)=\lambda h.$$

Цей результат показує, що ймовірність надходження замовлення протягом інтервалу часу h прямо пропорційна h з коефіцієнтом пропорційності, що дорівнює інтенсивності надходжень λ.

Отримуємо на основі аксіом 3.1 – 3.3 розподіл Пуассона. Позначимо через $p_n(t)$ ймовірність надходження n замовлень протягом часу t. Отже, при достатньо малому $h > 0$ маємо

$$p_n(t+h) = p_n(t)(1-\lambda h) + p_{n-1}(t)\lambda h, \qquad n > 0,$$

$$p_n(t+h) = p_n(t)(1-\lambda h), \qquad n = 0.$$

З першого рівняння випливає, що надходження n замовлень протягом часу $t+h$ можливо у двох випадках: якщо маємо n надходжень протягом часу t та немає надходжень за час h або маємо $n-1$ надходження за час t та одне надходження за час h. Будь-які інші комбінації неможливі внаслідок аксіоми 3.3. Відповідно до умови незалежності стаціонарних приростів аксіоми 3.1 до правої частини рівняння застосуємо закон множення ймовірностей. У другому рівнянні відсутність надходження замовлень протягом часу $t+h$ може мати місце лише у випадку, коли немає надходження замовлень за час h.

Знайдемо похідні

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t),$$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} = -\lambda p_0(t).$$

Ця система рівнянь називається *рівняннями Колмогорова*.

Розв'язок наведених різнецево-диференціальних рівнянь має наступний вигляд:

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \quad , \quad n = 0,1,2,\ldots$$

У даному випадку ми отримали дискретну густину ймовірності *розподілу Пуассона* з математичним сподіванням

$$M\{n \,|\, t\} = \lambda t$$

надходжень замовлень за час t. Дисперсія розподілу Пуассона також дорівнює λt.

Отриманий результат означає, що кожен раз, коли часові інтервали між моментами послідовних надходжень замовлень розподілені за експоненціальним законом з математичним сподіванням $1/\lambda$, кількість надходжень замовлень в інтервалі часу t характеризується розподілом Пуассона з математичним сподіванням λt. Вірним є й обернене твердження.

2. Модель чистої загибелі. Замовлення тільки покидають систему (приклад, видача запасів з складу). У даній моделі передбачається, що СМО починає функціонувати, коли в момент часу $t = 0$ в ній знаходяться N замовлень та не допускається жодного нового надходження. Замовлення після завершення їх обслуговування вибувають із системи з інтенсивністю μ замовлень за одиницю часу.

Нехай $p_n(t)$ – імовірність того, що після часу t в системі залишається n замовлень. Для отримання різнецево-диференціальних рівнянь Колмогорова відносно $p_n(t)$ звичайно поступають таким же чином, як в моделі чистого народження. Тобто

$$\frac{dp_N(t)}{dt} = -\mu p_N(t),$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -\mu p_n(t) + \mu p_{n+1}(t), \qquad 0 < n < N,$$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \mu p_1(t).$$

Ці рівняння мають розв'язок

$$p_n(t) = \frac{(\mu t)^{N-n} e^{-\mu t}}{(N-n)!}, \quad n = 1,2,\ldots,N,$$

$$p_0(t) = 1 - \sum_{n=1}^{N} p_n(t),$$

який називається *зрізаним розподілом Пуассона.*

3. Узагальнена модель народження та загибелі. Розглядається СМО, в якій є як вхідний так і вихідний потоки замовлення.

Зробимо деякі зауваження. Рівняння Колмогорова дають можливість знайти всі ймовірності станів СМО як функції часу. При розгляді загальних СМО передбачається, що система функціонує протягом достатньо великого інтервалу часу, після якого в її роботі настає *стаціонарний режим*. Отже при $t \to \infty$ імовірності $p_n(t)$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ прямують до граничних (фінальних) ймовірностей станів.

В теорії випадкових процесів доводиться, що якщо кількість n станів системи скінченна та з кожного з них можна за скінченну кількість кроків перейти у будь-який інший, то граничні (фінальні) ймовірності існують.

Отже, якщо граничні ймовірності існують, то $\lim\limits_{t \to \infty} p_n(t) = p_n$. При цьому граничні ймовірності можна тлумачити як середній відносний час перебування системи у даному стані.

При аналізі випадкових процесів з дискретними станами зручно користуватися геометричною схемою – діаграмою *графу*. Стани системи зображуються крапками, колами або прямокутниками, а можливі переходи із стану в стан – напрямленими відрізками (прямолінійними або криволінійними), які з'єднують стани.

Як обчислити граничні ймовірності? Так як ймовірності $p_0, p_1, p_2, \ldots$ сталі, то їх похідні дорівнюють нулю. Це означає, що всі ліві частини рівнянь Колмогорова дорівнюють нулю. Тому вони перетворюються у систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яку й потрібно розв'язати. Можна й не записувати рівняння Колмогорова, а прямо за діаграмою графу станів записати систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

У розглянутій моделі народження та загибелі передбачається, що інтенсивності надходження замовлень та інтенсивності вихідного потоку залежать від стану системи, що означає їх залежність від кількості замовлень в СМО.

Введемо наступні позначення:

n – кількість замовлень в системі обслуговування (у черзі та на обслуговуванні),

λ_n – інтенсивність надходження в СМО замовлень при умові, що в системі вже знаходиться n замовлень,

μ_n – інтенсивність вихідного потоку замовлень, які вже пройшли обслуговування,

p_n – ймовірність того, що в системі знаходиться n замовлень.

Імовірності p_n визначаються з діаграми графу, який поданий на рис. 3.3. СМО знаходиться в стані n, якщо в ній є n замовлень. З аксіом стаціонарного пуассонівського процесу 3.1 – 3.3 випливає, що ймовірність надходження більше одного нового замовлення протягом малого часу h прямує до нуля, коли $h \to 0$. Це означає, що при $n > 0$ стан n може бути змінено у двох можливих напрямках: $n-1$, коли з інтенсивністю μ_n замовлення виходить із системи, та $n+1$, коли має місце надходження замовлення з інтенсивністю λ_n. Стан 0 може змінитися лише до стану 1, коли надходить замовлення з інтенсивністю λ_0.

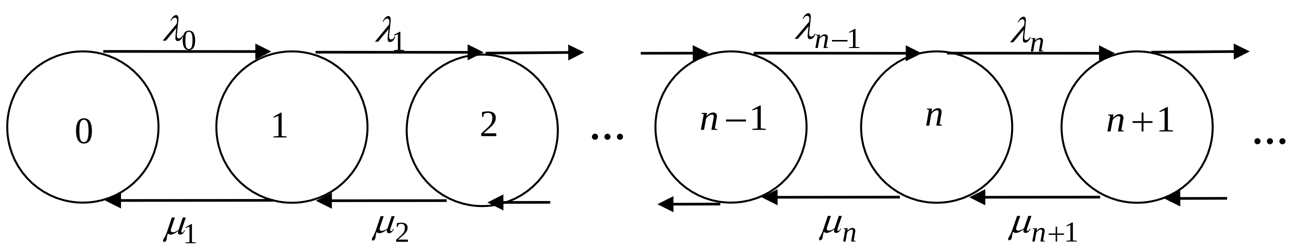


Рис.3.3

При виконанні умови стаціонарності очікувані інтенсивності вхідного і вихідного потоків стану n ($n > 0$) повинні бути рівними.

Очікувана інтенсивність вхідного потоку:

$$\lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1}.$$

Аналогічно очікувана інтенсивність вихідного потоку:

$$(\lambda_n + \mu_n)\, p_n .$$

Звідси отримуємо наступне *рівняння балансу*:

$$\lambda_{n-1}\, p_{n-1} + \mu_{n+1}\, p_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n)\, p_n \ , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Рівняння балансу для $n = 0$ має вигляд

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1 .$$

Рівняння балансу розв'язуються рекурентно, послідовно виражаючи імовірність p_i через p_0. Для $n = 0$ маємо

$$p_1 = \left(\frac{\lambda_0}{\mu_1} \right) p_0 ,$$

для $n = 1$:

$$\lambda_0\, p_0 + \mu_2\, p_2 = (\lambda_1 + \mu_1)\, p_1 .$$

Підставляючи сюди значенням p_1 отримуємо

$$p_2 = \left(\frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} \right) p_0 .$$

Методом математичної індукції можна показати, що

$$\mathrm{P}_n = \left(\frac{\lambda_{n-1}\, \lambda_{n-2} \ldots \lambda_0}{\mu_n\, \mu_{n-1} \ldots \mu_1} \right) p_0 \quad , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.1}$$

Значення p_0 визначається з умови нормування

$$p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1 .$$

Отже

$$p_0 \left(1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1}\, \lambda_{n-2} \ldots \lambda_0}{\mu_n\, \mu_{n-1} \ldots \mu_1} \right) = 1 .$$

Звідки отримуємо вираз для p_0:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1}\, \lambda_{n-2} \ldots \lambda_0}{\mu_n\, \mu_{n-1} \ldots \mu_1} \right)^{-1} . \tag{3.2}$$

Розглянемо будь-яку СМО. Позначимо через $X(t)$ – кількість замовлень, які надійшли у СМО до моменту часу t, $Y(t)$ – кількість замовлень, які вийшли з СМО до моменту часу t. Обидві функції є випадковими і змінюються стрибком (збільшуються на одиницю) в моменти надходження замовлень ($X(t)$) та вибуття замовлень ($Y(t)$). Очевидно, що для будь-якого моменту часу t їх різниця $Z(t) = X(t) - Y(t)$ є кількістю замовлень, що знаходяться в СМО.

Розглянемо достатньо великий проміжок часу T та обчислимо для нього середню кількість замовлень, що знаходяться в СМО. Вона дорівнює інтегралу від функції $Z(t)$ на цьому проміжку, поділеному на довжину інтервалу T:

$$L_s = \frac{1}{T}\int_0^T Z(t)dt.$$

Але цей інтеграл являє собою площу фігури, яка обмежена лініями $X(t)$ та $Y(t)$ (рис.3.4).

Позначимо проміжки часу перебування в СМО відповідного замовлення через $t_1, t_2, t_3, \ldots$.

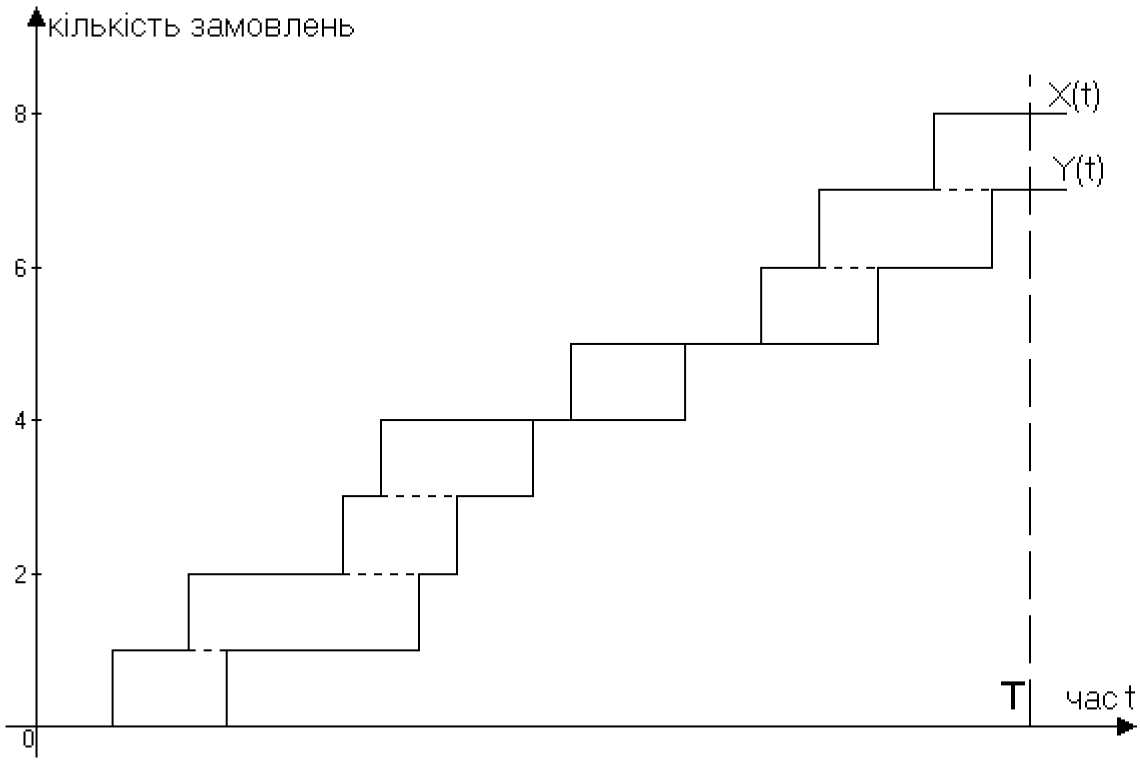


Рис.3.4

Очевидно, що інтеграл дорівнює сумі всіх цих проміжків часу (висота всіх прямокутників на рис. 3.4 дорівнює одиниці):

$$\int_0^T Z(t)dt = \sum_i t_i ,$$

де сума поширюється на всі замовлення, що надійшли за час T .

Таким чином

$$L_s = \frac{1}{T}\sum_i t_i .$$

Розділимо та помножимо праву частину на ефективну інтенсивність λ_{ef}. (Ефективна інтенсивність дорівнює інтенсивності надходження замовлень, коли всі замовлення мають можливість попасти на обслуговування; у протилежному випадку $\lambda_{ef} < \lambda$).

$$L_s = \frac{1}{T\lambda_{ef}}\sum_i t_i \cdot \lambda_{ef} .$$

Але величина $T\lambda_{ef}$ є середньою кількістю замовлень, які надійшли за час T. Якщо ми поділимо суму всіх проміжків часу t_i, на середню кількість замовлень, то отримуємо середню тривалість перебування замовлення в системі W_s. Отже,

$$L_s = \lambda_{ef} W_s . \qquad (3.3)$$

Формула (3.3) називається *формулою Літтла*. Аналогічно виводиться формула Літтла , яка зв'язує середню кількість замовлень у черзі з середньою тривалістю перебування замовлення у черзі:

$$L_q = \lambda_{ef} W_q . \qquad (3.4)$$

Існує й пряма залежність між величинами W_s та W_q. За визначенням

$$\begin{pmatrix} \text{середня тривалість} \\ \text{перебування в СМО} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{середній час} \\ \text{перебування в черзі} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{середній час} \\ \text{обслуговування} \end{pmatrix}.$$

Математично це записується так

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}, \tag{3.5}$$

де μ – інтенсивність вихідного потоку.

Помноживши обидві частини (3.5) на λ_{ef} та використавши формулу Літтла отримуємо

$$L_s = L_q + \frac{\lambda_{ef}}{\mu}, \tag{3.6}$$

Величина $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ називається *зведеною інтенсивністю потоку замовлень* (*інтенсивністю навантаження*). Її зміст – середня кількість замовлень, що надходить за середній час обслуговування. Отже,

$$L_s = L_q + \rho \frac{\lambda_{ef}}{\lambda}.$$

За визначенням різниця між середньою кількістю замовлень, що знаходяться в системі L_s, та середньою кількістю замовлень у черзі L_q дорівнює середній кількості зайнятих каналів обслуговування $\bar{c}$:

$$\bar{c} = L_s - L_q = \frac{\lambda_{ef}}{\mu} = \rho \frac{\lambda_{ef}}{\lambda}.$$

На закінчення наведемо ще формули для L_s, L_q:

$$L_s = \sum_{k=1}^{n} k p_k, \qquad L_q = \sum_{k=c+1}^{n} (k-c) p_k.$$

3.4. Деякі прості СМО

1. n-канальна СМО з відмовами (задача Ерланга).

Маємо n каналів обслуговування, на які надходить потік замовлень з інтенсивністю λ. Кожен канал обслуговування має інтенсивність μ.

Граф станів СМО відповідає моделі народження на загибелі (рис.3.5).

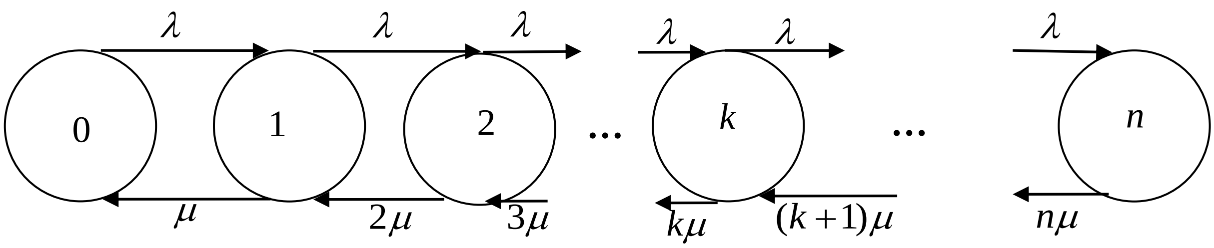


Рис.3.5

Скористаємося формулами (3.1), (3.2) для граничних ймовірностей.

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}\right)^{-1}$$

або
$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1} \tag{3.7}$$

$$p_1 = \rho p_0 ,\ \ p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0 ,\ \ldots ,\ p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 . \tag{3.8}$$

Формули (3.7), (3.8) називаються формулами Ерланга.

Обчислимо характеристики ефективності СМО.

Імовірність відмови в обслуговуванні дорівнює ймовірності того, що всі канали зайняті

$$P_{відм} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 . \tag{3.9}$$

Відносна пропускна здатність – ймовірність того, що замовлення буде обслуговане:

$$Q = 1 - P_{відм} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 . \tag{3.10}$$

Абсолютну пропускну здатність отримуємо, якщо помножити інтенсивність потоку замовлень λ на Q:

$$A = \lambda Q = \lambda\left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right). \tag{3.11}$$

Середню кількість зайнятих каналів $\bar{c}$ можна знайти безпосередньо:

$$\bar{c} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \ldots + n \cdot p_n .$$

Але знайдемо її значно простіше. Нам відома абсолютна пропускна здатність A. Це – інтенсивність потоку замовлень, які вже пройшли обслуговування. Кожен зайнятий канал в одиницю часу обслуговує в середньому μ замовлень. Отже, середня кількість зайнятих каналів дорівнює

$$\bar{c} = \frac{A}{\mu} \tag{3.12}$$

або

$$\bar{c} = \rho\left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right). \tag{3.13}$$

Розглянемо задачу з використанням СМО з відмовами.

Приклад 3.1. У відділу контролю цеху працює три контролери. Якщо деталь надходить у відділ контролю, коли всі контролери зайняті обслуговуванням, то вона проходить неперевіреною. Середня кількість деталей, які надходять у відділ контролю протягом години, дорівнює 24. Середній час, який витрачає один контролер на обслуговування однієї деталі, дорівнює 5 хв. Визначити ймовірність того, що деталь пройде неперевіреною. На скільки завантажені контролери та скільки їх потрібно, щоб імовірність обслуговування $P^*_{обсл} \geq 0{,}95$?

Розв'язання. За умовою задачі $n = 3,\ \lambda = 24\ дет/год = 0{,}4\ \ дет/хв$,

$$\bar{t}_{обсл} = 5хв, \text{ тоді } \mu = \frac{1}{\bar{t}_{обсл}} = 0{,}2\,дет\,/\,хв\,,\ \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 2\,.$$

1) Ймовірність простою каналів обслуговування за формулою (3.7):

$$p_0 = \frac{1}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!}} = \frac{1}{1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}} \approx \frac{1}{1 + 2 + 2 + 1{,}3} \approx 0{,}1587$$

2) Ймовірність відмови в обслуговуванні (формула(3.9)):

$$P_{відм} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 = \frac{2^3}{3!} \cdot 0{,}1587 \approx 0{,}21\ \ (21\%)\,.$$

3) Ймовірність обслуговування (формула 3.10):

$$P_{обсл} = Q = 1 - P_{відм} = 1 - 0{,}21 = 0{,}79\,.$$

4) Абсолютна пропускна здатність (формула 3.11):

$$A = \lambda Q = 0{,}4 \cdot 0{,}79 = 0{,}316 .$$

5) Середня кількість зайнятих каналів(формула 3.12):

$$\bar{c} = \frac{A}{\mu} = \frac{0{,}316}{0{,}2} = 1{,}58 .$$

6) Доля каналів зайнятих обслуговуванням

$$k_з = \frac{\bar{c}}{n} = \frac{1{,}58}{3} = 0{,}526 \ (\approx 53\%).$$

При $n = 3$: $P_{обсл} = 0{,}79 < P^*_{обсл} = 0{,}95$.

Виконавши розрахунки для $n = 4$ отримуємо $p_0 = 0{,}14$, $P_{відм} = 0{,}093$, $P_{обсл} = 0{,}907$. Так як $P_{обсл} = 0{,}907 < P^*_{обсл} = 0{,}95$, виконаємо розрахунки для $n = 5$: $p_0 = 0{,}137$, $P_{відм} = 0{,}035$, $P_{обсл} = 0{,}965 > P^*_{обсл} = 0{,}95$.

Відповідь. Ймовірність того, що при $n = 3$деталь буде неперевіреною складає 21% та контролери будуть завантажені на 53%.

Для того щоб забезпечити ймовірність обслуговування більше 95%, необхідно мати не менше п'яти контролерів.

2. Одноканальна СМО з необмеженою чергою.

Діаграма графу даної СМО подана на рис.3.6.

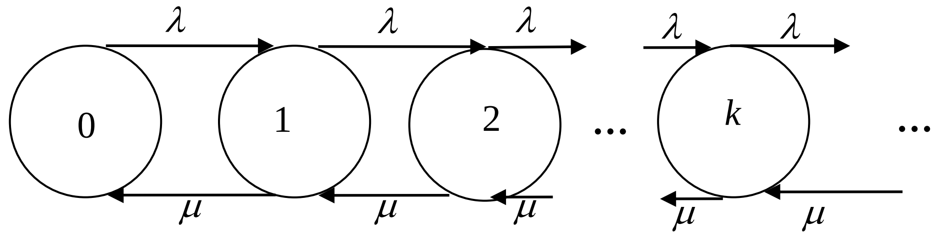


Рис.3.6

Якщо в системі знаходиться k замовлень, то канал зайнятий, а в черзі стоїть $k-1$ замовлення.

Граничні (фінальні) ймовірності для такої СМО існують не завжди. Якщо $\rho < 1$, то граничні ймовірності існують, а при $\rho \ge 1$ черга при $t \to \infty$ зростає необмежено.

Так як черга в СМО необмежена, то обчислювати абсолютну та відносну пропускні здатності не треба. Кожне замовлення обов'язково буде обслуговане, тому $A=\lambda$, $Q=1$.

Скористаємося формулами (3.1), (3.2) для граничних ймовірностей (строго кажучи ці формули були виведені для скінченої кількості станів, а в нашому випадку вона нескінченна).

$$p_0=\left(1+\frac{\lambda}{\mu}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k+\ldots\right)^{-1}=\left(1+\rho+\rho^2+\ldots+\rho^k+\ldots\right)^{-1}. \quad (3.14)$$

Ряд у формулі (3.14) являє собою геометричну прогресію. Якщо $\rho<1$ він збіжний

$$1+\rho+\rho^2+\ldots+\rho^k+\ldots=\frac{1}{1-\rho}.$$

Звідки

$$p_0=1-\rho. \quad (3.15)$$

Інші ймовірності знаходяться за формулами

$$p_1=\rho p_0,\ \ p_2=\rho^2 p_0,\ \ldots,\ p_k=\rho^k p_0,\ \ldots,$$

або

$$p_1=\rho(1-\rho),\ \ p_2=\rho^2(1-\rho),\ \ldots,\ p_k=\rho^k(1-\rho),\ \ldots \quad (3.16)$$

Цікавим є той факт, що максимальною буде ймовірність p_0 того, що канал вільний.

Знайдемо середню кількість замовлень, що знаходяться в системі

$$L_s=0\cdot p_0+1\cdot p_1+2\cdot p_2+\ldots+k\cdot p_k+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}kp_k\,,$$

$$L_s=\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^k(1-\rho)=\rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^{k-1}.$$

Оскільки $k\rho^{k-1}$ є похідною за ρ від ρ^k, то

$$L_s=\rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{d\rho}\rho^k.$$

Поміняємо місцями операції підсумування та диференціювання:

$$L_s = \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k .$$

Сума в формулі – нескінченна спадна геометрична прогресія з першим членом ρ та знаменником ρ.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k = \frac{\rho}{1-\rho},$$

$$\frac{d}{d\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k = \frac{1}{(1-\rho)^2}.$$

Таким чином

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho}. \quad (3.17)$$

Застосуємо формулу Літтла (3.3) та знайдемо середню тривалість перебування замовлення в системі:

$$W_s = \frac{1}{\lambda}L_s = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} \quad (3.18)$$

Знайдемо середню кількість замовлень у черзі L_q. Кількість замовлень у черзі дорівнює кількості замовлень в системі мінус одне замовлення, яке обслуговується. Це означає (за правилом додавання математичних сподівань), що середня кількість замовлень у черзі дорівнює середньої кількості замовлень в системі мінус середня кількість замовлень на обслуговуванні, яка дорівнює в даному випадку ймовірності того, що канал зайнятий. Очевидно, що ймовірність того, що канал зайнятий, дорівнює різниці одиниці та ймовірності того, що канал вільний

$$1 - p_0 = \rho .$$

Таким чином

$$L_q = L_s - \rho = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} . \quad (3.19)$$

За формулою Літтла (3.4) середня тривалість перебування замовлення у черзі:

$$W_q = \frac{1}{\lambda} L_q = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}. \tag{3.20}$$

3. n **- канальна СМО з необмеженою чергою.**

Дана задача розв'язується аналогічно попередній. Граф станів поданий на рис. 3.7.

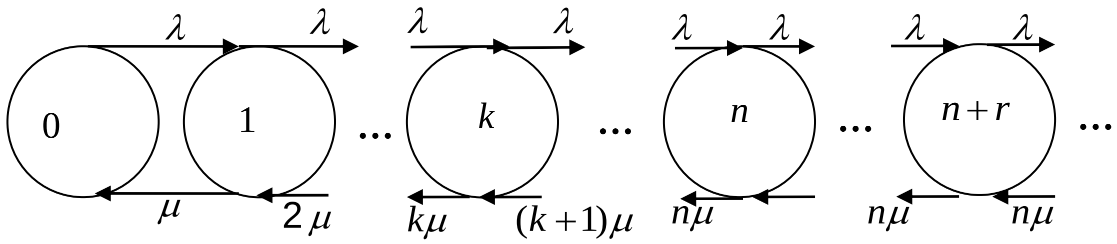


Рис.3.7

Умова існування граничних (фінальних) ймовірностей

$$\frac{\rho}{n} < 1.$$

Якщо $\frac{\rho}{n} \geq 1$ черга зростає необмежено.

Застосовуючи ті ж самі формули (3.1), (3.2) знайдемо граничні ймовірності при умові, що $\frac{\rho}{n} < 1$.

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1},$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0, \ \ p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \ \ldots, \ p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \tag{3.21}$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0, \ \ldots, \ p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0, \ldots$$

Знайдемо характеристики ефективності СМО.

Найпростіше знаходиться середня кількість зайнятих каналів

$$\bar{c} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho.$$

Вказаний вираз взагалі справедливий для будь-якої СМО з необмеженою чергою.

Середня кількість замовлень у черзі знаходиться за формулою

$$L_q = \sum_{r=1}^{\infty} r p_{n+r} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} p_0 . \tag{3.22}$$

Середня кількість замовлень в СМО знаходиться додаванням до L_q середньої кількості замовлень на обслуговуванні (середня кількість зайнятих каналів):

$$L_s = L_q + \bar{c} = L_q + \rho . \tag{3.23}$$

Середні тривалості перебування замовлень у черзі та в системі:

$$W_q = \frac{1}{\lambda} L_q , \quad W_s = \frac{1}{\lambda} L_s . \tag{3.24}$$

Приклад 3.2. Філія банку має трьох контролерів-касирів ($n = 3$) для обслуговування вкладників. Потік вкладників надходить у філію з інтенсивністю $\lambda = 30 \, чол./год$. Середня тривалість обслуговування контролером-касиром одного вкладника $\bar{t}_{обсл} = 3 хв$. Визначити характеристики філії банку як об'єкту СМО.

Розв'язання. $n = 3$, $\lambda = 30 \, чол./год = 0{,}5 \, чол./хв.$

Інтенсивність потоку обслуговування

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{обсл}} = \frac{1}{3} = 0{,}333 \ чол/хв , \ \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}5 \cdot 3 = 1{,}5 .$$

1) Ймовірність простою контролерів-касирів протягом робочого дня

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{3!(3-1{,}5)}} = \frac{1}{1 + \frac{1{,}5}{1!} + \frac{1{,}5^2}{2!} + \frac{1{,}5^3}{3!} + \frac{1{,}5^4}{3!(3-1{,}5)}} = 0{,}210 .$$

2) Ймовірність того, що всі контролери зайняті

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 = \frac{1{,}5^3}{3!} \cdot 0{,}21 = 0{,}118 .$$

3) Ймовірність того, що замовлення виявиться у черзі дорівнює

$$p_q = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0 = \frac{1{,}5^4}{3!(3-1{,}5)} \cdot 0{,}21 = 0{,}118 .$$

4) Середня кількість замовлень у черзі:

$$L_q = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2} p_0 = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2} p_0 = \frac{1{,}5^4}{(3-1)!(3-1{,}5)^2} \cdot 0{,}21 = 0{,}236 .$$

5) Середній час очікування замовлення у черзі

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0{,}236}{0{,}5} = 0{,}472 \ \text{хв} .$$

6) Середній час знаходження замовлення в СМО:

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = W_q + \bar{t}_{обсл} = 0{,}472 + 3 = 3{,}472 \ \text{хв}.$$

7) Середня кількість вільних каналів обслуговування:

$$\bar{n}_{вільн} = n - \bar{c} = n - \rho = 3 - 1{,}5 = 1{,}5 .$$

8) Доля зайнятих каналів:

$$к_з = \frac{\bar{c}}{n} = \frac{\rho}{n} = \frac{1{,}5}{3} = 0{,}5 .$$

9) Середня кількість вкладників у філії банку:

$$L_s = L_q + \rho = 0{,}236 + 1{,}5 = 1{,}736 \ \text{чол}.$$

Відповідь. Ймовірність простою контролерів-касирів дорівнює 21% робочого часу; ймовірність вкладнику виявитись у черзі складає 11,8%; середня кількість вкладників у черзі 0,236 чол.; середній час очікування вкладниками обслуговування 0,472 хв.

4. n **- канальна СМО з обмеженою чергою.**

Задача відрізняється від попередньої задачі тільки тим, що кількість замовлень в черзі обмежена деяким заданим числом (m).

Замовлення, яке надходить в систему і знаходить всі канали та місця в черзі зайнятими, покидає СМО не обслугованою.

Граничні ймовірності станів СМО у цій задачі існують при будь-якому значені ρ, так як кількість станів обмежена.

При обчислені характеристик СМО користуються таким же прийомом як в задачах 2 і 3, з тією різницею, що підсумування треба виконувати не для нескінченної прогресії, а скінченної.

Однією з основних характеристик даної СМО є відмова замовленню в обслуговуванні.

Формули для стаціонарного режиму:

Ймовірність простою каналів обслуговування:

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\left(1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)\right]^{-1}.$$

Ймовірність відмови в обслуговуванні:

$$P_{відм} = \frac{\rho^{n+m}}{n! n^m} p_0 .$$

Ймовірність обслуговування:

$$P_{обсл} = 1 - P_{відм}.$$

Абсолютна пропускна здатність:

$$A = P_{обсл} \cdot \lambda .$$

Середня кількість зайнятих каналів:

$$\bar{c} = \frac{A}{\mu}.$$

Середня кількість замовлень у черзі:

$$L_q = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m \left(m + 1 - \frac{m\rho}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} p_0 .$$

Середній час очікування замовлення у черзі:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}.$$

Середня кількість замовлень в СМО:

$$L_s = L_q + \bar{c} .$$

Середній час знаходження замовлення в СМО:

$$W_S = \frac{L_S}{\lambda}.$$

Приклад 3.3. База отримує ранні овочі з теплиць. Автомобілі з вантажем надходять у різний час з інтенсивністю $\lambda = 6$ машин у день. Підсобні приміщення та обладнання для підготовки овочей до продажу дозволяють обробляти і зберігати товар, що привезений двома автомашинами ($m = 2$). На базі працює три фасувальники ($n = 3$), кожен з яких в середньому може обробляти товар з однієї машини за $\bar{t}_{обсл} = 4\,год$. Тривалість робочого дня при змінної роботі $12\,год$. Визначить, якою повинна бути ємність підсобних приміщень, щоб ймовірність повної обробки товарів була $p^*_{обсл} \geq 0{,}97$.

Розв'язання. Визначимо завантаження фасувальників

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{обсл}} = \frac{12}{4} = 3\,авт\,/\,день,$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{3} = 2.$$

1) Знайдемо ймовірність простою фасувальників при відсутності автомашин (замовлень):

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\left(1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)\right]^{-1} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{3!(3-2)}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right)} = 0{,}128.$$

2) Ймовірність відмови в обслуговуванні:

$$P_{відм} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n!n^m}\, p_0 = \frac{2^{3+2}}{3!\cdot 3^2} \cdot 0{,}128 = 0{,}075.$$

3) Ймовірність обслуговування:

$$P_{обсл} = 1 - P_{відм} = 1 - 0{,}075 = 0{,}925.$$

Так як $P_{обсл} = 0{,}925 < P^*_{обсл} = 0{,}97$, виконаємо аналогічні обчислення для $m = 3$: $p_0 = 0{,}122$; $P_{відм} = 0{,}048$; $P_{обсл} = 0{,}952$. Так як $P_{обсл} = 0{,}952 < 0{,}97$, приймемо $m = 4$. Для цього випадку отримуємо $p_0 = 0{,}12$; $p_{відм} = 0{,}028$; $P_{обсл} = 0{,}972$, $0{,}972 > 0{,}97$, ємність підсобних приміщень необхідно збільшити до $m = 4$.

Для досягнення заданої ймовірності обслуговування можна збільшити кількість фасувальників, виконуючи обчислення для $n = 4, 5$ і т.д. Задачу можна розв'язати, збільшуючи ємність підсобних приміщень або зменшуючи час обробки товарів.

Знайдемо інші параметри СМО для розрахованого випадку $p_0 = 0{,}12$; $P_{відм} = 0{,}028$; $P_{обсл} = 0{,}972$.

4) Абсолютна пропускна здатність:

$$A = P_{обсл} \cdot \lambda = 0{,}972 \cdot 6 = 5{,}832 \, авт./\,день.$$

5) Середня кількість зайнятих каналів (фасувальників):

$$\bar{c} = \frac{A}{\mu} = \frac{5{,}832}{3} = 1{,}944.$$

6) Середня кількість замовлень у черзі:

$$L_q = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m \left(m + 1 - \frac{m\rho}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} p_0 = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(4 + 1 - \frac{4 \cdot 2}{3}\right)}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} \cdot 0{,}12 = 0{,}548.$$

7) Середній час очікування обслуговування:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0{,}548}{6} = 0{,}09 \; день.$$

8) Середня кількість автомашин на базі:

$$L_s = L_q + \bar{c} = 0{,}548 + 1{,}944 = 2{,}492 \; авт.$$

9) Середня кількість вільних каналів обслуговування:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{2{,}492}{6} = 0{,}415 \; \textit{днів}.$$

Відповідь. Ємність підсобних приміщень бази повинна вміщати товар, що привезений 4 автомашинами ($m = 4$). При цьому ймовірність повної обробки товару буде $P_{обсл} = 0{,}972$.

Питання для самоконтролю

1. Які процеси називаються марковськими?
2. Якій потік подій називається простішим?
3. За якими ознаками класифікуються системи масового обслуговування?
4. Які основні характеристики СМО?
5. Які основні результати моделей чистого народження та чистої загибелі?
6. Граф та основні характеристики узагальненої моделі народження та загибелі.
7. Які існують прості моделі СМО?

Вправи

Розв’язати наступні задачі вважаючи, що потік замовлень є найпростішим та тривалість обслуговування одного замовлення розподілена за експоненціальним законом.

3.1. Оператор мобільного зв’язку має п’ять каналів обслуговування. Телефонні дзвінки надходять з інтенсивністю 90 замовлень за годину, середня тривалість розмови триває 2 хв. Визначити показники оператора як об’єкту СМО.

3.2. Автоматична мийка для легкових автомобілів має 3 місця. Автомобілі надходять з інтенсивністю 20 автомобілів за годину. Тривалість миття одного автомобіля 15 хв. Стоянка перед мийкою заборонена. Визначити середню кількість зайнятих, незайнятих автомобілями місць та ймовірність того, що автомобіль не буде вимитий.

3.3. АТС підприємства забезпечує не більше 5 переговорів одночасно. Середня тривалість розмови складає 1 хв. На станцію надходять в середньому 10 викликів за секунду. Визначити характеристику АТС як об’єкту СМО.

3.4. Залізнична станція має три колії для розвантаження потягів. На станцію в середньому приходить 6 потягів на добу. Розвантаження одного потяга триває 8 год. Розвантаження відбувається цілодобово. Визначити характеристики роботи станції як об’єкту СМО та у випадку необхідності надати рекомендації по покращенню її роботи.

3.5. В службі «Швидкої допомоги» невеликого міста цілодобово чергують 3 диспетчери, які обслуговують 3 телефонних лінії. Якщо замовлення на виклик лікаря до хворого надходить, коли диспетчери зайняті, то абонент отримує відмову. Потік замовлень складає 4 виклики за хвилину. Оформлення замовлення триває в середньому 1,5 хв. Визначити основні показники роботи служби як об’єкту СМО. Розрахувати скільки потрібно телефоних ліній, щоб задовольнити не менше 90% викликів.

3.6. Перукарня має 4 майстра. Вхідний потік відвідування має інтенсивність 5 чоловік за годину. Середній час обслуговування одного клієнта складає 40 хв. Визначити середню довжину черги на обслуговування, вважаючи її необмеженою.

3.7. На газозаправочній станції встановлені 2 колонки для заправки автомобілів газом. Біля станції знаходиться майданчик на 2 автомобілі. На станцію прибуває в середньому одна машина у 3 хв. Середній час обслуговування однієї машини складає 2 хв. Визначити характеристики роботи станції як об’єкта СМО.

3.8. На автозаправці працює сервіс по миттю вікон. Одночасно він може обслуговувати три автомобілі (є три робітника), якщо сервіс зайнятий, автомобіль від’їжджає не обслугованим. Середня кількість автомобілів, які заправляються дорівнює 20 за 1 год. Середній час миття вікон одного автомобіля – 6 хв. Визначити, ймовірність того, що автомобіль не скористається додатковою послугою, а також середню кількість автомобілів, які будуть обслуговані за 1 год., та середню кількість зайнятих робітників.

3.9. Пункт швидкого харчування, що обслуговує автомобілі має 3 вікна обслуговування. Майданчик при пункті, на якому автомашини очікують обслуговування може вмістити не більше однієї машини та якщо він зайнятий, то чергова машина у чергу не становиться. В середньому автомашини прибувають кожні 2 хв. Процес обслуговування триває в середньому 2,5 хв. Визначити ймовірність відмови, абсолютну пропускну здатність, середню кількість автомашин у черзі, середній час очікування в черзі та середній час знаходження автомобіля біля пункту харчування (разом з обслуговуванням).

3.10. В магазині покупців обслуговує два продавці. Середній час обслуговування одного покупця – 4 хв. Інтенсивність потоку покупців – 3 людини за хвилину. Площа магазину дозволяє одночасно знаходитись в ньому не більше 5 покупців. Відвідувач, який прийшов у перевантажений магазин не очікує зовні та уходить. Визначити ймовірність того, що покупець буде не обслугований.

