

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ

На правах рукописи

КИПНИС Леонид Абрамович

ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ КЛАССА N ДЛЯ КЛИНОВИДНЫХ
ОБЛАСТЕЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ

Специальность 01.02.04 – механика деформируемого
твердого тела

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 1992

Диссертационная работа выполнена в Уманском государственном педагогическом институте им. П.Г.Тычины.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор В.М.АЛЕКСАНДРОВ

доктор физико-математических наук, профессор А.С.КРАВЧУК

доктор физико-математических наук Е.В.ЛОМАКИН

Ведущая организация:

Научно-исследовательский институт механики и прикладной математики Ростовского государственного университета.

Защита состоится "29" октября 1992 года в 14 часов на заседании специализированного совета Д 002.87.01 при Институте проблем механики РАН по адресу: 117526, Москва, проспект Вернадского, 101, аудитория 235.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института проблем механики РАН.

Автореферат разослан " " 199 года.

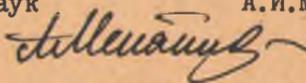
Ученый секретарь

специализированного совета

Д 002.87.01 при ИПМ РАН

кандидат физико-математических наук

А.И.МЕНЯЙЛОВ



Общая характеристика работы

Актуальность проблемы. Для механики разрушения значительный интерес представляет информация о напряженном состоянии тела вблизи различного типа угловых точек, которые в определенных диапазонах изменения раствора угла и при определенных граничных условиях являются концентраторами напряжений. В процессе изучения таких точек широко используются решения плоских статических задач теории упругости для клиновидных областей.

Исследования плоских статических задач теории упругости для клиновидных областей проводились в работах В.М.Абрамова, В.Е.Аветикяна, А.Г.Аветисяна, В.Н.Акопяна, В.М.Александрова, Ю.А.Антипова, В.А.Бабешко, Р.Д.Банцури, С.М.Белоносова, Б.З.Брачковского, М.И.Бронштейна, В.М.Вайншельбаума, И.И.Воровича, В.К.Вострова, М.Р.Галаджевы, Р.В.Гольдштейна, К.Г.Гуляна, А.Е.Дыхнова, А.И.Каландии, Г.Б.Колчина, В.В.Копасенко, В.А.Крысань, В.Д.Кулиева, Л.М.Куршина, В.В.Лаленко, С.Г.Лалшина, А.И.Лурье, С.А.Лутченко, О.Н.Луцка, С.Е.Михайлова, С.М.Мхитаряна, Л.В.Никитина, Б.М.Нуллера, Д.А.Пожарского, Г.Я.Попова, Б.М.Прокофьева, М.Б.Рывкина, В.С.Саркисяна, В.М.Сахоненко, В.Х.Сируняна, В.А.Ситника, Б.И.Сметанина, А.С.Соловьева, Л.Ф.Спесивцевой, Л.Я.Тихоненко, В.С.Тонояна, Я.С.Уфлянда, М.Л.Холмянского, А.А.Храпкива, Г.С.Целикова, Г.П.Черепанова, К.С.Чобаняна, С.Г.Шульмана, М.С.Элизбарашвили. Дж.Албласа, М.Барнарда, Дж.Браца, Р.Вестманна, М.Вильямса, Е.Гдаутоса, Д.Годфри, Г.Гупты, Дж.Демпсея, А.Зака, Ф.Карала, С.Карозерса, С.Карпа, В.Койтера, М.Комниноу, Т.Кондо, В.Куперса, М.Матчинского, Дж.Мичелла, П.Нараина, Г.Синклера, Р.Сривастава, М.Сталлибрасса, О.Тамате, П.Теокариса, К.Трантера, Е.Штернберга, Ф.Эрдогана и других авторов.

Многочисленные решения, полученные в данном направлении, согласуются с классическим принципом Сен-Венана, в соответствии с

которым напряженное состояние упругого тела вдали от места приложения нагрузки вполне определяется значением главного вектора и главного момента этой нагрузки и не зависит от подробностей ее распределения.

Г.П.Черепанов предложил строить решения плоских статических задач теории упругости для областей с бесконечно удаленной точкой типа клина, в окрестности которой граничные условия однородны, в постановке, учитывающей влияние внешнего поля. Она тесно связана с предположением о существовании некоторой задачи в целом, по отношению к которой рассматриваемая задача для области с бесконечно удаленной точкой типа клина является внутренней. В такой постановке принцип Сен-Венана для задач указанного типа оказывается справедливым лишь в определенных диапазонах изменения угла раствора соответствующего клина (задачи класса S). При всех остальных значениях этого угла принцип Сен-Венана не выполняется (задачи класса N).

В классе N не имеет места классическая теорема единственности. Однородная задача класса N имеет нетривиальное решение, определяемое с точностью до некоторых произвольных постоянных. Общее решение неоднородной задачи в этом классе складывается из частного ее решения и общего решения однородной задачи. Корректная постановка задачи в классе N должна включать в себя задание произвольных постоянных, с точностью до которых определено ее решение. Эти постоянные характеризуют интенсивность внешнего поля и устанавливаются из решения внешней задачи.

Общая теория задач класса N была предложена Г.П.Черепановым в 1970 году (Черепанов Г.П. О сингулярных решениях в теории упругости // Проблемы механики твердого деформированного тела. Л.: Судостроение, 1970. С. 467-479). Однако в течение многих последующих лет при исследовании задач теории упругости ей уделялось незаслу-

женно мало внимания. В результате, число конкретных задач класса N , решенных к настоящему времени, еще немногочисленно. Построение решений новых задач класса N актуально для математической теории упругости, поскольку данные решения, благодаря учету влияния внешнего поля, дополняют сложившиеся классические представления о напряженном состоянии тел с бесконечно удаленной точкой. Однако актуальность проблемы исследования задач класса N сказанным не исчерпывается. Она обосновывается еще и тем, что формальные математические решения краевых задач класса N могут быть эффективно использованы при изучении различных вопросов механики разрушения. Среди них в первую очередь следует отметить такие, как определение коэффициентов интенсивности напряжений с помощью приближенного метода асимптотического шивания, формулировка критериев предельного равновесия трещин, начальное развитие пластических зон вблизи вершин остроконечных концентраторов, образование трещин при столкновении линий скольжения, ветвление трещин, установление законов преломления и отражения трещин на границе раздела различных сред.

Цель работы. Построение точных решений ряда плоских статических задач теории упругости класса N для клиновидных областей с последующим их привлечением к исследованию некоторых вопросов, связанных со следующими проблемами механики разрушения: определение коэффициентов интенсивности напряжений в концах разрезов в однородных и кусочно-однородных клиновидных областях и в их угловых точках; начальное развитие линий скольжения из различного типа угловых точек однородных и кусочно-однородных областей; ветвление линии скольжения; образование трещины при столкновении линий скольжения.