РОЗДІЛ 4
МЕТОДИ МЕРЕЖЕВОГО (СІТЬОВОГО) ПЛАНУВАННЯ

4.1. Основні поняття

Мережева модель являє собою графічне зображення плану виконання робіт проекту, що складається з відрізків (процесів проекту) і вузлів (подій), які відображають логічний взаємозв'язок усіх процесів. В основі мережевого моделювання лежить поняття графа.

Нехай V – довільна множина (наприклад, множина натуральних чисел $\{1,2,3,4,5\}$, A – деяка сукупність пар виду (V_i, V_j), де $V_i, V_j \in V$ (наприклад {(1, 2); (1, 4); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (3, 4); (4, 5)}). Термін сукупність означає можливість наявності однакових пар.

Упорядкована пара $G = (V, A)$, що складається з множини V та сукупності A, називаються *графом* із множиною вершин V і множиною ребер A. Графи зручно зображати графічно, що і спричинило появу їхньої назви. При цьому елементи V зображають крапками (колами, квадратами) на площині, а ребра (V_i, V_j) – відрізками (прямолінійними або криволінійними), які з'єднують крапки V_i та V_j. Лінії, що зображають ребра графа, можуть перетинатися, але точки перетину не є вершинами. На рис.4.1 зображено граф наведеного вище прикладу.

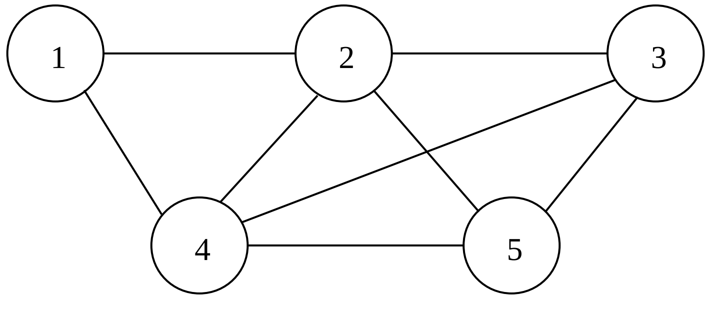


Рис.4.1

Якщо пари (V_i, V_j), де $V_i, V_j \in A$ вважаються впорядкованими, то граф є орієнтованим. Ребра орієнтованого графа прийнято називати дугами та зображати напрямленими відрізками як на рис 4.2.

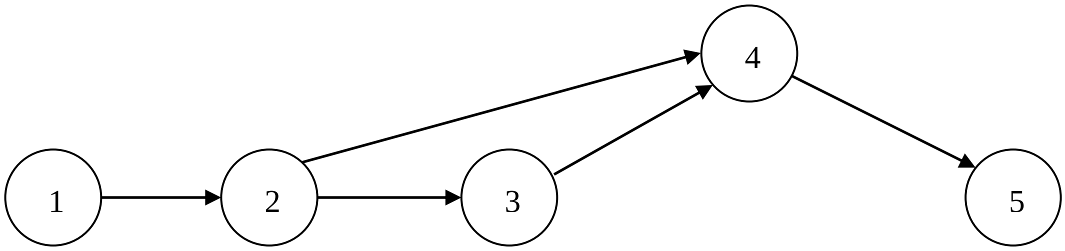


Рис 4.2

В сучасних методах мережевого планування на першому етапі виконується розбиття проекту на окремі процеси, визначаються їх відношення передування (який процес повинен відбутися перед іншим) та оцінки тривалості операцій (рис 4.3).

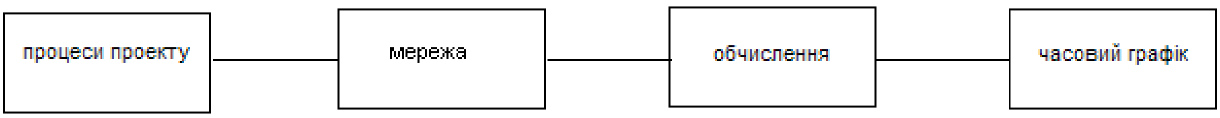


Рис 4.3

Далі будується мережа проекту, яка показує відношення передування серед процесів, які складають проекти. На третьому етапі на основі побудованої мережі виконуються обчислення, в результаті яких будується часовий графік реалізації процесу (календарний план), виконується аналіз усіх операцій та вносяться покращення в структуру моделі до початку її реалізації. Календарний графік виявляє критичні процеси, яким слід приділяти особливої уваги, для того, щоб закінчити усі процеси в директивний термін. Що стосується некритичних операцій, то календарний план дозволяє визначити резерви часу, які можна вигідно використати при затримці виконання процесів або ефективному використанню як трудових, так й фінансових ресурсів.

Теорія графів оперує поняттям шлях, який поєднує послідовність взаємозв'язаних ребер. *Контур* означає такий шлях, у якого початкова вершина співпадає з кінцевою. *Мережевий графік* – це орієнтований граф без контурів.

У мережевому плануванні є два основних елементи – процес і подія.

Процес – це робота, яка вимагає витрат ресурсів, або очікування, яке призводить до досягнення необхідного результату.

Фіктивний процес – це зв'язок між результатами (подіями), який не вимагає витрат часу та ресурсів.

Подія - це результат (проміжний або кінцевий) виконання одного або декількох попередніх процесів.

Шлях – це будь-яка неперервна послідовність (ланцюг) процесів і подій.

Критичний шлях – це шлях, який немає резервів та містить самі напружені процеси проекту. Процеси, які розміщені на критичному шляху називають критичними.

Всі інші процеси є некритичними, та мають резерви часу, які дозволяють пересувати термін їх виконання не впливаючи на загальну тривалість виконання проекту.

Отже, критичний шлях має особливе значення у мережевому плануванні, так як процеси цього шляху визначають загальний цикл завершення проекту. Для скорочення тривалості проекту необхідно в першу чергу скоротити тривалість процесів, які лежать на критичному шляху.

При побудові мережевих моделей необхідно дотримуватися наступних правил:

1. Мережа зображується зліва направо, та кожна подія з більшим порядковим номером зображується правіше попередньої. Загальний

напрямок стрілок, що зображають процеси, також, в основному, повинні бути розміщенні зліва направо, при цьому кожний процес повинен виходити з події з меншим номером.

2. Дві сусідні події можуть бути об'єднані лише одним процесом. Для зображення паралельних робіт вводиться проміжна подія та фіктивний процес (рис.4.4).

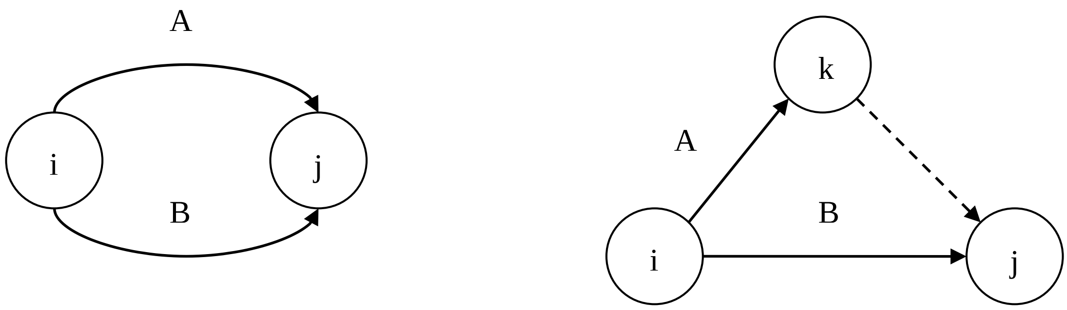


Рис.4.4

3. В мережі не повинно бути тупиків, тобто проміжних подій, з яких не виходить жодного процесу (рис 4.5.)

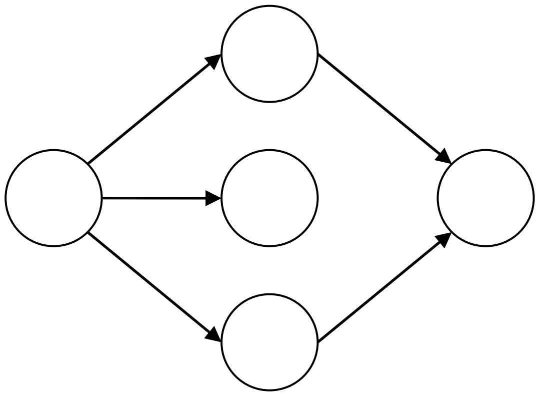


Рис 4.5.

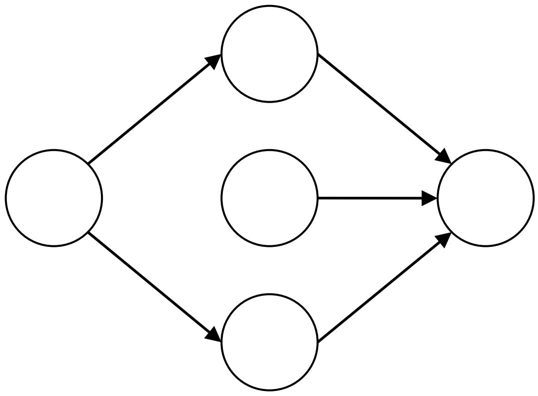


Рис 4.6.

4. В мережі не повинно бути проміжних подій, яким не передує жодний процес (рис 4.6).
5. В мережі не повинно бути замкнених контурів, які складаються з взаємозв'язаних робіт, що створюють замкнений ланцюг (рис. 4.7).

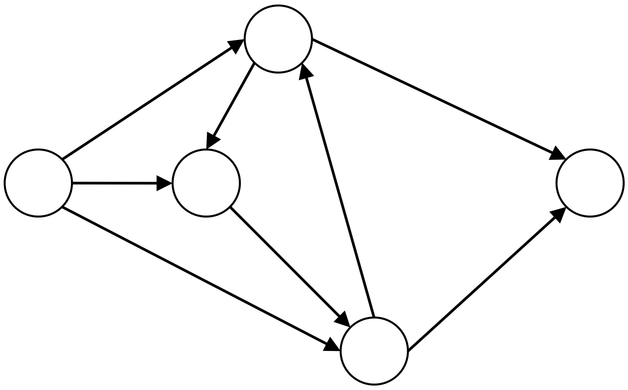


Рис 4.7.

6. Для правильної нумерації подій поступають наступним чином: нумерація подій починається з вихідної події, якій надається номер 1. З вихідної події 1 викреслюють всі процеси які з неї виходять. В мережі, що залишилась знаходять подію, в яку не входить жодний процес. Цієї події надається номер 2. Потім викреслюють процеси, які виходять з події 2, та знову знаходять на мережі, що залишилась, подію, в яку не входить жодний процес та йому надається номер 3 і т.д. (рис 4.8).

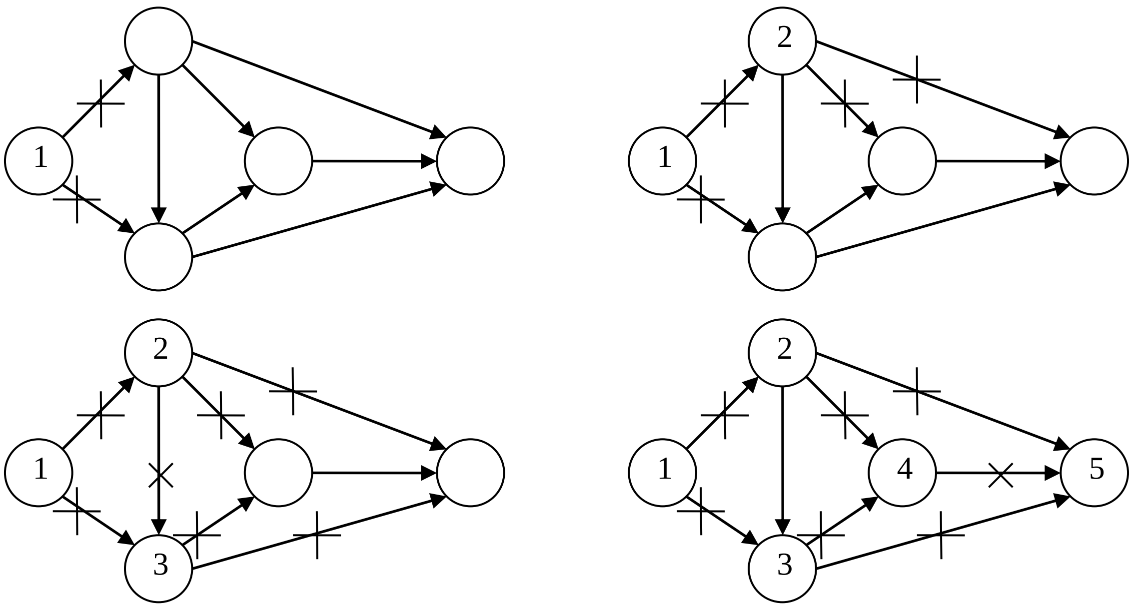


Рис 4.8.

7. Тривалість процесів встановлюється на підставі діючих нормативів або за експертними оцінками фахівців. У першому випадку часові оцінки є

детермінованими (однозначними), у другому – стохастичними (імовірнісними).

4.2. Метод критичного шляху

Основним часовим параметром мережевого графіка є тривалість критичного шляху. Кінцевим результатом застосування методу критичного шляху буде побудова часового графіка виконання проекту. Для цього проводяться спеціальні обчислення, в результаті яких отримують наступну інформацію:

- загальну тривалість проекту;
- розподіл множини процесів, що складають проект, на критичні та некритичні.

Розрахунок критичного шляху містить два етапи. Перший називається *прямим проходом*. Обчислення починається з вихідної події та продовжується до тих пір, доки не буде досягнута кінцева подія. Для кожної події визначається найраніший термін її настання.

На другому етапі, який називається зворотнім проходом, обчислення починаються з кінцевої події та закінчуються вихідною подією. Для кожної події обчислюється найпізніший термін її настання.

Введемо позначення:

t_j – найраніший термін настання події j,

T_j – найпізніший термін настання події j,

d_{ij} – тривалість процесу (i, j).

Прямий прохід

Початковий крок. Припускаємо, що $t_1 = 0$; це вказує на те, що проект починається в нульовий момент часу.

Основний крок. Для вершини j визначаємо вершини з номерами p, q, v, що безпосередньо зв'язані з вершиною j процесами (p, j) (q, j),…(v, j), для яких вже обчислені найраніші терміни настання відповідних подій. Найраніший термін настання події *j* обчислюється за формулою

$$t_j = \max\{t_p + d_{pj},\, t_q + d_{qj},\ldots, t_v + d_{vj}\}.$$

Зворотній прохід

Початковий крок. Припускаємо $T_n = t_n$ (n-кінцева подія); це вказує на те, що найраніший та найпізніший терміни завершення проекту співпадають.

Основний крок. Для вершини визначено *p*, *q*,... *v*, які безпосередньо зв'язані з вершиною *j* процесами (*j*, *p*), (*j*, *q*),... (*j*, *v*), для яких вже обчислені найпізніші терміни настання відповідних подій. Найпізніший термін настання події j обчислюється за формулою

$$T_j = \min\{T_p - d_{jp},\, T_q - d_{jq},\ldots, T_v - d_{jv}\}.$$

Процес $(i,\, j)$ буде *критичним*, якщо виконуються три умови:

1. $T_i = t_i$,

2. $T_j = t_j$,

3. $t_j - t_i = T_j - T_i = d_{ij}$.

Якщо ці умови не виконуються, то процес *некритичний*.

Критичні процеси повинні утворювати неперервний шлях через всю мережу від початкової події до кінцевої.

Запас часу некритичного процесу – це частина максимального інтервалу часу виконання цього процесу (який більше реальної тривалості процесу). Розрізняють *загальний запас часу* на *вільний запас часу*.

Загальний запас часу процесу (*i*, *j*) визначається як перевищення над тривалістю виконання цього процесу інтервалу часу від найранішого моменту здійснення події *i* до найпізнішого часу здійснення події *j*

$$\tau_{заг} = (T_j - t_i) - d_{ij}.$$

Вільний запас часу процесу (i, j) визначається як перевищення над тривалістю виконання цього процесу інтервалу часу від найранішого моменту здійснення події i до найранішого здійснення події j

$$\tau_{віл} = (t_j - t_i) - d_{ij}.$$

За визначенням $\tau_{віл} \le \tau_{заг}$.

Правило "червоного прапорця". Для некритичного процесу (i, j):

а) якщо $\tau_{віл} = \tau_{заг}$, то даний процес може виконуватись у будь-який час всередині максимального інтервалу (t_i, T_j) без порушення відношень передування;

б) якщо $\tau_{віл} < \tau_{заг}$, то без порушення відношень передування даний процес може початись із зсувом, який не перевищує $\tau_{віл}$, відносно найранішого моменту початку процесу t_i. Зсув початку процесу на величину, що перевищує $\tau_{віл}$ (але не більше $\tau_{заг}$), повинно супроводжуватись таким же зсувом відносно всіх процесів, які починаються з події j.

Приклад 4.1. Розглянемо програму створення нового побутового приладу, який користується попитом у населення. Побудуємо мережений графік та обчислимо його часові параметри. Необхідні данні показані у таблиці 4.1.

Таблиця 4.1

Процеси	Зміст процесу	Безпосередньо попередні процеси	Тривалість, тижні
A, B	Розробка технічної документації (ТД) на прилад та його електронну частину	–	A – 3, B – 2
C, D	Розробка технологічної документації на електронну частину приладу та прилад	A, B	C – 2, D – 2
E	Передача ТД на прилад	A	3
F	Виготовлення приладів	C	7
G	Виготовлення електронної частини приладів	D, E	3
H, I	Розробка ТД на експлу-	C, D	H – 5, I – 2

	атацію приладу та електронну частину приладу		
J	Зборка та випробування приладу	F, G	6

Розв'язання.

1. На основі даних таблиці 4.1 будуємо мережевий графік створення приладу з урахуванням рекомендацій 1 – 7 (рис4.9).

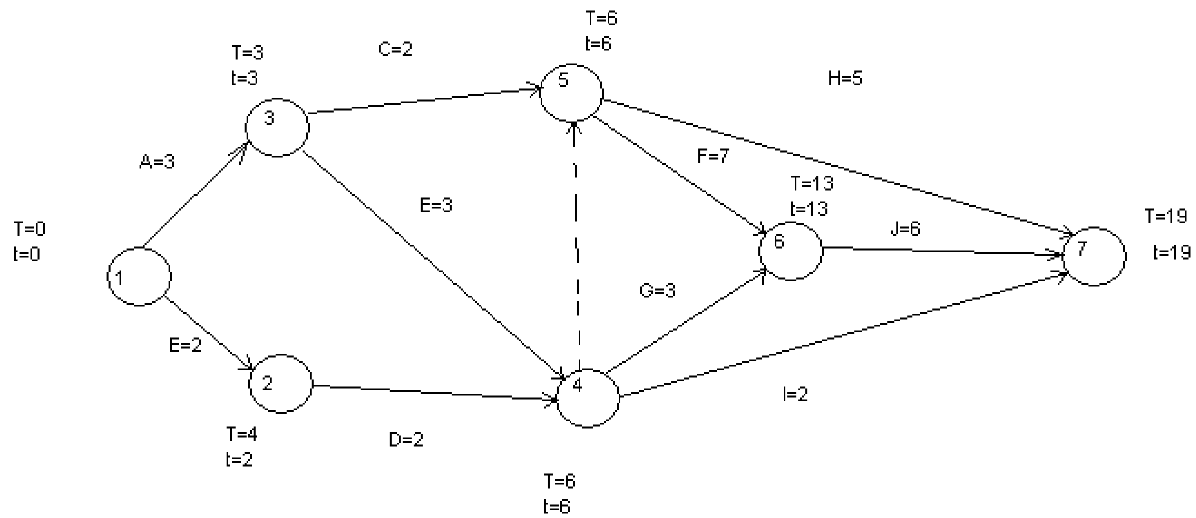


Рис 4.9.

2. Знайдемо критичний шлях до мережі проекту.

Прямий прохід:

Вершина 1. Припускаємо $t_1 = 0$.

Вершина 2. $t_2 = t_1 + d_{12} = 0 + 2 = 2$.

Вершина 3. $t_3 = t_1 + d_{13} = 0 + 3 = 3$.

Вершина 4. $t_4 = \max\{t_2 + d_{24},\ t_3 + d_{34}\} = \max\{2 + 2,\ 3 + 3\} = 6$.

Вершина 5. $t_5 = \max\{t_3 + d_{35},\ t_4 + d_{45}\} = \max\{3 + 2,\ 6 + 0\} = 6$.

Вершина 6. $t_6 = \max\{t_4 + d_{46},\ t_5 + d_{56}\} = \max\{6 + 3,\ 6 + 7\} = 13$.

Вершина 7. $t_7 = \max\{t_4 + d_{47},\ t_5 + d_{57},\ t_6 + d_{67}\} = \max\{6 + 2, 6 + 5, 13 + 6\} = 19$.

Прямий підхід завершений та розрахунки показують, що проект можна виконати за 19 тижнів.

Зворотній прохід:

Вершина 7. Припускаємо $T_7 = 19$.

Вершина 6. $T_6 = T_7 - d_{57} = 19 - 6 = 13$.

Вершина 5. $T_5 = \min\{T_7 - d_{57},\ T_6 - d_{56}\} = \min\{19 - 5,\ 13 - 7\} = 6$.

Вершина 4. $T_4 = \min\{T_7 - d_{47},\ T_6 - d_{46},\ T_5 - d_{45}\} = \min\{19 - 2, 13 - 3, 6 - 0\} = 6$.

Вершина 3. $T_3 = \min\{T_5 - d_{35},\ T_4 - d_{34}\} = \min\{6 - 2,\ 6 - 3\} = 3$.

Вершина 2. $T_2 = T_4 - d_{24} = 6 - 2 = 4$.

Вершина 1. $T_1 = \min\{T_3 - d_{13},\ T_2 - d_{12}\} = \min\{3 - 3,\ 4 - 2\} = 0$.

Результати обчислень показані на рис 4.9. Правила визначення критичний процесів показують, що критичний шлях складають процеси $1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7$.

3. Побудуємо часовий графік проекту (рис 4.10).

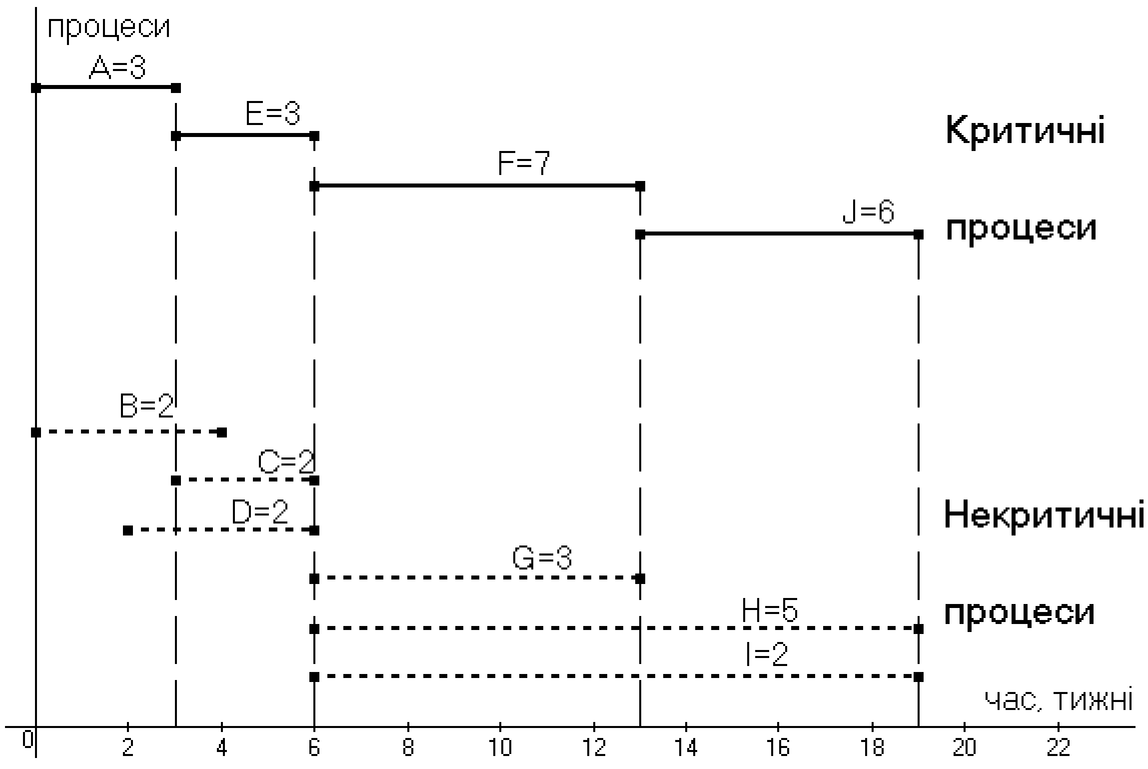


Рис 4.10

4. Визначимо запаси часу для некритичних процесів.

Загальні та вільні запаси часу некритичних процесів подані у таблиці 4.2.

Таблиця 4.2

Некритичний процес	Тривалість процесу	Загальний запас часу $\tau_{заг}$	Вільний запас часу $\tau_{віл}$	"Червоний прапорець"
B (1, 2)	2	4-0-2=2	2-0-2=0	+
C (3, 5)	2	6-3-2=1	6-3-2=1	
D (2, 4)	2	6-2-2=2	6-2-2=2	
G (4, 6)	3	13-6-3=4	13-6-3=4	
H (5, 7)	5	19-6-5=8	19-6-5=8	
I (4, 7)	2	19-6-2=11	19-6-2=11	

Правило "червоного прапорця" слід застосовувати до процесу B, оскільки для нього $\tau_{віл} < \tau_{заг}$. Всі інші процеси (C, D, G, H, I) мають $\tau_{віл} = \tau_{заг}$, тому вони можуть виконуватись у будь-який час всередині своїх максимальних інтервалів часу виконання.

Розглянемо процес B, який відмічений "червоним прапорцем". Оскільки $\tau_{заг} = 2$ тижні, то він може починатися у будь-який тиждень з інтервалу 0-2 тижні від початку виконання всього проекту. Але так як $\tau_{віл} = 0$, то початок процесу B в 1-й та 2-й тижні від початку проекту потребує зсуву процесу D на 1, 2 тижні відповідно від свого найранішого початку. А це в свою чергу вплине на початок процесів G та I.

4.3. Мінімізація мережі

Мінімізація мережі або алгоритм побудови мінімального кістяку дерева передбачає з'єднання усіх вершин мережі за допомогою ребер найменшої довжини. Типовою задачею, для розв'язання якої необхідний такий алгоритм, є проектування мережі доріг з твердим покриттям, які з'єднують населені пункти у сільській місцевості, де дороги, що з'єднують два яких-небудь пункти, можуть проходити через інші населені пункти. Найбільш економний проект дорожньої системи повинен мінімізувати загальну довжину доріг з твердим покриттям.

Алгоритм мінімізації мережі. Починають з будь-якої вершини та з'єднують її з найближчою вершиною мережі. З'єднані дві вершини утворюють зв'язану множину, а інші незв'язану. Далі в незв'язаній множині вибирають вершину, яка розміщена ближче інших до будь-якої вершини зв'язаної множини. До зв'язаної множини додається, а з незв'язної множини вибуває відповідна вершина. Процес повторюють до тих пір, доки у зв'язану множину не попадуть усі вершини мережі. У випадку однаково віддалених вершин обирають будь-яку з них, що вказує на альтернативність (неоднозначність) мінімального кістяка дерева.

Приклад 4.2. Планується газифікувати п'ять невеликих сіл (рис 4.11) Числа на ребрах вказують довжину газових труб (в км). Вершина 1 вже газифікована. Відсутність ребра між двома вершинами означає, що з'єднання відповідних сіл або пов'язане з великими витратами, або неможливе. Знайти таке з'єднання трубами сіл, при якому довжина їх була мінімальною.

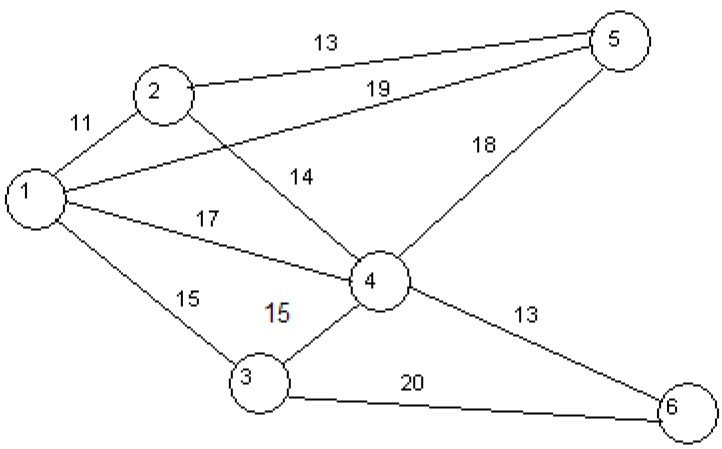


Рис. 4.11

Розв'язання. Шляхи (1, 3) та (3, 4) є альтернативними. Мінімальна довжина газових труб 11+13+14+13+15=66 км (рис 4.12).

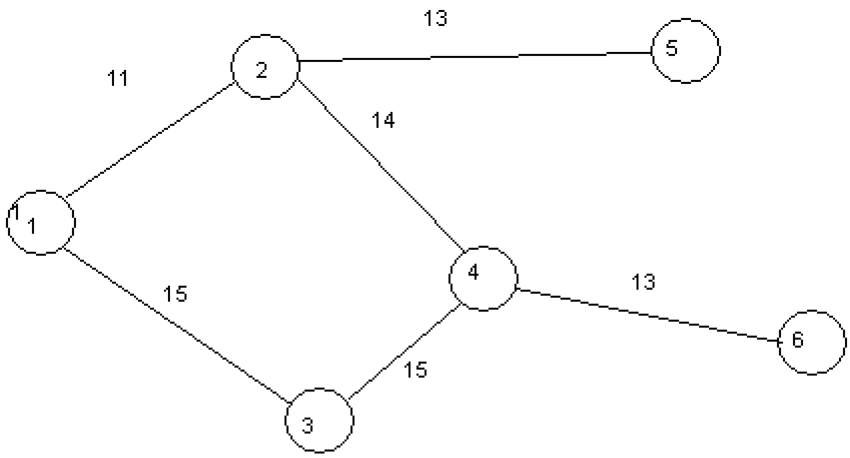


Рис. 4.12

4.4. Задача знаходження найкоротшого шляху

Задача полягає у знаходженні зв'язаних між собою доріг на транспортній мережі, які у сукупності мають мінімальну довжину від вихідного пункту до пункту призначення.

Введемо позначення:

d_{ij} – відстань на мережі між сусідніми вершинами *i* та *j*, довжина ребра (i, j);

M_j – найкоротша відстань від вихідної вершини 1 до вершини *j*, $M_1 = 0$.

Формула для обчислення M_j:

$$M_j = \min_i \left\{ \begin{array}{c} \textit{Сума найкоротшої відстані до попередньої вершини} \\ \textit{та відстані між поточною вершиною } j \\ \textit{та попередньою } i \end{array} \right\} = \min_i \left\{ M_i + d_{ij} \right\}$$

З формули видно, що найкоротшу відстань M_j до вершини *j* можна обчислити лише після того, як визначена найкоротша відстань до кожної попередньої вершини i, яка з'єднана ребром з вершиною *j*. Процедура завершується, коли отримано M_i останньої ланки.

Приклад 4.3. (Задача заміни автомобільного парку). Фірма, що займається прокатом автомобілів, планує заміну автопарку на наступні п'ять років. Автомобіль повинен пропрацювати не менше одного року, перш ніж фірма поставить питання про його заміну. На рис 4.13 наведені вартості заміни автомобілів в умовних грошових одиницях, які залежать від часу заміни і кількості років, протягом яких автомобіль знаходиться в експлуатації.

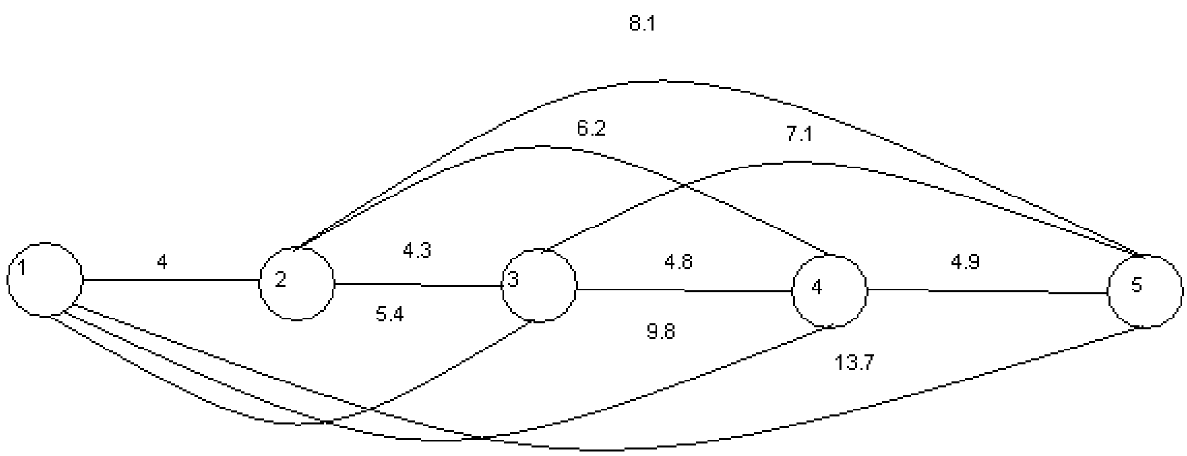


Рис 4.13

Визначити план заміни автомобілів, який забезпечує при цьому мінімальні витрати.

Розв'язання. Знайдемо мінімальні відстані:

$M_1 = 0$;

$M_2 = M_1 + d_{12} = 0 + 4 = 4$;

$M_3 = \min\{M_1 + d_{13};\ M_2 + d_{23}\} = \min\{0 + 5{,}4;\ 4 + 4{,}3\} = 5{,}4$;

$M_4 = \min\{M_1 + d_{14};\ M_2 + d_{24};\ M_3 + d_{34}\} = \min\{0 + 9{,}8;\ 4 + 6{,}2\ 5{,}4 + 4{,}8\} = 9{,}8$;

$$M_5 = \min\{M_1 + d_{15};\ M_2 + d_{25};\ M_3 + d_{35};\ M_4 + d_{45}\} = \\ = \min\{0 + 13{,}7;\ 4 + 8{,}1;\ 5{,}4 + 7{,}1;\ 9{,}8 + 4{,}9\} = 12{,}1.$$

Найкоротший шлях $1 \to 2 \to 5$, вартість якого 12,1 ум. гр. од. Це означає, що кожен автомобіль замінюється через два роки а через п'ять років списується.

4.5. Врахування вартісних факторів при реалізації мережевого графіка

Вартісні фактори при реалізації мережевого графіка враховуються шляхом визначення залежності “витрати – тривалість” для кожної операції.

На рис 4.14 показана лінійна залежність вартості операції від її тривалості.

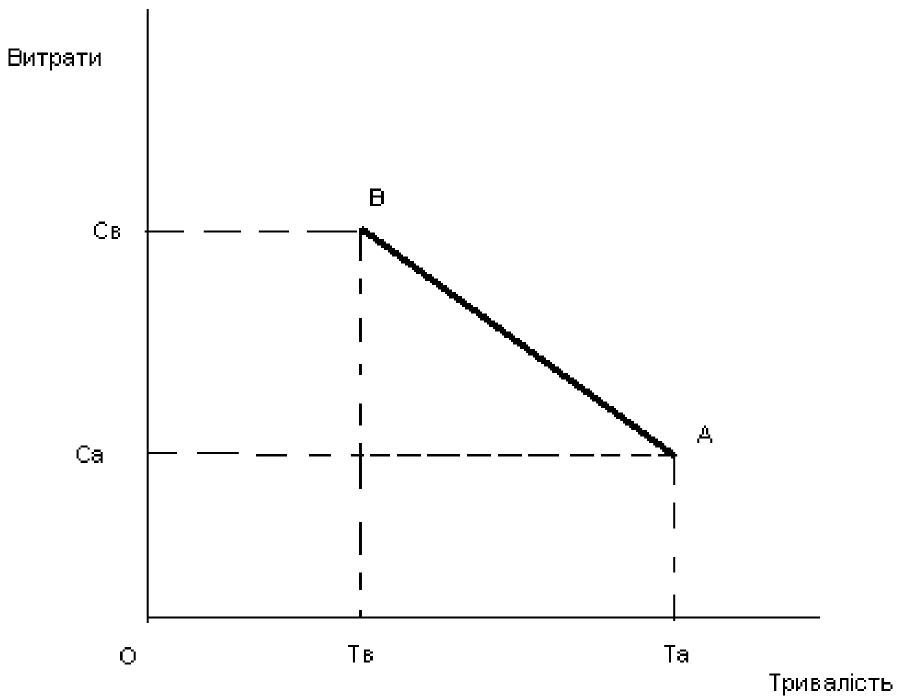


Рис 4.14

Точка A(T_A; C_A) відповідає нормальному режиму виконання операції (T_A – тривалість операції, C_A – її вартість).

Тривалість операції можна зменшити (стиснути), якщо збільшити інтенсивність використання ресурсів. При цьому збільшується вартість операції. Однак існує границя, яка називається *мінімальною тривалістю* операції. Подальше збільшення інтенсивності використання ресурсів приведе лише до збільшення витрат без скорочення тривалості операції. Ця границя визначається точкою максимальної інтенсивності (точка B на рис. 4.14).

Лінійна залежність “витрати-тривалість” приймається з міркувань зручності, так як її можна визначити для будь-якої операції за двома точками нормального і максимального режимів, тобто за точками А і В.

Скорочення тривалості виконання робіт можна досягти за рахунок зменшення тривалості якої-небудь критичної операції. Тільки критичні операції підлягають аналізу. Для того щоб досягти скорочення тривалості виконання робіт при мінімально можливих витратах, необхідно в максимально допустимій степені стиснути ту критичну операцію, у якій нахил залежності “витрати-тривалість” найменший. В наслідок стиснення критичної операції отримують новий календарний графік, можливо, з новим критичним шляхом. Вартість робіт при новому календарному графіку буде вищою за попередній графік. На наступному етапі цей новий графік знов стискають за рахунок іншої критичної операції з мінімальнім нахилом залежності “витрати-тривалість”. Подібна процедура повторюється до тих пір, доки всі критичні операції не будуть знаходитись в режимі максимальної інтенсивності.

Обґрунтування привабливості інвестування проекту

Для фінансування проектів по будівництву і налагодженню виготовлення продукції у більшості випадків фірми залучають інвестиції. Включення в проекти матеріалів з оптимізацією мережевих моделей у частині обґрунтування термінів повернення інвестицій роблять проекти більш привабливими та сприяє прийняттю інвестором позитивного рішення.

Приклад 4.4. Підприємство для покращення свого фінансового стану вирішило налагодити випуск морозива. Для переобладнання робочих приміщень (дільниці) під випуск морозива необхідно виконати наступні операції:

1) підготовка технічного завдання на переобладнання дільниці (30 дн.);
2) замовлення та доставка нового обладнання (60 дн.);

3) замовлення та доставка нового електрообладнання (50 дн.);
4) демонтування старого та встановлення нового обладнання (90 дн.);
5) демонтування старого та встановлення нового електрообладнання (80 дн.);
6) перенавчання персоналу (30 дн.);
7) випробування та здача в експлуатацію обладнання для виробництва морозива (20 дн.).

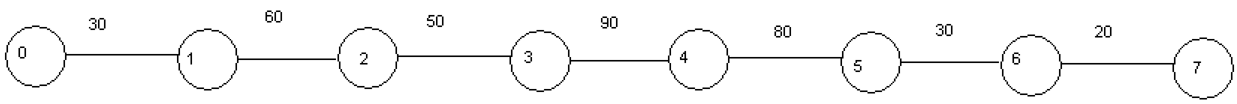
Очікується, що продуктивність після введення нової лінії буде складати 20 т морозива за зміну. Прибуток від реалізації 1 т продукції буде складати 0,5 тис. грн. за зміну. Кошти на закупівлю і переобладнання дільниці у розмірі 2000 тис. грн. були взяті в банку під 20% річних (з розрахунку 1500 тис. грн. на закупівлю обладнання і 500 тис. грн. на роботи по демонтажу старого обладнання та встановлення нового обладнання). Витрати на проведення робіт в нормальному і максимальному режимах вказані в таблиці 4.3.

Визначити через який час може бути повернений кредит у банк.

Таблиця 4.3

Робота	Нормальний режим		Максимальний режим	
	Тривалість, дн.	Витрати, тис. грн	Тривалість, дн.	Витрати, тис. грн.
1	30	20	25	30
2	60	40	45	60
3	50	30	40	40
4	90	70	70	100
5	80	60	65	70
6	30	25	20	25
7	20	20	17	25
Всього	360	265	282	350

Розв'язання. 1. Складемо графік проведення робіт.



На проведення переобладнання необхідно
30+60+50+90+80+30+20=360 дн.

2. Графік можна покращити, якщо виконувати деякі роботи паралельно. Отримуємо графік (рис. 4.15).

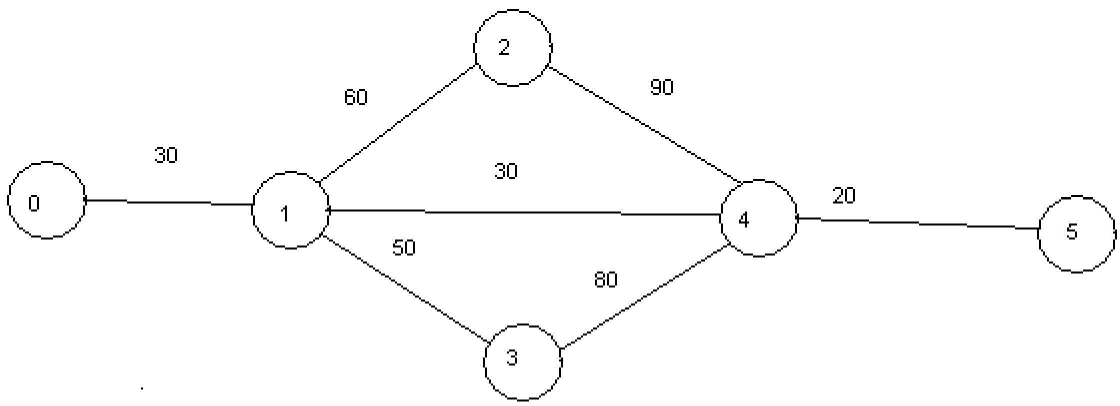


Рис 4.15

На цьому графіку позначені роботи:

(0,1) – підготовка технічного завдання;

(1,2) – замовлення і постачання нового обладнання;

(1,3) – замовлення і постачання нового електрообладнання;

(1,4) - перенавчання персоналу;

(2,4) – встановлення нового обладнання;

(3,4) – встановлення нового електрообладнання;

(4,5) – здача в експлуатацію нової лінії.

За графіком шляхи мають такі тривалості:

$0 \to 1 \to 2 \to 4 \to 5$: 200 дн.

$0 \to 1 \to 3 \to 4 \to 5$: 180 дн.

$0 \to 1 \to 4 \to 5$: 80 дн.

Критичним шляхом графіка є шлях $0 \to 1 \to 2 \to 4 \to 5$.

Графік покращився порівняно з початковим на 360-200=160 дн.

Визначимо через який час після початку робіт може бути повернений кредит у банк.

Через 200 дн. після початку робіт підприємство витратить 1500 тис. грн. на придбання обладнання і 265 тис. грн. на його встановлення та здачу в експлуатацію (табл. 4.3, нормальний режим). В наявності у підприємства залишається

2000-1500 – 265 = 235 тис. грн.

Побудуємо графік зміни кредиту та отримання прибутку в залежності від часу.

Зміна кредиту в залежності від часу є лінійною, причому відомі дві точки цієї залежності. Через 360 дн. після отримання кредиту під 20% річних борг підприємства буде складати 2400 тис. грн. Отже відомі дві точки A(0; 2000) і B (360; 2400).

Складемо рівняння прямої що проходить через дві задані точки:

$$\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{x-x_A}{x_B-x_A}, \qquad \frac{y-2000}{2400-2000}=\frac{x-0}{360-0},$$

$$10x-9y+18000=0 \qquad \text{(рис. 4.16, пряма AB).}$$

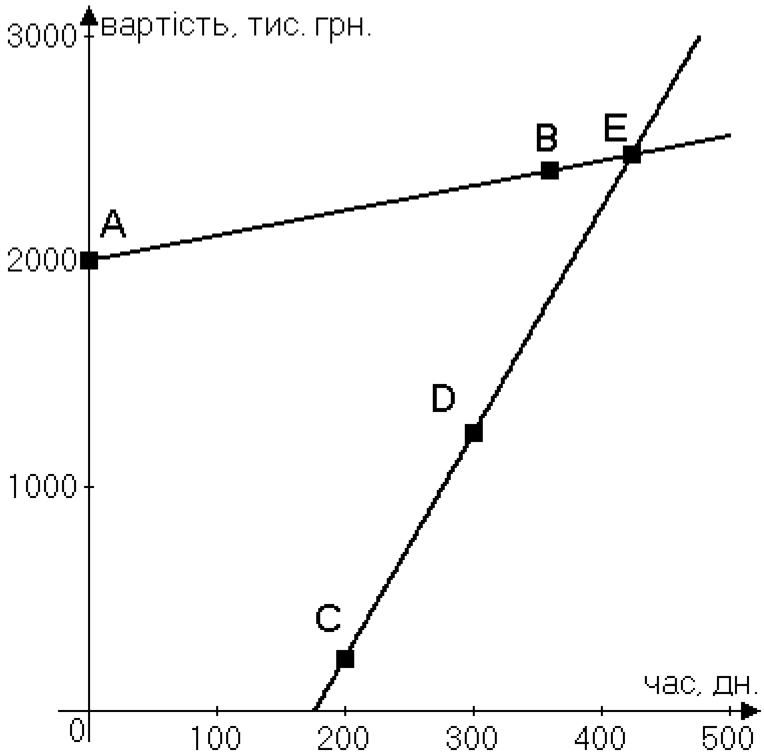


Рис 4.16

Знайдемо рівняння прибутку підприємства. Відомо, що через 200 дн. після початку робіт, від кредиту залишилось 235 тис. грн. Через 100 дн. після початку випуску продукції (300 дн. після початку робіт) підприємство отримує прибуток

$$0{,}5 \cdot 20 \cdot 100 = 1000 \text{ тис. грн.}$$

і в нього в наявності буде

$$2000 + 235 = 1235 \text{ тис. грн.}$$

Отже, маємо дві точки C(200; 235), D(300; 1235). Тоді

$$\frac{y - y_C}{y_D - y_C} = \frac{x - x_C}{x_D - x_C}, \qquad \frac{y - 235}{1235 - 235} = \frac{x - 200}{300 - 200},$$

$10x - y - 1765 = 0$ (рис. 4.16, пряма CD).

Розв'язуючи систему рівнянь

$10x - 9y + 18000 = 0$,

$10x - y - 1765 = 0$,

отримуємо координати точки E:

$x = 423{,}6$; $y = 2471$.

Таким чином, при нормальному режимі роботи кредит в банк може бути повернений через $423{,}6 \approx 424$ дні.

3. Графік виконання робіт може бути стиснутий за рахунок виконання деяких операцій у максимально інтенсивному режимі (стисненню повинні підлягати тільки критичні операції).

Перед аналізом критичних операцій визначаються нахили залежності "витрати-тривалість" для кожної операції (наприклад (0,1): (30-20)/(25-30)=-2). Результати розрахунків наведені у таблиці 4.4 (нахили подані за абсолютною величиною).

Таблиця 4.4

Операція	(0,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,5)
Нахил	2	1,3	1	1	1,5	0,7	1,7

Враховуючи нахили кривої виконуємо стиснення та обчислюємо вартість стиснення (таблиця 4.5).

Таблиця 4.5

Операція, яка підлягає стисненню	Критичний шлях після операції	Тривалість критичного шляху	Вартість стиснення тис. грн
(1,2)	0-1-2-4-5	185	60 - 40=20
(2,4)	0-1-3-4-5	180	100 - 70-=30
(3,4)	0-1-2-4-5 0-1-3-4-5	165	70 - 60=10
(4,5)	0-1-2-4-5 0-1-3-4-5	162	25 - 20=5
(0,1)	0-1-2-4-5 0-1-3-4-5	157	30 - 20=10

Новий графік має два критичних шляхи : $0 \to 1 \to 2 \to 4 \to 5$ та $0 \to 1 \to 3 \to 4 \to 5$ (рис. 4.17). Тривалість критичного шляху 157 дн.

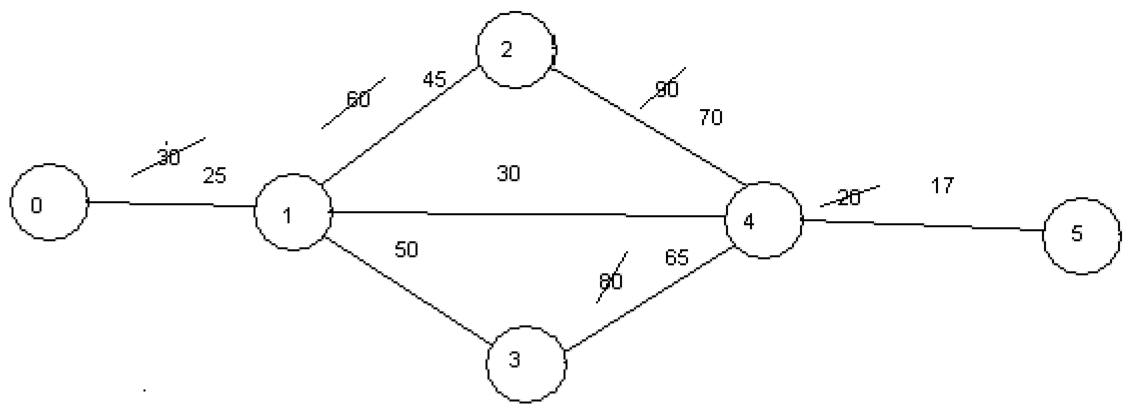


Рис. 4.17

Отже, критичний шлях скорочений з 200 до 157 дн., а це означає, що підприємство почне виробляти морозиво через 157 дн. після початку робіт. При цьому стиснення операцій (1,2), (2,4), (3,4), (4,5), (0,1) обійдеться підприємству в

20+30+10+5+10=75 тис. грн.

Графік зміни кредиту в залежності від часу залишається попереднім

$$10x - 9y + 18000 = 0.$$

Знайдемо рівняння прибутку. Через 157 дн. після початку робіт у підприємства залишиться коштів

2000-1500-265-75 = 160 тис. грн.

Через 100 дн. після початку випуску продукції підприємство отримує прибуток

0,5·20·100=1000 тис. грн.

та у нього в наявності буде коштів

1000 + 160 = 1160 тис. грн.

Отже маємо дві точки C′(154;160) D′(257;1160).

Рівняння прямої:

$$\frac{y-160}{1160-160} = \frac{x-157}{257-157}, \qquad 10x - y - 1410 = 0.$$

Розв'язуємо систему рівнянь

$$10x - 9y + 18000 = 0,$$

$$10x - y - 1410 = 0,$$

та визначаємо x=383,6, y=2426,25.

Таким чином, через 383,6 ≈ 384 дн. підприємство може повернути кредит у банк. Порівняно з попереднім випадком воно повертає кошти раніше на

424-384=40 дн.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що собою являє мережева модель планування?
2. Які основні елементи моделі мережевого планування?
3. Яких правил необхідно дотримуватись при побудові мережевих моделей?
4. Які процеси називаються критичними, які некритичними?
5. Чим відрізняються загальний та вільний запаси часу?
6. Зміст правила "червоного прапорця.
7. У чому полягає алгоритм мінімізації мережі?
8. Який зміст задачі знаходження найкоротшого шляху?
9. Як враховуються вартісні фактори при реалізації мережевого графіку?

Вправи

Районною адміністрацією прийнято рішення про газифікацію одного з невеликих сіл району, яке має 10 житлових будинків. Розміщення будинків вказані на рис. 4.18. Вершина 11 є газорозподільною станцією.

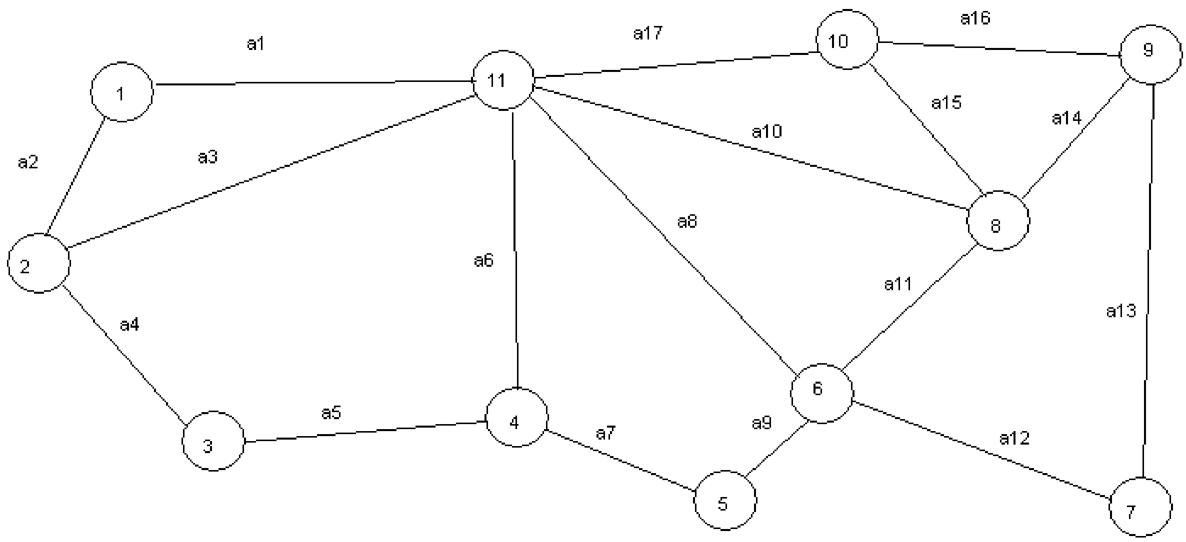


Рис. 4.18

Відсутність ребра між двома вершинами означає що з'єднання відповідних будинків газовою трубою неможливе.

Розробити такий план газифікації села, щоб загальна довжина трубопроводів була найменшою.

Значення коефіцієнтів умови задачі:

№ варінт. \ значеня	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A1	200	180	220	150	170	190	230	160	210	240
A2	60	70	50	40	80	70	30	100	90	40
A3	250	270	290	220	230	240	280	250	260	300
A4	110	130	120	140	100	150	200	170	190	180
A5	150	140	110	100	120	130	160	150	140	110

A6	300	320	310	350	330	360	340	310	290	370
A7	80	90	70	100	60	50	70	40	50	90
A8	350	370	360	390	340	380	330	390	360	400
A9	120	130	140	190	150	180	170	160	140	160
A10	400	440	420	430	470	450	410	460	440	470
A11	210	190	200	210	220	180	230	170	180	190
A12	40	50	30	60	80	70	90	80	50	40
A13	120	130	150	120	100	170	160	70	90	110
A14	30	40	50	60	30	50	80	70	90	40
A15	70	50	40	60	30	80	70	90	40	50
A16	20	40	30	50	30	70	20	60	40	50
A17	550	580	570	590	530	520	560	630	600	610

4.2. Автотранспортному підприємству треба засвоїти новий маршрут між містами А і В. На рис. 4.19 подані різні маршрути слідування з А до В, які проходять через декілька населених пунктів. Відстані вказані в кілометрах. Визначити найкращий шлях слідування автобусів з міста А до міста В .

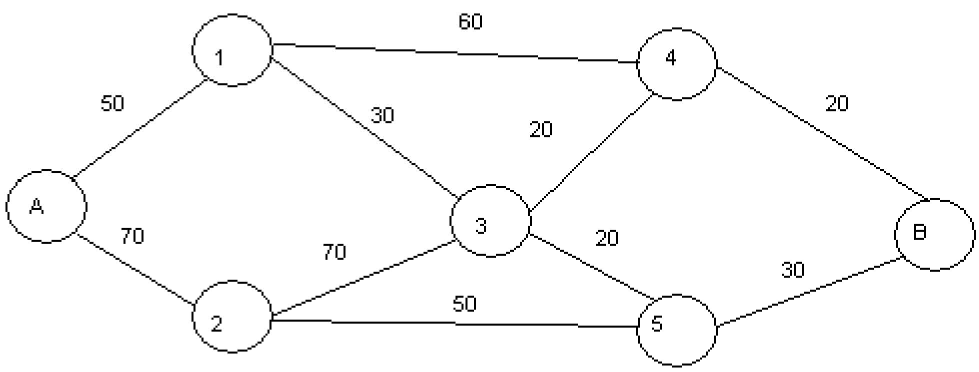


Рис. 4.19

4.3. Пожежній службі необхідно визначити найкоротший шлях від гаража (пункт А) до нафтопереробного заводу (пункт В) за даними в кілометрах, які вказані на рис. 4.20.

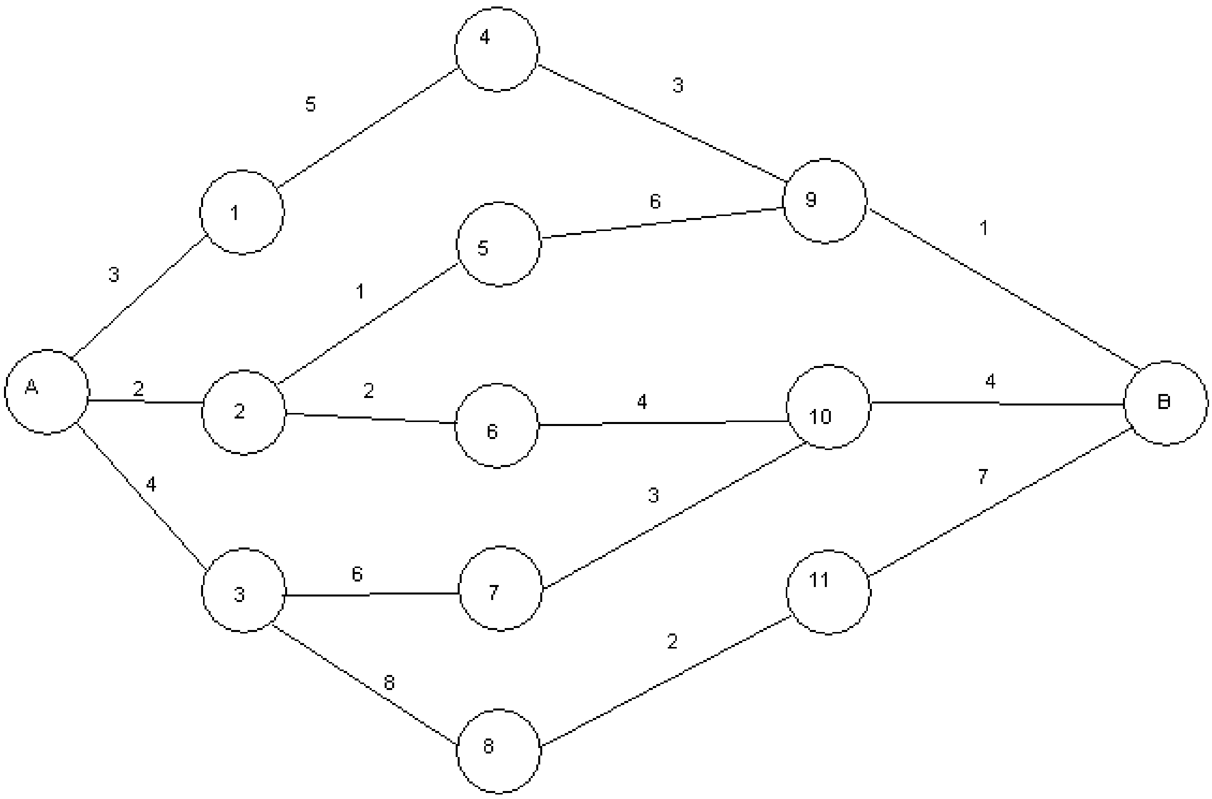


Рис. 4.20

4.4. Фірма по прокату DVD-дисків планує їх заміну на наступні п’ять років. Партія дисків повинна експлуатуватись не менше одного року перш ніж її замінюють. На рис. 4.21 наведені вартості заміни партії дисків (в тис. грн.), які залежать від часу заміни і кількості років, протягом яких диски знаходяться в експлуатації.

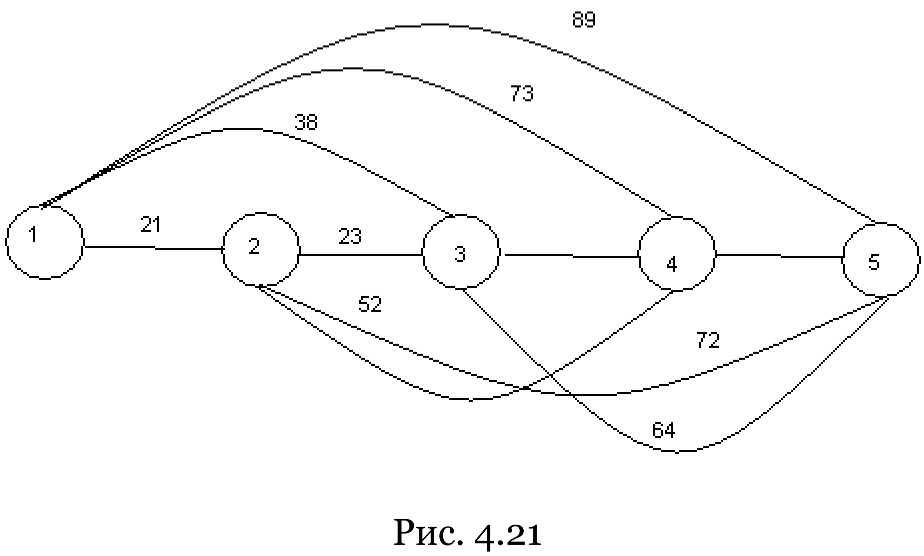


Рис. 4.21

4.5. Побудувати мережевий графік, розрахувати часові параметри графіка та побудувати план виконання робіт для даних які подані у таблиці

Таблиця 4.6

Зміст роботи	Позначення	Попередня робота	Тривалість днів
Складання кошторису	A1		10
Замовлення та доставка обладнання	A2	A1	15
Розподіл кадрів	A3	A1	5
Встановлення обладнання	A4	A2	20
Підготовка кадрів	A5	A3	9
Оформлення торгового залу	A6	A4	8
Доставка товарів	A7	A5	7
Замовлення і отриманні цінників	A8	A5	5
Замовлення і отримання форми	A9	A5	6
Викладення товарів	A10	A6, A7	3
Заповнення цінників	A11	A8	4
Генеральна репетиція	A12	A9, A10, A11	2

4.6. Побудувати графік робіт, визначити критичний шлях, вартість робіт при нормальному режимі, критичний шлях і мінімальну вартість робіт при максимальному режимі. Вихідні дані наведені:

а) у таблиці 4.7;

б) у таблиці 4.8.

Таблиця 4.7

Операція	Нормальний режим		Максимальний режим	
	Тривалість днів	Вартість грн.	Тривалість днів	Вартість грн.
(1,2)	4	80	2	150
(1,3)	2	50	1	70
(1,4)	3	60	2	80
(2,4)	2	60	1	70
(2,6)	6	100	3	160
(3,4)	2	40	1	60
(3,5)	3	70	2	90

(4,6)	4	90	2	170
(5,6)	4	80	2	160

Таблиця 4.8

Операція	Нормальний режим		Максимальний режим	
	Тривалість днів	Вартість грн.	Тривалість днів	Вартість грн.
(1,2)	5	110	4	130
(1,3)	3	70	2	90
(1,4)	2	50	1	60
(2,4)	3	60	2	80
(2,6)	4	80	2	110
(3,4)	2	60	1	70
(3,5)	6	110	4	150
(4,6)	3	70	2	80
(5,6)	5	100	2	150

4.7. Для покращення фінансового стану підприємству необхідно збільшити попит на цемент марки М400, що випускається, та розширити споживацький ринок. Підприємство вважає доцільним упаковувати цемент у спеціалізований тарі. Для переоснащення цеху необхідно встановити обладнання з виробництва спеціалізованої тари. Передбачається виконати наступне:

1) підготовка і випуск технічного завдання на переобладнання цеху (20 дн.);

2) розробка заходів з техніці безпеки (25 дн.);

3) підбір кадрів (10 дн.);

4) замовлення і доставка необхідного обладнання (30 дн.);

5) замовлення і доставка електрообладнання (40 дн.);

6) встановлення обладнання (50 дн.);

7) встановлення електрообладнання (45 дн.);

8) навчання персоналу (15 дн.);

9) випробування і здача в експлуатацію лінії (25 дн.).

Очікується, що продуктивність лінії з виробництва тари буде складати 1000 мішків за одну зміну. Вартість одного мішка – 2,5 грн., виручка від реалізації тарі за зміну – 2,5 тис. грн., з яких чистий прибуток підприємства дорівнює 0,5 тис. грн. Кошти на закупівлю обладнання та переоснащення цеху в розмірі 550 тис. грн. взяті в банку під 30% річних із розрахунку 500 тис. грн. на обладнання і 50 тис. грн. на його встановлення.

Витрати на проведення робіт та їх тривалість у нормальному і максимальному режимах наведені в таблиці 4.9.

Таблиця 4.9

Робота	Нормальний режим		Максимальний режим	
	Тривалість дн.	Витрати тис. грн.	Тривалість дн.	Витрати тис. грн.
1	20	2	18	2,6
2	25	3	20	3,7
3	10	0,5	9	0,7
4	30	6	23	6,4
5	40	6,5	32	7,8
6	50	9	43	10
7	45	8	41	8,5
8	15	0,5	9	1
9	25	5	21	5,7

Скласти графік проведення робіт, визначити критичний шлях і вартість робіт при нормальному режимі робот.

Провести "стиснення". Визначити, через який час після початку випуску тари фірма може повернути кредит банку, та мінімальну сумарну вартість робіт.

РОЗДІЛ 5
ТЕОРІЯ ІГОР І ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

5.1. Класифікація умов прийняття рішень

На практиці часто приходиться мати справу із задачами, в яких необхідно приймати рішення в умовах невизначеності, коли параметри, від яких залежить успіх операції, невідомі, і немає ніяких даних, які дозволяють судити про те, які їх значення більше, а які – менше імовірні.

Отже, оптимальність обраного рішення залежить від якості даних, які використовуються при описаній ситуації, в якій приймається рішення. З цієї точки зору процес прийняття рішень може належати до одних з трьох можливих умов:

1. Прийняття рішень в умовах *визначеності*, коли дані відомі точно.
2. Прийняття рішень в умовах *ризику* (*стохастичної невизначеності*), коли дані можна описати за допомогою імовірнісних розподілів.
3. Прийняття рішень в умовах *невизначеності*, коли даним не можна приписати відносні вагові коефіцієнти, які відображали їх ступінь значущості у процесі прийняття рішень.

По суті, в умовах визначеності дані надійно визначені, в умовах невизначеності вони не визначені. Це не означає, що в умовах невизначеності повністю відсутня інформація про задачу. Мова йде про те, що дані задачі важко або неможливо класифікувати за степенем значущості їх для прийняття рішення і що для цих даних, які розглядаються як реалізації випадкових величин або процесів, невідома або не може бути визначена функція розподілу або інші статистичні характеристики. Отже, прийняття рішення в умовах ризику являє собою проміжний випадок.

5.2. Метод аналізу ієрархій

Моделі лінійного програмування є прикладом прийняття рішень в умовах визначеності. Ці моделі застосовані лише у тих випадках, коли альтернативні розв'язки можна зв'язати між собою точними лінійними функціями. У цьому параграфі розглянемо інший підхід до прийняття рішень в ситуаціях, коли, наприклад, для ідей, почуттів, емоцій визначаються деякі кількісні показники, що забезпечують числову шкалу віддання переваг для можливих альтернативних розв'язків. Цей підхід відомий як *метод аналізу ієрархій*.

Перед тим як викласти деталі даного методу, розглянемо приклад, який демонструє спосіб, за допомогою якого оцінюються різні альтернативні розв'язки.

Приклад 5.1. Випускник-відмінник середньої школи робить вибір серед трьох університетів A, B і C з метою отримання вищої освіти. Він сформулював два основних критерії: місцезнаходження університету і його академічна репутація. Будучи відмінним учнем, він оцінює академічну репутацію університету у п'ять разів вище, ніж його місцезнаходження. Це приводить до того, що репутації університету приписують вагу наближено 83%, а його місцезнаходженню – 17%. Далі випускник використовує системний аналіз (сутність його викладається нижче) для оцінки трьох університетів з точки зору їх місцезнаходження і репутації. Проведений аналіз дає оцінки наведені у таблиці 5.1.

Таблиця 5.1

	Університет		
	A	B	C
Місцезнаходження	12,9%	27,7%	59,4%
Репутація	54,5%	27,3%	18,2%

Розв'язання. Структура задачі прийняття рішень приведена на рис. 5.1. Задача має єдиний ієрархічний рівень з двома критеріями (місцезнаходження і репутація) і три альтернативи (університети *A*, *B*, C).

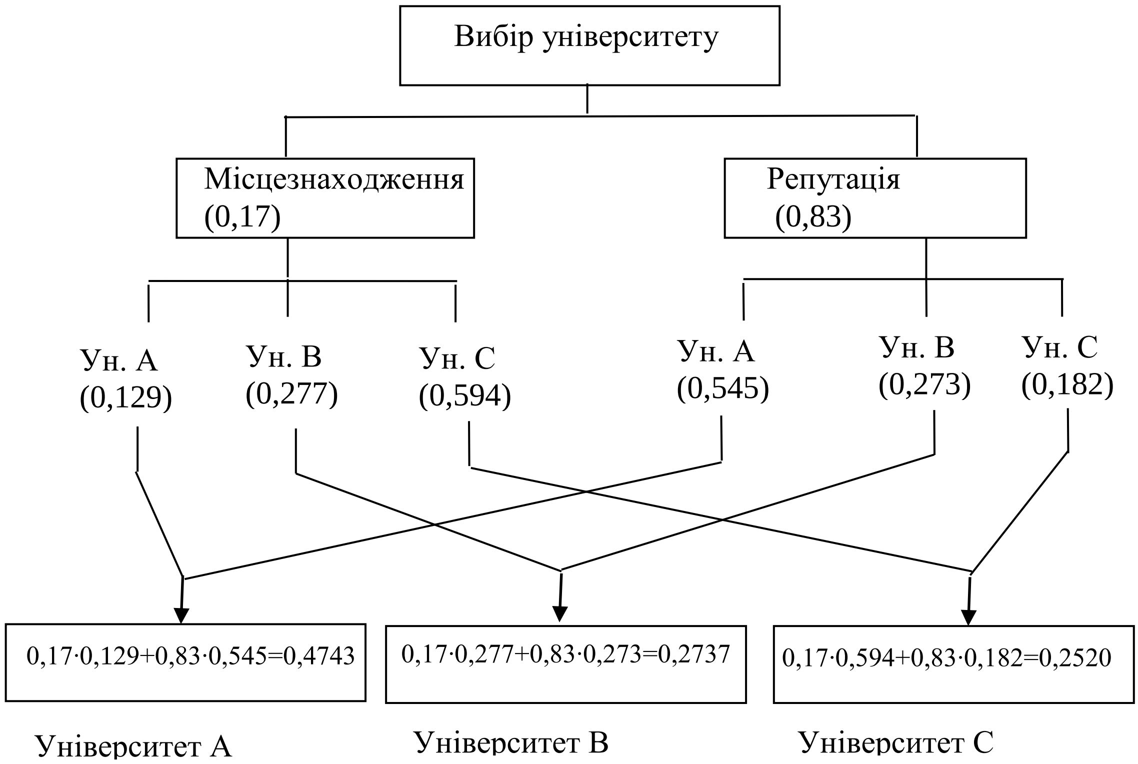


Рис. 5.1

Оцінка трьох університетів ґрунтується на обчислені комбінованого вагового коефіцієнта для кожного з них.

Університет A: 0,17·0,129+0,83·0,545=**0,4743**.

Університет B: 0,17·0,277+0,83·0,273=0,2737.

Університет B: 0,17·0,594+0,83·0,182=0,2520.

На основі цих обчислень університет A отримує найвищу комбіновану вагу і є найбільш оптимальним вибором учня.

Загальна структура метода аналізу ієрархій може містити декілька ієрархічних рівнів зі своїми критеріями.

Складність метода аналізу ієрархій полягає у визначені відносних вагових коефіцієнтів (таких, які були використані у прикладі 11.1) для оцінки альтернативних рішень. Якщо є *n* критеріїв на заданому рівні ієрархії, то відповідна процедура приводить до утворення матриці *A* розмірності $n \times n$, яку називають *матрицею парних порівнянь*, що відображає висновки особи, яка приймає рішення, відносно важливості різних критеріїв. Парне порівняння виконується таким чином, що критерій у стрічці i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ оцінюється відносно кожного з критеріїв, які представлені n стовпцями. Позначимо через a_{ij} елемент матриці A, який знаходиться на перетині i-го рядка та j-го стовпця. Відповідно до методу аналізу ієрархій для опису згаданих оцінок використовуються цілі числа від 1 до 9. При цьому $a_{ij} = 1$ означає, що i-й і j-й критерії однаково важливі, $a_{ij} = 5$ відображає думку, що i-й критерій значно важливіший за j-й, а $a_{ij} = 9$ вказує на те, що i-й критерій надзвичайно важливіше j-го. Інші проміжні значення між 1 і 9 інтерпретуються аналогічно. Узгодженість таких позначень забезпечується наступною умовою: якщо $a_{ij} = d$, то автоматично $a_{ji} = 1/d$. Крім того, усі діагональні елементи a_{ij} матриці A повинні бути рівними 1, так як вони виражають оцінку критерію відносно самих себе.

Приклад 5.2. Покажемо, як визначається матриця порівняння A для задачі прикладу 5.1.

Розв'язання. Почнемо з головного ієрархічного рівня, який має справу з критеріями академічної репутації університету і його місцем знаходження.

З точки зору випускника академічна репутація університету значно важливіша ніж його місцезнаходження. Отже, він надає елементу (1, 2) матриці A значення 5, тобто $a_{12} = 5$. Це автоматично передбачає, що $a_{21} = 1/5$. Позначивши через R і L критерії репутації університету і його місцезнаходження, можна записати матрицю порівняння наступним чином.

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} R & L \end{array} \\ \begin{array}{c} R \\ L \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1/5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Відносні вагові коефіцієнти критеріїв R і L можуть бути визначені шляхом ділення елементів кожного стовпця на суму елементів цього ж стовпця. Отже, для нормалізації матриці A ділимо елементи першого стовпця на величину $1+1/5=6/5$, елементи другого – на величину $5+1=6$. Шукані відносні вагові коефіцієнти w_R і w_L критеріїв обчислюються тепер як середні значення відповідних рядків нормалізованої матриці A. Отже,

$$N = \begin{array}{c} \\ R \\ L \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} R & L \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}83 & 0{,}83 \\ 0{,}17 & 0{,}17 \end{pmatrix} \end{array}$$

Середнє значення елементів рядків:

$$w_R = (0{,}83 + 0{,}83)/2 = 0{,}83;$$

$$w_L = (0{,}17 + 0{,}17)/2 = 0{,}17.$$

В результаті обчислень отримали $w_R = 0{,}83$ і $w_L = 0{,}17$, тобто ті вагові коефіцієнти, які показані на рис. 5.1. Стовпці матриці N однакові, що має місце лише у випадку, коли особа, що приймає рішення, виявляє ідеальну узгодженість у визначені елементів матриці A. Ця теза детальніше обмірковується нижче.

Відносні вагові коефіцієнти альтернативних рішень, які відповідають університетам *A*, *B* і *C*, обчислюються в межах кожного критерію R і L з використанням наступних двох матриць порівняння.

$$A_R = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

Сума елементів стовпців дорівнює $(1{,}83; 3{,}67; 5{,}5)$,

$$A_L = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/5 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

Сума елементів стовпців дорівнює $(8; 3{,}5; 1{,}7)$.

Елементи матриць A_R і A_L визначені на основі міркувань випускника, які стосуються важливості трьох університетів.

При діленні елементів кожного стовпця матриць A_R і A_L на суму елементів цього ж стовпця отримуємо наступні нормалізовані матриці.

$$N_R = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,545 & 0,545 & 0545 \\ 0,273 & 0,273 & 0273 \\ 0182 & 0,182 & 0,182 \end{pmatrix} \end{array}, \quad N_L = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,125 & 0,143 & 0,118 \\ 0,250 & 0,286 & 0,294 \\ 0,625 & 0,571 & 0,588 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Середні значення елементів рядків матриці N_R $w_{RA} = 0{,}545$, $w_{RB} = 0{,}273$ і $w_{RC} = 0{,}182$ дають відповідні вагові коефіцієнти для університетів A, B і C з точки зору академічної репутації. Аналогічно середні значення елементів рядків матриці N_L $w_{LA} = 0{,}129$, $w_{LB} = 0{,}277$ і $w_{LC} = 0{,}594$ є відносними ваговими коефіцієнтами, які стосуються місцезнаходження університетів.

В прикладі 5.2 можна відмітити, що всі стовпці нормалізованих матриць N і N_R ідентичні, а стовпці матриці N_L такими не є. Однакові стовпці вказують на те, що результуючі відносні вагові коефіцієнти зберігають одне й теж значення незалежно від того, як виконується порівняння. У цьому випадку кажуть, що вихідні матриці порівняння A і A_R є узгодженими. Отже, матриця A_L не є узгодженою.

Узгодженість означає, що рішення буде узгоджене з визначеннями парних порівнянь критеріїв або альтернатив. З математичної точки зору узгодженість матриці A означає, що $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ для всіх i, j, k. Наприклад в матриці A_R з прикладу 5.2 $a_{13} = 3$ і $a_{12}a_{23} = 2 \cdot 3/2 = 3$. Властивість узгодженості вимагає лінійної залежності стовпців (рядків) матриці A. Зокрема, стовпці будь-якої матриці порівнянь розмірністю 2×2 є залежними, і, отже, така матриця завжди є узгодженою. Не всі матриці порівнянь є узгодженими. Дійсно, взявши до уваги, що такі матриці будуються на основі людських міркувань, можна очікувати деяку степінь неузгодженості, і до неї слід відноситись терпляче при умові, що вона не виходить за певні „допустимі” межі.