Научная новизна. В работе исследуется новый класс задач теории упругости, отличающихся от всех рассматривавшихся ранее плоских статических задач для клиновидных областей своей постановкой,

предполагающей учет влияния внешнего поля на напряженное состояние рассматриваемых областей с бесконечно удаленной точкой. Решения новых задач класса N построены для следующих областей: клин с полубесконечным разрезом на биссектрисе; объемлющий полуплоскость клин с разрезом на биссектрисе, исходящим из вершины; полуплоскость с полубесконечным прямолинейным разрезом, непараллельным границе; объемлющий полуплоскость клин с полубесконечным разрезом на продолжении грани; плоскость с двумя полубесконечными прямолинейными разрезами, вершина одного из которых находится на продолжении другого; объемлющий полуплоскость клин с разрезом на продолжении грани, исходящим из вершины; кусочно-однородная плоскость с границей раздела сред в форме сторон угла, содержащая исходящий из вершины разрез на биссектрисе; объемлющий полуплоскость клин с двумя прямыми линиями скольжения, исходящими из вершины, в различных случаях однородных граничных условий на сторонах (симметричные задачи); клин с прямой линией скольжения, исходящей из вершины, однородные условия на одной из сторон которого отличаются от однородных условий на другой; кусочно-однородная плоскость с границей раздела сред в форме сторон угла, содержащая две прямые линии скольжения конечной длины, исходящие из вершины (симметричная задача); кусочно-однородная плоскость, составленная из двух различных полуплоскостей, содержащая на границе раздела сред полубесконечный разрез и линию скольжения в вершине; плоскость с полубесконечной прямой линией скольжения и прямолинейным отростком, исходящим из вершины, также являющимся линией скольжения; плоскость с полубесконечной прямой линией скольжения и двумя прямолинейными отростками, исходящими из вершины, являющимися линиями скольжения (кососимметричная задача); плоскость с двумя полубесконечными прямыми линиями скольжения, имеющими общую вершину, из которой исходит разрез конечной длины (симметричная задача). Решены также некоторые контакт-

ные задачи класса N для клина.

Для решения проблемы установления на основе получаемых решений задач класса N направлений начального развития линий скольжения из различного типа угловых точек предлагается новый подход, более строгий по сравнению с применявшимися, базирующийся на сформулированном Г.П.Черепановым принципе выбора (Черепанов Г.П. О проблеме неединственности в теории пластичности // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218. № 4. С. 779-782). Этот подход в сочетании с аппаратом задач класса N впервые позволил достаточно подробно проанализировать в симметричном случае угловую точку границы области, а также угловую точку границы раздела различных сред с точки зрения направлений начального развития из них линий скольжения, установить число и направления начального развития вторичных линий скольжения при ветвлении линии скольжения, развивающейся из некоторого концентратора, исследовать модель одного из основных механизмов зарождения трещин.

Практическое значение работы. В работе получены удобные для практического использования формулы для коэффициентов интенсивности напряжений в концах разрезов в однородных и кусочно-однородных клиновидных областях и в их угловых точках. Эти результаты представлены в виде аналитических выражений, а также числовых таблиц, соответствующих различным значениям растворов углов и упругих постоянных. Имеются таблицы углов, определяющих направления начального развития линий скольжения из различного типа угловых точек. Указанные данные могут быть включены в справочники по коэффициентам интенсивности напряжений и использоваться при расчете прочности элементов конструкций.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на VI Международной конференции по механике разрушения (Индия, Дели, 1984), на VI Республиканской конференции по математике

и механике в Институте математики и механики АН АзербССР (Баку, 1985), на I Всесоюзной конференции "Механика разрушения материалов" (Львов, 1987), на научных семинарах в Институте проблем механики РАН, в Московском государственном университете, в Ростовском государственном университете, в Московском авиационном институте.

Объем и структура работы. Реферируемая работа, изложенная на 406 страницах, состоит из введения, четырех глав, заключения, библиографии (240 наименований). Она содержит 34 рисунка и 25 таблиц.

Содержание работы

Введение содержит краткий обзор результатов исследований плоских статических задач теории упругости для клиновидных областей с разрезами и плоских статических контактных задач теории упругости для клиновидных областей. Обосновывается актуальность проблемы, исследованию которой посвящена реферируемая работа, формулируется ее цель, обосновывается научная новизна полученных в работе результатов, указывается их практическое значение, кратко излагается содержание работы.

В первой главе приводятся некоторые сведения о канонических сингулярных задачах теории упругости для клиновидных областей и определение плоской статической задачи класса N для области с бесконечно удаленной точкой типа клина. Изложение этих вопросов имеется в книге В.З.Партона и П.И.Перлина "Методы математической теории упругости" и в книге Г.П.Черепанова "Механика хрупкого разрушения".

Во второй главе строятся точные аналитические решения плоских статических задач теории упругости класса N для некоторых клиновидных областей с разрезом.

В § 2.1 рассматривается клин с полубесконечным разрезом на биссектрисе. Грани клина и берега разреза свободны от напряжений.

На бесконечности напряжения стремятся к нулю, но главный вектор и главный момент внешних усилий на бесконечности отличны от нуля и заданы. Последнее условие следует понимать так: главный вектор и главный момент внешних усилий, действующих на дуге $r=R \gg l$, $0 \leq \theta \leq \alpha$ (2α - угол раствора клина, l - длина перешейка) равны $(X; Y)$ и M , а главный вектор и главный момент внешних усилий, действующих на дуге $r=R$, $-\alpha \leq \theta < 0$ равны $(-X; -Y)$ и $-M$. Постоянные X, Y, M характеризуют интенсивность внешнего поля.

При помощи интегрального преобразования Меллина с комплексным параметром ρ соответствующие симметричная и кососимметричная задачи сводятся к однородным функциональным уравнениям Винера-Хопфа, для каждого из которых строится точное аналитическое решение. Факторизация коэффициента уравнения на мнимой оси осуществляется следующим образом. В симметричной задаче он представляется в виде $G_1(\rho)/[(\rho+1)\text{ctg}\rho\pi]$, а в кососимметричной - в виде $-G_2(\rho)/\text{ctg}\rho\pi$. Функции $G_1(it), G_2(it)$ ($-\infty < t < \infty$) являются действительными положительными четными функциями t , стремящимися к единице при $t \rightarrow \infty$. Поэтому индекс каждой из функций $G_1(\rho), G_2(\rho)$ по мнимой оси равен нулю и они факторизуются по формуле Гахова. Функция $\rho \text{ctg}\rho\pi$ выражается через четыре гамма-функции.