Для того щоб з’ясувати, чи є рівень узгодженості „допустимим”, необхідно визначити відповідну кількісну міру для матриці порівнянь A. У прикладі 5.2 ми бачили, що ідеально узгоджена матриця A приводить до нормалізованої матриці N, в якій всі стовпці однакові.

$$N = \begin{pmatrix} w_1 & w_1 & \dots & w_1 \\ w_2 & w_2 & \dots & w_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_n & w_n & \dots & w_n \end{pmatrix}.$$

Звідки випливає, що матриця порівнянь A може бути отримана з матриці N шляхом ділення елементів i-го стовпця на w_i (цей процес обернений до знаходження матриці N з A). Отже, отримуємо наступне:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & 1 & \dots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо використати наведене визначення матриці A, то будемо мати

$$\begin{pmatrix} 1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & 1 & \dots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nw_1 \\ nw_2 \\ \vdots \\ nw_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

У компактній формі умова узгодженості матриці A формулюється наступним чином. Матриця A буде узгодженою тоді і тільки тоді, коли

$$A\vec{w} = n\vec{w},$$

де $\vec{w}$ – вектор-стовпець відносних вагових коефіцієнтів w_i, $i = 1, 2, \dots, n$.

Коли матриця A не є узгодженою, відносний ваговий коефіцієнт w_i апроксимується середнім значенням n елементів i-го рядка нормалізованої матриці N. Позначивши через $\langle \vec{w} \rangle$ обчислену оцінку (середнє значення), можна показати, що

$$A\langle\vec{w}\rangle = n_{\max}\vec{w},$$

де $n_{\max} \geq n$. В цьому випадку, чим ближче $n_{\max}$ до n, тим більше узгодженою є матриця порівнянь A. В результаті відповідно до методу аналізу ієрархій обчислюється *коефіцієнт узгодженості* у вигляді

$$C_R = \frac{C_I}{R_I},$$

де

$C_I = \dfrac{n_{\max} - n}{n - 1}$ – коефіцієнт узгодженості матриці A,

$R_I = \dfrac{1{,}98 \cdot (n-2)}{n}$ – стохастичний коефіцієнт узгодженості матриці A.

Стохастичний коефіцієнт узгодженості R_I визначається емпіричним шляхом як середнє значення коефіцієнту C_I для вибірки великого об’єму генерованих випадково матриць порівняння A.

Коефіцієнт узгодженості C_R використовується для перевірки узгодженості матриці порівнянь A наступним чином. Якщо $C_R \leq 0{,}1$, то рівень неузгодженості є припустимим. У протилежному випадку рівень неузгодженості матриці порівнянь A є високим і особі, яка приймає рішення, рекомендується перевірити елементи парного порівняння a_{ij} матриці A з метою отримання більш узгодженої матриці.

Значення $n_{\max}$ обчислюється за допомогою матричного рівняння $A\langle\vec{w}\rangle = n_{\max}\vec{w}$, при цьому не важко помітити, що i-є рівняння цієї системи має вигляд:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\langle w_j\rangle = n_{\max}\langle w_i\rangle,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{n}\langle w_i\rangle = 1$, легко перевірити, що

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\langle w_j\rangle\right) = n_{\max}\sum_{i=1}^{n}\langle w_i\rangle = n_{\max}.$$

Це означає, що величину $n_{\max}$ можна визначити шляхом обчислення вектор-стовпця $A\langle\vec{w}\rangle$ з подальшим підсумовуванням його елементів.

Приклад 5.3. У прикладі 11.2 матриця A_L є неузгодженою, так як стовпці матриці N_L неоднакові. Треба дослідити узгодженість матриці A_L.

Розв'язання. Обчислимо значення $n_{\max}$. Використавши дані прикладу 11.2, маємо

$$\langle w_1\rangle = 0{,}129;\ \langle w_2\rangle = 0{,}277;\ \langle w_3\rangle = 0{,}594.$$

Отже,

$$A_L\langle\vec{w}\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/5 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}129 \\ 0{,}277 \\ 0{,}594 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3863 \\ 0{,}8320 \\ 1{,}7930 \end{pmatrix}.$$

Звідки отримуємо

$$n_{\max} = 0{,}3863 + 0{,}8320 + 1{,}7930 = 3{,}0113.$$

Отже, для $n = 3$ маємо

$$C_I = \frac{n_{\max} - n}{n-1} = \frac{3{,}0113 - 3}{3-1} = 0{,}00565,$$

$$R_I = \frac{1{,}98\cdot(n-2)}{n} = \frac{1{,}98\cdot(3-2)}{3} = 0{,}66,$$

$$C_R = \frac{C_I}{R_I} = \frac{0{,}00565}{0{,}66} = 0{,}00856.$$

Так як $C_R < 0{,}1$, рівень неузгодженості матриці A_L є допустимим.

5.3. ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ РИЗИКУ

Якщо рішення приймається в умовах ризику (стохастична невизначеність), то вартості альтернативних рішень звичайно описуються імовірнісними розподілами. Задачі такого виду відносяться до задач теорії статистичних рішень, в яких невідомі умови операції залежать від об'єктивної дійсності, яку прийнято називати *природою*. Відповідні ситуації часто називають *іграми з природою*. *Природа* розуміється як деяка незацікавлена інстанція, поведінка якої невідома.

Розглянемо гру з природою: у особи (гравець), що приймає рішення, є *m* можливих стратегій $A_1, A_2, \ldots, A_m$; що стосується обставин, то про них можна зробити *n* припущень: $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Будемо розглядати їх як *стратегії природи*. Прибуток (дохід) гравця a_{ij} при кожній парі стратегій (A_i, S_j) задається *матрицею прибутків*:

$$\begin{array}{c|cccc|} & S_1 & S_2 & \ldots & S_n \\ \hline A_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \cdots & \cdots & \cdots & \ldots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ \hline \end{array}$$

Треба вибрати таку стратегію гравця A_i, яка буде найбільш вигідною у порівнянні з іншими.

Введемо поняття *домінуючої стратегії*. Стратегія гравця A_i називається *домінуючою* над стратегією A_k, якщо у рядку A_i стоять прибутки не менші, ніж у відповідних клітинах рядку A_k та з них принаймні один дійсно більший, ніж у відповідній клітині рядку A_k. Якщо всі прибутки рядку A_i дорівнюють відповідним прибуткам рядку A_k, то стратегія A_i називається *дублюючою стратегією* A_k.

Самий простий випадок вибору рішення у грі з природою – це випадок коли якась із стратегій гравця домінує над іншими. Наприклад, у матриці прибутків

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	1	2	3	5
A_2	7	4	4	5
A_3	3	4	4	1
A_4	7	4	2	2

стратегія A_2 при будь-якому стані природи дає прибуток не менший, ніж при інших стратегіях, а при деяких станах – більший. Тут все зрозуміло, і треба обирати саме цю стратегію.

Якщо в матриці гри з природою немає жодної домінуючої над усіма іншими стратегіями, то корисно подивитись, чи немає в ній дублюючих стратегій і таких, які поступаються іншим при всіх умовах. Таким чином можна зменшити число стратегій гравця. Припустимо, що „чистка" матриці виконана, і ні дублюючих, ні явно невигідних гравцю стратегій в ній немає.

Прийняття рішення в умовах ризику ґрунтується на використанні *критерію очікуваного значення*, згідно з яким альтернативні рішення порівнюються з точки зору максимізації очікуваного прибутку або мінімізації очікуваних витрат.

Однак картина ситуації, яку дає матриця прибутків, неповна і не відображає належним чином переваги і недоліки кожного рішення. Бажано ввести такі показники, які не просто давали б прибуток при даній стратегії у кожній ситуації, але відображали би „удачливість" або „неудачливість" вибору даної стратегії у даній ситуації.

З цією метою в теорії рішень вводиться поняття *ризику*. *Ризиком* r_{ij} гравця при використанні стратегії A_i в умовах S_j називається різниця між прибутком, який був би отриманий, якщо були б відомі умови S_j і прибутком, який був би отриманий, коли ці умови невідомі і обрана стратегія A_i.

Очевидно, якби гравець знав стан природи S_j, то він би обрав ту стратегію, при якій прибуток максимальний. Цей прибуток, максимальний у стовпці S_j, позначимо β_j:

$$\beta_j = \max_i \{a_{ij}\}.$$

Щоб отримати ризик r_{ij}, треба від β_j відняти фактичний прибуток a_{ij}:

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij}.$$

Приклад 5.4. Для прикладу візьмемо матрицю прибутків і побудуємо для неї матрицю ризиків.

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\
\hline
A_1 & 1 & 4 & 5 & 9 \\
A_2 & 3 & 8 & 4 & 3 \\
A_3 & 4 & 6 & 6 & 2 \\
\hline
\beta_j & 4 & 8 & 6 & 9
\end{array}\; ; \quad (r_{ij}) = \begin{array}{c|cccc|}
 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\
\hline
A_1 & 3 & 4 & 1 & 0 \\
A_2 & 1 & 0 & 2 & 6 \\
A_3 & 0 & 2 & 0 & 7 \\
\hline
\end{array}$$

При погляді на матрицю ризиків стають зрозумілими деякі риси даної гри з природою. Так, в матриці прибутків у другому рядку перший і останній елементи були рівні між собою: $a_{21} = a_{24} = 3$. Однак ці прибутки зовсім не рівноцінні з точки зору вдалого вибору стратегії: при стані природи S_1 можна отримати самий більший прибуток 4, і вибір стратегії A_2 майже оптимальний; а ось при стані S_4 при обранні стратегії A_1 можна отримати на цілих 6 одиниць більше, тобто вибір стратегії A_2 зовсім невдалий. Ризик – це „платня за відсутність інформації": $r_{21} = 1$, $r_{24} = 6$ (тоді як прибутки a_{ij} в обох випадках однакові). Природно, бажано мінімізувати ризик, який супроводжує вибір рішення.

Отже, перед нами дві постановки задачі про вибір рішення: при одній бажано отримати максимальний прибуток, при другій – мінімальний ризик.

У даному параграфі ми розглядаємо стохастичну невизначеність, коли стани природи характеризуються імовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$ і ці імовірності в задачі відомі. Тоді природно обрати ту стратегію, для якої середнє значення прибутку, яке взяте по рядку, максимальне:

$$a_i = p_1 a_{i1} + p_2 a_{i2} + \ldots + p_n a_{in} = \sum_{j=1}^{n} p_j a_{ij} \to \max_i .$$

Корисно відмітити, що стратегія, яка обертає у максимум середній прибуток, приводить до мінімуму і середній ризик:

$$r_i = p_1 r_{i1} + p_2 r_{i2} + \ldots + p_n r_{in} = \sum_{j=1}^{n} p_j r_{ij} \to \min_i ,$$

так що у випадку стохастичної невизначеності обидва підходи (від прибутку і від ризику) дають одне і те ж оптимальне рішення.

Часто на практиці результат одного рішення приводить до необхідності прийняття наступного рішення і т. д. Цю послідовність прийняття рішень не можна виразити матрицею прибутків, тому доводиться використовувати інший алгоритм прийняття рішень.

Графічно подібні процеси можуть бути представлені за допомогою *дерева рішень*. Таке подання полегшує опис багатоетапного процесу прийняття управлінського рішення в цілому.

У наведеному прикладі 11.5 розглядається проста ситуація, яка пов'язана з прийняттям рішення при наявності скінченої кількості альтернатив і точних значень матриці прибутку.

Приклад 5.5. Припустимо, що деякий інвестор хоче вкласти на фондовій біржі 10 000 євро в акції однієї з двох компаній: *A* або *B*. Акції компанії *A* є ризикованими, але можуть принести 50% прибутку від суми інвестицій потягом наступного року. Якщо умови фондової біржі будуть несприятливими, сума інвестиції може знецінитися на 20%. Компанія В забезпечує безпеку інвестицій з 15% прибутку в умовах підвищення котирування[1] на біржі і тільки 5% – в умовах зниження котирування. Всі аналітичні публікації, з якими можна познайомитись (а вони завжди є у кінці року), з імовірністю 60% прогнозують підвищення котирування і з імовірністю 40% – зниження котирування. В яку кампанію слід вкласти гроші?

Розв'язання. Інформація, яка пов'язана з прийняттям рішення, підсумована у таблиці 5.2.

Таблиця 5.2

Альтернативне рішення	Прибуток від інвестицій за один рік, €	
	При підвищені котирування	При знижені котирування
Акції компанії *A*	5 000	– 2 000
Акції компанії *B*	1 500	500
Імовірність події	0,6	0,4

Задача може бути також представлена у вигляді дерева рішень, яке показане на рис. 5.2.

Рис. 5.2

На рис. 5.2 використовуються два типи вершин: квадрат представляє вершини, в яких приймається рішення, а коло – випадкову вершину

[1] Котирування – встановлення поточних цін на товари, курси валют і цінних паперів на ринках і біржах, а також публікація відомостей про встановлені ціни, курси і об'єми торгівлі.

(наслідок). Так як не можна впливати на появу наслідків, то в круглих вершинах обчислюють імовірності їх появи. Таким чином, із вершини 1 виходять дві вітки, які представляють альтернативи, пов'язані з покупкою акцій компанії *A* або *B*. Далі дві вітки, що виходять з випадкових вершин 2 і 3, відповідають випадкам підвищення і зниження котирування на біржі з імовірностями їх появи і відповідними прибутками.

Виходячи із схеми рис. 5.2, отримуємо очікуваний прибуток за рік для кожної з двох альтернатив.

Для акцій компанії *A*: $5000 \cdot 0{,}6 + (-2000) \cdot 0{,}4 = 2200$.

Для акцій компанії *B*: $1500 \cdot 0{,}6 + 500 \cdot 0{,}4 = 1100$.

Рішенням, яке ґрунтується на цих обчисленнях, є покупка акцій компанії *A*.

Розглянемо три модифікації критерію очікуваного значення. Перша полягає у визначені *апостеріорних імовірностей* на основі експерименту над досліджуваною системою, друга – у *корисності* реальної вартості грошей, а третя модифікує критерій очікуваного значення таким чином, що він може бути використаний для прийняття рішення при короткотерміновому плануванні.

Апостеріорні імовірності Байєса. Розподіли імовірностей, які використовуються при формуванні критерію очікуваного значення, одержуються, як правило, із накопиченої раніше інформації. В деяких випадках виявляється можливим модифікувати ці імовірності за допомогою поточної або отриманої раніше інформації, яка звичайно ґрунтується на досліджені вибіркових (експериментальних) даних. Отримані імовірності будуть *апостеріорними* (Байєсовськими), на відміну від *апріорних*, які отримані з вихідної інформації. Наступний приклад показує, як критерій очікуваного значення можна модифікувати так, щоб скористатись новою інформацією, яка міститься у апостеріорних імовірностях.

Приклад 5.6. У прикладі 5.5 апріорні імовірності 0,6 і 0,4 підвищення і зниження котирування акцій на біржі були визначені із наявних публікацій фінансового характеру. Припустимо, що замість того, щоб повністю покладатись на ці публікації, інвестор вирішив провести власне дослідження шляхом консультації з другом, який добре розуміється у питаннях, що стосуються фондової біржі. Друг висловлює загальну думку „за” або „проти” інвестицій. Ця думка в подальшому визначається кількісно наступним чином. При підвищенні котирування його думка буде „за” на 90%, при зниженні котирування імовірність його думки „за” зменшиться до 50%. Яким чином можна одержати вигоду з цієї додаткової інформації?

Розв’язання. Думка друга фактично являє умовні імовірності „за–проти”, при заданих станах природи у вигляді підвищення і зниження котирування. Введемо наступні події:

v_1 – думка „за”, v_2 – думка „проти”,

m_1 – підвищення котирування, m_2 – зниження котирування.

Думку друга можна записати у вигляді імовірнісних співвідношень:

$$P(v_1 \mid m_1) = 0{,}9;\, P(v_1 \mid m_2) = 0{,}1;$$

$$P(v_2 \mid m_1) = 0{,}5;\; P(v_2 \mid m_2) = 0{,}5.$$

За допомогою цієї додаткової інформації задачу вибору рішення можна сформулювати наступним чином:

1. Якщо думка друга „за”, акції якої компанії слід купувати – A або B?
2. Якщо думка друга „проти”, то, знов-таки, – акції якої компанії слід купувати – A або B?

Задачу можна представити у вигляді дерева рішень, яке показане на рис. 5.3. Вузлу 1 тут відповідає випадкова подія, думка друга, з відповідними імовірностями „за” та „проти”. Вузли 2 і 3 являють вибір між компаніями A і B при відомій думці друга „за” або „проти” відповідно. Вузли 4-7 відповідають випадковим подіям, які пов’язані з підвищенням або зниженням котирування.

Для оцінки різних альтернатив, які показані на рис. 5.3, необхідно обчислити апостеріорні імовірності $P(m_i \mid v_j)$, які вказані на відповідних вітках, та які виходять з вузлів 4-7. Ці апостеріорні імовірності обчислюються з урахуванням додаткової інформації, яка міститься в рекомендаціях друга, за допомогою наступних дій.

Крок 1. Умовні імовірності $P(v_j \mid m_i)$ для даної задачі запишемо наступним чином:

$$P(v_j|m_i) = \begin{array}{c|cc} & v_1 & v_2 \\ \hline m_1 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ m_2 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{array}$$

Крок 2. Обчислюємо імовірності сумісної появи подій:

$$P(m_i v_j) = P(v_j \mid m_i) \cdot P(m_i) \text{ для всіх } i \text{ та } j.$$

При заданих апріорних імовірностях $P(m_1) = 0{,}6$ і $P(m_2) = 0{,}4$ імовірності сумісної появи подій визначаються множенням першого і другого рядків таблиці, яка отримана на кроці 1, на 0,6 і 0,4 відповідно. В результаті маємо наступне:

$$P(m_i\, v_j) = \begin{array}{c|cc} & v_1 & v_2 \\ \hline m_1 & 0{,}54 & 0{,}06 \\ m_2 & 0{,}20 & 0{,}20 \end{array}$$

Сума всіх елементів цієї таблиці дорівнює одиниці.

Крок 3. Обчислюємо абсолютні імовірності.

$$P(v_j) = \sum_{i=1}^{2} P(m_i v_j), \quad j = 1, 2.$$

Ці імовірності одержуються шляхом сумування елементів відповідних стовпців таблиці, яка отримана на кроці 2. У результаті маємо наступне:

$P(v_1)$	$P(v_2)$
0,74	0,26

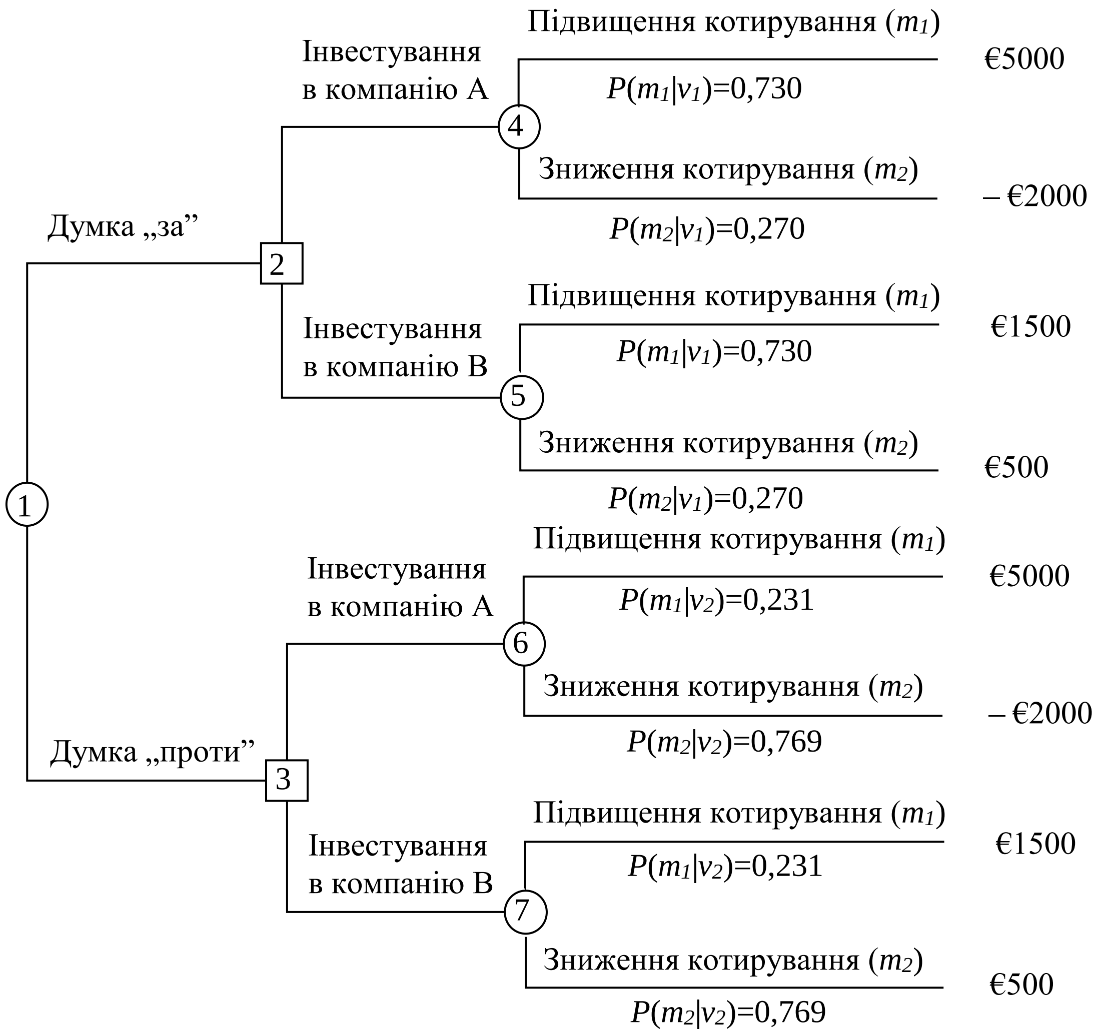


Рис. 5.3

Крок 4. Визначаємо шукані апостеріорні імовірності за формулою

$$P(m_i \mid v_j) = \frac{P(m_i v_j)}{P(v_j)}.$$

Ці імовірності обчислюються діленням кожного стовпця таблиці, яка отримана на кроці 2, на елемент відповідного стовпця таблиці, обчисленої на кроці 3, що приводить до наступних результатів(округлені до трьох десяткових знаків):

$$P(m_i|v_j) = \begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \end{array} \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ \hline 0{,}730 & 0{,}231 \\ 0{,}270 & 0{,}769 \end{array}$$

Це ті імовірності, які показані на рис. 11.3. Вони відрізняються від вихідних апріорних імовірностей $P(m_1)=0{,}6$ і $P(m_2)=0{,}4$.

Тепер можна оцінити альтернативні рішення, які основані на очікуваних прибутках для вузлів 4-7.

Думка „за”.

Прибуток від акцій компанії А у вузлі 4:

$$5000\cdot 0{,}730+(-2000)\cdot 0{,}270=3110.$$

Прибуток від акцій компанії В у вузлі 5:

$$1500\cdot 0{,}730+500\cdot 0{,}270=1230.$$

Рішення: інвестувати у акції компанії А.

Думка „проти”.

Прибуток від акцій компанії А у вузлі 6:

$$5000\cdot 0{,}231+(-2000)\cdot 0{,}769=-383.$$

Прибуток від акцій компанії В у вузлі 7:

$$1500\cdot 0{,}231+500\cdot 0{,}769=731.$$

Рішення: інвестувати у акції компанії В.

Відмітимо, що попередні рішення еквівалентні твердженню, що очікувані прибутки у вузлах 2 і 3 дорівнюють 3110 і 731 євро відповідно. Отже, при відомих імовірностях $P(v_1)=0{,}74$ і $P(v_2)=0{,}26$, які обчислені на кроці 3, можна обчислити очікуваний прибуток для всього дерева рішень.

У попередніх прикладах критерій очікуваного значення застосовувався лише у тих ситуаціях, де прибутки виражались у вигляді реальних грошей. Зустрічається багато випадків, коли при аналізі слід використовувати скоріше *корисність*, ніж реальну величину прибутків. Різні індивідууми виявляють різне відношення до ризику, тобто вони проявляють різну корисність по відношенню до ризику. Іншими словами різні люди по різному можуть інтерпретувати отримані при аналізі результати. Наприклад, при рівноімовірних можливостях при інвестуванні отримати прибуток або втратити інвестицію, обережний інвестор може не виразити бажання ризикувати, а інвестор, який іде на ризик, може зробити інвестицію.

Визначення корисності є суб'єктивним. Воно залежатиме від нашого відношення до ризику. Те, що процедура визначення корисності повністю визначається думкою особи, що приймає рішення, породжує сумнів відносно надійності отриманого результату. Процедура, зокрема, неявно передбачає, що особа, яка приймає рішення, є раціонально мислячою – вимога, яка не завжди може бути узгоджена з варіаціями у поведінці і настрої, що є типовим для людської особистості. У цьому відношенні особа, що приймає рішення повинна дотримуватись концепції корисності у широкому розумінні, згідно з якою грошові одиниці не повинні бути єдиним вирішальним фактором у теорії прийняття рішень.

5.4. Прийняття рішень в умовах невизначеності

Прийняття рішень в умовах невизначеності, як і в умовах ризику, вимагає альтернативних дій, яким відповідають прибутки, що залежать від випадкових станів природи. Однак імовірності станів природи або взагалі не існують, або не піддаються оцінюванню навіть наближено.

Матрицю прибутків в задачі прийняття рішень з m можливими діями і n станами природи можна представити наступним чином:

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & S_1 & S_2 & \ldots & S_n \\
\hline
A_1 & v(A_1,S_1) & v(A_1,S_2) & \ldots & v(A_1,S_n) \\
A_2 & v(A_2,S_1) & v(A_2,S_2) & \ldots & v(A_2,S_n) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A_m & v(A_m,S_1) & v(A_m,S_2) & \ldots & v(A_m,S_n) \\
\hline
\end{array}$$

Елемент A_i являє собою i-е можливе рішення, а елемент S_j – j-й стан природи. Прибуток, який пов'язаний з рішенням A_i і станом S_j, дорівнює $v(A_i,S_j)$.

Отже, відміна між прийняттям рішення в умовах ризику і невизначеності полягає в тому, що в умовах невизначеності імовірнісний розподіл, який відповідає станам S_j або невідомий, або не може бути визначений. Ця нестача інформації обумовила розвиток наступних критеріїв для аналізу ситуації, яка пов'язана з прийняттям рішення:

1. Критерій Лапласа.
2. Мінімаксний критерій.
3. Критерій Севіджа.
4. Критерій Гурвіца.

Ці критерії відрізняються ступенем консерватизму, який проявляє особа, що приймає рішення, перед лицем невизначеності.

Критерій Лапласа спирається на *принцип недостатнього обґрунтування*, який полягає в тому, що оскільки розподіл імовірностей станів $P(S_j)$ невідомий, немає причин вважати їх різними. Отже, використовується оптимістичне припущення, що імовірності всіх станів природи імовірні між собою, тобто

$$P(S_1) = P(S_2) = \ldots = P(S_n) = 1/n.$$

Якщо при цьому $v(A_i,S_j)$ – це отриманий прибуток, то найкращим рішенням буде те, яке забезпечує

$$\max_i \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} v(A_i, S_j) \right\}.$$

Якщо величина $v(A_i,S_j)$ – це витрати особи, що приймає рішення, то оператор „$\max$” замінюється на „$\min$”.

Максимінний (мінімаксний) критерій ґрунтується на консервативній обережній поведінці особи, що приймає рішення, і зводиться до вибору найкращої альтернативи з найгірших. Якщо величина $v(A_i,S_j)$ – це прибуток, то згідно з максимінним критерієм в якості оптимального обирається рішення, яке забезпечує

$$\max_i \left\{ \min_j v(A_i, S_j) \right\}.$$

Якщо величина $v(A_i,S_j)$ – втрати, використовується мінімаксний критерій, який визначається наступним співвідношенням

$$\min_i \{\max v(A_i, S_j)\}.$$

Критерій Севіджа намагається зм'якшити консерватизм максимінного (мінімаксного) критерію шляхом заміни матриці прибутків матрицею ризиків

$$r(A_i, S_j) = \begin{cases} \max\limits_k \{v(A_k, S_j)\} - v(A_i, S_j), \text{ якщо } v - \text{прибуток} \\ v(A_i, S_j) - \min\limits_k \{v(A_k, S_j)\}, \text{ якщо } v - \text{втрати} \end{cases}.$$

Критерій Гурвіца охоплює ряд різних підходів до прийняття рішення – від найбільш оптимістичного до найбільш песимістичного (консервативного). Нехай $0 \le \alpha \le 1$ і величини $v(A_i, S_j)$ – це прибутки. Тоді рішенню, яке вибране за критерієм Гурвіца, відповідає

$$\max_i \left\{ \alpha \max_j v(A_i, S_j) + (1-\alpha) \min_j v(A_i, S_j) \right\}.$$

Параметр α – *показник оптимізму*. Якщо $\alpha = 0$, критерій Гурвіца стає консервативним, так як його застосування еквівалентне застосуванню звичайного максимінного критерію. Якщо $\alpha = 1$, критерій Гурвіца стає надто оптимістичним, так як розраховує на найкращі з найкращих умов. Можна конкретизувати степінь оптимізму (або песимізму) відповідним вибором величини α з інтервалу $[0;1]$. При відсутності яскраво вираженої прихильності до оптимізму або песимізму вибір $\alpha = 0{,}5$ здається найбільш розумним.

Якщо величини $v(A_i, S_j)$ – це втрати, то критерій набуває наступного вигляду:

$$\min_i \left\{ \alpha \min_j v(A_i, S_j) + (1-\alpha) \max_j v(A_i, S_j) \right\}.$$

Вибір рішення в умовах невизначеності завжди суб'єктивний. І все ж таки математичні методи корисні і тут. Перш за все, вони дозволяють привести гру з природою до матричної форми, що далеко не завжди буває просто, особливо коли альтернативних рішень багато. Крім того, вони дозволяють за допомогою послідовного числового аналізу ситуації, отримати рекомендації щодо застосування того чи іншого рішення, і зробити остаточний вибір.

Якщо рекомендації, які отримані з різних критеріїв, співпадають – тим краще, це означає, що можна обирати рекомендоване рішення. Якщо ж, як це часто буває, рекомендації суперечать одне одному, треба з'ясувати наскільки до різних результатів вони приводять, уточнити свою точку зору і зробити остаточний вибір. Треба пам'ятати, що в будь-яких задачах обґрунтування рішень деяке свавілля неминуче – вже при побудові математичної моделі і виборі показника ефективності. Вся математика, що застосовується у дослідженнях, не відміняє цього свавілля, а дозволяє тільки „поставити його на своє місце".

Розглянемо приклад застосування різних критеріїв при виборі рішення.

Приклад 5.7. Розглянемо приклад гри з природою, матриця вартостей якого подана у таблиці 5.3.

Таблиця 5.3

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	5	10	18	25
A_2	8	7	12	23
A_3	21	18	12	21
A_4	30	22	19	15

Проаналізуємо ситуацію вибору стратегії, яка мінімізує вартості, з точки зору чотирьох розглянутих вище критеріїв.

Критерій Лапласа. При заданих імовірностях $P(S_j) = 1/4$, $j = 1, 2, 3, 4$, очікувані значення вартостей для різних можливих рішень обчислюються наступним чином.

$$M(A_1)=\frac{1}{4}(5+10+18+25)=14{,}5;$$

$$M(A_2)=\frac{1}{4}(8+7+12+23)=12{,}5;$$

$$M(A_3)=\frac{1}{4}(21+18+12+21)=18;$$

$$M(A_4)=\frac{1}{4}(30+22+19+15)=21{,}5.$$

Оптимальна стратегія – A_2.

Мінімаксний критерій. Цей критерій використовує вихідну матрицю вартостей (таблиця 5.4).

Таблиця 5.4

	S_1	S_2	S_3	S_4	Максимум рядка
A_1	5	10	18	25	25
A_2	8	7	12	23	23
A_3	21	18	12	21	21 – мінімакс
A_4	30	22	19	15	30

Оптимальна стратегія – A_3.

Критерій Севіджа. Матриця ризиків визначається відніманням чисел 5, 7, 12 і 15 від елементів стовпців від першого до четвертого відповідно (таблиця 5.5).

Таблиця 5.5

		S_1	S_2	S_3	S_4	Максимум рядка
	A_1	0	3	6	10	10
$r(A_i, S_j)$ =	A_2	3	0	0	8	8 – мінімакс
	A_3	16	11	0	6	16
	A_4	25	15	7	0	25

Оптимальна стратегія – A_2.

Критерій Гурвіца. Результати обчислень містяться в таблиці 5.6.

Таблиця 5.6

Альтернатива	Мінімум рядка	Максимум рядка	α·(Мінімум рядка)+ +(1–α)·(максимум рядка)
A_1	5	25	25–20α
A_2	7	23	23–16α
A_3	12	21	21–9α
A_4	15	30	30–15α

Використовуючи відповідне значення для α, можна визначити оптимальну альтернативу. Наприклад, при $\alpha = 0{,}5$ оптимальними є або альтернатива A_1, або A_2, тоді як при $\alpha = 0{,}25$ оптимальним буде рішення A_3.

5.5. Основні поняття теорії ігор

Найбільш простими із ситуацій, які містять невизначеність, є так званні *конфліктні ситуації*, суть яких полягає в тому, що кілька сторін прагнуть досягти певних суперечливих, як правило, цілей, причому ступінь цього досягнення залежить від способу дій сторін, кожна з яких прагне максимізувати міру досягнення поставленої мети.

В економіці іноді приходиться мати справу з такими ситуаціями, коли при наявності багатьох учасників ефективність рішення одного з них залежить від того, які рішення прийняли інші учасники. Наприклад, дохід підприємства від продажі виробів залежить не тільки від встановленої на них ціни, але і від кількості куплених покупцями виробів. Або при виборі асортименту товарів, які виготовляються підприємством, треба враховувати, який асортимент товарів випускають інші підприємства.

Побудовою математичних моделей конфліктних ситуацій і розробкою методів розв'язання виникаючих у цих ситуаціях задач займається *теорія ігор*. Кожна безпосередньо взята з практиці конфліктна ситуація дуже складна, та її аналіз ускладнений наявністю несуттєвих факторів. Щоб зробити можливим математичний аналіз конфлікту, будується його математична модель.

Грою називається математична модель конфлікту, тобто сукупність деяких, певним чином впорядкованих правил, що реалізуються в діях двох чи більше осіб, які прагнуть досягти своїх цілей, виступаючи як учасники гри (*гравці*). Учасниками гри можуть бути як окремі індивідууми, так і цілі колективи (організації). *Ходом гри* називається вибір гравцем одного рішення з множини допустимих рішень, визначених правилами гри. Елементи визначеної правилами гри множини допустимих рішень кожного окремого гравця називаються його *стратегіями*. Отже, хід – це вибір гравцем однієї з своїх стратегій. З кожною стратегією зв'язаний *платіж*, який один з гравців виплачує іншим.

Ігри можна класифікувати згідно з деякими основними ознаками. Однією з них є кількість гравців. Гра, в якій беруть участь два гравці називається парною, більше двох гравців – множинною. Учасники множинної гри можуть утворювати коаліції (постійні або змінні). Множинна гра з двома постійними коаліціями, зрозуміло, перетворюється на парну.

В залежності від числа стратегій ігри діляться на *скінченні* і *нескінченні*. Гра називається скінченною, якщо у кожного гравця є у розпорядженні тільки скінченна кількість стратегій. У протилежному випадку гра називається нескінченною. Існують ігри (наприклад шахи), в яких у принципі кількість стратегій скінченна, але така велика, що повний їх розгляд практично неможливий.

Якщо сума платежів всіх учасників гри дорівнює нулю, тобто виграші одних дорівнюють програшам інших, то така гра називається *грою з нульовою сумою*. Самий простий випадок – парна гра з нульовою сумою – називається *антагоністичною*. Теорія антагоністичних ігор – найбільш розвинутий розділ теорії ігор, з чіткими рекомендаціями.

Якщо кожен гравець має всю інформацію про попередні ходи, то така гра називається *грою з повною інформацією*. Всяка інша гра є *грою з неповною інформацією*.

Оптимальною називається стратегія, яка при багаторазовому повторенні забезпечує даному гравцю максимально можливий середній виграш. Метою теорії ігор є розробка способів відшукання оптимальних стратегій. Сукупність оптимальних стратегій всіх гравців називається *розв'язком гри*.

5.6. Методи розв'язування антагоністичних матричних ігор

Самим простим випадком, який детально розроблений у теорії ігор, є скінченна парна гра з нульовою сумою, тобто антагоністична гра двох учасників. Задача першого гравця – максимізувати свій виграш, задача другого гравця – мінімізувати свій програш або мінімізувати виграш першого. У такій грі достатньо задати результати у вигляді платежів для одного з гравців. При позначені гравців через A і B з кількістю стратегій m і n відповідно, гру звичайно представляють у вигляді матриці платежів гравцю A:

	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Якщо така таблиця складена, то говорять, що гра приведена до матричної форми. Приведення гри до такої форми може являти собою важку задачу. Відмітимо, що у випадку, коли гра приведена до матричної форми, то багатоходова гра фактично зведена до одноходової – від гравця вимагається зробити тільки один хід: вибрати стратегію.

Оскільки гра антагоністична, оптимальним розв'язком її є одна або декілька таких стратегій для кожного з гравців. При цьому будь-яке відхилення від даних стратегій не покращує платіж тому чи іншому гравцю. Ці розв'язки можуть бути у вигляді єдиної *чистої* стратегії або декількох стратегій, які є *мішаними* у відповідності із заданими імовірностями. Приклади, розглянуті нижче, демонструють перераховані випадки.

Приклад 5.8. Розглянемо гру у матричній формі

Таблиця 11.7

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	3	4	5	2	3
A_2	1	8	4	3	4
A_3	10	3	1	7	6
A_4	4	5	3	4	8

Розв'язування. Будемо грати за гравця *А*. У матриці 11.7 є спокусливий для гравця *А* виграш „10", тобто привабливо обрати стратегію A_3. Але супротивник може обрати стратегію B_3, і тоді гравець *А* отримає жалюгідний виграш „1". Таким чином обирати стратегію A_3 не можна. Який же вибір зробити? Очевидно, виходячи із принципу обережності (це основний принцип теорії ігор), треба вибрати ту стратегію, при якій наш мінімальний виграш буде максимальним, тобто застосувати критерій максиміна.

Перепишемо таблицю 5.7 і у правому додатковому стовпці запишемо мінімальне значення виграшу кожного рядка α_i (таблиця 5.8).

Таблиця 5.8

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	3	4	5	2	3	2
A_2	1	8	4	3	4	1
A_3	10	3	1	7	6	1
A_4	4	5	3	4	8	$\boxed{3}$
β_j	10	8	$\boxed{5}$	7	8	

Оберемо ту стратегію, для якої α_i максимальне. Позначимо це максимальне значення через α, тоді

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max_i \alpha_i,$$

і в нашому випадку $\alpha = 3$. Цьому значенню відповідає стратегія A_4. Обравши цю стратегію, ми у всякому разі можемо бути впевненими, що (при будь-якій поведінці супротивника) виграємо не менше, ніж 3. Ця величина наш гарантований виграш і називається *нижньою ціною гри*. Тепер станемо на місце супротивника. Очевидно обережний супротивник повинен обрати ту стратегію при якій максимальний виграш гравця A мінімальний (мінімаксний критерій). Позначимо цю величину, яка називається *верхньою ціною гри*, через β. Отже,

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min_j \beta_j.$$

В нашому прикладі $\beta = 5$ і досягається при стратегії супротивника B_3. Якщо другий гравець буде дотримуватись своєї мінімаксної стратегії, то він гарантований, що у будь якому випадку програє не більше β.