С использованием построенных решений функциональных уравнений получены следующие формулы для коэффициентов интенсивности напряжений в конце разреза:

$$K_I = K_y Y l^{-1/2} + K_M M l^{-3/2}, \quad K_{II} = K_X X l^{-1/2}$$

$$K_X = \left(\frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{\alpha^2 - \sin^2 \alpha} \right)^{1/2}, \quad K_y = - \left(\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{\alpha^2 - \sin^2 \alpha} \right)^{1/2}$$

$$K_M = 4(2/\pi)^{1/2} \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln G_1(it)}{t^2 + 1} dt \right]$$

Ниже приведены значения коэффициентов K_x, K_y, K_M при некоторых значениях угла α .

α°	10	30	50	90	130	150	170
K_x	4,782	2,739	2,086	1,463	1,100	0,961	0,846
$-K_y$	47,365	8,900	3,953	1,463	0,883	0,813	0,798
K_M	52,826	12,457	6,898	3,979	3,287	3,208	3,193

В случае $\alpha = \pi/2$ (полуплоскость с полубесконечным прямолинейным разрезом, перпендикулярным границе) из данных формул получается результат Дж.Бентема и В.Койтера. При $\alpha = \pi$ (плоскость с двумя полубесконечными разрезами, расположенными на одной прямой) эти формулы приводят к результату П.Париса и Дж.Си.

Вблизи вершины клина в симметричной задаче при $0 < \alpha \leq \pi/2$ напряжения ограничены, а при $\pi/2 < \alpha \leq \pi$ главные члены их разложений в ряды представляют собой известное решение симметричной канонической сингулярной задачи для клина со свободными от напряжений гранями, отвечающее единственному в полосе $-1 < \text{Re } \lambda < 0$ корню λ_1 ее характеристического уравнения $\sin 2(\lambda+1)\alpha + (\lambda+1)\sin 2\alpha = 0$ ($\lambda_1 \in [-\frac{1}{2}; 0]$). Упомянутое решение определяется с точностью до произвольной постоянной C_1 . В рассматриваемом случае клина с разрезом эта постоянная (коэффициент интенсивности напряжений в вершине клина) будет такой:

$$C_1 = C_y Y l^{-\lambda_1 - 1} + C_M M l^{-\lambda_1 - 2}$$

Значения коэффициентов C_y, C_M и корня λ_1 при некоторых значениях угла α указаны ниже.

α°	110	120	130	140	150	160	170
$-\lambda_1$	0,303	0,384	0,437	0,470	0,488	0,497	0,500
C_y	1,915	2,003	2,094	2,186	2,266	2,333	2,377
$-C_M$	2,582	2,694	2,810	2,924	3,026	3,111	3,169

В кососимметричной задаче напряжения вблизи вершины клина ограничены при $0 < \alpha \leq \alpha_N$ (α_N - единственный корень уравнения $2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha = 0$ на интервале $\pi/2 < \alpha < \pi$ ($2\alpha_N \approx 257^\circ$)), а при $\alpha_N < \alpha \leq \pi$ главные члены их разложений в ряды представляют собой решение кососимметричной канонической сингулярной задачи для клина со свободными от напряжений гранями, отвечающее единственному в полосе $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$ корню λ_2 ее характеристического уравнения $\sin 2(\lambda+1)\alpha - (\lambda+1)\sin 2\alpha = 0$ ($\lambda_2 \in [-\frac{1}{2}; 0]$). Неопределенная постоянная C_2 (коэффициент интенсивности напряжений в вершине клина), входящая в это решение такова:

$$C_2 = C_X X l^{-2-1}$$

α°	130	140	150	155	160	165	170
$-\lambda_2$	0,019	0,157	0,269	0,318	0,362	0,402	0,438
C_X	13,015	1,671	1,072	0,953	0,882	0,838	0,813

Аналитические выражения для C_X, C_Y, C_M приводятся в работе.

В § 2.2 рассматривается объемлющий полуплоскость клин с разрезом на биссектрисе, исходящим из вершины. Грани клина и берега разреза свободны от напряжений. На бесконечности в соответствующей симметричной (кососимметричной) задаче напряжения стремятся к нулю таким образом, что реализуется асимптотика, представляющая собой удовлетворяющее условию затухания напряжений асимптотически наибольшее решение симметричной (кососимметричной) канонической сингулярной задачи для клина со свободными от напряжений гранями. Им является то решение последней, которое отвечает корню $\lambda_1(\lambda_2)$ характеристического уравнения и о котором говорилось выше (в кососимметричной задаче угол раствора клина предполагается большим $2\alpha_N$). Произвольные постоянные C_j ($j=1,2$), имеющие размерности силы,

деленной на длину в степени $\lambda_j(\alpha)+2$, считаются заданными по условию задачи. Они характеризуют интенсивность внешнего поля и должны определяться из решения внешней задачи.

Если угол раствора клина в симметричной (кососимметричной) задаче меньше $\pi (2\alpha_n)$, то внешнее поле не оказывает существенного влияния на напряженное состояние рассматриваемого тела. В этом случае симметричная (кососимметричная) задача имеет лишь тривиальное решение.

Сформулированная задача сводится к неоднородным функциональным уравнениям Винера-Хопфа. Строятся точные решения уравнений и выводятся формулы для коэффициентов интенсивности напряжений в конце разреза. С помощью данных формул получены следующие результаты (l — длина разреза):

$$K_I = K_{c1} C_1 l^{\lambda_1 + 1/2}, \quad K_{II} = K_{c2} C_2 l^{\lambda_2 + 1/2}$$

α°	110	120	130	140	160	170	175
K_{c1}	2,026	1,604	1,348	1,189	1,036	1,008	1,002
K_{c2}			0,090	0,609	0,986	1,017	1,012

В отсутствие внешнего поля и при условии, что к берегам разреза приложены распределенные нагрузки рассматриваемая задача исследовалась в работах Р.Д.Банцури, Б.И.Сметанина, Р.Сривастава и П.Нараина, А.А.Храпкова.

В § 2.3 рассматривается полуплоскость с полубесконечным прямолинейным разрезом, непараллельным границе. Граница полуплоскости и берега разреза свободны от напряжений. На бесконечности напряжения стремятся к нулю, но главный вектор и главный момент внешних усилий на бесконечности отличны от нуля и заданы.

Применение преобразования Меллина приводит в данном случае не к одномерному (как это имело место выше), а к однородному двумерному

векторному функциональному уравнению Винера-Хопфа. Матричный коэффициент уравнения представляется в виде $(p+1) \operatorname{ctg} p \Gamma(p)$. Матрица $G(p)$ факторизуется на мнимой оси с помощью результата А.А.Храпкова, полученного им для матриц специального вида. С учетом этой факторизации строится точное аналитическое решение векторного уравнения. Получены формулы для коэффициентов интенсивности напряжений в конце разреза.