Для матричної гри справедлива нерівність

$$\alpha \le \beta.$$

Якщо $\alpha = \beta$, то така гра називається *грою із сідловою точкою*, а пара оптимальних стратегій $\left(A_{i_{opt}}, B_{j_{opt}}\right)$ –сідловою точкою матриці. В цьому випадку оптимальні стратегії гравців будуть стійкими по відношенню до інформації про поведінку іншого гравця. Елемент

$$\alpha = \beta = v$$

називається *ціною гри*. Якщо гра має сідлову точку, то кажуть, що вона розв'язується у *чистих стратегіях*.

Якщо платіжна матриця не має сідлової точки, тобто $\alpha < \beta$ (як в прикладі 5.8), то пошук розв'язку гри приводить до застосування складної стратегії, яка полягає у випадковому застосуванні двох і більше стратегій з певними частотами. Така складна стратегія називається *змішаною*.

Розглянемо приклад гри, яка розв'язується у чистих стратегіях.

Приклад 5.9. Матриця платежів задана в таблиці 5.9.

Таблиця 5.9

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	2	4	7	5	2
A_2	7	$\boxed{6}$	8	7	$\boxed{6}$
A_3	5	3	4	1	1
β_j	7	$\boxed{6}$	8	7	

В цьому прикладі ціна гри дорівнює $\alpha = \beta = 6$. Будь яке відхилення гравців від стратегій A_2 і B_2 може тільки погіршити їх положення, тому виграш гравця A складатиме 6.

Наявність сідлової точки в грі – це далеко не правило, скоріше – виключення. Більшість ігор не має сідлової точки. Але є різновид ігор, які завжди мають сідлову точку, тобто розв'язуються у чистих стратегіях. В теорії ігор доводиться, що кожна гра з повною інформацією має сідлову точку. Будь-яка гра з повною інформацією, записана у матричній формі, має сідлову точку. Інша справа, що не завжди гру з повною інформацією можна привести до матричної форми. Скажімо, шахова гра є грою з повною інформацією, бо завжди закінчується виграшем білих, або завжди – виграшем чорних, або завжди – нічиєю. Тільки чим самим ми поки не знаємо та навряд чи будемо знати і в доступному для огляду майбутньому бо кількість стратегій така велика, що привести її до матричної форми неможливо.

Змішані стратегії у теорії ігор являють модель змінної, гнучкої тактики, коли жоден з гравців не знає, як поведе себе супротивник. Розглянемо гру, матриця якої має розмірність $m \times n$, стратегії першого гравця задаються наборами імовірностей $\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, з якими гравець застосовує свої чисті стратегії $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Ці набори можна розглядати як m-вимірні вектори, для координат яких

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \; p_i \geq 0.$$

Аналогічно для другого гравця набори імовірностей, що відповідають чистим стратегіям $B_1, B_2, \ldots, B_n$, визначають n-вимірні вектори $\vec{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, для координат яких

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \; q_j \geq 0.$$

В основній теоремі теорії ігор стверджується, що кожна скінченна гра має, принаймні, один розв’язок, можливо, в області змішаних стратегій.

Застосування оптимальної стратегії дозволяє отримати виграш, що дорівнює ціні гри: $\alpha \leq \nu \leq \beta$.

Застосування першим гравцем оптимальної стратегії $\vec{p}_{opt}$ повинно забезпечити йому при будь-яких діях другого гравця виграш не менше ціни гри. Тому виконується співвідношення

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_{i_{opt}} \geq \nu .$$

Аналогічно другому гравцю оптимальна стратегія $\vec{q}_{opt}$ повинна забезпечити при будь-яких стратегіях першого гравця, програш, який не перевищує ціну гри, тобто справедливе співвідношення

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_{j_{opt}} \le v .$$

Якщо платіжна матриця не містить сідлової точки, то задача визначення мішаної стратегії тим складніша, чим більша розмірність матриці. Тому матриці великої розмірності доцільно спростити, зменшивши їх розмірність шляхом викреслювання дублюючих і явно невигідних стратегій. Розглянемо приклад.

Приклад 5.10. Нехай платіжна матриця має вигляд

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}_{4\times 5} .$$

Треба спростити платіжну матрицю.

Розв'язання. Знайдемо нижню та верхню ціни гри:

$$\alpha = \max\{2,2,3,2\} = 3,$$

$$\beta = \min\{7,6,6,4,5\} = 4 .$$

Так як $\alpha \ne \beta$, то необхідно застосовувати змішану стратегію. Спростимо платіжну матрицю.

Всі елементи стратегії A_2 менше або дорівнюють A_3, тобто стратегія A_2 явно невигідна для першого гравця та її можна виключити. Всі Елементи стратегії A_4 менше A_3, виключаємо A_4.

Для другого гравця порівнюючи стратегії B_1 і B_4, виключаємо B_1; порівнюючи B_2 і B_4, виключаємо B_2; порівнюючи B_3 і B_4, виключаємо B_3. В результаті отримуємо матрицю

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2} .$$

У порадниках з теорії ігор звичайно зупиняються на розв'язуванні ігор розмірностей 2×2, $2\times n$ та $m\times 2$, які допускають геометричну інтерпретацію. Графічний метод розв'язування ігор розглянемо трохи пізніше, а зараз покажемо як задачу розв'язання гри $m\times n$ можна звести до задачі лінійного програмування з n обмеженнями-нерівностями і m змінними.

Так як виграш першого гравця буде не меншим, ніж v, то математичну модель задачі для нього можна записати у вигляді:

$$z(\vec{p}) = v \to \max,$$

$$\begin{aligned}
&a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{m1}p_m \geq v, \\
&a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{m2}p_m \geq v, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{mn}p_m \geq v, \\
&p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1, \\
&p_i \geq 0,\ i = 1,2,\ldots m,\ j = 1,2,\ldots,n.
\end{aligned}$$

Розділимо нерівності основної системи обмежень на додатню величину v та введемо позначення:

$$x_1 = \frac{p_1}{v},\ x_2 = \frac{p_2}{v},\ \ldots,\ x_m = \frac{p_m}{v}.$$

Так як $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{v}$ і $\frac{1}{v} \to \min$, то для першого гравця отримуємо задачу лінійного програмування:

$$z(\vec{x}) = x_1 + x_2 + \ldots + x_m \to \min$$

при обмеженнях

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq 1, \\
&a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq 1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq 1, \\
&x_i \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,m.
\end{aligned}$$

Для другого гравця математична модель записується у вигляді

$$w(y) = y_1 + y_2 + \ldots + y_n \to \max$$

при обмеженнях:

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \le 1,$$
$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \le 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$
$$a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \le 1,$$
$$y_j \ge 0,\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

де $w(y) = 1/v$, $y_j = q_j / v$.

Задача другого гравця є двоїстою до задачі першого гравця. Можна знайти розв'язок для одного з гравців, а потім за теоремами двоїстості – розв'язок для іншого.

Таким чином, розв'язання гри $m \times n$ еквівалентне розв'язанню задачі лінійного програмування і, навпаки, – для будь-якої задачі лінійного програмування може бути побудована еквівалентна їй задача теорії ігор. Цей зв'язок задач теорії ігор із задачами лінійного програмування виявляється корисним не тільки для теорії ігор, але і для лінійного програмування. Справа в тому, що існують наближені числові методи розв'язання ігор, які у деяких випадках (при великих розмірностях задачі) виявляються простішими, ніж класичні методи лінійного програмування. Наприклад, одним із самих простіших числових методів розв'язання ігор є *метод ітерацій* (або *метод Брауна-Робінсона*).

Як було сказано вище, графічний метод застосовується до розв'язання ігор, в яких хоча б один гравець має тільки дві стратегії.

Розглянемо гру $2 \times n$, в якій гравець A має дві стратегії.

		q_1	q_2	. . .	q_n
		B_1	B_2	. . .	B_n
p_1	A_1	a_{11}	a_{12}	. . .	a_{1n}
$1-p_1$	A_2	a_{21}	a_{22}	. . .	a_{2n}

Гра передбачає, що гравець A вибирає стратегії A_1 і A_2 з відповідними ймовірностями p_1 і $1-p_1$, а гравець B вибирає стратегії B_1, B_2, . . . , B_n з ймовірностями $q_1, q_2, \ldots, q_n$ $(q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1)$. У цьому випадку очікуваний виграш гравця A, що відповідає j-й чистій стратегії гравця B, обчислюється за формулою

$$a_{1j} p_1 + a_{2j} p_2 = a_{1j} p_1 + a_{2j}(1-p_1) = (a_{1j} - a_{2j})p_1 + a_{2j}, \ \ j = 1,2,\ldots,n.$$

З формули видно, що очікуваний виграш першого гравця лінійно залежить від p_1. На осі абсцис відкладаємо імовірність p_1, а на осі ординат будуємо вирази очікуваних виграшів першого гравця.

Гравець A повинен обрати такі стратегії, щоб максимізувати свій мінімальний виграш, тобто знайти величину p_1, яка максимізує вираз

$$\max_i \min_j \{(a_{1j} - a_{2j})p_1 + a_{2j}\}.$$

Тому оптимальна змішана стратегія гравця A визначається точкою перетину прямих, що максимізують його мінімальний очікуваний виграш.

Аналогічно знаходимо оптимальну стратегію гравця B. Вона визначається точкою перетину прямих, що мінімізують його максимальний очікуваний програш.

Приклад 5.11. Розглянемо гру 2×4, в якій платежі виплачуються гравцю A.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	2	3	–1
A_2	4	3	2	6

Розв'язання. Гра не має розв'язку у чистих стратегіях. Отже, стратегії повинні бути змішаними. Очікувані виграші гравця A, що відповідають чистим стратегіям гравця B, наведені в таблиці 5.10.

Таблиця 5.10

Чисті стратегії гравця B	Очікувані виграші гравця A
1	$-2p_1+4$
2	$-p_1+3$
3	p_1+2
4	$-7p_1+6$

На рис. 5.4 зображені чотири прямі лінії, що відповідають чистим стратегіям гравця B.

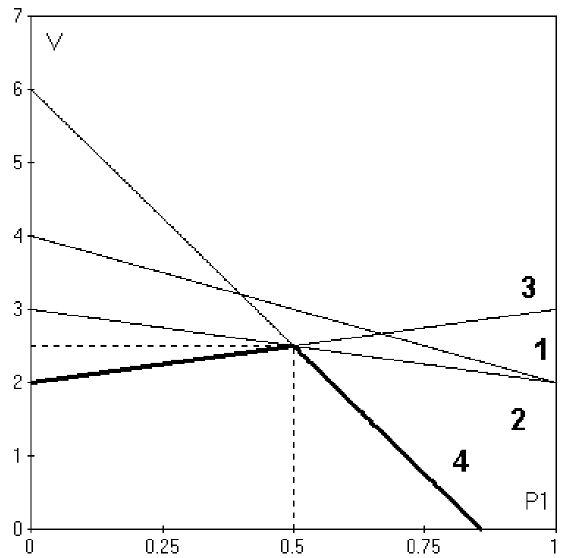


Рис. 5.4

Для того, щоб визначити найкращий результат із найгірших, побудована нижня обвідна (зображена на рис. 5.4 товстими лінійними відрізками), яка являє мінімальний виграш для гравця A незалежно від того, що робить гравець B. Максимум нижньої обвідної відповідає максимінному розв'язку у точці $p^*=0{,}5$. Ця точка визначається перетином прямих 3 і 4. Отже, оптимальним розв'язком для гравця A є змішана стратегія, при якій застосовуються чисті стратегії A_1 і A_2 з імовірностями 0,5 і 0,5 відповідно. Відповідна ціна гри v визначається підстановкою $p_1=0{,}5$ в рівняння або прямої 3, або 4, що приводить до наступного:

$v = 0{,}5 + 2 = 2{,}5$ (з рівняння прямої 3),

$v = -7 \cdot 0{,}5 + 6 = 2{,}5$ (з рівняння прямої 4).

Оптимальна змішана стратегія гравця B визначається двома стратегіями, які визначають нижню обвідну графіка. Це означає, що гравець B може змішувати стратегії B_3 і B_4. В цьому випадку $q_1 = q_2 = 0$ і $q_4 = 1 - q_3$. Отже, очікувані платежі гравця B, що відповідають чистим стратегіям гравця A, мають наступний вигляд $(a_{i3} - a_{i4})q_3 + a_{i4}$, $i = 1,2$ (таблиця 5.11).

Чисті стратегії гравця A	Очікувані платежі гравця B
1	$4q_3 - 1$
2	$-4q_3 + 6$

Найкращий розв'язок з найгірших для гравця B являє собою точку мінімуму верхньої обвідної заданих двох прямих. Ця процедура еквівалентна розв'язанню рівняння

$$4q_3 - 1 = -4q_3 + 6.$$

Його розв'язком буде $q_3 = 7/8$, що визначає ціну гри $v = 4 \cdot (7/8) - 1 = 2{,}5$.

Отже, розв'язком гри для гравця A є змішування стратегій A_1 і A_2 з рівними імовірностями 0,5 і 0,5 , а для гравця B – змішування стратегій B_3 і B_4 з імовірностями $7/8$ і $1/8$. (Насправді гра має альтернативний розв'язок для гравця B, так як максимінна точка на рис. 11.4 визначається більш ніж двома прямими. Будь-яка опукла лінійна комбінація цих альтернативних розв'язків також є розв'язком задачі).

Для гри, в якій гравець A має m стратегій, а гравець B – тільки дві, розв'язок знаходиться аналогічно. Головна відмінність полягає в тому, що в цьому випадку будуються графіки функцій, які являють очікувані платежі другого гравця, що відповідають чистим стратегіям гравця A. В результаті ведеться пошук мінімаксної точки верхньої обвідної побудованих прямих.

Питання для самоконтролю

1. Назвіть три можливих умови прийняття рішень.
2. У чому полягає суть методу ієрархій?
3. Що таке вагові коефіцієнти і як вони визначаються?
4. Як визначається узгодженість матриці порівнянь?
5. У чому полягає зміст критерію очікуваного значення?
6. Які задачі теорії прийняття рішень називаються грою з природою?
7. Як можна представити задачу теорії прийняття рішень у вигляді дерева рішень?
8. Як визначаються апостеріорні імовірності Байєса?
9. За якими критеріями класифікуються задачі теорії ігор?
10. Методи розв'язування ігор з нульовою сумою.
11. Розв'язання матричних ігор у змішаних стратегіях.
12. Як можна звести задачу теорії ігор до задачі лінійного програмування?
13. Графічний метод розв'язування задач теорії ігор.
14. Які ще методи розв'язування задач теорії ігор Ви знаєте?

Вправи

5.1. Відділ кадрів фірми після попереднього відбору звузив пошук майбутнього співробітника до трьох кандидатур: K, L і V. Остаточний відбір заснований на трьох критеріях: співбесіда (S), досвід роботи (D) і рекомендації (R). Відділом кадрів використовується матриця A для порівняння трьох критеріїв. Після проведеної співбесіди з трьома претендентами, збору даних, що відносяться до досвіду їх роботи і рекомендаціям, побудовані матриці A_S, A_D і A_R. Якого з трьох кандидатів слід прийняти на роботу? Оцініть узгодженість даних.

$$A = \begin{array}{c} \\ S \\ D \\ R \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & D & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/5 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_S = \begin{array}{c} \\ K \\ L \\ V \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} K & L & V \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1/3 & 1 & 1/5 \\ 1/4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$A_D = \begin{array}{c} \\ K \\ L \\ V \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} K & L & V \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 2 \\ 3 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_R = \begin{array}{c} \\ K \\ L \\ V \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} K & L & V \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

5.2. Вирішивши купити автомобіль, людина зупинила свій вибір на трьох моделях: $A1$, $A2$ і $A3$. Факторами, які впливають на його рішення, є вартість автомобіля (C), вартість обслуговування (O), вартість поїздки по місту (M) і сільській місцевості (S). Таблиця 5.11 містить необхідні дані, які відповідають трьохрічному терміну експлуатації автомобіля.

Таблиця 5.11

Модель	C (€)	O (€)	M (€)	S (€)
$A1$	6 000	1800	4500	1500
$A2$	8 000	1200	2250	750
$A3$	10 000	600	1125	600

Використайте вказані вартості для побудови матриць порівняння. Оцініть узгодженість матриць і визначите модель автомобіля, яку слід купити.

5.3. У грі „Колесо фортуни” колесо управляється електронним пристроєм за допомогою двох кнопок, які надають колесу сильне (В) або слабе (М) обертання. Само колесо поділено на рівні області білу (Б) і червону (Ч). У білій області колесо зупиняється з імовірністю 0,3, а у червоній – 0,7. Плата, яку отримує гравець, дорівнює (у гривнях):

	Б	Ч
В	800	200
М	– 2500	1000

Представте задачу у вигляді дерева рішень.

5.4. Припустимо, що у інвестора є можливість вкласти гроші у три інвестиційних фонди відкритого типу: простий, спеціальний (що забезпечує максимальний довгостроковий прибуток від акцій малих компаній) і глобальний. Прибуток від інвестицій може змінюватись в залежності від умов ринку. Існує 10% імовірність, що ситуація на ринку цінних паперів погіршиться, 50% – що ринок залишиться поміркованим і 40% – ринок буде зростати. Таблиця 5.12 містить значення відсотків прибутку від суми інвестицій при трьох можливостях розвитку ринку.

Таблиця 5.12

Альтернатива (фонди)	Відсоток прибутку від інвестицій (%)		
	Спадаючий ринок	Поміркований ринок	Зростаючий ринок
Простий	+5	+7	+8
Спеціальний	–10	+5	+30
Глобальний	+2	+7	+20

Представте задачу у вигляді дерева рішень. Який фонд слід обрати?

5.5. Фірма може прийняти рішення про будівництво середнього або малого підприємства. Мале підприємство згодом можна розширити. Рішення визначається майбутнім попитом на продукцію, яку буде випускати підприємство. Будівництво середнього підприємства економічно виправдано при високому попиті. З іншого боку, можна побудувати мале підприємство і через два роки його розширити.

Фірма розглядає дану задачу з перспективою на десять років. Аналіз ринкової ситуації показує, що імовірності високого і низького попиту рівні 0,75 і 0,25 відповідно. Будівництво середнього підприємства обійдеться у 5 млн. грн., малого – у 1 млн. грн. Витрати на розширення через два роки малого підприємства оцінюється у 4,2 млн. грн.

Очікувані щорічні доходи для кожної з можливих альтернатив:

- середнє підприємство при високому (низькому) попиті дає 1 (0,3) млн. грн.;
- мале підприємство при низькому попиті – 0,2 млн. грн.;
- мале підприємство при високому попиті протягом десяти років – 0,25 млн. грн.;
- розширене підприємство при високому (низькому) попиті – 0,9 (0,2) млн. грн.;
- мале підприємство без розширення при високому попиті протягом перших двох років і наступному низькому попиті за останні вісім років – 0,2 млн. грн.

Визначить оптимальну стратегію фірми у будівництві підприємств за допомогою дерева рішень.

5.6. Фірма виготовляє дитячі костюми і сукні, що користуються попитом і реалізація яких залежить від стану погоди. Витрати фірми протягом серпня-вересня на одиницю продукції складає: костюми

– 28 грн., сукня – 7 грн. Ціна реалізації складає 50 і 15 грн. відповідно.

За даними спостережень за декілька попередніх років, фірма може реалізувати в умовах теплої погоди 1950 суконь і 610 костюмів, а при прохолодній погоді – 630 суконь і 1050 костюмів.

У зв’язку з можливими змінами погоди визначить стратегію фірми у випуску продукції, яка забезпечить їй максимальний прибуток від реалізації продукції. Задачу розв’язати графічним методом та з використанням критерію Гурвіца, прийнявши показник оптимізму $\alpha = 0{,}5$.

5.7. У наближені посівного сезону фермер має чотири альтернативи:

a_1 – вирощувати кукурудзу,

a_2 – вирощувати пшеницю,

a_3 – вирощувати сою,

a_4 – використовувати землю під пасовисько.

Платежі, пов’язані з вказаними можливостями, залежатимуть від кількості опадів, які умовно можна поділити на чотири категорії:

s_1 – сильні опади,

s_2 – помірні опади,

s_3 – незначні опади,

s_4 – засушливий сезон.

Матриця платежів (у тис. грн.) оцінюється наступним чином:

Таблиця 5.13

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	–20	60	30	–5
a_2	40	50	35	0
a_3	–50	100	45	–10
a_4	12	15	15	10

Що повинен посіяти фермер?

5.8. Один із N верстатів повинен бути обраний для виготовлення Q одиниць певної продукції. Мінімальна і максимальна потреба в продукції рівна $Q_{\min}$ і $Q_{\max}$. Виробничі витрати V_i на виготовлення Q одиниць продукції на верстаті i містять фіксовані витрати K_i і питомі витрати c_i на виробництво одиниці продукції і виражаються формулою $V_i = K_i + c_i Q$. Розв'яжіть задачу за допомогою кожного з чотирьох критеріїв прийняття рішення в умовах невизначеності при наступних даних, припускаючи, що $1000 \le Q \le 4000$.

Таблиця 5.14

Верстат i	K_i (грн.)	c_i (грн./од.)
1	100	5
2	40	12
3	150	3
4	90	8

5.9. Знайти оптимальну стратегію і ціну гри, якщо матриця платежів задана для гравця A

а) $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 2 & 8 \\ 8 & 9 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 4 & -4 & -5 & 6 \\ -3 & -4 & -9 & -2 \\ 6 & 7 & -8 & -9 \\ 7 & 3 & -9 & 5 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

г) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 1 & 5 & 8 \\ 4 & 9 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 7 & 20 \end{pmatrix}$.

5.10. Вкажіть область значень для параметрів p і q, при яких пара $(2,2)$ буде сідловою точкою у грі. Матриця платежів задана для гравця A

а) $\begin{pmatrix} 1 & q & 6 \\ p & 5 & 10 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 10 & 7 & q \\ 4 & p & 6 \end{pmatrix}$.

5.11. Вкажіть область, якій належить ціна гри, платежі задані для гравця A

а) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ -5 & -2 & 10 & -3 \\ 7 & 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} -1 & 9 & 6 & 8 \\ -2 & 10 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 0 & 7 \\ 7 & -2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$,

в) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 3 \\ 4 & 8 & 0 & -6 \\ 6 & -9 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

5.12. Дві фірми виготовляють два конкуруючих товари. Кожен товар на даний час контролює 50% ринку. Покращивши якість товарів, обидві фірми збираються розгорнути рекламні компанії. Якщо вони не будуть цього робити, існуючий стан ринку не зміниться. Однак, якщо яка-небудь фірма буде більш активно рекламувати свої товари, то інша фірма втратить відповідний відсоток своїх споживачів. Дослідження ринку вказує, що 50% потенційних споживачів отримують інформацію через телебачення, 30% – через газети і 20% – через радіо. Сформулюйте задачу у вигляді гри двох гравців з нульовою сумою і оберіть відповідні засоби реклами для кожної фірми. Вкажіть інтервал значень, якому належить ціна гри. Чи може кожна фірма діяти з єдиною чистою стратегією?

5.13. Роздрібне торгове підприємство розробило декілька варіантів плану реалізації товарів на майбутньому ярмарку з урахуванням кон’юнктури ринку і попиту покупців. Показники прибутку, які отримуються від можливих їх комбінацій подані у таблиці 5.15.

Таблиця 5.15

План продаж	Величина прибутку в залежності від попиту, млн. грн.		
	C_1	C_2	C_3
$П_1$	2	1	3
$П_2$	1	2	3
$П_3$	2	3	1

Визначить: а) оптимальний план продаж товарів і ціну гри; б) якої стратегії слід дотримуватись торговому підприємству, якщо найбільш імовірною є ситуація: C_1 – 30%, C_2 – 30%, C_3 – 40%?

5.14. Розв'яжіть графічно наступні матричні ігри, платежі виплачуються гравцю A:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

5.15. Розв'яжіть матричну гру методами лінійного програмування:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ -5 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

РОЗДІЛ 6
ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

6.1. Типи імітаційних моделей

У попередніх розділах розглядались аналітичні моделі систем із стохастичною невизначеністю. Ці моделі дозволяють встановити аналітичну (формульну) залежність між елементами системи. Але аналітичні моделі вдається побудувати тільки для простих систем. Крім того, аналітичні моделі вимагають припущення про марківський характер процесу, що далеко не завжди відповідає дійсності. У випадках, коли аналітичні методи не можна застосувати або необхідно перевірити їх точність, уживають методи імітаційного (статистичного) моделювання.

Імітаційне моделювання є потужним інструментом дослідження поведінки реальних систем. Методи імітаційного моделювання дозволяють збирати необхідну інформацію про поведінку системи шляхом створення її комп’ютеризованої моделі. Імітаційне моделювання не розв’язує оптимізаційні задачі, а являє собою техніку оцінки значень функціональних характеристик системи, що моделюється.

Імітаційне моделювання застосовується у різних галузях науки, техніки, економіки.

Використання сучасних імітаційних моделей засновано, в основному, на ідеї методу Монте-Карло. Відмінність полягає в тому, що імітаційна модель звичайно пов’язана з вивченням реально існуючої системи, поведінка якої є функцією часу. Існує два типи імітаційних моделей.

1. ***Неперервні моделі*** використовуються для систем, поведінка яких змінюється неперервно у часі. Типовим прикладом неперервної імітаційної моделі є вивчення динаміки народонаселення світу. Неперервні імітаційні моделі звичайно подаються у вигляді різницево-

диференціальних рівнянь, які описують взаємодію між різними елементами системами.

2. ***Дискретні моделі*** мають справу з системами, поведінка яких змінюється лише в задані моменти часу. Типовим прикладом такої моделі є черга, коли задача моделювання полягає в оцінюванні операційних характеристик системи обслуговування (наприклад, середній час очікування, середня довжина черги). Такі характеристики системи масового обслуговування змінюють свої значення або в момент появи клієнта, або при завершенні обслуговування. В інші моменти часу в системі нічого суттєвого з точки зору імітаційного моделювання не відбувається. Ті моменти часу, в які у системі відбуваються зміни, визначають події моделі (прибуття або вибуття клієнта). Те, що ці події відбуваються в дискретні моменти, вказує, що процес протікає у дискретному часі.

В дослідженні операцій, в основному, використовується дискретний тип імітаційних моделей.

Для складних систем, в яких взаємодіють велика кількість елементів та випадкові фактори заплутано переплетені, де процеси – явно немарковські, метод імітаційного моделювання, як правило, виявляється простіше аналітичного, а досить часто й єдиним можливим.

Взагалі, методом імітаційного моделювання може бути розв'язана будь-яка імовірнісна задача, але виправданим він стає тільки тоді, коли процедура отримання статистичної вибірки простіша, а не складніша за аналітичні розрахунки. Задачі, які мають аналітичний розв'язок, моделювати не варто. Наприклад, задачу про можливість виграшу в лотереї простіше розв'язується методами теорії ймовірностей ніж імітаційного моделювання.

Розглянемо іншу задачу. Нехай працює багатоканальна система масового обслуговування з чергою, але процес, який протікає в ній, очевидно немарковський: проміжки між замовленнями та час обслуговування мають непоказниковий розподіл. Більш того, канали час від часу виходять з ладу та починають ремонтуватись. Час безвідмовної роботи і час ремонтування каналу – непоказникові. Необхідно знайти характеристики СМО: ймовірності станів як функції часу, середню довжину черги, середній час перебування замовлення в системі і т.д. Задача на перший погляд не виявляється складною. Однак будь-яка особа, яка у певній мірі знайома з теорією масового обслуговування, не вагаючись, обере для її розв'язання метод імітаційного моделювання (перспективи створення аналітичної моделі для такої задачі дуже малі). Зрозуміло, що особі прийдеться моделювати на комп'ютері множину реалізацій випадкового процесу та за допомогою такої штучної «статистики» знайти наближено шукані ймовірності (як частоти відповідних подій) і математичні сподівання (як середні арифметичні значення випадкових подій).

В задачах дослідження операцій метод імітаційного моделювання застосовується у трьох основних випадках:

1) при моделюванні складних, комплексних систем, де присутні багато взаємодіючих факторів;

2) при перевірці можливості застосування більш простих, аналітичних методів та з'ясування умов їх застосування;

3) з метою знаходження поправок до емпіричних формул.

Аналітичні та імітаційні моделі мають свої переваги та недоліки при порівнянні між собою. Основним недоліком аналітичних моделей є те, що вони неминуче вимагають деяких припущень, зокрема, про те, що процес марківський. Допустимість цих припущень далеко не завжди може бути оцінена без контрольних розрахунків, а виконуються вони методом імітаційного моделювання. Статистичні моделі не вимагають серйозних припущень та спрощень. В імітаційній моделі легко розміщується що завгодно – будь-які закони розподілу, будь-яка складність систем, множинність їх станів. Головний же недолік статистичних моделей – їх громіздкість і трудомісткість (величезна кількість реалізацій, що необхідна для знаходження шуканих параметрів з припустимою точністю).

Крім того, результати імітаційного моделювання набагато складніше осмислювати, ніж розрахунки за аналітичними моделями. Вдале поєднання аналітичних та імітаційних методів в дослідженні операцій – справа мистецтва, чуття і досвіду дослідника. Часто аналітичними методами вдається описати деякі підсистеми, які виділяються у великій системі, а потім з таких моделей, як з «цеглинок», будують велику, складну модель.

6.2. Ідея методу Монте-Карло

Ідея методу Монте-Карло проста та полягає у використанні вибірки випадкових чисел для отримання шуканих оцінок. Замість того, щоб описувати систему за допомогою аналітичного апарату (диференціальних або алгебраїчних рівнянь), виконується «розіграш» випадкового явища за допомогою спеціально організованої процедури. Реалізація випадкового процесу кожен раз дає нову, відмінну від інших, реалізацію досліджуваного процесу. Сама по собі ця реалізація нічого нам не дає, але якщо таких реалізацій отримано багато, то їх множина може бути використана, як деякий штучний статистичний матеріал. Цей матеріал може бути оброблений звичайними методами математичної статистики. Після такої обробки можуть бути отримані наближені значення характеристик, які нас цікавлять (наприклад, математичне сподівання та дисперсія випадкових величин). При моделюванні випадкових явищ методом Монте-Карло користуються самою випадковістю як апаратом дослідження.

Для демонстрації методу Монте-Карло розглянемо приклад обчислення площі еліпса. Зрозуміло що площу еліпса ($S_{ел} = \pi ab$, де a - мала піввісь, b - велика піввісь еліпса) ніхто так не знаходить, але приклад обраний для того щоб особливо підкреслити статистичну природу імітаційного експерименту.

Приклад 6.1. Скористаємось методом Монте-Карло для оцінки площі еліпса, рівняння якого має вигляд $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$.

Еліпс має велику піввісь $a=10$, малу піввісь $b=5$, центр якого знаходиться в точці $O(0;0)$.

Процедура оцінки площі вимагає замкнення еліпса в описаний навколо нього прямокутник, сторони якого дорівнюють вісям еліпса (рис.6.1).

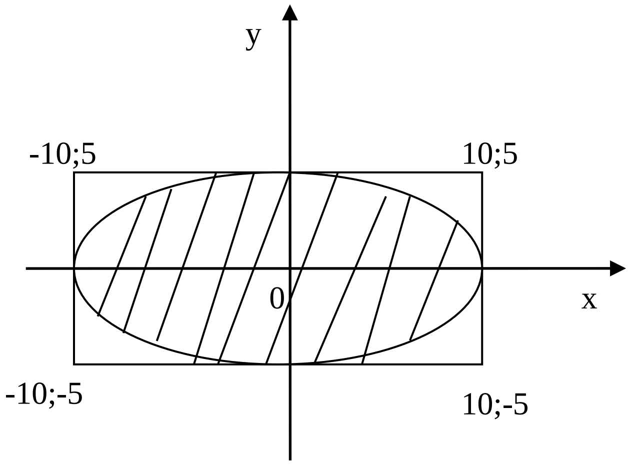


Рис. 6.1

Вершини прямокутника визначаються безпосередньо з геометричних властивостей фігури. Його площа дорівнює $S_{пр}=20\times10=200(кв.од.)$.

Оцінка площі еліпса заснована на припущені, що всі точки прямокутника рівноможливі. Припустимо, що вибірка складається із спостережень n точок прямокутника, причому з них m точок попали в середину еліпса. Тоді площа еліпса $S_{ел}\approx\frac{m}{n}\cdot S_{пр}=\frac{m}{n}\cdot200$ (геометричне означення ймовірності).

Тут координати x і y точок прямокутника представлені як рівномірно розподілені випадкові величини з густинами ймовірностей

$f(x)=\frac{1}{20}$, $-10\le x\le10$,

$f(y)=\frac{1}{10}$, $-5\le y\le5$.

Обидві функції рівні нулю за межами вказаних інтервалів.

Нехай R_1 і R_2 - різні випадкові числа з інтервалу $[0;1]$. Тоді координати точок прямокутника можна виразити через ці випадкові числа:

$$x = -10 + [10 - (-10)]R_1 = -10 + 20R_1,$$

$$y = -5 + [5 - (-5)]R_2 = -5 + 10R_2.$$

В таблиці 6.1 наведений невеликий список випадкових чисел з інтервалу $[0;1]$. Ці числа були генеровані із використанням *мультиплікативного методу порівнянь,* який описаний в розділі 6.3.

Таблиця 6.1

0,0589	0,3529	0,5869	0,3455	0,7900	0,6307
0,6733	0,3646	0,1281	0,4871	0,7698	0,2346
0,4799	0,7676	0,2867	0,8111	0,2871	0,4220
0,9486	0,8931	0,8216	0,8912	0,9534	0,6991
0,6139	0,3919	0,8261	0,4291	0,1394	0,9745
0,5933	0,7876	0,3866	0,2302	0,9025	0,3428
0,9341	0,5199	0,7125	0,5954	0,1605	0,6037
0,1782	0,6358	0,2108	0,5423	0,3567	0,2569
0,3473	0,7472	0,3575	0,4208	0,3070	0,0546
0,5644	0,8954	0,2926	0,6975	0,5513	0,0305

Використовуючи наведені формули, можна згенерувати рівномірно розподілену випадкову точку прямокутника для кожної пари випадкових чисел $(R_1; R_2)$. Генерована точка $(x'; y')$ попадає всередину еліпса, якщо $\frac{x'^2}{100} + \frac{y'^2}{25} \le 1$.

Наприклад, якщо $R_1 = 0{,}0589$ і $R_2 = 0{,}6733$, то

$$x' = -10 + 20R_1 = -10 + 20 \cdot 0{,}0589 = -8{,}822,$$

$$y' = -5 + 10R_2 = -5 + 10 \cdot 0{,}6733 = 1{,}733.$$

Так як величина $\frac{(-8{,}822)^2}{100} + \frac{1{,}733^2}{25} = 0{,}8984$ менша одиниці, то точка $(x'; y')$ попадає в середину еліпса.

Дослідимо вплив випадкової вибірки на точність оцінки площі еліпса. На рис.6.2 показані оцінки площі еліпса для різних об'ємів вибірки (n змінюється від 500 до 10000). При кожному n експеримент повторювався десять раз, при цьому використовувались різні послідовності випадкових чисел з інтервалу $[0;1]$. На рисунку показані оцінки площі лише для першого експерименту (крива $S(n)$), середнє значення десяти експериментів (крива $SN(n)$) та точне значення площі (пряма St).

На рис.6.3 показані оцінки стандартного відхилення для десяти експериментів.

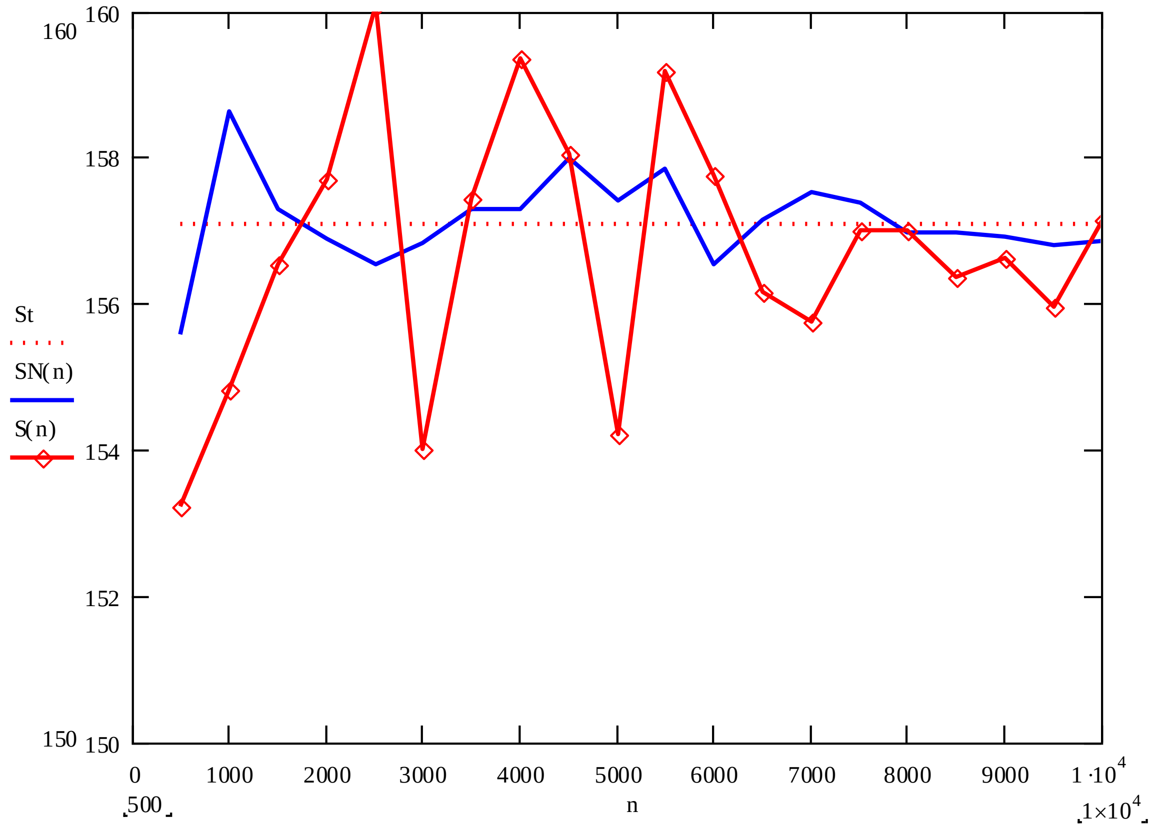


Рис. 6.2

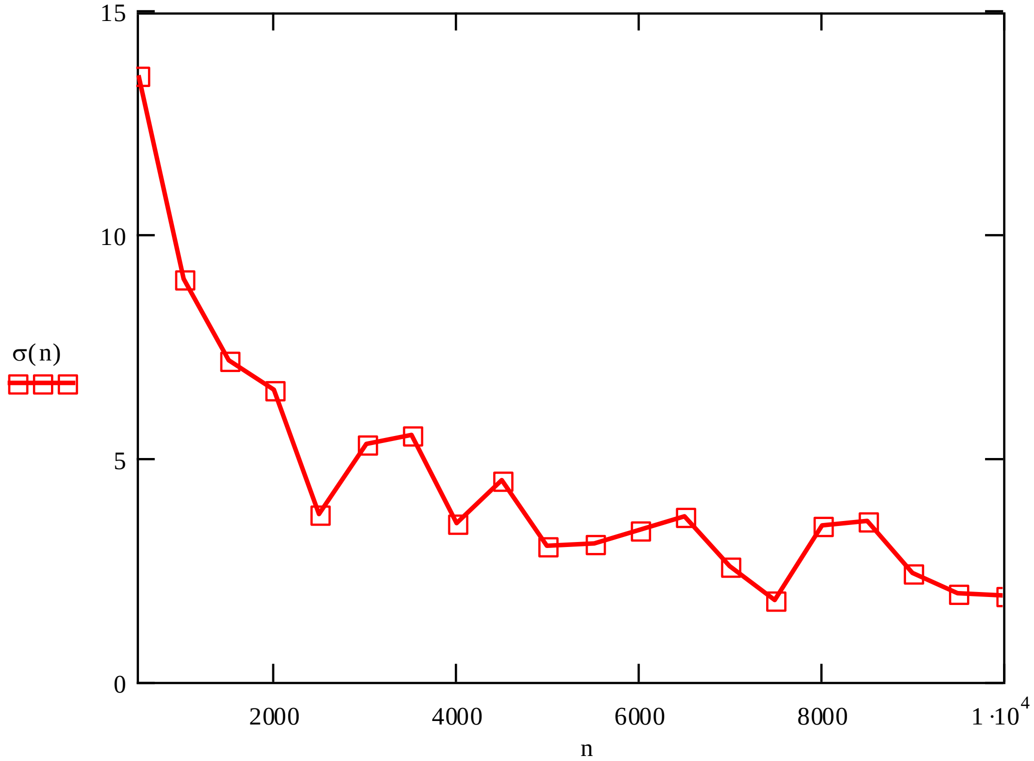


Рис. 6.3

Виходячи з результатів експерименту, можна зробити наступні висновки.