Приведем некоторые числовые данные, найденные на основе указанных формул (α - угол между разрезом и границей полуплоскости).

$$K_I = K_{X1} X l^{-1/2} + K_{Y1} Y l^{-1/2} + K_{M1} M l^{-3/2}$$

$$K_{II} = K_{X2} X l^{-1/2} + K_{Y2} Y l^{-1/2} + K_{M2} M l^{-3/2}$$

α°	15	30	45	60	75
K_{X1}	0,949	0,582	0,386	0,239	0,115
$-K_{Y1}$	14,399	5,101	2,835	1,951	1,572
K_{M1}	18,565	8,294	5,648	4,579	4,111
K_{X2}	2,662	1,968	1,691	1,552	1,484
$-K_{Y2}$	11,083	3,730	1,825	0,960	0,425
K_{M2}	11,027	3,694	1,797	0,943	0,417

В § 2.4 и § 2.5 в постановке, аналогичной предыдущей, с помощью того же метода исследуются задачи для объемлющего полуплоскость клина с полубесконечным разрезом на продолжении грани и для плоскости с двумя полубесконечными прямолинейными разрезами, конец одного из которых находится на продолжении другого. Получены формулы для коэффициентов интенсивности напряжений в концах разрезов и в вершине клина.

В частности, в задаче о клине для коэффициентов интенсивности напряжений в конце разреза справедливы предыдущие выражения, некоторые значения коэффициентов в которых таковы (α - угол между

разрезом и гранью):

α°	80	90	100	120	140	150	160
K_{X1}	0,213	0,168	0,130	0,069	0,029	0,015	0,006
$-K_{Y1}$	1,255	1,099	0,992	0,868	0,816	0,805	0,800
K_{M1}	3,745	3,553	3,421	3,275	3,213	3,200	3,194
K_{X2}	1,234	1,166	1,107	1,004	0,920	0,883	0,851
$-K_{Y2}$	0,586	0,426	0,306	0,146	0,055	0,029	0,012
K_{M2}	0,561	0,404	0,286	0,134	0,050	0,025	0,010

Для коэффициентов интенсивности напряжений в вершине клина имеем

$$C_j = C_{Xj} X l^{-2j-1} + C_{Yj} Y l^{-2j-1} + C_{Mj} M l^{-2j-2}$$

α°	80	90	100	120	140	150	160
C_{X1}	0,606	0,593	0,564	0,480	0,357	0,281	0,195
C_{Y1}	1,695	1,798	1,901	2,088	2,244	2,306	2,353
$-C_{M1}$	2,159	2,319	2,475	2,758	2,983	3,070	3,134
C_{X2}	6,444	1,683	1,182	0,912	0,833	0,816	0,807
$-C_{Y2}$	19,482	3,699	1,973	0,917	0,490	0,345	0,219
C_{M2}	27,166	5,226	2,810	1,313	0,693	0,482	0,302

Численным методом рассматриваемая задача была решена Р.Вестманном.

В случае двух разрезом укажем несколько значений коэффициентов K_{Xj}, K_{Yj}, K_{Mj} в выражениях для K_I, K_{II} , соответствующих тому разрезу, на продолжении которого находится вершина другого (α - угол между разрезами).

α°	15	30	45	90	120	135	165
K_{X1}	0,986	0,642	0,463	0,163	0,055	0,024	0,001
$-K_{Y1}$	14,368	5,045	2,733	1,060	0,847	0,813	0,798
K_{M1}	18,540	8,242	5,561	3,524	3,253	3,214	3,192
K_{X2}	2,609	1,878	1,559	1,125	0,957	0,891	0,809

$-K_{\text{y2}}$	II, II6	3,783	1,923	0,411	0,120	0,051	0,002
$K_{\text{п2}}$	II, 063	3,740	1,892	0,400	0,117	0,051	0,003

В § 2.6 рассматривается объемлющий полуплоскость клин с разрезом на продолжении грани, исходящим из вершины. Грани клина и берега разреза свободны от напряжений. На бесконечности напряжения стремятся к нулю таким образом, что главные члены их разложений в ряды представляют собой решения канонической сингулярной задачи для клина со свободными от напряжений гранями, отвечающие корням λ_1, λ_2 ее характеристического уравнения. Строится точное аналитическое решение неоднородного двумерного векторного функционального уравнения Винера-Холфа задачи. Выводятся формулы для коэффициентов интенсивности напряжений в конце разреза.

Ниже представлены некоторые числовые данные, полученные в результате расчетов по этим формулам (α - угол между разрезом и гранью).

$$K_I = K_{\text{сн1}} C_1 l^{\lambda_1 + 1/2} + K_{\text{сн2}} C_2 l^{\lambda_2 + 1/2}$$

$$K_{II} = K_{\text{сн12}} C_1 l^{\lambda_1 + 1/2} + K_{\text{сн22}} C_2 l^{\lambda_2 + 1/2}$$

α°	80	90	100	120	140	150	160
$K_{\text{сн1}}$	1,089	1,068	1,059	1,035	1,016	1,013	1,011
$-K_{\text{сн2}}$	0,105	0,430	0,618	0,686	0,531	0,407	0,272
$K_{\text{сн12}}$	0,499	0,434	0,375	0,269	0,174	0,130	0,087
$K_{\text{сн22}}$	0,021	0,147	0,311	0,632	0,874	0,949	0,991

В отсутствие внешнего поля и при условии, что к берегам разреза приложены заданные нагрузки данная задача решена А.А.Храпковым.

В § 2.7 в условиях симметричной задачи рассматривается кусочно-однородная плоскость с границей раздела сред в форме сторон

угла, содержащая исходящий из вершины разрез конечной длины. Берега разреза свободны от напряжений. На бесконечности напряжения стремятся к нулю таким образом, что реализуется асимптотика, представляющая собой решение симметричной канонической сингулярной задачи для аналогичной кусочно-однородной плоскости без разреза, отвечающее единственному на интервале]-1; 0[корню λ ее характеристического уравнения

$$\mathcal{D}(\lambda-1)=0, \quad \mathcal{D}(z)=\Delta_3 \Delta_6 e^2 + (\Delta_1 - \Delta_4 \Delta_5 - \Delta_3 \Delta_6) e + \Delta_4 \Delta_5$$

$$\Delta_1 = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2) \sin^2 z\pi, \quad \Delta_3 = \sin 2z\alpha + z \sin 2\alpha, \quad \Delta_4 = \sin 2z(\pi-\alpha) - z \sin 2\alpha$$

$$\Delta_5 = \alpha_1 \sin 2z\alpha - z \sin 2\alpha, \quad \Delta_6 = \alpha_2 \sin 2z(\pi-\alpha) + z \sin 2\alpha$$

$$\alpha_j = 3-4\gamma_j, \quad e = \frac{1+\gamma_2}{1+\gamma_1} e_0, \quad e_0 = \frac{E_1}{E_2}$$

(E_j - модуль Юнга; γ_j - коэффициент Пуассона; разрез расположен в области I с углом раствора 2α).