Оцінка площі еліпса покращується при збільшенні кількості точок, що генеруються при збільшені кількості точок, генеруються (із збільшенням об'єму вибірки n).

Усереднення результатів десяти експериментів для кожної вибірки об'єму n дає більш точну оцінку площі, ніж будь-який експеримент.

Внаслідок того, що оцінки площі мають розкид, важливо, щоб результати експерименту, пов'язаного з моделюванням, були виражені у вигляді довірчих інтервалів. В нашому прикладі, якщо S являє собою точне значення площі, а $\bar{S}$ та σ^2 - середнє та дисперсію N спостережень, то $100(1-\alpha)\%$ -й довірчий інтервал для S задається у вигляді $\bar{S} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2,N-1} \le S \le \bar{S} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2,N-1}$, де $t_{\alpha/2,N-1}$ - $(100\alpha/2)\%$-а точка t-розподілу (розподілу Стьюдента) з $N-1$ ступенями вільності. Відмітимо, що N означає кількість експериментів і його слід відрізняти від об'єму вибірки n.

В нашому прикладі для найбільшого об'єму вибірки $n = 10000$ при $N = 10$, $\bar{S} = 156{,}99$, $\sigma = 0{,}81$ результуючим довірчим 95%-м інтервалом є $156{,}85 \le S \le 157{,}13$.

Розглянутий приклад ставить два питання, які характерні для будь-якого експерименту, пов'язаного з моделюванням:

1. Яким повинен бути об'єм вибірки n для досягнення необхідного значення довірчих інтервалів?

2. Скільки для цього потрібно експериментів N?

Відповіді залежать від природи експерименту, пов'язаного з моделюванням. Як й у будь-якому статистичному експерименті, більші значення n і N забезпечують більш надійні результати.

6.3. Основні елементи статистичного моделювання

Основним елементом, з сукупності якого складається статистична модель, є одна випадкова реалізація явища, яке моделюється. Окрема реалізація розігрується за допомогою спеціально розробленої процедури (алгоритму), в якій важливу роль грає кидання жеребу. Кожен раз, коли в хід явища втручається випадок, його вплив враховується не розрахунком, а жеребом.

Домовимось називати одиничним жеребом будь-який дослід із випадковим результатом, який відповідає на одне з наступних питань:

1. Відбулась або ні подія A?
2. Яка з подій $A_1, A_2, ..., A_k$ відбулась?
3. Яке значення прийняла випадкова величина X?
4. Яку сукупність значень прийняла система випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_k$?

Будь-яка реалізація випадкового явища методом Монте-Карло будується на ланцюжку одиничних жеребів, які передуються із звичайними розрахунками. Ними враховується вплив результату жеребу на подальший хід подій (зокрема на умови, в яких буде розіграний наступний жереб).

Одиничний жереб може бути розіграний різними способами, але є один стандартний механізм за допомогою якого можна здійснити будь-який різновид жеребу. А саме, для кожного з них достатньо мати випадкове число R, всі значення якого однаково розподілені та мають рівномірний розподіл на інтервалі $[0;1]$.

Покажемо як за допомогою такого числа можна розіграти будь-який з чотирьох видів одиничного жеребу.

1. *Відбулась або ні подія* A? Для того щоб дати відповідь на це питання, треба знати ймовірність p події A. Розіграємо випадкове число R від 0 до 1. Якщо це число виявилось меншим p, як показано на рис. 6.4, то будемо вважати, що подія відбулась, а якщо більше p – не відбулась.

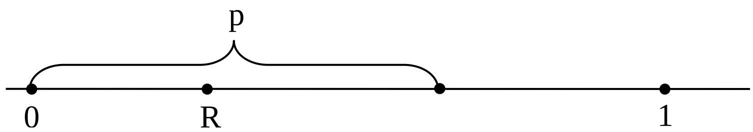


Рис.6.4

Якщо число R точно дорівнює p (що малоймовірне), то можна прийняти, що подія A відбулась.

2. *Яка з декількох подій відбулась*? Нехай події $A_1, A_2,...,A_k$ несумісні та утворюють повну групу. Тоді сума їх ймовірностей $p_1, p_2,...,p_k$ дорівнює одиниці. Розділимо інтервал (0;1) на k ділянок довжиною $p_1, p_2,...,p_k$. На яку з ділянок попало число R - та подія й відбулась (рис.6.5).

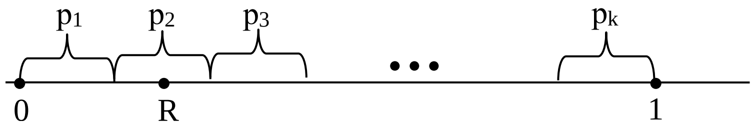


Рис.6.5

3. *Яке значення прийняла випадкова величина* X? Якщо випадкова величина X дискретна, тобто має значення $X_1, X_2,...,X_k$ з ймовірностями $p_1, p_2,...,p_k$, то випадок зводиться до попереднього. Якщо випадкова величина неперервна і має задану густину ймовірностей $f(x)$, то існує

декілька методів генерації вибіркових значень. Деякі з них розглянуті в наступному розділі 6.4.

4. *Яку сукупність значень прийняли випадкові величини* $X_1, X_2,...,X_k$? Якщо випадкові величини незалежні, то достатньо k раз повторити процедуру попереднього пункту. Якщо ж вони залежні, то розігрувати кожну наступну треба на основі її умовного розподілу при умові, що всі попередні прийняли ті значення, які дав розіграш.

Всі варіанти одиничного жеребкування зводяться до розіграшу (одно- або багатократного) випадкового числа R від 0 до 1. Розглянемо методи генерування таких чисел. Існує цілий ряд різновидів так званих датчиків випадкових чисел, які розв'язують цю задачу.

Самий простий з датчиків випадкових чисел – це барабан, в якому перемішуються нумеровані кульки. Нехай, наприклад, нам треба розіграти випадкове число від 0 до 1 з точністю 0,001. покладемо у барабан 1000 нумерованих кульок, примусимо його обертатися та після зупинки виберемо будь-яку кульку. Її номер розділимо на 1000.

Можна зробити й по-іншому: замість 1000 кульок покласти в барабан десять, з цифрами 0,1,2,...,9. Вийнявши першу кульку, будемо мати перший десятковий розряд дробу. Повернемо кульку назад та знов примусимо барабан обертатися та дістанемо другу кульку – це буде другий десятковий розряд і т.д. Отриманий таким чином десятковий дріб буде мати рівномірний розподіл від 0 до 1.

Справжні випадкові числа з інтервалу $[0;1]$ можна генерувати лише за допомогою електронних приладів. Так як імітаційні моделі реалізуються на комп'ютері, використання електронних приладів для генерації випадкових чисел дуже сповільнило б процедуру імітаційного моделювання. Крім того, електронні прилади активізуються випадково. Отже, неможливо за бажанням відтворити одну й ту ж послідовність випадкових чисел. Цей факт є важливим для налагодження та перевірки імітаційної моделі.

В імітаційному моделюванні всі методи генерації випадкових чисел повинні бути засновані на арифметичних операціях. Такі числа не є дійсно випадковими, так як вони можуть бути визначені заздалегідь. Тому їх називають *псевдовипадковими*.

Існує ряд алгоритмів генерації псевдовипадкових чисел, які розрізняються між собою за складністю, рівномірністю та іншими ознаками.

Одним з найпростіших алгоритмів генерації псевдовипадкових чисел полягає в наступному. Беруть два довільних n-значних двійкових числа a_1 і a_2, перемножують їх та в отриманому добутку беруть n середніх знаків. Це буде число a_3. Потім перемножують a_2 і a_3, та знов у добутку беруть n середніх знаків і т.д. Отримані таким чином числа розглядають як послідовність двійкових дробів з n знаками після коми.

Найчастіше використовується *мультиплікативний метод порівнянь*. У відповідності із цим методом псевдовипадкове число R_n при заданих значеннях параметрів u_0, b, c і m можна обчислити за наступною формулою:

$$u_n = (bu_{n-1} + c)\,\mathrm{mod}(m), \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$R_n = \frac{u_n}{m}.$$

Тут операція mod визначає залишковий член при діленні. Початкове значення параметра u_0 , звичайно, називають початковим числом генератора випадкових чисел.

Згенеруємо, наприклад, три випадкових числа при наступних початкових даних: $b = 9$, $c = 5$, $u_0 = 11$ і $m = 12$.

$$u_1 = (9 \cdot 11 + 5)\,\mathrm{mod}(12) = 8, \quad R_1 = \frac{8}{12} = 0{,}6667,$$

$$u_2 = (9 \cdot 8 + 5)\,\mathrm{mod}(12) = 5, \quad R_1 = \frac{5}{12} = 0{,}4167,$$

$$u_3 = (9 \cdot 5 + 5)\,\mathrm{mod}(12) = 2, \quad R_1 = \frac{2}{12} = 0{,}1667.$$

Конкретний вибір параметрів u_0, b, c і m є вирішальним фактором, який визначає статистичні якості генератора випадкових чисел, а також довжину його циклу (по закінченню циклу послідовність чисел, що генерується, починає повторювати себе). Використання параметрів, обраних навмання, не дає гарного генератора випадкових чисел. Надійні генератори, поряд з достатньо великою довжиною циклу, повинні пройти відповідні статистичні перевірки, для того, щоб гарантувати рівномірний розподіл на інтервалі $[0,1]$ отриманої послідовності. На цю умову треба звертати увагу при використанні неперевіреного програмного забезпечення в якості генератора випадкових чисел.

Можливі також варіації мультиплікативного методу порівнянь, які покращують якість генератора.

Всі імітаційні моделі з дискретними подіями описують безпосередньо або опосередковано ситуації з чергою. В загальному випадку будь-яка модель з дискретними подіями складається із композиції взаємопов'язаних черг. З метою збору статистичних даних (показників функціонування системи) відмітимо, що зміни в системі можуть мати місце лише у випадку, коли клієнт надходить у чергу або коли виходить із системи після обслуговування. Це означає, що двома головними подіями у будь-якій дискретній імітаційній моделі є прибуття та вибуття клієнтів. Це єдині показники за якими необхідно досліджувати систему. В інші моменти часу ніяких змін, які впливають на статистичні дані системи, не відбувається.

Опишемо логіку роботи імітаційної моделі у термінах прибуття та вибуття клієнтів.

Подія, пов'язана з прибуттям клієнта

1. Згенерувати та зберегти час події, пов'язаної з прибуттям наступного клієнта. Він дорівнює поточному часу моделювання плюс проміжок часу між прибуттям клієнтів (генерується).

2. Якщо сервіси обслуговування вільні:

а) почати обслуговування клієнта, якій надійшов, змінити стан системи на робочий та скорегувати дані використання системи;

б) згенерувати та зберегти хронологічно час події, яка пов'язана з вибуттям клієнта. Цей час дорівнює поточному часу плюс час обслуговування.

3. Якщо сервіси обслуговування зайняті, поставити клієнта, який надійшов, у чергу та збільшити її довжини на одиницю.

Подія, пов'язана з вибуттям клієнта
(закінчення обслуговування)

1. Якщо черга пуста, оголосити систему вільною. Скорегувати дані використання системи.

2. Якщо черга не є пустою:

а) почати обслуговувати першого у черзі клієнта. Зменшити довжину черги на одиницю та скорегувати дані використання системи;

б) згенерувати та зберегти хронологічно час події, яка пов'язана з вибуттям клієнта, який зайшов на обслуговування. Цей час дорівнює поточному часу моделювання плюс час обслуговування.

6.4. Методи генерування вибіркових значень

Випадковість в імітаційних моделях виникає тоді, коли інтервал часу t між послідовними подіями є випадковим. Розглянемо методи отримання послідовних випадкових значень $t = t_1, t_2, t_3, \ldots$, які мають заданий розподіл ймовірностей $f(x)$. Всі методи засновані на використанні незалежних однаково розподілених випадкових чисел, які мають рівномірний розподіл на інтервалі $[0,1]$.

Метод обернених функцій

Нехай необхідно отримати значення x випадкової величини y, яка має густину ймовірностей $f(x)$. Згідно з методом обернених функцій, спочатку знаходиться функція розподілу

$$F(x) = P\{y \le x\}, \qquad 0 \le F(x) \le 1.$$

Нехай R - випадкове число, яке отримано з рівномірного розподілу на інтервалі $[0,1]$, і нехай F^{-1} - обернена функція до функції F.

Згенеруємо випадкове число R та обчислимо шукане випадкове число $x = F^{-1}(R)$. Процедура ілюстрована на рис. 6.6.

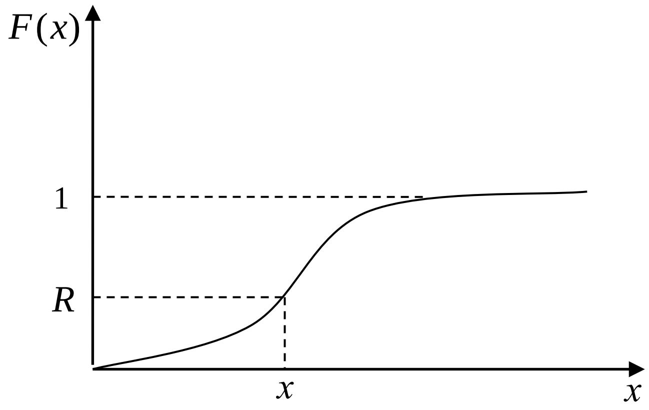


Рис.6.6

Коректність запропонованої процедури ґрунтується на наступній теоремі.

Теорема. *Для заданої функції розподілу $F(x)$ випадкової величини x, $-\infty < x < +\infty$, випадкова величина $z = F(x)$, $0 \le z \le 1$, має густину ймовірностей $f(z) = 1$, $0 \le z \le 1$, тобто є випадковою величиною, рівномірно розподіленою на інтервалі $[0,1]$.*

Доведення. Випадкова величина z є рівномірно розподіленою на інтервалі $[0,1]$ тоді і тільки тоді, коли $P\{z \le Z\} = Z$, $0 \le Z \le 1$.

Доведемо це співвідношення:

$P\{z \le Z\} = P\{F(x) \le Z\} = P\{x \le F^{-1}(Z)\} = F(F^{-1}(Z)) = Z$. При цьому $0 \le Z \le 1$, так як $0 \le P\{z \le Z\} \le 1$.

Експоненціальний розподіл. Нехай час t між прибуттям клієнтів розподілений за експоненціальним розподілом з математичним сподіванням $M(t) = \frac{1}{\lambda}$ одиниць часу, тобто густина ймовірностей задається формулою $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$.

Знайдемо випадкове значення часу t.

Функція розподілу обчислюється стандартно:

$$F(t)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda t}dx=1-e^{-\lambda t}\ ,\ t>0.$$

Якщо R - випадкове число з інтервалу $[0,1]$, то припускаючи $R=F(t)$, отримуємо $t=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-R)$. Так як R випадкове число з інтервалу $[0,1]$, то й $(1-R)$ являє собою випадкове число з того ж інтервалу. Тому можна замінити $(1-R)$ на R.

$$t=-\frac{1}{\lambda}\ln R.$$

Метод обернених функцій дає гарні результати для неперервних розподілів, функція розподілу яких має аналітичне представлення. Такі розподіли як нормальний, гама-розподіл та розподіл Пуассона, до цього класу не відноситься. Для отримання випадкових значень, які мають ці розподіли, використовуються інші методи.

Метод згорток

Основна ідея даного методу полягає в тому, щоб виразити шукану випадкову величину у вигляді суми інших випадкових величин, для яких легко отримати реалізацію випадкових значень. Типовими серед таких розподілів є розподіли Ерланга і Пуассона, які можна отримати з експоненціального розподілу.

Розподіл Ерланга. Випадкова величина, яка має розподіл Ерланга розмірності m, визначається як сума (згортка) m незалежних випадкових величин, кожна з яких має експоненціальний розподіл з параметром λ. Нехай y - випадкова величина, яка має розподіл Ерланга розмірності m. Тоді $y=y_1+y_2+...+y_m$, де y_i $(i=1,2,...,m)$ - незалежні експоненціально розподілені випадкові величини, густина ймовірностей яких задається формулою $f(y_i)=\lambda e^{-\lambda y_i}$, $y_i>0$, $i=1,2,...,m$. Таким чином, значення випадкової величини Ерланга розмірності m можна обчислити як $y=-\frac{1}{\lambda}\left(\ln R_1+\ln R_2+...+\ln R_m\right)=-\frac{1}{\lambda}\ln(R_1R_2..R_m)$.

Розподіл Пуассона. Якщо розподіл кількості подій, які відбуваються в одиницю часу буде пуассонівським, то час між подіями являє собою випадкову величину, яка розподілена за експоненціальним законом і навпаки. Цей факт використовується для отримання випадкових значень, які підлягають розподілу Пуассона.

Нехай для заданого розподілу Пуассона середня кількість подій в одиницю часу дорівнює λ. Тоді час між подіями є випадковою величиною, яка має експоненціальний розподіл з математичним сподіванням $1/\lambda$ одиниць часу. Це означає, що протягом t одиниць часу буде мати місце n подій (число n характеризується розподілом Пуассона), тоді і тільки тоді, коли час до реалізації події n менше t, яке менше часу до реалізації події $n+1$. Ця умова може бути записана так

$$t_1+t_2+...+t_n\le t<t_1+t_2+...+t_n+t_{n+1},\ n>0.$$

$$0\le t\le t_1,\ n=0,$$

де t_i - випадкова величина, яка має експоненціальний розподіл із середнім $1/\lambda$. Тоді

$$-\frac{1}{\lambda}\ln(R_1R_2..R_n)\le t<-\frac{1}{\lambda}\ln(R_1R_2..R_{n+1}),\quad n>0$$

$$0\le t<-\frac{1}{\lambda}\ln R_1,\quad n=0.$$

Звідки отримуємо

$$R_1R_2..R_n\ge e^{-\lambda t}>R_1R_2..R_{n+1},\quad n>0,$$

$$1\ge e^{-\lambda t}>R_1,\quad n=0.$$

Наведемо приклад. Нехай необхідно отримати випадкове значення, яке відповідає розподілу Пуассона з середньою частотою $\lambda=4$ події за годину, при $t=0{,}5$ *год*. Це дає нам $e^{-\lambda t}=e^{-4\cdot 0{,}5}\approx 0{,}1353$. Скориставшись випадковим числом першого стовпця таблиці 6.1, відмічаємо що $R_1 = 0{,}0589$ менше $e^{-\lambda t} = 0{,}1353$. Отже, $n = 0$.

Нормальний розподіл. Центральна гранична теорема стверджує, що сума n однаково розподілених випадкових величин прямує до величини, розподіленої за нормальним законом, при нескінченному збільшені n. Скористаємось цим для отримання значень, які відповідають нормальному розподілу з математичним сподіванням μ та стандартним відхилення σ.

Позначимо $x = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$,

де R_i - випадкові числа, рівномірно розподілені в інтервалі $[0{,}1]$. Відповідно до центральної граничної теореми випадкова величина x є асимптотично нормальною величиною з середнім $n/2$ та дисперсією $n/12$. Отже, випадкова величина y, яка розподілена за нормальним законом $N(\mu, \sigma)$ з математичним сподіванням μ і стандартним відхиленням σ, може бути отримана із випадкової величини x за формулою

$$y = \mu + \sigma \left(\frac{x - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \right).$$

Для зручності в практичних задачах n звичайно вибирають рівним 6 або 12, що приводить до наступних формул

$$y = \mu + \sigma\sqrt{2}(x - 3),$$

$$y = \mu + \sigma(x - 6).$$

Припустимо, що необхідно отримати випадкове значення, яке відповідає нормальному розподілу $N(10,\ 2)$. Обчислимо суму перших 12 випадкових чисел табл. 6.1 $x = 6{,}1094$. Отже, $y = 10 + 2 \cdot (6{,}1094 - 6) = 10{,}2188$.

Ця процедура незручна тому що, для отримання одного вибіркового значення, необхідно генерувати n (в нашому прикладі 12) випадкових чисел.

Згідно з методом Бокса-Мюллера більш ефективною процедурою є використання перетворення $x=\sqrt{-2\ln R_1}\cos(2\pi R_2)$. Величина x є стандартно розподіленою випадковою величиною, тобто має розподіл $N(0,1)$. Отже $y=\mu+\sigma x$ дає значення, яке характеризується нормальним розподілом $N(\mu,\sigma)$. Крім того, схожа формула $x=\sqrt{-2\ln R_1}\sin(2\pi R_2)$ дає випадкову величину з таким же розподілом. Причому ці дві випадкові величини, отримані за схожими формулами та залежні від одних й тих же рівномірно розподілених випадкових чисел R_1 і R_2, незалежні між собою.

Використаємо метод Бокса-Мюллера для знаходження значень, які мають нормальний розподіл $N(10,\ 2)$. Візьмемо два перших числа з табл. 6.1 та отримуємо

$$x_1=\sqrt{-2\ln 0{,}0589}\cos(2\pi\cdot 0{,}6733)\approx -1{,}103$$

$$x_2=\sqrt{-2\ln 0{,}0589}\sin(2\pi\cdot 0{,}6733)\approx -2{,}108.$$

Отже,

$$y_1=10+2\cdot(-1{,}103)=7{,}794$$

$$y_2=10+2\cdot(-2{,}108)=5{,}7823$$

Метод відбору (метод відмов)

Даний метод розроблений для отримання значень випадкових величин із складними функціями густин ймовірностей, до яких неможливо застосовувати попередні методи. Загальна ідея даного методу зводиться до заміни складної густини ймовірностей $f(x)$ більш зручною, з аналітичної точки зору, густиною ймовірностей $h(x)$. Потім значення, яке відповідає густині ймовірностей $h(x)$, використовується для отримання значень, що відповідають густині $f(x)$.

Для густини ймовірностей $f(x)$ визначаємо мажоруючу функцію $g(x)$, таку, що

$$g(x)\ge f(x),\qquad -\infty<x<+\infty.$$

Потім визначаємо густину ймовірностей $h(x)$ шляхом нормалізації функції $g(x)$:

$$h(x) = \frac{g(x)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(z)dz}, \qquad -\infty < x < +\infty .$$

Метод відбору передбачає виконання наступних дій.

1. За допомогою методу обернених функцій або методу згорток отримуємо випадкове значення $x = x_1$, яке відповідає густині ймовірностей $h(x)$.
2. Генеруємо випадкове число R з інтервалу $[0,1]$.
3. Якщо $R \le f(x_1)/g(x_1)$, то слід прийняти x_1 як шукане значення, яке відповідає розподілу $f(x)$. Інакше необхідно повернутися до п.1, відкидаючи значення x_1.

Бета-розподіл. Скористаємось методом відбору для знаходження значення, яке відповідає бета-розподілу, густина ймовірностей якого задається формулою

$$f(x) = 6x(1-x), \qquad 0 \le x \le 1.$$

На рис.6.7 зображені функція $f(x)$ та мажоруюча її функція $g(x)$.

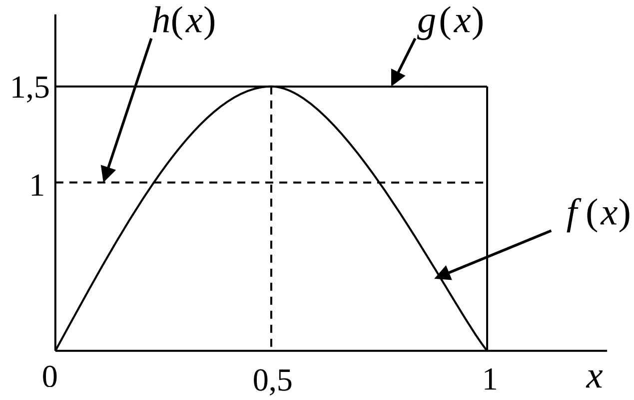


Рис.6.7

Значення мажоруючої функції $g(x)$ дорівнює максимальному значенню функції $f(x)$, якого вона досягає у точці $x = 0{,}5$. Це означає, що

$$g(x) = 1{,}5, \quad 0 < x < 1.$$

Функція густини розподілу $h(x)$ обчислюється за формулою

$$h(x) = \frac{g(x)}{\textit{площа під } g(x)} = \frac{1{,}5}{1 \cdot 1{,}5} = 1.$$

Виконаємо дії згідно з алгоритмом методу та використаємо послідовності випадкових чисел з табл. 6.1.

1. Використання числа $R = 0{,}0589$ приводить до випадкового значення $x = 0{,}0589$, що відповідає густині $h(x)$.

2. Вибираємо з табл. 6.1 наступне число $R = 0{,}6733$.

3. Так як $f(0{,}0586)/g(0{,}0589) = 0{,}3326/1{,}5 = 0{,}2217$ менше $R = 0{,}6733$, відкидаємо значення $x = 0{,}0589$.

Для отримання другого значення повторюємо дії.

1. Використання числа $R = 0{,}4799$ приводить до випадкового значення $x = 0{,}4799$, що відповідає густині $h(x)$.

2. Вибираємо з табл. 6.1 наступне число $R = 0{,}9486$.

3. Так як $f(0{,}4799)/g(0{,}4799) = 0{,}9984$ більше $R = 0{,}9486$, ми приймаємо значення $x = 0{,}4799$ як таке, що відповідає бета-розподілу.

З цього прикладу видно, що ітерації методу відбору повинні повторюватись з новими значеннями випадкових чисел.

Ефективність методу відбору підвищується якщо мажоруючу функцію $g(x)$ обирати так, щоб вона «обгортала» б функцію $f(x)$ як можна щільніше та приводила до припустимої з аналітичної точки зору апроксимуючої функції $h(x)$. Наприклад, метод буде більш ефективним, якщо прямокутну мажоруючу функцію $g(x)$ (рис.6.7) замінити східчастою. Із збільшенням кількості сходинок функція $g(x)$ стає більш щільною до функції $f(x)$. Але отримання більш щільної мажоруючої функції спричиняє додаткові обчислення, які можуть стати занадто громіздкими.

6.5. Методи збору статистичних даних

Імітаційне моделювання являє собою статистичний експеримент. Його результати повинні ґрунтуватись на відповідних статистичних перевірках (з використанням, наприклад, довірчих інтервалів і методів перевірки гіпотез). Для виконання цієї задачі спостереження в імітаційному експерименті повинні задовольняти наступним трьом вимогам:

1. Спостереження мають стаціонарні розподіли, тобто розподіли, які не змінюються під час проведення експерименту.
2. Спостереження мають нормальний розподіл.
3. Спостереження незалежні.

Нестаціонарність процесу імітації можна подолати шляхом використання вибірки достатньо великого об'єму. У прикладі 6.1 ми бачили, що точність оцінки еліпса методом Монте-Карло підвищується із збільшенням об'єму вибірки.

Результати спостережень над моделлю залежать від тривалості періоду імітації. Початковий період нестійкої поведінки моделі звичайно називають *перехідним*. Коли результати імітаційного експерименту стабілізуються, кажуть, що система працює в *стаціонарному* режимі. Тривалість перехідного періоду визначається в основному початковими характеристиками моделі. Неможливо передбачити, коли настане стаціонарний режим, але в загальному випадку, чим довше тривалість прогону моделі, тим вище шанс досягти стаціонарного стану.

Розглянемо другу вимогу. Вимога нормального розподілу спостережень може бути виконана, якщо залучити центральну граничну теорему, яка стверджує, що розподіл середнього вибірки є асимптотично нормальним незалежно від розподілу генеральної сукупності, з якої взята вибірка. Отже центральна гранична теорема є головним засобом виконання вимоги про нормальний розподіл.

Третя вимога стосується незалежності спостережень. Природа імітаційного експерименту не гарантує незалежності між послідовними спостереженнями над моделлю. Але використання вибіркових середніх для представлення окремих спостережень дозволяє пом'якшити проблему, яка пов'язана з незалежністю. Для цього, зокрема, необхідно збільшити часовий інтервал імітації для отримання вибіркового середнього.

Поняття перехідного і стаціонарного станів мають сенс у ситуаціях коли системи функціонують нескінченно довго. У випадку, коли імітація має початок і кінець (наприклад, робота банку, якщо він звичайно працює вісім годин на добу), перехідна поведінка є частиною нормального функціонування системи та не може ігноруватись. Єдиним виходом з такої ситуації є збільшення, наскільки це можливо, кількості спостережень.

Розглянемо три найбільш загальні методи збору інформації в процесі імітаційного моделювання:

- метод підінтервалів;
- метод повторення;
- метод циклів.

Метод підінтервалів

Нехай імітація триває протягом T одиниць часу (тобто довжина прогону моделі дорівнює T) і необхідно отримати n спостережень. Згідно з методом підінтервалів необхідно спочатку «обрізати» інформацію, яка відноситься до перехідного періоду, а потім розділити частину, що залишилась, на n рівних підінтервалів (рис.6.8). Середнє значення шуканої величини (наприклад, довжина черги) всередині кожного підінтервалу використовується потім в якості одиничного спостереження.

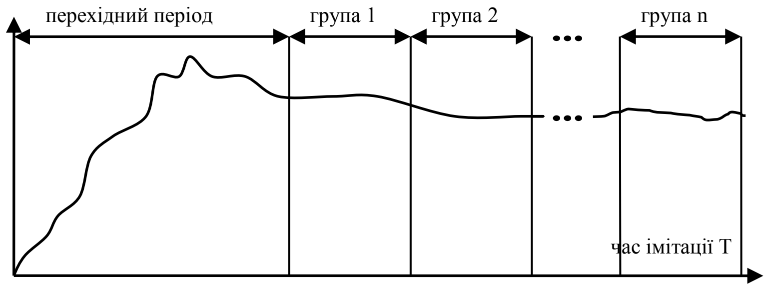


Рис. 6.8

Перевагою даного методу є те, що вплив перехідних (нестаціонарних) умов зменшується, зокрема на дані, які зібрані в кінці часу імітації. Недоліком є те, що послідовні підінтервали із загальною границею будуть корельованими, що приводить до невиконання припущення про незалежність. Вплив кореляції може бути зменшено шляхом збільшення інтервалу часу для кожного підінтервалу.

Метод повторення

У даному методі кожне спостереження являє собою незалежний прогон моделі, в якому перехідний процес не враховується (рис.6.9). Обчислення середніх величин для кожної вибірки дає як й у попередньому методі одиничне спостереження.

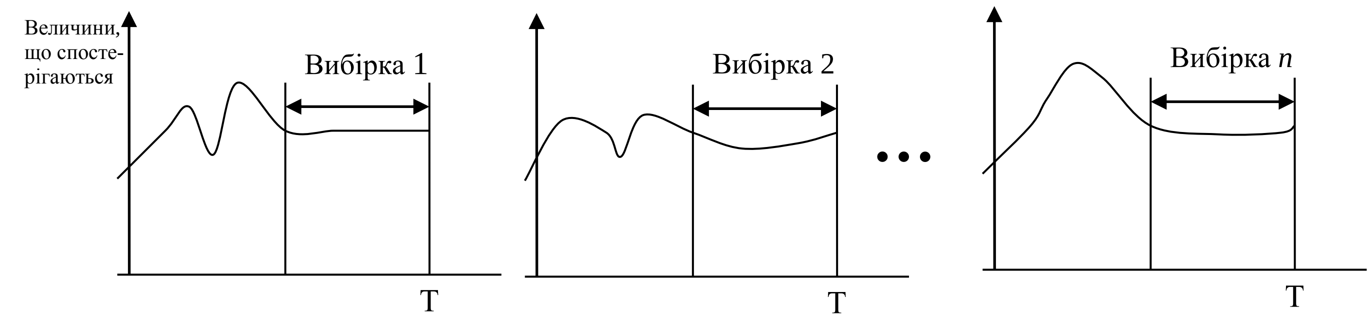


Рис. 6.9

Перевагою цього методу є те, що кожний імітаційний прогон моделі визначається своєю послідовністю випадкових чисел з інтервалу $[0,1]$, що дійсно забезпечує статистичну незалежність спостережень. Недолік полягає у тому, що всі спостереження можуть бути під сильним впливом початкових перехідних умов. Цей недолік можна пом'якшити збільшенням довжини прогону моделі.

Метод циклів

Цей метод можна розглядати як розширений варіант методу підінтервалів. Мотивацією цього методу є намагання зменшити вплив автокореляції, яка характерна для методу підінтервалів. Досягається це тим, що для кожного інтервалу (вибірки) забезпечуються однакові початкові умови. Наприклад, якщо в якості змінної розглядається довжина черги, то кожен інтервал повинен починатись у той момент, коли довжина черги дорівнює нулю. На відміну від методу підінтегралів, в методі циклів довжини інтервалів кожної вибірки можуть бути різними.

Хоч метод циклів й дозволяє зменшити вплив автокореляції, його недоліком є менша ніж у методі підінтервалів кількість спостережень при заданій довжині прогону моделі. Це обумовлено тим, що не можна заздалегідь визначити, коли новий цикл починається та яка тривалість кожного циклу. Однак, можна очікувати, що в стаціонарних умовах початкові точки послідовних циклів будуть розміщені більш менш рівномірно.

Обчислення середнього для циклу j визначається у вигляді відношення двох випадкових величин a_j і b_j, тобто у вигляді $x_j = a_j / b_j$. Визначення величин a_j і b_j залежить від змінної, яка обчислюється. Наприклад, якщо змінна є функцією часу, то a_j являє собою площу під кривою, яка визначає залежність змінної від часу, а b_j - тривалість відповідного інтервалу часу. Якщо ж змінна є функцією кількості подій, то a_j - загальна сума спостережень цієї величини в межах циклу j, а b_j - загальна кількість подій всередині відповідного циклу.

Так як x_j є відношенням двох випадкових величин, то в даному випадку незміщена оцінка вибіркового середнього визначається формулою

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} y_j ,$$

де $y_j = \dfrac{n\bar{a}}{\bar{b}} - \dfrac{(n-1)(n\bar{a} - a_j)}{n\bar{b} - b_j}, \qquad j = 1,2,\ldots,n,$

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j , \quad \bar{b} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

У цьому випадку довірчий інтервал для математичного сподівання можна знайти за допомогою вибіркового середнього $\bar{y}$ та стандартного відхилення величин y_j.

6.6. Системи імітаційного моделювання

Імітаційне моделювання, як різновид моделювання економічних систем, в значній мірі базується на комп’ютерних технологіях. Перші методи імітаційного моделювання використовували алгоритмічний підхід. Складність реальних економічних процесів та наявність багатьох суперечливих умов існування цих процесів (від сотень до тисяч) приводять до наступного результату. Якщо скористатись алгоритмічним підходом при створені імітаційної моделі з використанням звичайних мов програмування (BASIC, FORTRAN, C та ін.), то складність і об’єм моделюючих програм будуть дуже великими, а логіка моделі занадто заплутаною. Створення такої імітаційної моделі потребує значних витрат часу.

Слід відмітити, що алгоритмічний підхід і зараз використовується в навчальних цілях для вивчення основ моделювання елементів економічних систем.

Однак в середині 1970-х років з’явились перші достатньо технологічні інструментальні середовища імітаційного моделювання, які мали власні мовні засоби.

Реалізація імітаційних моделей спричиняє два різних типи обчислень:

1) маніпуляції реєстрацією, які мають справу з хронологічним накопиченням та обробкою подій моделі;

2) обчислення, пов’язані з генеруванням випадкових чисел та збором статистичних даних, які відносяться до моделі.

Обчислення першого типу засновані на різних логічних методах обробки списків, а обчислення другого типу звичайно дуже громіздкі та займають багато часу. Природа цих обчислень робить комп’ютер важливим інструментом в реалізації імітаційних моделей та стимулює, в свою чергу, створення спеціалізованих систем, що дозволяє виконувати ці обчислення більш зручним та ефективним способом.

Системи дискретного імітаційного моделювання поділяються на дві категорії:

- системи, які орієнтовані на планування подій;
- системи, які орієнтовані на обробку процесів (процедур).

При використанні систем, які орієнтовані на планування подій, користувачу необхідно вказати дії, що пов'язані з кожною подією, яка відбувається в системі. Основна роль системи у цьому випадку зводиться до автоматизації процесу отримання випадкових значень, що мають відповідні розподіли, хронологічному накопиченню, обробки подій і збору даних.

Процедурно-орієнтовані системи використовують блоки (вузли), які можна з'єднувати для формування мережі, що описує рух ***транзакцій*** або ***об'єктів*** (тобто клієнтів) в моделі. Наприклад, найбільш відомими типами вузлів у будь-якій системі імітаційного моделювання є *джерело*, в якому транзакції створюються, *черга*, де при необхідності вони можуть очікувати обслуговування, та *сервіси*, де виконується обслуговування. Кожен з цих вузлів при його визначені забезпечується всією необхідною інформацією, що дозволяє виконувати імітацію автоматично.

До систем, які орієнтовані на планування подій відносяться SIMSCRIPT, SLAM, SIMAN. Розвиток цих систем протягом багатьох років привело до того, що вони містять й можливості процедурно-орієнтованих систем.

Першою процедурно-орієнтованою системою була GPSS (General Purpose Simulation System). Однією з перших була система SIMNET.

На даний час можна виділити наступні системи імітаційного моделювання:

- Process Charter (США);

- Powersim (Норвегія);
- Ithink (США);
- ExtendtBPR (США);
- ReThink (США);
- пакет РДО (Росія);
- система СИМПАС (Росія);
- Pilgrim (Росія).

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чим відрізняються аналітичні та імітаційні моделі? Які їх основні переваги та недоліки?
2. В чому полягає основна ідея методу Монте-Карло?
3. Що називається одиничним жеребом?
4. Як розігруються види одиничного жеребу?
5. Які існують методи генерування випадкових чисел?
6. Опишіть логіку роботи імітаційної моделі у термінах СМО.
7. Які розподіли використовуються в методах генерування послідовних випадкових значень?
8. Які відмінності основних методів збору інформації?
9. Які існують на даний час системи імітаційного моделювання?

Вправи

Розв'яжіть вправи з використанням якої-небудь системи імітаційного моделювання або мов програмування високого рівня.

6.1. Клієнти випадково надходять на поштове відділення, в якому працює три службовці. Час між їх надходженнями є випадковою величиною, яка розподілена за експоненціальним законом з математичним сподіванням п'ять хвилин. Час, який витрачає службовець на обслуговування клієнта, має експоненціальний розподіл з математичним сподіванням десять хвилин. Всі клієнти формують єдину чергу та очікують першого службовця, який звільниться. Використайте імітаційну модель системи для дослідження її роботи протягом 480 хвилин, для того щоб визначити середню кількість клієнтів у черзі, середню зайнятість службовців.