Некоторые значения величины $-\lambda$ при $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,333$ приведены ниже.

e/ρ°	10	20	30	50	60	70	80
0,1	0,153	0,246	0,304	0,336	0,309	0,249	0,149
0,5	0,022	0,045	0,071	0,118	0,123	0,105	0,063
3	0,142	0,180	0,172	0,107	0,074	0,046	0,023
5	0,217	0,247	0,226	0,139	0,097	0,061	0,030
e/ρ°	100	110	120	140	150	160	170
0,1	0,036	0,074	0,117	0,223	0,274	0,312	0,306
0,5	0,015	0,031	0,051	0,098	0,116	0,117	0,083
3	0,093	0,155	0,185	0,163	0,126	0,084	0,043
5	0,123	0,204	0,249	0,244	0,204	0,147	0,080

Выводится уравнение Винера-Хопфа задачи и строится его точное аналитическое решение. Получена формула для коэффициента интенсивности напряжений в конце разреза, находящемся внутри области I.

Вблизи конца разреза, находящегося на границе раздела сред, реализуется асимптотика, представляющая собой удовлетворяющее условию непрерывности смещений асимптотически наибольшее решение симметричной канонической сингулярной задачи для рассматриваемой кусочно-однородной плоскости с исходящим из угловой точки полубесконечным разрезом в области I, берега которого свободны от напряжений. Это решение соответствует наименьшему на интервале $]-1; 0[$ корню λ_0 ее характеристического уравнения

$$\mathcal{D}_0(-\lambda_0 - 1) = 0, \quad \mathcal{D}_0(z) = \Delta_6 \Delta_7 e^2 + (\Delta_2 - \Delta_6 \Delta_7 - \Delta_4 \Delta_9) e + \Delta_4 \Delta_8$$

$$\Delta_2 = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \sin 2\pi, \quad \Delta_7 = -4(\sin^2 z\alpha - z^2 \sin^2 \alpha)$$

$$\Delta_8 = (1 + \alpha_1)^2 - 4(\alpha_1 \sin^2 z\alpha + z^2 \sin^2 \alpha)$$

$$\Delta_9 = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) - 4(\alpha_1 \sin^2 z\alpha + z^2 \sin^2 \alpha)$$

Некоторые значения величины $-\lambda_0$ при $\nu_1 = \nu_2 = 0,333$ приведены ниже.

e_0/α_0	10	20	30	50	60	70	80
0,1	0,500	0,497	0,490	0,448	0,408	0,361	0,335
0,5	0,500	0,499	0,495	0,477	0,464	0,451	0,441
3	0,501	0,506	0,516	0,548	0,568	0,588	0,606
5	0,502	0,510	0,526	0,575	0,605	0,635	0,660

e_0/α_0	100	110	120	140	150	160	170
0,1	0,371	0,393	0,409	0,429	0,431	0,432	0,458
0,5	0,439	0,444	0,451	0,467	0,475	0,483	0,492
3	0,629	0,631	0,625	0,592	0,569	0,546	0,523
5	0,691	0,695	0,689	0,648	0,617	0,580	0,542

В случае $\alpha = \pi/2$ каноническая сингулярная задача рассматривалась А. Заком и М. Вильямсом.

Выводится формула для коэффициента интенсивности напряжений в конце разреза, находящемся на границе раздела сред (неопределенной постоянной, с точностью до которой определено решение данной канонической сингулярной задачи).

Если внешнее поле отсутствует, а к берегам разреза приложена постоянная нормальная нагрузка σ , то коэффициент интенсивности напряжений в конце разреза, находящемся внутри области I, равен

$$Q\sigma\sqrt{\pi l/2}, \text{ где некоторые значения } Q \text{ при } \gamma_1 = \gamma_2 = 0,333$$

таковы:

α/α°	30	60	90	120	150
0,01	0,523	0,739	0,876	0,950	0,982
0,1	0,605	0,778	0,893	0,957	0,985
0,5	0,826	0,899	0,950	0,979	0,993
10	2,034	1,521	1,256	1,124	1,055

В случае $\sigma l = \pi/2$ рассматриваемая задача исследовалась в работах А.А.Храпкова, М.Тукера.

Третья глава посвящена применению решений задач класса N к исследованию в условиях плоской деформации вопроса о начальном развитии линий скольжения из различного типа угловых точек однородных и кусочно-однородных областей.

В § 3.1 дается постановка задачи класса N в общем случае.

Разрушение материалов происходит после развития в них вблизи концентраторов областей пластичности. Определение конфигурации и размеров локальных пластических зон позволяет более полно описать напряженно-деформированное состояние материала в окрестности остроконечных концентраторов, предшествующее непосредственно разрушению, и является одной из центральных проблем механики разрушения.

В условиях плоской деформации рассматривается однородная или кусочно-однородная изотропная идеально упругопластическая область,

граница которой содержит угловые точки, разделяющие ее на участки. На этих участках заданы произвольные граничные условия, однородные в окрестностях угловых точек. Границы раздела различных сред также содержат угловые точки. Рассмотрим те угловые точки, которые являются концентраторами напряжений. Последнее означает, что при стремлении точки области к каждой из таких угловых точек напряжения в плоской статической задаче теории упругости с указанными граничными условиями стремятся к бесконечности. Так, например, граничная угловая точка будет концентратором, если угол между граничными кривыми в данной точке больше π (клиновидный вырез), а граница в ее окрестности свободна от напряжений или жестко закреплена. Концентратором является угловая точка границы раздела двух различных сред. Можно указать и другие типы угловых точек, являющихся концентраторами.

Уже при сколь угодно малых внешних нагрузках вблизи угловой точки возникает пластическая зона. Будем изучать лишь начальную стадию ее развития, считая внешние нагрузки достаточно малыми. Тогда размер пластической зоны будет мал по сравнению с размерами области.

Как известно, в начальной стадии своего развития пластические деформации локализованы в тонких слоях материала — полосах пластичности, называемых также линиями скольжения. Классическими в этом плане являются эксперименты Д. Дагдейла на тонких пластинах из малоуглеродистой стали, в результате которых были обнаружены и рассчитаны такие полосы пластичности на продолжении трещины. Существенное развитие эти взгляды получили в исследованиях М.Я. Леонова, П.М. Витвицкого, С.Я. Яремы, обнаруживших две боковые линии скольжения, исходящие из конца концентратора и наклоненные под некоторым углом к его оси. В дальнейшем в литературе по механике разрушения было опубликовано большое число работ, посвященных задачам о

начальном развитии пластических деформаций, решаемым в предположении о том, что последние сконцентрированы вдоль прямых линий скольжения.

В настоящей главе пластическая зона вблизи угловой точки также моделируется прямой линией скольжения, исходящей из вершины. Ставится задача определения длины линии скольжения и направления ее развития.

Поскольку длина линии скольжения мала по сравнению с размерами области и исследуется напряженное состояние вблизи угловой точки, приходим к плоской статической задаче теории упругости класса N для клиновидной области с однородными краевыми условиями на границах, содержащей прямую линию скольжения, исходящую из вершины. На бесконечности главные члены разложений напряжений в ряды представляют собой решения канонической сингулярной задачи для аналогичной клиновидной области, отвечающие корням ее характеристического уравнения, лежащим в полосе $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$. Эти решения определяются с точностью до некоторых произвольных постоянных, которые характеризуют интенсивность внешнего поля и в предлагаемой постановке задачи считаются заданными. Они находятся из решения внешней задачи плоской статической задачи теории упругости для исходной области без линий скольжения.

На линии скольжения допускается разрыв лишь касательного смещения, а касательное напряжение равно $\pm \tau_s$, где τ_s - предел текучести на сдвиг. Знак перед τ_s устанавливается в процессе решения каждой конкретной задачи. Вблизи конца линии скольжения реализуется асимптотика, представляющая собой решение соответствующей канонической сингулярной задачи, отвечающее корню $\lambda = -1/2$ ее характеристического уравнения. Это решение определено с точностью до произвольной постоянной K_{II} - коэффициента интенсивности напряжений в конце линии скольжения. Такая концентрация напряжений

в конце линии скольжения может быть обусловлена скоплением дислокаций в виде облака Коттрелла. Критическое значение K_{IIc} коэффициента K_{II} (вязкость скольжения) определяет сопротивление материала развитию в нем линий скольжения. Величина K_{IIc} считается заданной постоянной материала.

Требуется определить длину l линии скольжения и угол β ее наклона к грани клиновидной области.

Будем предполагать, что сопротивление материала развитию в нем линий скольжения пренебрежимо мало и считать, что $K_{IIc} = 0$. Тогда после того, как решение сформулированной задачи класса N будет построено, длина линии скольжения будет определяться из условия равенства нулю коэффициента K_{II} . Она представляет собой функцию угла β , являющегося свободным параметром задачи.

Следовательно, поставленная задача будет решена, если из всех допустимых значений β будет выбрано то, которое определяет истинное направление развития линии скольжения.

В § 3.2 предлагается подход к решению вопроса о направлениях начального развития линий скольжения из угловых точек. Данный подход основан на принципе выбора Г.П.Черспанова. Согласно этому принципу, среди всех возможных направлений развития линии скольжения реализуется то, которое соответствует наибольшему значению скорости диссипации энергии.

Поскольку на линии скольжения $\theta = 0$, $r < l$ в поставленной в § 3.1 задаче класса N выполняется условие $\tau_{r\theta} = \tau_1 = \pm \tau_s$, в силу принципа выбора из всех допустимых значений β в качестве искомого угла наклона линии скольжения к грани клиновидной области должно быть выбрано то, которое доставляет наибольшее значение функции

$$V(\beta) = (\tau_1 \int_0^l \langle u_r \rangle_{\theta=0} dr)$$

($\langle a \rangle$) - скачок a ; точка означает дифференцирование по времени).

В последующих параграфах настоящей главы в предложенной постановке строятся точные аналитические решения ряда конкретных задач класса N , в которых направление начального развития линии скольжения из угловой точки устанавливается с помощью принципа выбора.

В § 3.3 рассматриваются симметричные задачи в случае двух линий скольжения в объемлющем полуплоскость клине. Исследуются ситуации, когда на гранях заданы краевые условия следующих типов; а) грани жестко защемяны; б) грани свободны от напряжений; в) касательное напряжение и нормальное смещение на гранях равны нулю. На бесконечности в каждой задаче реализуется асимптотика, представляющая собой решение соответствующей симметричной канонической сингулярной задачи для клина, отвечающее являющемуся действительным единственному в полосе $-1 < \text{Re} \lambda < 0$ корню λ ее характеристического уравнения. Указанное решение определяется с точностью до одной произвольной постоянной C , которая считается заданной.

В задаче а) характеристическое уравнение имеет вид (2α - угол раствора клина)

$$2 \sin 2(\lambda+1)\alpha - (\lambda+1) \sin 2\alpha = 0$$

а некоторые значения λ приведены ниже ($\gamma = 0,250$).

α°	100	105	110	120	125	130	170
$-\lambda$	0,054	0,080	0,106	0,162	0,191	0,221	0,455

Выводится уравнение Винера-Хопфа задачи и строится его точное аналитическое решение. Получена формула для коэффициента интенсивности напряжений в конце линии скольжения. С помощью условия $K_{II} = 0$ определена длина линии скольжения

$$l = \mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma) \left(\frac{|C|}{\tau_s} \right)^{-1/2}$$

(функция \mathcal{F} приводится в работе).

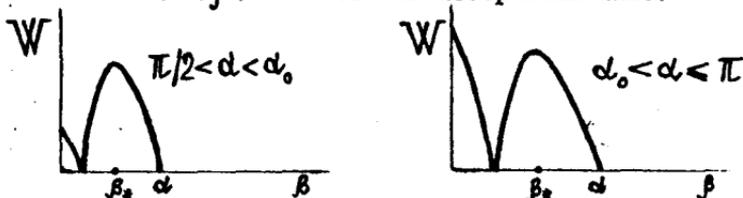
Для определения угла наклона линии скольжения к грани клина применяется принцип выбора. С этой целью с использованием построенного решения функционального уравнения выводится следующая формула для функции $V(\beta)$, о которой говорилось в § 3.2 (функции $Q > 0$ и $W \geq 0$ приводятся в работе):

$$V(\beta) = Q(\alpha, \gamma) W(\alpha, \beta, \gamma) \frac{|C|^{-2n-1}}{E \tau_s^{-2/2-2}} \dot{C} \operatorname{sign} C$$

(в дальнейшем в настоящей главе предполагается, что постоянная C представляет собой положительную возрастающую или отрицательную убывающую функцию времени).

Поскольку в этом выражении зависящим от β является лишь сомножитель W , то в соответствии с принципом выбора в качестве угла наклона линии скольжения к грани следует взять то значение β , которое доставляет наибольшее значение функции $W(\beta)$.

Зависимость $W(\beta)$ качественно изображена ниже.