6.2. Блоки живлення надходять для перевірки на конвеєр з сталою швидкістю п'ять одиниць за годину. Час перевірки блока є випадковою величиною, яка рівномірно розподілена між 10 та 15 хвилинами. Попередній досвід показує, що 20% перевірених блоків повинні бути відрегульовані та відправлені на повторну перевірку. Час регулювання також є випадковою величиною, яка рівномірно розподілена між 6 і 8 хвилинами. Використайте імітаційну модель системи для дослідження її роботи протягом 480 хвилин, для того щоб обчислити середній час, необхідний для перевірки одного блока та середню кількість повторних перевірок, які повинен пройти блок живлення перед виходом із системи.

6.3. На фінальній стадії зборки автомобіль рухається на конвеєрі між двома паралельними робочими місцями, для того щоб можна було виконувати роботу з обох боків одночасно. Час виконання робіт з кожного боку є рівномірно розподіленою випадковою величиною з інтервалом зміни від 15 до 20 хвилин та від 18 до 22 хвилин. Автомобіль прибуває на робочі місця кожні 20 хвилин. Побудуйте імітаційну модель роботи складального конвеєра протягом 960 хвилин для визначення часу використання обох робочих місць.

6.4. Час між прибуттям клієнтів у маленьку перукарню з одним працівником є випадковою величиною, як розподілена за експоненціальним законом з математичним сподіванням десять хвилин. Черга може містити максимум п'ять клієнтів. Якщо черга заповнена, то клієнт, який прибуває, покидає перукарню. Час обслуговування клієнта є випадковою величиною, яка рівномірно розподілена на інтервалі від 10 до 15 хвилин. Побудуйте імітаційну модель роботи перукарні протягом 480 хвилин та знайдіть час перебування клієнта в перукарні.

РОЗДІЛ 7
ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

7.1. Основні поняття і теореми теорії ймовірностей

Поняття імовірності асоціюється з проведенням експерименту, результати якого називають *подіями*. Множину усіх можливих подій експерименту називається *простором подій*. Тоді будь-яка підмножина цього простору є *подією*. Наприклад, в експерименті з киданням гральної кістки результат відповідає грані кістки, тобто може приймати значення від 1 до 6. Отже, простір подій являє собою множину $\{1,2,3,4,5,6\}$. Прикладом події в цьому експерименті може бути випадіння парного числа (2, 4 або 6).

Експеримент може бути пов'язаний також з неперервним простором подій. Наприклад, час між відмовами деякого електронного пристрою може приймати будь-яке невід'ємне значення.

Подія B називається *окремим випадком* події A, якщо кожного разу, коли відбувається подія B, також відбувається і подія A. Позначається така залежність між подіями так: $B \subset A$.

Події A і B називаються *рівносильними* (*еквівалентними*), якщо подія B є окремим випадком події A $(B \subset A)$, а подія A є окремим випадком події B $(A \subset B)$. Рівносильність подій позначають так: $A = B$.

Основні операції над подіями:

1. *Сумою* двох подій A і B називається подія, рівносильна настанню, принаймні, однієї з подій A або B. Отже, сума подій є об'єднанням подій: $A + B = A \cup B$.
2. *Добутком* двох подій A і B називається подія, рівносильна настанню і події A, і події B одночасно. Добуток подій є перетином (перерізом) подій: $AB = A \cap B$.

Подія, рівносильна ненастанню події A, називається *протилежною* події A і позначають $\overline{A}$.

Подія, яка неминуче відбудеться, називається *вірогідною*. Будемо позначати вірогідну подію J.

Подія називається *неможливою*, коли протилежна їй подія вірогідна. Неможливу подію позначимо O. Отже $O = \overline{J}$.

Подія A, що не є вірогідною і не є неможливою, називається *випадковою*.

Дві події A і B називаються *несумісними*, коли їх добуток – неможлива подія, тобто коли $AB = O$. Несумісність подій A і B, очевидно, означає, що поява події A виключає можливість появи події B в одному і тому ж випробуванні та навпаки.

Будемо говорити, що подія A поділяється на *окремі випадки* A_1, A_2, . . . , A_m, коли події A_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ попарно несумісні і їх сума рівносильна події A, тобто

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_m,$$

$$A_i A_j = O \ (i \neq j).$$

Будемо говорити, що події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ утворюють *повну групу подій*, коли ці події попарно несумісні і їх сума – вірогідна подія. Інакше кажучи, повна група подій – це сукупність усіх окремих випадків, на які поділяється вірогідна подія.

Нехай ми маємо повну групу *рівноможливих* подій (рівноможливість подій означає, що ми не можемо надати переваги появи жодної з них):

$$A_1, A_2, \ldots, A_n.$$

Припустимо, що деяка подія A поділяється на окремі випадки

$$A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{im},$$

що входять до даної повної групи подій. Таку подію A називають *допустимою* відносно цієї повної групи рівноможливих подій.

Відношення $P(A)=\dfrac{m}{n}$*, де* n *– кількість усіх випадків у повній групі рівноможливих подій, а* m *– кількість випадків, на які поділяється подія* A*, називається ймовірністю події* A.

Класичне означення імовірності події A можна сформулювати ще так:

Імовірність події A *– це відношення кількості випадків, що сприяють події* A*, до кількості всіх можливих випадків.*

За означенням

$$0 \le P(A) \le 1,$$

де імовірність неможливої події дорівнює нулю $P(O)=0$, а вірогідної події – одиниці $P(J)=1$.

Закон додавання імовірностей:

$$P(A+B)=\begin{cases} P(A)+P(B), & \text{якщо } A \text{ і } B \text{ несумісні,} \\ P(A)+P(B)-P(AB), & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Умовною імовірністю події B *при умові, що відбулась подія* A*, називається відношення кількості окремих випадків, на які поділяється подія* AB*, до кількості окремих випадків, на які поділяється подія* A.

Позначають умовну ймовірність події B при умові, що відбулась подія A, так: $P(B|A)$. Отже,

$$P(B|A)=\frac{k}{m},$$

де m – кількість випадків, що сприяють події A, а k – кількість випадків, що сприяють події AB.

Умовна ймовірність може бути виражена через безумовні так:

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Для двох подій A і B справедлива формула

$$P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B).$$

Дві події A і B називаються *незалежними*, коли припущення, що відбулась одна з них, не змінює ймовірності другої. Незалежність подій – це виконання таких рівностей:

$$P(B\,|\,A)=P(B) \text{ або } P(A\,|\,B)=P(A).$$

Кілька подій називаються *незалежними у сукупності*, коли вони попарно незалежні і будь-який добуток цих подій (що містить не всі їх) з кожною подією, що не ввійшла до цього добутку, незалежні.

Закон добутку ймовірностей:

$$P(AB)=\begin{cases} P(A)P(B) & \text{якщо } A \text{ і } B \text{ незалежні,} \\ P(A)P(B\,|\,A) & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

7.2. Випадкові величини і розподіл ймовірностей

Випадковою величиною називається величина, яка в результаті випробування може набувати одного з різних можливих значень залежно від обставин, які не можна наперед урахувати. Розрізняють дискретні і неперервні випадкові величини.

Випадкова величина називається *дискретною*, якщо множина значень, яких набуває випадкова величина, є скінченою множиною або послідовністю.

Неперервною називається випадкова величина, яка може приймати всі значення з деякого проміжку.

Як неперервна, так і дискретна випадкова величина X має *густину розподілу ймовірностей*, яка часто називається просто *густиною ймовірностей* і позначається як $f(x)$ (для неперервної випадкової величини) або $p(x)$ (для дискретної випадкової величини). Густина імовірності ставить у відповідність випадковій величині імовірнісну міру. Густини імовірностей повинні задовольняти умовам, які перераховані в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Характеристики густини	Випадкова величина X	
	Дискретна	Неперервна
Область визначення	$X = x_1, x_2, \ldots, x_n$	$a \le X \le b$
Умова невід'ємності	$p_i(x_i) \ge 0$	$f(x) \ge 0$
Умова нормування	$\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i) = 1$	$\int_a^b f(x)dx = 1$

Умова невід'ємності для неперервних і дискретних випадкових величин означає, що густина імовірності не може приймати від'ємних значень (у протилежному випадку імовірність деяких подій може бути від'ємною). Умова нормування вказує, що сума імовірностей по всьому простору подій повинна бути рівною одиниці.

Самою важливою імовірнісною характеристикою випадкової величини є *функція розподілу*, яка виражає для кожного x імовірність того, що випадкова величина X приймає яке-небудь значення, менше x і визначається наступним чином:

$$P(X \le x) = \begin{cases} P(x_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i) \text{ для дискретної випадкової величини } X, \\ F(x) = \int_a^x f(x)dx \text{ для неперервної випадкової величини } X. \end{cases}$$

7.3. Математичні сподівання і моменти випадкової величини

Нехай X випадкова величина, $g(x)$ – деяка функція від x, тобто областю визначення функції $g(x)$ є множина всіх значень, яких може набувати випадкова величина X. *Математичним сподіванням* значень функції $g(x)$, яке позначається як $M(g(x))$, називається середня величина зважена по відношенню до густини імовірності випадкової величини X. При заданій густині імовірності ($p(x)$ або $f(x)$ для дискретної і неперервної випадкових величин відповідно) величина $M(g(x))$ обчислюється наступним чином:

$$M(g(x))=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n} g(x_i)\,p_i(x_i), \text{ якщо } X - \text{дискретна випадкова величина},\\ \int\limits_a^b g(x)\,f(x)dx, \text{ якщо } X - \text{неперервна випадкова величина.}\end{cases}$$

Для загальної характеристики властивостей одномірної випадкової величини X звичайно використовуються дві числові характеристики:

математичне сподівання (*середнє*) $M(X)$ і *дисперсія* $D(X)$.

Математичне сподівання є характеристикою положення розподілу випадкової величини X на числовій осі відносно початку координат, а дисперсія – мірою її розкиду відносно математичного сподівання $M(X)$. Дисперсія випадкової величини – математичне сподівання квадрата відхилення цієї випадкової величини, тобто $D(X)=M(X-M(X))^2$. Більше значення дисперсії свідчить про більш високу степінь розсіювання в описі випадкової величини.

Формули для математичного сподівання і дисперсії випадкової величини X можуть бути отримані із загальної формули для математичного сподівання шляхом підстановки $g(x)=x$ для $M(X)$ і $g(x)=(x-M(X))^2$ для $D(X)$. Отже,

$$M(X)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\,p_i(x_i), \text{ якщо } X - \text{дискретна випадкова величина},\\ \int\limits_a^b xf(x)dx, \text{ якщо } X - \text{неперервна випадкова величина},\end{cases}$$

$$D(X)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i-M(X))^2\,p_i(x_i), \text{ якщо } X - \text{дискретна випадкова величина},\\ \int\limits_a^b (x-M(X))^2 f(x)dx, \text{ якщо } X - \text{неперервна випадкова величина.}\end{cases}$$

Обґрунтованість виводу вказаних формул легше проглядається для дискретного розподілу. У цьому випадку $M(X)$ являє собою зважену суму дискретних значень випадкової величини X, $D(X)$ – зважена сума квадратів відхилень випадкової величини X від її математичного сподівання $M(X)$. Випадок з неперервно розподіленою випадковою величиною можна інтерпретувати аналогічно, якщо розглянути інтеграл як границю інтегральних сум.

Для обчислення дисперсії часто зручніше користуватись співвідношенням

$$D(X) = M\left(X^2\right) - (M(X))^2,$$

згідно з яким дисперсія випадкової величини X дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата і квадратом математичного сподівання цієї випадкової величини.

Розглянемо дві неперервні випадкові величини X і Y, які визначені відповідно на інтервалах $a \le X \le b$ і $c \le Y \le d$. Позначимо через $f(x, y)$ – *густину сумісного розподілу ймовірностей* величин X і Y, а через $f_1(x)$ і $f_2(y)$ – *маржинальні* (частинні) *густини розподілу ймовірностей* величин X і Y відповідно. Тоді

$$f(x, y) \ge 0,\ a \le x \le y,\ c \le y \le d,$$

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = 1,$$

$$f_1(x) = \int_c^d f(x, y) dy,$$

$$f_2(y) = \int_a^b f(x, y) dx,$$

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y), \text{ якщо } X \text{ і } Y \text{ незалежні.}$$

Аналогічні формули використовуються для дискретного розподілу випадкових величин.

Якщо X і Y незалежні випадкові величини, то

$$M(XY) = M(X) M(Y).$$

Для суми будь-яких випадкових величин X і Y (залежних чи незалежних) можна довести, що

$$M(c_1X + c_2Y) = c_1M(X) + c_2M(Y).$$

Крім того, $D(c_1X + c_2Y) = c_1^2D(X) + c_2^2D(Y) + 2c_1c_2\operatorname{cov}(X,Y)$,

де *коваріація* $\operatorname{cov}(X,Y)$ випадкових величин X і Y обчислюється за формулою

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= M\{(X - M(X))(Y - M(Y))\} = \\ &= M\{XY - XM(Y) - YM(X) + M(X)M(Y)\} = \\ &= M(XY) - M(X)M(Y).\end{aligned}$$

Якщо X і Y – *незалежні* випадкові величини, то $M(XY) = M(X)M(Y)$ і $\operatorname{cov}(XY) = 0$. Обернене твердження невірне у тому змісті, що дві залежні випадкові величини можуть мати коваріацію, рівну нулю.

Коваріацію називають ще *кореляційним моментом* випадкових величин і позначають $\mu_{XY} = \operatorname{cov}(X,Y)$.

7.4. Деякі розподіли імовірностей

Розглянемо чотири розподіли випадкових величин, які часто використовуються в теорії і на практиці, – дискретні (біноміальний і Пуассона) та неперервні (експоненціальний і нормальний).

Біноміальний розподіл.

Коли виконуються послідовні випробування, то в результаті кожного з них може відбутися або не відбутися деяка подія A. Випробування виконується n раз. Нехай ймовірність події A у кожному випробуванні та сама $P(A) = p$. Яка ймовірність того, що у виконаних n випробуваннях подія A наступить k раз?

Ця абстрактна задача має багато різних конкретних реалізацій. Наприклад, підприємець виготовляє деякі вироби партіями по n одиниць у кожній. Імовірність того, що виготовлений виріб відповідає стандарту дорівнює p. Необхідно визначити ймовірність того, що в партії k стандартних виробів.

Виконавши n послідовних випробувань, ми матимемо різні комбінації результатів. Ті комбінації результатів, в яких подія відбудеться k раз, називатимемо сприятливими.

Визначимо ймовірність однієї сприятливої комбінації. Сприятливою комбінацією є добуток n незалежних у сукупності подій: k появ події A і $(n-k)$ появ події $\overline{A}$. Отже, за теоремою про ймовірність добутку подій, незалежних у сукупності, дістанемо, що ймовірність однієї сприятливої комбінації дорівнює

$$p^k(1-p)^{n-k}.$$

Кількість всіх можливих сприятливих комбінацій $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Отже, шукана ймовірність k появ події A в n незалежних випробуваннях дорівнює

$$P_n(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Останню формулу називають *формулою Бернуллі*. Це формула густини ймовірності біноміального розподілу з параметрами n і p.

Математичне сподівання і дисперсія для цього розподілу дорівнюють

$$M(X) = np,\ D(X) = np(1-p).$$

Розподіл Пуассона.

Люди приходять у банк або магазин „цілком випадково". Це означає, що немає ніякої можливості передбачити, коли і хто прийде. Густина розподілу випадкової величини, яка дорівнює кількості таких відвідувань протягом визначеного періоду часу, описується *розподілом Пуассона*.

Нехай X – подія (наприклад, відвідування банку або магазину), яка відбувається протягом одиниці часу (наприклад, хвилини, години).

Тоді імовірність того, що подія X настане k раз, задається формулою, яка являє собою закон розподілу Пуассона ймовірностей масових (великі значення n) і рідких (малоймовірних) подій:

$$P_n(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ \text{де}\ \lambda=np,\ k=0,1,2,\dots\ .$$

Математичне сподівання і дисперсія розподілу Пуассона рівні відповідно $M(X)=\lambda$ і $D(X)=\lambda$. З інтуїтивних міркувань формула $M(X)=\lambda$ повинна означати середню кількість подій, які відбуваються за одиницю часу. По суті, це так і є: параметр λ визначає швидкість, з якою відбувається подія (кількість подій за одиницю часу).

Розподіл Пуассона широко використовується в теорії масового обслуговування.

***Експоненціальний розподіл*.**

Якщо *кількість заявок*, які надійшли в установу за певний період часу, задовольняє розподілу Пуассона, то розподіл *інтервалів часу* між послідовними надходженнями заявок повинні відповідати *експоненціальному розподілу*. Зокрема, якщо λ є швидкість появи події у розподілі Пуассона, то розподіл часу x між послідовними надходженнями визначається густиною імовірності

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ x>0.$$

Математичне сподівання і дисперсія експоненціального розподілу рівні

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Математичне сподівання $M(X)$ узгоджується з визначенням λ. Якщо λ – швидкість, з якою відбувається подія, то $1/\lambda$ – середній інтервал між послідовними настаннями події.

***Нормальний розподіл (розподіл Гауса)*.**

Нормальний розподіл описує багато випадкових явищ, які відбуваються у повсякденному житті, включаючи аналіз рахунків, розподіл ваги та росту людей і багато інших. Густина імовірності нормального розподілу задається формулою

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<+\infty,$$

де $M(X)=a$, $D(X)=\sigma^2$. Нормальний розподіл з математичним сподіванням a і середнім квадратичним відхиленням σ позначається як $N(a,\sigma)$.

Густини $f(x)$ нормального розподілу є парною функцією, графік якої симетричний відносно прямої $x=a$.

Функцію нормального розподілу важко представити у вигляді формули, яка придатна для практичних розрахунків. У зв'язку з цим складені спеціальні таблиці функції нормального розподілу. Ці таблиці записані для *стандартного* (*нормованого*) *нормального* розподілу з нульовим математичним сподіванням $a=0$ і дисперсією, рівною одиниці ($\sigma^2=1$). Будь-яку розподілену випадкову величину X з математичним сподіванням a і дисперсією σ^2 можна звести до стандартного виду шляхом заміни

$$z=\frac{x-a}{\sigma}.$$

На рис. 7.1 показаний графік густини $f(x)$ стандартного нормального розподілу.

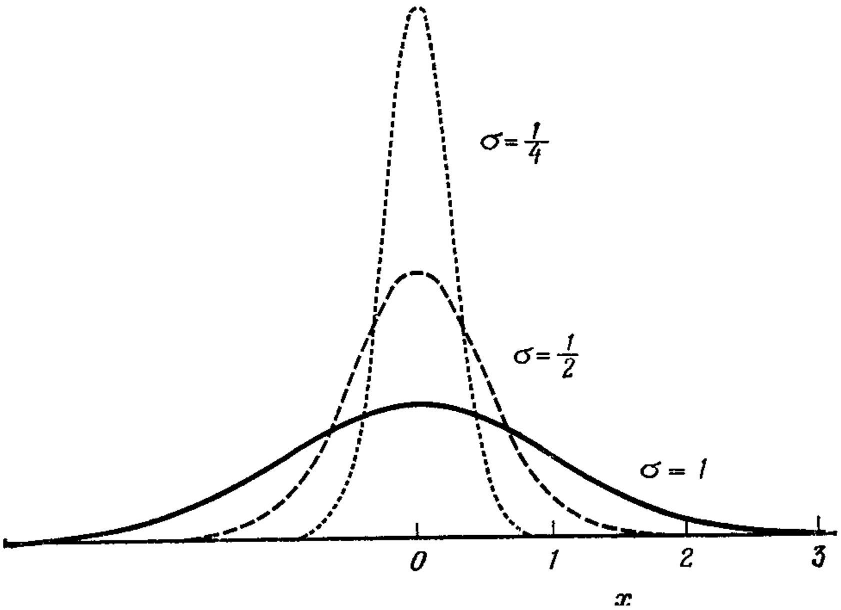


Рис. 7.1

Відмітимо, що біля 99,98% площі під кривої густини нормального розподілу знаходиться в інтервалі $a-3\sigma \le x \le a+3\sigma$. Цей факт відомий під назвою „*правило трьох сигм*”.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називається подією? Які основні операції над подіями ви знаєте? Яка подія називається випадковою?
2. Дайте класичне означення ймовірності.
3. Які події називаються: незалежними, несумісними, рівноможливими?
4. Сформулюйте закон додавання імовірностей.
5. Що називається умовною імовірністю? Сформулюйте закон добутку імовірностей.
6. Яка величина називається випадковою? На які типи поділяють випадкові величини?
7. Що називається густиною розподілу ймовірностей, функцією розподілу випадкової величини?
8. Що називається математичним сподіванням випадкової величини? Як воно визначається для дискретної та неперервної випадкових величин?
9. Що називається дисперсією випадкової величини? Як вона визначається для дискретної та неперервної випадкових величин?
10. Що називається густиною сумісного розподілу імовірностей випадкових величин? Як визначаються коваріація двох випадкових величин? Що називається кореляційним моментом?
11. Які розподіли імовірностей ви знаєте, назвіть їх основні особливості?

Вправи

7.1. На полиці знаходиться 10 книг, розміщених у довільному порядку. З них три книги по теорії ймовірностей, три – математичного аналізу і чотири – по лінійній алгебрі. Студент навмання дістає одну книгу. Яка ймовірність того, що він візьме книгу по теорії ймовірностей або лінійної алгебрі?

7.2. Контролер перевіряє вироби на відповідність стандарту. Відомо, що імовірність відповідності стандарту виробів дорівнює 0,9. Яка імовірність того, що з двох перевірених виробів обидва будуть стандартними, якщо події появи стандартних виробів незалежні? Яка імовірність того, що з двох перевірених виробів тільки одне стандартне?

7.3. В районі сто населених пунктів. У п'яти з них знаходяться пункти прокату сільгосптехніки. Випадково обирають два населених пункти. Яка імовірність того, в них будуть пункти прокату?

7.4. Серед 10 лотерейних білетів є 4 білети з виграшем. Купують 2 білети. Записати закон розподілу імовірностей кількості виграшних білетів серед куплених. Побудувати функцію розподілу.

7.5. Дана наступна функція

$$f(x) = \frac{k}{x^2}, \ 10 \le x \le 20.$$

а) Знайдіть значення константи k, при якому функція $f(x)$ буде густиною імовірностей.

б) Знайдіть функцію розподілу випадкової величини X і визначіть імовірність того, що випадкова величина прийме значення більше 12, між 13 і 14.

7.6. Добова потреба у дизельному пальному є рівномірно розподіленою величиною, яка змінюється в інтервалі від 750 до 1250 літрів. Цистерна ємкістю 1100 літрів наповнюється щодобово опівночі.

Яка імовірність того, що цистерна буде пустою якраз перед її заповненням?

7.7. Покажіть, що математичне сподівання і дисперсія випадкової величини X, що рівномірно розподілена на інтервалі $a \le x \le b$, рівні

$$M(X) = \frac{b+a}{2},\ D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

7.8. Густина сумісного розподілу імовірностей $p(x_1, x_2)$ випадкових величин X_1 і X_2 має наступний вигляд:

$$p(x_1,x_2) = \begin{array}{c|ccc} & x_2 = 3 & x_2 = 5 & x_2 = 7 \\ \hline x_1 = 1 & 0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ x_1 = 2 & 0 & 0{,}2 & 0 \\ x_1 = 3 & 0{,}2 & 0 & 0{,}2 \end{array}$$

а) знайдіть маргінальні густини імовірностей $p_1(x_1)$ і $p_2(x_2)$.

б) чи є випадкові величини X_1 і X_2 незалежними?

в) визначіть $M(X_1 + X_2)$.

г) знайдіть $\operatorname{cov}(X_1, X_2)$.

д) обчисліть $D(5X_1 - 6X_2)$.

РОЗДІЛ 8
ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕГРОВАНОГО СЕРЕДОВИЩА MATHCAD ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

8.1. Основні характеристики MathCad

В даний час для науково-технічних розрахунків на комп'ютерах все частіше використовуються не традиційні мови програмування і не електронні таблиці, а спеціальні математичні програми типу Mathematica, MatLab, Mapl, MathCad, Gauss, Eureka, Reduce, Derive, Theorist, Macsyma та ін.

Математичні пакети, в особливості MathCad, дозволяють спеціалістам у конкретній науковій галузі дуже швидко засвоїти роботу на комп'ютері й реалізувати на них математичні моделі, і при тому не удаватися у тонкощі програмування на традиційних мовах (Fortran, Pascal, C, BASIC та ін.). Надзвичайна простота інтерфейсу MathCad зробила його одним з популярних і, безумовно, самим поширеним у студентському середовищі математичним пакетом.

З дидактичної точки зору, на нашу думку, MathCad є найбільш оптимальним для засвоєння студентами. Це пов'язано з тим, що, з одного боку, MathCad – це потужне і у той же час просте універсальне середовище для розв'язування задач у різних галузях науки і техніки, фінансів і економіки, фізики і астрономії, будівництві й архітектурі, математики і статистики, організації виробництва і управління... З другого боку, виконуючи рутинні або несуттєві (у контексті матеріалу, що вивчається) операції, пакет дозволяє студенту, який не володіє у повній мірі технікою математичних перетворень, самостійно виконувати громіздкі обчислення, розв'язувати змістовні задачі, набути стійких навиків розв'язування прикладних задач. При цьому студент спілкується з комп'ютером на рівні математичних понять, ідей, загальних підходів і за незначний час може розглянути самостійно багато прикладів. Ці властивості спілкування з обчислювальним середовищем особливо важливі для розвитку творчого, критичного і незалежного мислення, оскільки студент може всебічно досліджувати нові об'єкти, виділяти загальні закономірності та сформулювати узагальнюючі твердження на основі власних спостережень.

Крім того, пакет MathCad можна використовувати як засіб модернізації курсів, як середовище для спілкування студента з викладачем, як засіб контролю і самоконтролю, як інструмент допомоги студенту при самостійній роботі. При створені навчальних курсів MathCad допомагає викладачам підготувати змістовні динамічні ілюстрації, перенести акценти на концептуальні аспекти проблем, що вивчаються, збагатити курс прикладами, які виникають у різних галузях науки і практики, і які, звичайно, не розглядаються в навчальних курсах внаслідок їх складності. Лекційні демонстрації можна підготувати таким чином, що кожен студент отримає стільки прикладів, скільки йому необхідно для розуміння суті питання. Для одного й того ж розділу можна підготувати самі різні за об'ємом, формою і глибиною навчальні курси.

Наведемо конкретні переваги роботи у середовищі MathCad:

- система MathCad більш доступна для масового користувача: вона у декілька разів дешевше своїх аналогів (мова йде про ліцензійні продукти);
- MathCad – це універсальна, а не спеціалізована математична система; так, наприклад, для розв'язання складних задач у аналітичному вигляді краще застосовувати Mapl, а для розв'язання складних задач лінійної алгебри – MatLab і т. д.;
- математичні вирази у середовищі MathCad записуються у їх загальноприйнятій нотації: чисельник дробу знаходиться зверху, а знаменник – знизу; у визначеному інтегралі межі інтегрування розмі-

щені на своїх звичних місцях. Здавалось б, що це все дрібниці, які ніяк не впливають на обчислювальний процес. Але програма повинна бути зрозумілою не тільки комп’ютеру, а й людині. Користувач, читаючи роздруківку принтера або дивлячись на дисплей, бачить, що дана величина записана у чисельнику та її збільшення приводить до зростання всього виразу. Це дуже важливо при аналізі математичних моделей, форма і зміст яких єдині;

- у середовищі MathCad процес створення „програми” йде паралельно з її налагодженням. Користувач, після введення нового виразу у MathCad-документ, може не тільки відразу підрахувати чому він дорівнює при певних значеннях змінних, але й побудувати графік або поверхню, побіжний погляд на які може безпомилково вказати, де таїться помилка, якщо вона була допущена при введені формул або при створенні самої математичної моделі;
- у пакет MathCad інтегрований достатньо потужний математичний апарат, який дозволяє розв’язувати проблеми без виклику зовнішніх процедур;
- пакет MathCad має довідник по основним математичним і фізико-хімічним формулам і константам, які можна автоматично переносити у документ без побоювання внести в них помилки, які, на жаль, не рідкість при ручній роботі;
- до пакету MathCad можна придбати ті чи інші електронні підручники з різних дисциплін (наприклад, статистики, теорії управління);
- розв’язуючи задачу, користувач може вводити не тільки числові значення змінних, але й доповнювати їх розмірностями. При цьому користувач може обрати і систему одиниць;
- система MathCad обладнана засобами анімації, що дозволяє реалізовувати створені моделі не тільки у статиці (числа, таблиці, графіки), але й у динаміці (анімаційні кліпи);

- в систему MathCad інтегровані засоби символьної математики, що дозволяє розв’язувати задачі не тільки чисельно, але й аналітично;
- не виходячи із середовища MathCad, можна відкривати нові документи на інших серверах і користуватись тими перевагами інформаційних технологій, які надає Internet.

Система MathCad існує у трьох основних варіантах:

1. MathCad Standart – стандартна версія; ідеальна система для повсякденних розрахунків. Розрахована для масової аудиторії та широкого використання в навчальному процесі.
2. MathCad Professional – версія для професіоналів; промисловий стандарт прикладного використання математики у технічних додатках. Орієнтована на математиків і наукових співробітників, які виконують складні і трудомісткі розрахунки. Це найбільш повна і потужна версія.
3. MathCad Professional Academic – професіональне академічне видання; пакет програм для професійного використання математичного апарату з електронними посібниками і ресурсами, але за спеціальною ціною для освітніх цілей.

8.2. Початок роботи у середовищі MathCad

Після завантаження програми з’являється вікно MathCad, верхній рядок якого – стандартний рядок windows-додатку.

Все, що розміщено нижче, відноситься до роботи у середовищі пакета.

Другий рядок екрану – рядок меню.

Меню має набір стандартних пунктів для windows-додатків: **File** (Файл), **Edit** (Редактировать), **View** (Вид), **Format** (Формат), **Windows** (Окно), **Help** (Помощь) і специфічні для MathCad пункти: **Insert** (Вставка), **Math** (Математика), **Symbolics** (Символы). У дужках вказані назви пунктів меню у російській редакції MathCad.

Наступні три рядка вікна містять панелі інструментів, частина з яких – стандартні для windows-додатків операції роботи з файлами і текстом, а інша – специфічні функції MathCad, наприклад, кнопка з надписом $f(x)$ відкриває список вбудованих функцій.

В окремому рядку розташовують панель інструментів для виконання математичних операцій, яку ще називають панеллю математичних інструментів або панеллю математичних операцій.

Математичні операції в MathCad розділені на групи і кожна кнопка панелі математичних інструментів відкриває доступ до певної групи операцій – клацання по кнопці цієї панелі відкриває іншу, додаткову, панель, на якій власно і розміщені кнопки математичних операцій відповідної групи.

Під рядками панелей інструментів знаходиться вікно робочого документа MathCad – простір, в якому розташовуються всі введені команди і вирази, куди MathCad виводить результати обчислень, графіки та розміщуються текстові коментарі. Зміст цього вікна можна редагувати, форматувати, зберігати у файлах на диску, друкувати та ін.

Останній, нижній рядок вікна – рядок стану. У ньому наведені рекомендації до подальших дій, поточний стан середовища і номер сторінки, яка відображена на екрані робочого документа.

Читач, який має навички роботи з windows-додатками відразу зрозуміє специфіку інтерфейсу MathCad.

Для початку роботи у середовищі клацніть у будь-якому місці в робочому документі – у полі з’явиться хрестик, який відмічає позицію, з якої починається введення.

Наведемо простіші принципи організації інтерфейсу і роботи MathCad:

- формули відображаються на екрані у загальноприйнятих математичних записах;
- правильно визначається порядок дій;

- після введення знаку рівності справа від нього відображається результат обчислень;
- після введення знаку ділення MathCad вказує чорною міткою позицію для введення знаменника;
- при введені виразу у робочому документі виділяється обмежене прямокутником поле введення;
- введений вираз можна змінити (відредагувати) і отримати обчислене значення нового виразу, якщо клацнути мишею зовні виділеної рамки;
- можна вилучити будь-який фрагмент робочого документу.

Важливо пам'ятати, що MathCad читає і виконує введені операції зліва направо і зверху донизу, тому слідкуйте, щоб вираз для обчислень розташовувався правіше або нижче визначених для нього значень змінних.

Більшість обчислень в MathCad можна виконувати трьома способами:

- вибором операції в меню;
- за допомогою кнопкових панелей інструментів;
- звертанням до відповідних функцій.

Майже всі операції, що закріплені за пунктами меню, дублюються відповідними кнопками панелі інструментів. Вбудовану функцію можна вставити функцію в робочий документ, якщо вибрати потрібне ім'я з списку функцій або ввести ім'я функції з клавіатури або, для найчастіше використовуваних функцій, вставити ім'я функції клацанням по кнопці на панелі інструментів.

8.3. Основи роботи в MathCad

У вікні робочого документа MathCad червоним хрестиком позначене місце, де створюватимемо блоки. Розрізняють три типи блоків:

- текстовий блок, куди можна вводити будь-який текст і куди традиційно вводять умову задачі чи коментар;
- математичний блок, куди вводять математичні вирази і де генеруються результати;
- блок, що містить графік.

Програма автоматично розпізнає типи блоків. У математичний блок вводять числові, алгебраїчні чи інші математичні вирази, змінні та команди. Блоки спочатку є невирівняними, їх вирівнюють за допомогою команд у вертикальному чи горизонтальному напрямках. Обчислення виконуються в математичних блоках у вікні робочого документа зліва-направо і зверху-вниз. Блоки можна переміщувати.

Правила, які потрібно запам’ятати.

1. Щоб надати значення змінній, слід натиснути на клавішу із символом двокрапки (:). На екрані ця дія позначається символом присвоєння (:=).

2. Щоб отримати результат обчислень числового чи іншого виразу, слід натиснути на клавішу (=).

3. Щоб ввести символ = в розумінні "дорівнює", наприклад, в рівнянні, треба натиснути (**Ctrl**+=). На екрані ця дія позначається символом напівжирне дорівнює (**=**).

4. Щоб виконати символьне перетворення (визначити похідну, первісну, розкласти вираз на множники чи в ряд тощо), треба натиснути (**Ctrl**+**крапка лат.**). На екрані дія символьних обчислень позначається стрілкою ($\rightarrow$).

5. Дробова частини десяткового числа в MathCad відділяється крапкою (наприклад, 123.45).

6. За умовчанням початкові індекси векторів і матриць в MathCad дорівнюють нулю. Для того щоб встановити значення початкового індексу одиниця (як прийнято в задачах математичного програмування), треба відкрити пункт **Математика** (**Math**) головного меню, а потім

пункт падаючого меню **Параметры** (**Options**). Вікно діалогу має вкладку **Переменные** (**Built-in Variables**), в якій у рядку **Начальный индекс массивов** (**ORIGIN**) необхідно встановити значення **1**.

7. В іменах середовища MathCad не застосовуються нижні та верхні індекси.

8. Для того, щоб задати точність обчислень необхідно відкрити пункт головного меню **Формат** (**Format**), а потім клацнути по пункту **Результат...** (**Result...**) і у вікні діалогу на вкладці **Формат чисел** (**Number Format**) встановити кількість знаків після крапки у рядку **Число знаков** (**Number of decimal places**).

9. Якщо математичний вираз довгий, можна застосувати додавання з переносом на наступний рядок за допомогою комбінації клавіш (**Ctrl+Enter**).

В MathCad розрізняють прості змінні (x:=8) і змінні-діапазони, наприклад, x1:=1, 1.2..2. Тут змінна x отримує значення 8, а змінна x1 – значення 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0. Якщо крок зміни параметра діапазону 1, то пишуть коротко: x2:=1..10. Запам'ятайте правило створення діапазону: для операції := набирайте на клавіатурі двокрапку (:), а для .. – набирайте крапку з комою (;). Ім'я змінної має починатися з літери.

Вирази складаються з чисел, змінних і функцій, з'єднаних символами операцій: ^ – піднесення до степеня, *, /, +,- тощо.

Якщо над виразом потрібно виконати декілька дій, варто створити функцію користувача, наприклад, z(x):=x^3+2x^2-4.

Програма намагається самостійно розпізнати, де поставити символ множення. Зазвичай це крапка, але може бути й інший символ. Вирази x^3, x^2 на екрані зображаються природно x^3, x^2. Порядок виконання арифметичних операцій у виразі традиційний, його можна змінити за допомогою круглих дужок.

Є ще один тип присвоєння – тотожність (≡). Таке присвоєння надає значення змінній чи оголошує функцію глобально, тобто для всього вікна робочого документа, не залежно від того, де розміщений відповідний математичний блок.

Матриці утворюють за допомогою панелі інструментів.

Є універсальний спосіб розв'язування рівнянь чи нерівностей за допомогою блоку команди **Given...Find**. Спочатку записують службове слово **Given**, далі блоки рівнянь чи нерівностей, а потім функцію **Find** із зазначенням , що саме треба знайти, наприклад:

$$x1 := 0 \qquad x2 := 0$$

Given

$$x1^2 + x2^2 = 25 \qquad x1 + x2 = 7$$

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(x1, x2) \qquad \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Зауважимо, що в системі рівнянь символи = є символами відношення, їх слід вводити комбінацією клавіш Ctrl+=. В останньому виразі символ = є звичайною командою обчислення.

8.4. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ

Класична задача економічного розміру замовлення.

Розглянемо приклад 1.1 з розділу 1.

Для побудови математичної моделі в системі MathCad сформуємо початковий вираз критерію оптимізації з використанням напівжирного дорівнює (комбінація клавіш **Ctrl**+=).

Далі визначимо складові критерію оптимізації. Для введення першого виразу вибираємо пункт меню **View** (Вид) головного меню MathCad. В меню, що з'явилось, клацаємо на пункт **Toolbars** (Панели инструментов). Вибираємо в наступному меню пункт **Symbolic** (Символы). В панелі інструментів, яка з'явилась, клацаємо на кнопку з назвою **Substitute** (Подставить). З’явиться шаблон з мітками, замість яких введемо перший вираз (знак дорівнює слід вводити комбінацією клавіш **Ctrl**+=) і т.д. до тих пір, доки не розмістимо всі необхідні вирази. Після цього натискаємо клавішу **Enter** та отримуємо розгорнутий вираз критерію оптимізації – шукану математичну модель.

$$c(q) = \frac{c1 + c2 + c3}{t0} \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, c1 = b \\ \text{substitute}, c2 = s \cdot v \cdot t0 \\ \text{substitute}, c3 = h \cdot t0 \cdot \dfrac{q}{2} \\ \text{substitute}, t0 = \dfrac{q}{v} \end{array} \right. \rightarrow c(q) = \frac{b + s \cdot q + \dfrac{1}{2} \cdot h \cdot \dfrac{q^2}{v}}{q} \cdot v$$

Продиференцюємо отриманий вираз відносно шуканої змінної q (розміру замовлення). Операція диференціювання вводиться за допомогою панелі інструментів **Math** (Математика), панелі **Calculus** (Матанализ) та кнопки **d/dx**.

$$\frac{d}{dq} \frac{b + s \cdot q + \dfrac{1}{2} \cdot h \cdot \dfrac{q^2}{v}}{q} \cdot v \rightarrow \frac{s + h \cdot \dfrac{q}{v}}{q} \cdot v - \frac{b + s \cdot q + \dfrac{1}{2} \cdot h \cdot \dfrac{q^2}{v}}{q^2} \cdot v$$

Виразимо змінну q при умові, що отриманий після диференціювання вираз дорівнює нулю. Для цього записуємо рівняння, вводимо ключове слово **solve** (за допомогою панелі інструментів **Symbolic** та кнопки "мітка та стрілка вправо") та кому. З’явиться нова мітка, замість якої слід ввести ім’я шуканої змінної та натиснути клавішу **Enter**. Якщо всі дії були виконані вірно, то з’явиться розв’язок рівняння. Квадратне рівняння має два розв'язка, з яких обираємо один – додатній.

$$\frac{s+h\cdot\frac{q}{v}}{q}\cdot v-\frac{b+s\cdot q+\frac{1}{2}\cdot h\cdot\frac{q^2}{v}}{q^2}\cdot v=0 \text{ solve}, q \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{h}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot(h\cdot b\cdot v)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{h}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot(h\cdot b\cdot v)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

Далі вводимо вихідні параметри задачі та отримуємо числовий розв'язок.

$$v := 100 \qquad b := 100 \qquad h := 0.02$$

$$qopt := \frac{1}{h}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot(h\cdot b\cdot v)^{\frac{1}{2}}$$

$$qopt = 1\times 10^3$$

Задача економічного розміщення замовлення з розривами цін.