Функция $W(\beta)$ имеет максимум в точке β_* , причем оказывается, что $W(\beta_*) > W(0)$ при $\pi/2 < \alpha < \alpha_0$ и $W(\beta_*) < W(0)$ при $\alpha_0 < \alpha < \pi$ ($\alpha_0 \approx 132^\circ$ при $\gamma = 0,250$).

В силу принципа выбора для рассматриваемой задачи можно сделать следующие выводы.

При $\pi/2 < \alpha < \alpha_0$ линии скольжения составляют с гранями угол $\beta = \beta_*$, увеличивающийся с ростом угла раствора клина. Ниже представлены значения угла β_* при некоторых значениях угла α ($\gamma = 0,250$).

α°	100	105	110	115	120	125	130
β_*	50	55	59	64	68	73	77

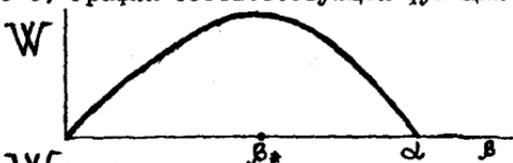
При $\alpha_0 < \alpha \leq \pi$ линии скольжения расположены вдоль граней. В случае $\alpha = \pi$ (симметричная задача о линиях скольжения в вершине тонкого жесткого включения) этот результат совпадает с результатом Л.Т.Бережницкого и Н.М.Кундрата, определявших направление развития линии скольжения из условия максимума ее длины.

Если реализуется случай $\alpha = \alpha_0$, то из вершины исходят четыре линии скольжения, две из которых расположены вдоль граней, а две - под углом к ним.

Если угол наклона линии скольжения к грани находить из условия максимума длины линии скольжения, то при $\pi/2 < \alpha < \tilde{\alpha}_0$ ($\tilde{\alpha}_0 \approx 129^\circ$) его значения будут отличаться от соответствующих значений, установленных с помощью принципа выбора, менее, чем на 3° . Область значений α , при которых линии скольжения расположены вдоль граней, оказывается следующей: $\tilde{\alpha}_0 < \alpha \leq \pi$.

Если для определения направления развития линии скольжения использовать условие максимума $|\tau_{n\theta}|$ в решении симметричной канонической сингулярной задачи для клина с жестко заземленными гранями, отвечающем корню λ , то при $\pi/2 < \alpha < \tilde{\alpha}_0$ ($\tilde{\alpha}_0 \approx 143^\circ$) значения угла наклона линии скольжения к грани будут отличаться от значений, найденных на основе принципа выбора, менее, чем на 6° . Область значений α , при которых линии скольжения расположены вдоль граней, будет такой: $\tilde{\alpha}_0 < \alpha \leq \pi$.

В задаче б) график соответствующей функции $W(\beta)$ имеет вид



Функция $W(\beta)$ достигает своего наибольшего значения в точке β_* . В силу принципа выбора линии скольжения образуют с гранями угол $\beta = \beta_*$, увеличивающийся с ростом угла раствора клина. Значения этого угла таковы:

α°	95	115	135	145	155	165	175
β_*	47	58	70	77	83	92	101

Случай $\alpha = \pi$ (симметричная задача о линиях скольжения в конце трещины) исследовался Г.П.Черепановым. Угол наклона линии скольжения к продолжению трещины, определяемый из условия максимума длины линии скольжения, равняется 72° . Ее длина равна $0,0583 K_I^2 / \tau_s^2$ (K_I - коэффициент интенсивности напряжений). Если же направление развития линии скольжения устанавливать на основе принципа выбора, то указанный угол оказывается равным 76° , а ее длина будет равной $0,0579 K_I^2 / \tau_s^2$.

При остальных α значения угла наклона линии скольжения к грани, найденные по принципу выбора и из условия максимума длины линии скольжения, отличаются менее, чем на 6° .

В.Д.Кулиевым и Г.П.Черепановым показано, что линии скольжения, развивающиеся от свободной прямолинейной границы тела ($\alpha = \pi/2$), наклонены к ней под углом, равным 45° .

Задачи, подобные б), рассматривались в работах В.К.Вострова, В.Д.Кулиева.

В задаче в) корень λ характеристического уравнения канонической сингулярной задачи равен $\pi/\alpha - 2$. График соответствующей функции $W(\beta)$ имеет такой же вид, как в случае б). Некоторые значения угла β_* наклона линий скольжения к граням указаны ниже.

α°	95	115	135	145	155	165	175
β_*	48	58	68	73	78	83	88

В § 3.4 рассматривается линия скольжения в прямоугольном клине, одна из граней которого свободна от напряжений, а вторая жестко закреплена.

Характеристические уравнения канонических сингулярных задач, соответствующих задачам о линиях скольжения, рассмотренным выше,

имеют в полосе $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$ корень лишь при условии, что угол раствора клина больше π . В случае условий на гранях, формулируемых в данном параграфе, уже начиная с некоторого острого угла раствора клина характеристическое уравнение имеет в указанной полосе корень и задача о линии скольжения, исходящей из вершины клина, принадлежит классу N . В частности, рассматриваемому здесь клину с углом раствора, равным $\pi/2$, отвечает характеристическое уравнение

$$2\alpha \cos \pi \lambda + 4(\lambda + 1)^2 - \alpha^2 - 1 = 0$$

имеющее в полосе $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$ единственный корень λ .

С использованием получаемого решения уравнения Винера-Хопфа задачи выводится формула для соответствующей функции $W(\beta)$ (β - угол наклона линии скольжения к свободной от напряжений грани). Единственным ее экстремумом на промежутке $0 \leq \beta \leq \pi/2$ является максимум при $\beta = 53^\circ$ ($\gamma = 0,333$).

В силу принципа выбора линия скольжения развивается под углом 53° к свободной от напряжений грани прямоугольного клина. Ее длина выражается формулой $l = 8,388 (|C|/\tau_s)^{3,226}$.

Если направление развития линии скольжения находить из условия максимума ее длины, то угол наклона будет равен 54° , а $l = 8,399 (|C|/\tau_s)^{3,226}$.

В § 3.5 рассматривается симметричная задача о двух линиях скольжения, исходящих из угловой точки кусочно-однородной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла.