Розв'яжемо у середовищі MathCad задачу з прикладу 1.2 розділу 1.

$$v := 150\cdot 1.25 \quad h := 0.02 \quad b := 20 \quad L := 2 \quad S1 := 3 \quad S2 := 2.5 \quad y := 1000$$

$$qm := \sqrt{\frac{2\cdot b\cdot v}{h}} \qquad qm = 612.372$$

$$c1(q) := S1\cdot v+\frac{b\cdot v}{q}+\frac{h\cdot q}{2} \qquad c2(q) := S2\cdot v+\frac{b\cdot v}{q}+\frac{h\cdot q}{2}$$

Given

$$c2(q)-c1(qm)=0$$

$$\text{Find}(q) \rightarrow (35.497084844748524670 \quad 10564.247786546840525)$$

$$Y := 10564.247786546840525$$

$$qopt := \begin{vmatrix} y \ \text{ if } \ qm < y < Y \\ qm \ \text{ otherwise} \end{vmatrix} \qquad qopt = 1\times 10^3$$

Для розв'язання задачі використаний блок функцій **Given...Find** (для знаходження мінімуму функцій витрат) та оператори програмування в системі MathCad **Add Line** (Добавить строку) і оператор умовного переходу **if** з оператором додаткової вітки **otherwise** (для визначення положення точки розриву цін відносно мінімуму функцій витрат).

Для створення програми (функції) були виконані наступні дії:

- ввели ім'я програми qopt та оператор присвоювання;
- клацнули на кнопку **Add Line** на панелі інструментів **Programming** для того, щоб отримати дві мітки для введення в них операторів і шаблонів операторів програмування;
- клацнули на верхню мітку, а потім на кнопку **if** панелі **Programming**. Заповнили шаблон оператора **if**, який з'явився;
- клацнули на нижню мітку, а потім на кнопку **otherwise** панелі **Programming** (при цьому з'явився шаблон оператора **otherwise**);
- ввели в мітку шаблона оператора **otherwise** значення, яке повинне повертатись, якщо умова не виконується.

Модель виробничих постачань.

Задачі моделі виробничих постачань в системі MathCad розв'язуються аналогічно класичній задачі.

$$c(q) = c1 + c2 + c3 \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, c1 = \dfrac{b \cdot v}{q} \\ \text{substitute}, c2 = S \cdot v \\ \text{substitute}, c3 = \dfrac{(p - v) \cdot h \cdot q}{2 \cdot p} \end{array} \right. \rightarrow c(q) = b \cdot \frac{v}{q} + S \cdot v + \frac{1}{2} \cdot (p - v) \cdot h \cdot \frac{q}{p}$$

$$\frac{d}{dq}\left[b \cdot \frac{v}{q} + S \cdot v + \frac{1}{2} \cdot (p - v) \cdot h \cdot \frac{q}{p} \right] \rightarrow -b \cdot \frac{v}{q^2} + \left(\frac{1}{2} \cdot p - \frac{1}{2} \cdot v \right) \cdot \frac{h}{p}$$

$$-b \cdot \frac{v}{q^2} + \left(\frac{1}{2} \cdot p - \frac{1}{2} \cdot v \right) \cdot \frac{h}{p} = 0 \text{ solve}, q \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{1}{-h \cdot p + h \cdot v} \cdot [-(-2 \cdot p + 2 \cdot v) \cdot h \cdot b \cdot v \cdot p]^{\frac{1}{2}} \\ \dfrac{-1}{-h \cdot p + h \cdot v} \cdot [-(-2 \cdot p + 2 \cdot v) \cdot h \cdot b \cdot v \cdot p]^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\frac{-1}{-h \cdot p + h \cdot v} \cdot [-(-2 \cdot p + 2 \cdot v) \cdot h \cdot b \cdot v \cdot p]^{\frac{1}{2}} \text{ collect}, h \rightarrow \frac{-1}{-p + v} \cdot \frac{[(2 \cdot p - 2 \cdot v) \cdot h \cdot b \cdot v \cdot p]^{\frac{1}{2}}}{h}$$

$$v := 2000 \qquad b := 20 \qquad h := 0.1 \qquad p := 4000$$

$$qopt := \sqrt{\frac{2 \cdot p \cdot b \cdot v}{(p - v) \cdot h}} \qquad qopt = 1.265 \times 10^3$$

8.5. Прогнозування методом регресійного аналізу

Застосуємо середовище MathCad для розв'язання задачі прогнозування методом лінійної регресії з прикладу 2.3 розділу 2.

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \\ 23 \\ 24 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 46 \\ 56 \\ 54 \\ 43 \\ 57 \\ 56 \\ 67 \\ 62 \\ 50 \\ 56 \\ 47 \\ 56 \\ 54 \\ 42 \\ 64 \\ 60 \\ 70 \\ 66 \\ 57 \\ 55 \\ 52 \\ 62 \\ 70 \\ 72 \end{pmatrix}$$

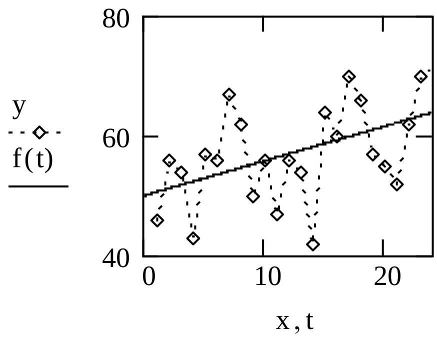
$a := \mathrm{intercept}(x, y) \qquad a = 50$

$b := \mathrm{slope}(x, y) \qquad b = 0.58$

$r := \mathrm{corr}(x, y) \qquad r = 0.493$

$f(t) := a + b \cdot t$

$f(25) = 64.5$



Вектори вихідних даних введені за допомогою панелі інструментів **Matrix**. В полі **Rows** вводиться кількість рядків (в нашому прикладі – **24**), а в полі **Columns** – кількість стовпців (для вектора – **1**).

Коефіцієнти лінійної регресії та коефіцієнт кореляції знайдені за допомогою вбудованих функцій MathCad.

Графічне зображення отримуємо за допомогою панелі **Graph** (для створення декартова графіка треба натиснути на кнопку **X-Y Plot**). В тому місті, де був розташований курсор, з'являється пуста область з місцезаповнювачами, в які вводяться імена змінних або функцій. Можливості форматування координатних осей графіків містять в себе управління їх зовнішнім виглядом, діапазоном, шкалою, нумерацією та відображенням деяких значень на осях за допомогою маркерів. Для форматування слід клацнути двічі на графіку та визначити необхідні параметри.

8.6. Задачі масового обслуговування

В розділі 3 були розглянуті деякі прості системи масового обслуговування (СМО) та запропоновані формули для визначення граничних ймовірностей станів системи. Ці формули можуть бути використані для визначення параметрів СМО, зокрема і в системі MathCad. Але всі розглянуті СМО були відкритого типу. Тому у даному розділі розглянемо *замкнуту* систему з n каналами і m джерелами замовлень (вимог).

Наприклад, два робітника (n=2) обслуговують 15 станків в цеху (m=15), кожен з яких час від часу потребує налагодження. Інтенсивність потоку вимог кожного працюючого станка дорівнює λ. Якщо станок вийшов з ладу в момент, коли хоч один робітник вільний, він відразу обслуговується. Якщо він вийшов з ладу в момент, коли всі робітники зайняті, він стає у чергу та очікує, доки не звільниться якийсь робітник. Середній час налагодження станка одним робітником $\bar{t}_{обсл} = 1/\mu$. З інтенсивністю μ система може перейти з стану p_1, коли на обслуговуванні один станок, у стан p_0, коли всі канали вільні. З інтенсивністю 2μ система може перейти з стану p_2 в стан p_1, з стану p_n в стан p_{n-1} з інтенсивністю $n\mu$. Інтенсивність переходу з станів $p_{n+1}, p_{n+2}, \ldots, p_m$ (коли всі канали обслуговування зайняті) у попередні стани, також дорівнює $n\mu$. Інтенсивність потоку замовлень залежить від того скільки станків працює. Якщо на обслуговуванні знаходиться k станків, вона дорівнює $(m-k)\lambda$.

Розглянемо стаціонарний режим роботи замкнутої СМО, коли основні імовірнісні характеристики сталі у часі. У цьому випадку інтенсивності вхідних і вихідних потоків для кожного стану будуть збалансовані.

Для випадку, коли кількість вимог k, що надійшли до системи, менше кількості каналів обслуговування n ($0 \le k < n$) рівняння балансу мають вигляд:

$$p_k(k\mu + (m-k)\lambda) = p_{k-1}(m-(k-1))\lambda + p_{k+1}(k+1)\mu.$$

Для випадку, коли кількість вимог k, які надійшли до системи, більше або дорівнює кількості каналів обслуговування n ($n \le k \le m$) рівняння балансу:

$$p_k(n\mu + (m-k)\lambda) = p_{k-1}(m-(k-1))\lambda + p_{k+1}n\mu,$$

$$p_{m-1}\lambda = p_m n\mu.$$

Припустимо, що наша система має два канали обслуговування $n=2$. Інтенсивність надходження однієї вимоги на обслуговування $\lambda = 6$ раз за годину. Інтенсивність обслуговування $\mu = 30$. Кількість джерел вимог $m = 5$. Необхідно визначити граничні імовірності станів системи (стан системи визначається кількостю вимог на обслуговуванні).

Розв'язання задачі в системі MathCad подане нижче.

$\mu := 30 \qquad \lambda := 6 \qquad m := 5 \qquad n := 2$

```
D(p) := | D0 ← μ·p1 − m·λ·p0
        | for i ∈ 1..n − 1                                          if n > 1
        |   Di ← (m − i + 1)·λ·p(i−1) + (i + 1)·μ·p(i+1) − [(m − i)·λ + i·μ]·pi
        | for j ∈ n..m − 1
        |   Dj ← (m − j + 1)·λ·p(j−1) + n·μ·p(j+1) − [(m − j)·λ + n·μ]·pj
        | D
```

$$D(p) \to \begin{pmatrix} 30\cdot p_1 - 30\cdot p_0 \\ 30\cdot p_0 + 60\cdot p_2 - 54\cdot p_1 \\ 24\cdot p_1 + 60\cdot p_3 - 78\cdot p_2 \\ 18\cdot p_2 + 60\cdot p_4 - 72\cdot p_3 \\ 12\cdot p_3 + 60\cdot p_5 - 66\cdot p_4 \end{pmatrix}$$

$p_0 := 1 \qquad i := 1..m \qquad p_i := 0$

Given

$D(p) = 0 \qquad \sum_{i=0}^{m} p_i = 1.0$

$P := \mathrm{Find}(p)$

$$P^T = \begin{pmatrix} 0.393 & 0.393 & 0.157 & 0.047 & 9.425\times 10^{-3} & 9.425\times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

На початку були введені вихідні дані, потім записаний вектор лівих частин системи рівнянь балансів (праві частини дорівнюють нулю). Так як система рівнянь балансу вироджена, то останнє рівняння з неї вилучене. Замість нього у блоці розв’язання **Given ... Find** використане рівняння нормування ймовірностей (сума всіх ймовірностей дорівнює одиниці). Перед блоком розв’язання введені початкові наближення. Отримані ймовірності можуть бути використані для знаходження характеристик даної СМО.

8.7. Метод Монте-Карло в системі MathCad

Як було зазначено в розділі 6, основна ідея методу Монте-Карло полягає у створенні певної послідовності випадкових чисел, які моделюють той чи інший ефект. Для генерації М-компонентного вектора випадкових чисел в системі MathCad є декілька вбудованих функцій, які реалізують різні типи статистичних розподілів. Найчастіше в нескладних

них програмах застосовується функція rnd(x), яка приводить до генерації одного псевдовипадкового числа, що має рівномірну густину розподілу на інтервалі $(0, x)$.

Нижче наведене розв’язання прикладу 6.1 розділу 6 в системі MathCad.

$$S(n) := \left| \begin{array}{l} m \leftarrow 0 \\ \text{for} \quad i \in 1..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} x \leftarrow -10 + 20\,\text{rnd}(1) \\ y \leftarrow -5 + 10\,\text{rnd}(1) \\ m \leftarrow m + 1 \quad \text{if} \quad \left(\dfrac{x^2}{100}\right) + \left(\dfrac{y^2}{25}\right) \le 1 \end{array} \right. \\ 200 \cdot \dfrac{m}{n} \end{array} \right.$$

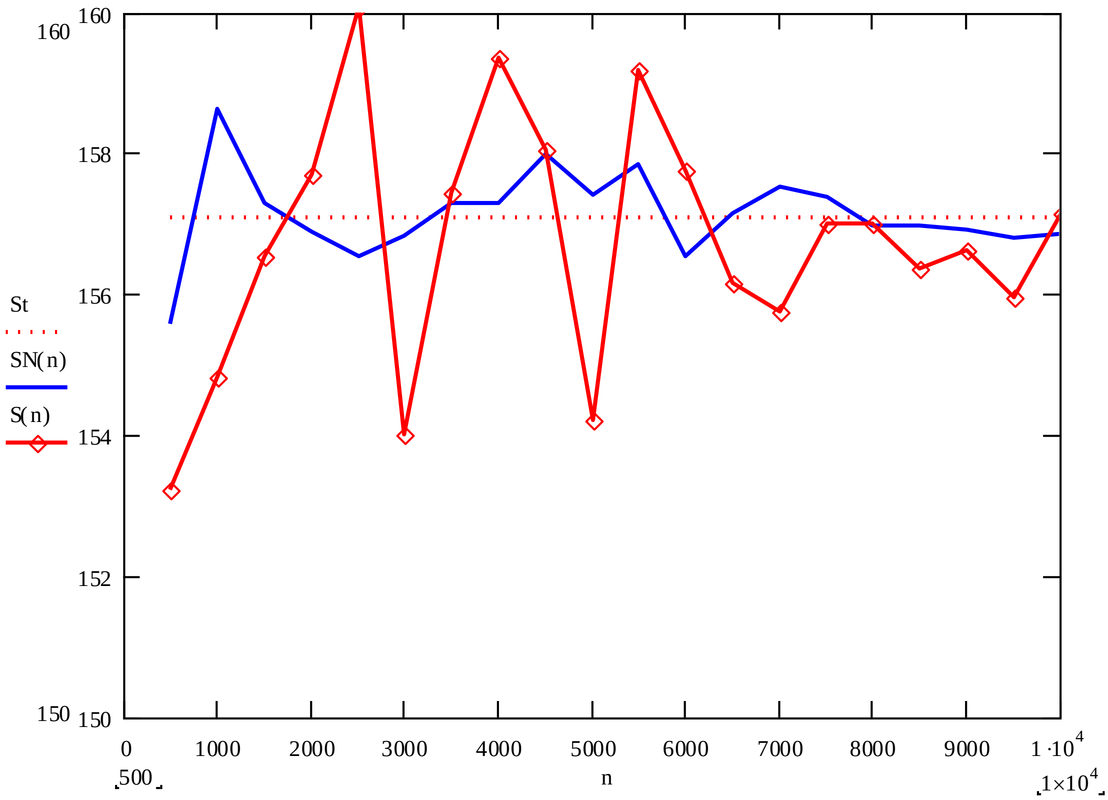
$$St := \pi \cdot 50 \qquad\qquad St = 157.08$$

$$SN(n) := \left| \begin{array}{l} k \leftarrow 0 \\ \text{for} \quad i \in 1..10 \\ \quad k \leftarrow k + S(n) \\ \dfrac{k}{10} \end{array} \right.$$

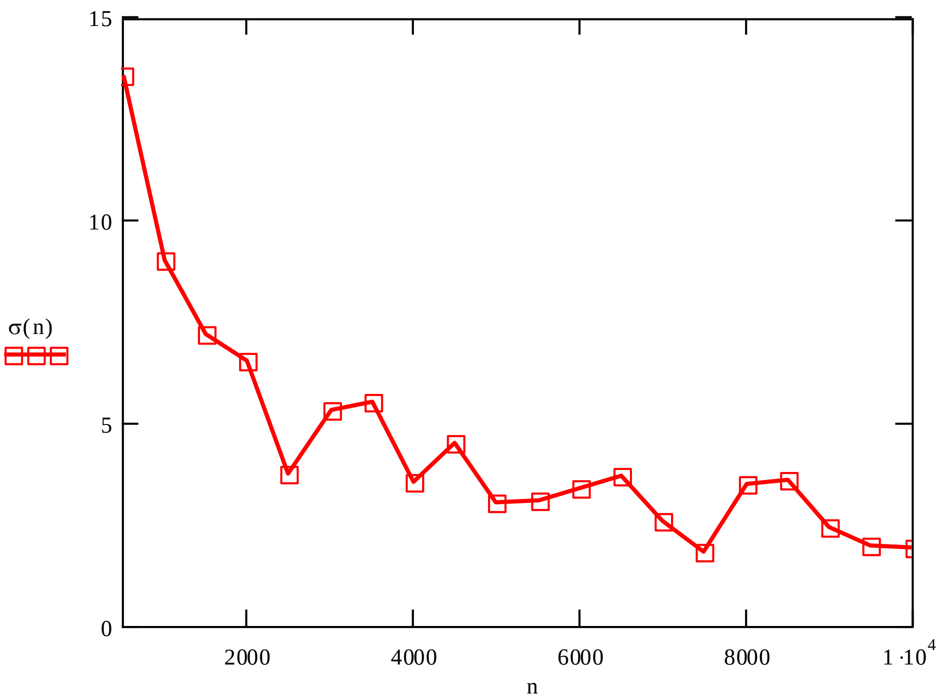
$$\sigma(n) := \left| \begin{array}{l} p \leftarrow 0 \\ \text{for} \quad i \in 1..10 \\ \quad p \leftarrow p + (S(n) - St)^2 \\ \sqrt{\dfrac{p}{9}} \end{array} \right.$$

$$SN(10000) = 157.01$$

$$n := 500, 1000 .. 10000$$



$$n := 500, 1000 .. 10000$$



$$\sigma(10000) = 0.528$$

$$\Delta := \frac{\sigma(10000) \cdot dt(0.025, 9)}{3} \qquad \Delta = 0.084$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які основні принципи організації інтерфейсу і роботи MathCad?
2. Як можна виконувати обчислення в MathCad?
3. Які є блоки у вікні робочого документу MathCad?
4. Основні правила при роботі в середовищі MathCad.
5. Які вмонтовані функції середовища MathCad використовуються для відшукання розв’язків задач дослідження операцій?

Вправи

При розв'язуванні задач попередніх розділів використовуйте додатково середовище MathCad.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА

Завдання №1.

Система управління запасами описується моделлю виробничих постачань. Попит товару v од. у рік, ціна - S, витрати на зберігання одиниці товару - h у рік, організаційні витрати - b. Протягом року може бути виготовлено p од. товару при повному завантажені виробничої лінії.

Накресліть графік зміни запасів, знайдіть оптимальний розмір партії, тривалість постачання, тривалість циклу та середній рівень запасів. Дані подані у таблиці.

№ варіанту / параметр	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v, \frac{од}{рік}$	1500	1200	1400	1650	1500	1200	2000	2400	800	1800
$S, \frac{грн}{од}$	200	160	210	220	180	200	250	320	100	240
$h, \frac{грн}{од \cdot рік}$	20	16	25	22	22	200	30	32	12	26
$b, грн$	1000	800	500	1100	600	800	1200	1600	500	600
$p, \frac{од}{рік}$	4500	3600	4000	4950	4200	4200	4800	7200	1800	2600

Завдання №2.

Кількість слухачів підготовчих курсів в університеті за шість років приведена в таблиці. Дайте прогноз на наступний рік застосовуючи методи змінного середнього, експоненціального згладжування та лінійної регресії.

Рік	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2001	288	136	48	247	150	49	117	69	59	46
2002	227	108	41	239	106	46	101	50	28	43
2003	240	126	31	261	134	19	138	48	46	38
2004	269	149	17	301	113	25	119	50	51	28
2005	226	102	22	241	110	16	125	46	30	24
2006	231	88	2	259	66	3	102	23	27	12

Завдання №3.

Вважаючи, що потік замовлень є простішим та тривалість обслуговування одного замовлення розподілена за експоненціальним законом, знайти характеристики СМО, параметри якої подані у таблиці (якщо $m=0$, то система з відмовами, якщо $m=\infty$, то система з необмеженою чергою).

Параметр СМО	Варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Кількість каналів, n	3	2	3	2	2	4	5	3	3	2
Обмеження черги, m	0	∞	0	∞	5	∞	0	1	0	2
Інтенсивність потоку замовлень, λ, *од./од.часу*	1,5	0,9	0,25	81	3	5	0,5	0,5	20	$\frac{1}{3}$
Середній час обслуговування одного замовлення, $\bar{t}_{обсл}$, *од.часу*	2	2	3	4	4	$\frac{2}{3}$	3	2,5	0,1	2

Завдання №4.

Побудувати мережевий графік виконання робіт, знайти критичний шлях, побудувати часовий графік проекту, визначити запаси часу некритичних процесів за даними, які подані у таблиці.

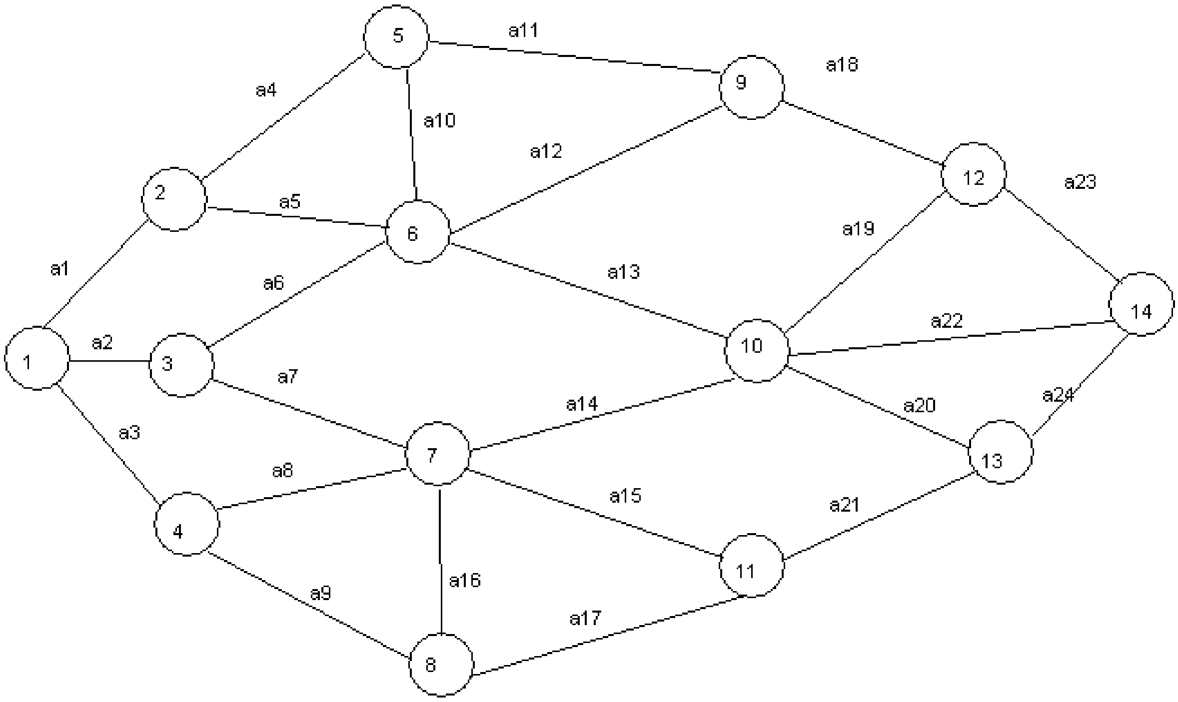
Зміст роботи	Позначення	Попередня робота	Тривалість дн.
Вихідні дані на виріб	А1	-	Т1
Замовлення комплектуючих	А2	А1	Т2
Випуск документації	А3	А1	Т3
Встановлення деталей	А4	А3	Т4
Постачання комплектуючих деталей	А5	А2	Т5
Зборка виробу	А6	А4,а5	Т6
Випуск документації на випробування	А7	А3	Т7
Випробування та прийомка виробу	А8	А6,а7	Т8

Значення коефіцієнтів умови задачі:

№ варіанта \ значення	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Т1	30	33	36	35	25	20	15	30	25	20
Т2	7	9	8	6	8	11	10	5	9	7
Т3	15	17	18	14	16	20	12	13	20	19
Т4	35	33	32	34	31	35	30	37	39	38
Т5	25	24	21	20	22	23	26	25	18	21
Т6	13	15	10	12	13	16	17	16	18	16
Т7	12	16	8	11	9	14	19	14	15	19
Т8	14	17	13	13	11	18	18	19	17	20

Завдання №5.

Транспортному підприємству необхідно перевезти вантаж з пункту 1 у пункт 14. На рисунку показана мережа доріг та вартість перевезення вантажу між окремими пунктами. Визначити маршрут доставки вантажу, якому відповідають мінімальні витрати.



Значення коефіцієнтів умови задачі:

№ варіанта / значення	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A1	20	18	22	15	17	19	23	16	21	24
A2	18	19	21	16	18	21	20	15	19	22
A3	19	17	20	17	16	20	22	17	20	23
A4	11	13	12	14	10	15	20	17	19	18
A5	15	14	11	10	12	13	16	15	16	17
A6	13	15	10	12	13	16	17	16	18	16
A7	12	16	9	11	9	14	19	14	25	19

A8	14	17	13	13	11	18	18	19	17	20
A9	12	18	14	16	15	17	15	18	14	21
A10	24	21	20	18	17	16	19	16	22	23
A11	21	19	20	21	22	18	23	17	18	19
A12	20	22	19	23	18	17	24	16	20	21
A13	22	21	18	22	21	19	20	18	19	18
A14	23	23	21	20	19	16	22	15	21	20
A15	24	18	17	24	20	15	21	19	22	22
A16	20	21	23	19	22	18	20	16	17	21
A17	22	17	19	23	18	17	19	22	20	21
A18	31	32	30	35	37	36	33	36	31	34
A19	32	33	29	31	36	37	34	35	32	33
A20	35	37	32	33	34	38	36	31	36	30
A21	37	36	31	34	36	35	40	37	39	38
A22	45	41	43	42	44	40	46	45	47	45
A23	28	32	30	25	26	28	33	31	29	27
A24	30	31	32	24	25	29	32	33	30	29

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бардачов Ю.М., Соколова Н.А., Ходаков В.Є. Дискретна математика: Підручник. – К.: Вища шк., 2002. – 287 с.
2. Боровик О.В., Боровик Л.В. Дослідження операцій в економіці: Навч. посібник. – К.: Центр учбової літератури, 2007. – 424 с.
3. Бугір М.К. Математика для економістів: Посібник. – К.: Видавничий центр „Академія”, 2003. – 520 с.
4. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. Учеб. пособие для студ. втузов. – М.: Высш. шк., 2001. – 208 с.
5. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ, 2001. – 248 с.
6. Волков В.А. Элементы линейного программирования. – М.: Просвещение, 1975. – 141 с.
7. Емельянов А.А., Власова Е.А., Дума Р.В. Имитационное моделирование экономических процессов: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 368 с.
8. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник. У 2 ч. – Ч.1. Теорія ймовірностей. – К.: КНЕУ, 2000. – 304 с.
9. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: Издательство „Дело и Сервис” , 2001. – 368 с.
10. Исследование операций в экономике: Учеб. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.Т. Тришин, М.Н. Фридман / Под. ред. Н.Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ, 2002. – 407 с.
11. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. – М.: Высш. шк., 1975. – 270 с.

12. Карагорова О.О., Кігель В.Р., Рожок В.Д. Дослідження операцій: Навч. посібник. – К.: Центр учбової літератури, 2007. – 256 с.
13. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1986. – 286 с.
14. Кирьянов Д.В. Mathcad 14. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 704 с.
15. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учебник. – 3-е изд., испр. – М.: Дело, 2002. – 688 с.
16. Кудрявцев Е.М. MathCad 2000 Pro. – М.: ДМК Пресс, 2001. – 576 с.
17. Міхайленко В.М., Федоренко Н.Д., Демченко В.В. Дискретна математика: Підручник. – К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2003. – 319 с.
18. Очков В.Ф. MathCad 2000 Pro для студентов и инженеров. – М.: КомпьютерПресс, 1998. – 384 с.
19. Плис А.И., Сливина Н.А. MathCad. Математический практикум для инженеров и экономистов: Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 656 с.
20. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие / Под ред. В.И. Ермакова. М.: ИНФРА-М, 2002. – 575 с.
21. Таха, Хэмди А. Введение в исследование операций, 6-е издание: Пер. с англ. – М.: Издательский дом „ Вильямс”, 2001. – 912 с.
22. Ульянченко О.В. Дослідження операцій в економіці: Підручник для студентів вузів. – Харків: Гриф, 2002. – 580 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Значення функції e^{-x}

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
0,00	1,000	0,40	0,670	0,80	0,449	3,00	0,050
0,02	0,980	0,42	0,657	0,82	0,440	3,20	0,041
0,04	0,961	0,44	0,644	0,84	0,432	3,40	0,033
0,06	0,942	0,46	0,631	0,86	0,432	3,60	0,027
0,08	0,923	0,48	0,619	0,88	0,415	3,80	0,022
0,10	0,905	0,50	0,606	0,90	0,407	4,00	0,0183
0,12	0,887	0,52	0,595	0,92	0,399	4,20	0,0150
0,14	0,869	0,54	0,583	0,94	0,391	4,40	0,0123
0,16	0,852	0,56	0,571	0,96	0,383	4,60	0,0101
0,18	0,835	0,58	0,560	0,98	0,375	4,80	0,0082
0,20	0,819	0,60	0,549	1,00	0,368	5,00	0,0067
0,22	0,803	0,62	0,538	1,20	0,302	5,20	0,0055
0,24	0,787	0,64	0,527	1,40	0,247	5,40	0,0045
0,26	0,771	0,66	0,517	1,60	0,202	5,60	0,0037
0,28	0,756	0,68	0,507	1,80	0,165	5,80	0,0030
0,30	0,741	0,70	0,497	2,00	0,135	6,00	0,0025
0,32	0,726	0,72	0,487	2,20	0,111	6,20	0,0020
0,34	0,712	0,74	0,477	2,40	0,091	6,40	0,0017
0,36	0,698	0,76	0,468	2,60	0,074	6,60	0,0014
0,38	0,684	0,78	0,458	2,80	0,061	6,80	0,0011
0,40	0,670	0,80	0,449	3,00	0,050	7,00	0,0009

Додаток Б

Нормована функція Лапласа $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-t^2/2} dt$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	00000	00399	00789	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	38000	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49896	49900

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,1	49903	49903	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983
3,6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992
3,8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3,9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997
4,0	49997									
5,0	49999									

Примітка. В таблиці подані мантиси значень функції (0,...).

Додаток В

Значення чисел *q* в залежності від об'єму вибірки *n* і надійності *γ* для визначення довірчого інтервалу середнього квадратичного відхилення σ_x

n	*γ*			*n*	*γ*		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
7	0,92	—	—	25	0,32	0,49	0,73
8	0,80	—	—	30	0,28	0,43	0,63
9	0,71	—	—	35	0,26	0,38	0,56
10	0,65	—	—	40	0,24	0,35	0,50
11	0,59	0,98	—	45	0,22	0,32	0,46
12	0,55	0,90	—	50	0,21	0,30	0,43
13	0,52	0,83	—	60	0,188	0,269	0,38
14	0,48	0,78	—	70	0,174	0,245	0,34
15	0,46	0,73	—	80	0,161	0,226	0,31
16	0,44	0,70	—	90	0,151	0,211	0,29
17	0,42	0,66	—	100	0,143	0,198	0,27
18	0,40	0,63	0,96	150	0,115	0,160	0,211
19	0,39	0,60	0,92	200	0,099	0,136	0,185
20	0,37	0,58	0,88	250	0,089	0,120	0,162

Додаток Г

Критичні точки розподілу $\chi 2$

Кількість ступенів вільності	Рівень значущості α					
	0,01	0,05	0,1	0,90	0,95	0,99
1	6,6	3,8	2,71	0,02	0,004	0,0002
2	9,2	6,0	4,61	0,21	0,1	0,02
3	11,3	7,8	6,25	0,58	0,35	0,12
4	13,3	9,5	7,78	1,06	0,71	0,30
5	15,1	11,1	9,24	1,61	1,15	0,55
6	16,8	12,6	10,6	2,20	1,64	0,87
7	18,5	14,1	12,0	2,83	2,17	1,24
8	20,1	15,5	13,4	3,49	2,73	1,65
9	21,7	16,9	14,7	4,17	3,33	2,09
10	23,2	18,3	16,0	4,87	3,94	2,56
11	24,7	19,7	17,3	5,58	4,57	3,05
12	26,2	21,0	18,5	6,30	5,23	3,57
13	27,7	22,4	19,8	7,04	5,89	4,11
14	29,1	23,7	21,1	7,79	6,57	4,66
15	30,6	25,0	22,3	8,55	7,26	5,23
16	32,0	26,3	23,5	9,31	7,96	5,81
17	33,4	27,6	24,8	10,1	8,67	6,41
18	34,8	28,9	26,0	10,9	9,39	7,01
19	36,2	30,1	27,2	11,7	10,1	7,63
20	37,6	31,4	28,4	12,4	10,9	8,26
21	38,9	32,7	29,6	13,2	11,6	8,90
22	40,3	33,9	30,8	14,0	12,3	9,54
23	41,6	35,2	32,0	14,8	13,1	10,2
24	43,0	36,4	33,2	15,7	13,8	10,9
25	44,3	37,7	34,4	16,5	14,6	11,5
26	45,6	38,9	35,6	17,3	15,4	12,2
27	47,0	40,1	36,7	18,1	16,2	12,9
28	48,3	41,3	37,9	18,9	16,9	13,6
29	49,6	42,6	39,1	19,8	17,7	14,3
30	50,9	43,8	40,3	20,6	18,5	15,0

Додаток Д

Критичні точки розподілу Фішера — Снедекора

$P = 0{,}9$ ($\alpha = 0{,}1$)

l_2 \ l_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
1	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44	59,86	60,19	60,71	61,22	61,74	62,00	62,26	62,53	62,79	63,06
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,41	9,42	9,44	9,45	9,46	9,47	9,47	9,48
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,22	5,20	5,18	5,18	5,17	5,16	5,15	5,14
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,90	3,87	3,84	3,83	3,82	3,80	3,79	3,78
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,27	3,24	3,21	3,19	3,17	3,16	3,14	3,12
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,90	2,87	2,84	2,82	2,80	2,78	2,76	2,74
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,67	2,63	2,59	2,58	2,56	2,54	2,51	2,49
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,50	2,46	2,42	2,40	2,38	2,36	2,34	2,32
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,38	2,34	2,30	2,28	2,25	2,23	2,21	2,18
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,28	2,24	2,20	2,18	2,16	2,13	2,11	2,08
11	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25	2,21	2,17	2,12	2,10	2,08	2,05	2,03	2,00
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,15	2,10	2,06	2,04	2,01	1,99	1,96	1,93
13	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16	2,14	2,10	2,05	2,01	1,98	1,96	1,93	1,90	1,88
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10	2,05	2,01	1,96	1,94	1,91	1,89	1,86	1,83
15	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,06	2,02	1,97	1,92	1,90	1,87	1,85	1,82	1,79
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	1,99	1,94	1,89	1,87	1,84	1,81	1,78	1,75
17	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06	2,03	2,00	1,96	1,91	1,86	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,98	1,93	1,89	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72	1,69
19	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,06	2,02	1,98	1,96	1,91	1,86	1,81	1,79	1,76	1,73	1,70	1,67
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,89	1,84	1,79	1,77	1,74	1,71	1,68	1,64

l_2 \ l_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
21	2,96	2,57	2,36	2,23	2,14	2,08	2,02	1,98	1,95	1,92	1,87	1,83	1,78	1,75	1,72	1,69	1,66	1,62
22	2,95	2,56	2,35	2,22	2,13	2,06	2,01	1,97	1,93	1,90	1,86	1,81	1,76	1,73	1,70	1,67	1,64	1,60
23	2,94	2,55	2,34	2,21	2,11	2,05	1,99	1,95	1,92	1,89	1,84	1,80	1,74	1,72	1,69	1,66	1,62	1,59
24	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,98	1,94	1,91	1,88	1,83	1,78	1,73	1,70	1,67	1,64	1,61	1,57
25	2,92	2,53	2,32	2,18	2,09	2,02	1,97	1,93	1,89	1,87	1,82	1,77	1,72	1,69	1,66	1,63	1,59	1,56
26	2,91	2,52	2,31	2,17	2,08	2,01	1,96	1,92	1,88	1,86	1,81	1,76	1,71	1,68	1,65	1,61	1,58	1,54
27	2,90	2,51	2,30	2,17	2,07	2,00	1,95	1,91	1,87	1,85	1,80	1,75	1,70	1,67	1,64	1,60	1,57	1,53
28	2,89	2,50	2,29	2,16	2,06	2,00	1,94	1,90	1,87	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,63	1,59	1,56	1,52
29	2,89	2,50	2,28	2,15	2,06	1,99	1,93	1,89	1,86	1,83	1,78	1,73	1,68	1,65	1,62	1,58	1,55	1,51
30	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82	1,77	1,72	1,67	1,64	1,61	1,57	1,54	1,50
40	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79	1,76	1,71	1,66	1,61	1,57	1,54	1,51	1,47	1,42
60	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,82	1,77	1,74	1,71	1,66	1,60	1,54	1,51	1,48	1,44	1,40	1,35
120	2,75	2,35	2,13	1,99	1,90	1,82	1,77	1,72	1,68	1,65	1,60	1,55	1,48	1,45	1,41	1,37	1,32	1,26
∞	2,71	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,72	1,67	1,63	1,60	1,55	1,49	1,42	1,38	1,31	1,30	1,24	1,17

$P = 0{,}95\ (\alpha = 0{,}05)$

l_2 \ l_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90

l_2 \ l_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22

Додаток Е

t – розподіл
(значення $t_{кр}$, відповідне $P\ (T > t_{кр}) = \alpha$)

l	α				
	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30					
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,576
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Навчальне видання

В.Є. Березовський, М.М. Гузій, В.М. Дякон,
Л.Є. Ковальов, М.О. Медведєва

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ
ПРАКТИЧНИЙ КУРС

Видається в авторській редакції

Підписано до друку 19.01.2021 р. Формат 60х84/16.
Папір офсетний. Ум. друк. арк. 13,31
Тираж 100 прим. Замовлення № 127

Видавничо-поліграфічний центр «Візаві»
20300, м. Умань, вул. Тищика, 18/19, вул. Садова, 2
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 2521 від 08.06.2006.
тел. (04744) 4-64-88, 3-51-33, (067) 104-64-88
vizavi-print.jimdo.com
e-mail: vizavi008@gmail.com
vizavisadova@gmail.com