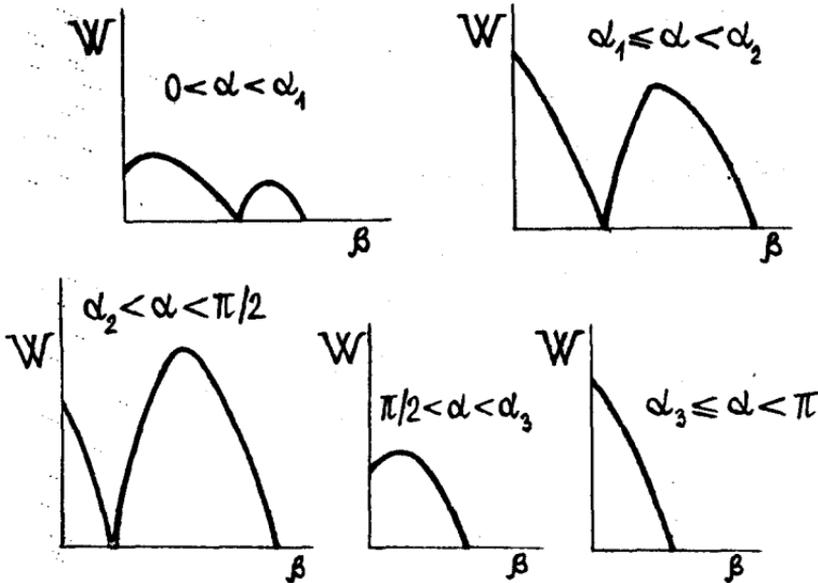
Выводится уравнение Винера-Хопфа задачи. С помощью его решения и принципа выбора получены следующие результаты.

Будем считать, что $e_0 = E_1/E_2 > 1$; $\gamma_1 = 0,333$; $\gamma_2 = 0,250$.

Линии скольжения развиваются в области 2.

График соответствующей функции $W(\beta)$ ($\beta \in [0; \pi - \alpha]$ - угол между линией скольжения и границей; 2α - угол раствора клина I ;

$\alpha_n = \alpha_n(\theta_0)$, $n=1,2,3$) имеет вид



Пусть θ_0 фиксировано. При $0 < \alpha < \alpha_1$ линии скольжения развиваются под углом к границе раздела сред, уменьшающемся с увеличением α . При $\alpha_1 \leq \alpha < \alpha_2$ они развиваются вдоль границы раздела сред. Если реализуется случай $\alpha = \alpha_2$, то из угловой точки исходят четыре линии скольжения, две из которых расположены на границе раздела сред, а две - под углом к ней. При $\alpha_2 < \alpha < \pi/2$ и $\pi/2 < \alpha < \alpha_3$ линии скольжения снова составляют с границей раздела сред уменьшающийся с увеличением α угол, а при $\alpha_3 \leq \alpha < \pi$ развиваются вдоль нее.

Пусть θ_0 возрастает. Область $]0; \alpha_1[$ значений α , при которых имеет место начальное отклонение линий скольжения от границы раздела сред, уменьшается. При фиксированном α уменьшается угол начального отклонения линий скольжения от границы раздела сред. Уменьшается то значение α , начиная с которого линии скольжения не отклоняются от границы раздела сред.

Ниже приведены значения в градусах угла наклона линий скольже-

ния к границе раздела сред при некоторых значениях α и ϵ_0 .
 ($\gamma_1=0,333$, $\gamma_2=0,250$).

$\alpha^\circ / \epsilon_0$	1,5	2	5	10	100
5	38	37	29	20	1
10	32	29	18	10	0
15	26	22	11	3	0
20	20	16	5	0	0
25	14	11	0	0	0
30	9	6	0	0	0
35	4	1	0	0	0
40	0	0	0	0	88
45	88	88	86	85	84
50	84	83	81	81	80
55	79	78	77	76	76
60	74	73	72	72	71
65	69	69	68	67	67
70	64	64	63	63	63
75	59	59	59	58	58
80	55	55	54	54	54
85	50	50	50	49	49
95	40	39	38	38	38
100	34	34	32	31	30
105	29	28	26	25	23
110	23	22	20	18	17
115	18	17	14	12	10
120	13	12	8	6	3
125	8	7	3	0	0
130	3	2	0	0	0

При $\alpha \geq 135^\circ$ и ϵ_0 , указанных в таблице, линии скольжения расположены на границе раздела сред.

В § 3.6 рассматривается вопрос о ветвлении линии скольжения.

Пусть из вершины K остроугольного концентратора с непрерывным во времени ростом внешней нагрузки развивается гладкая линия скольжения KO . Предположим, что в конце O за счет скачкообразного изменения внешней нагрузки в некоторый момент времени произошло ветвление линии скольжения. Последнее необходимо понимать так: от точки O начали развиваться одна или одновременно несколько вторичных гладких линий скольжения, составляющих с линией KO различные углы.

Требуется установить число указанных вторичных линий скольжения, одновременно исходящих из точки O , и направления их начального развития.

Поскольку рассматривается лишь начальное развитие вторичных линий скольжения, сформулированная задача сводится к задаче класса N о плоскости, содержащей полубесконечную прямую линию скольжения с прямолинейными отростками в вершине, также являющимися линиями скольжения.

Число отростков и углы, которые они образуют с продолжением полубесконечной линии скольжения, подлежат определению.

С этой целью строится решение данной задачи класса N в случае отростка, образующего угол α с продолжением линии скольжения. На бесконечности суммы первых и вторых членов разложений напряжений в ряды представляют собой решение задачи о плоскости с полубесконечной прямой линией скольжения, в которое входят произвольные постоянные K_{II} (коэффициент интенсивности напряжений) и C_0 (имеющая размерность напряжения). Указанные постоянные характеризуют интенсивность внешнего поля и считаются заданными.

Результаты исследования построенного решения задачи класса N с привлечением принципа выбора позволяют сделать следующие выводы

$$(C_* = C_0 / \kappa_s; \alpha_c = \arctg C_*; \quad K_{II} - \text{положительная возраста-$$

ющая или отрицательная убывающая функция времени; C_* не зависит от времени).

Пусть $K_{II} > 0$. Если $0 < |C_*| < 2\sqrt{2}$, то точка O - есть точка ветвления. От нее начнут развиваться две линии скольжения: одна - в направлении $\alpha = \alpha_c$, а вторая - представляя собой гладкое продолжение линии KO . Если $C_* = 0$ или $|C_*| \geq 2\sqrt{2}$, то от точки O начнет развиваться одна линия скольжения, являясь гладким продолжением KO .

Пусть $K_{II} < 0$. В этом случае точка O оказывается точкой ветвления при любых C_* . Если $0 < |C_*| \leq 2\sqrt{2}$, то от нее начнут развиваться две линии скольжения: одна - в направлении $\alpha = \alpha_c - \pi \operatorname{sign} C_*$, а вторая - вдоль линии скольжения KO , примыкая к последней сверху при $C_* > 0$ и снизу при $C_* < 0$. Если $C_* = 0$, то от точки O вдоль линии KO начнут развиваться две линии скольжения, примыкая к ней с обеих сторон. Если $|C_*| > 2\sqrt{2}$, то от точки O начнут развиваться три линии скольжения. Первая - в направлении $\alpha = \alpha_c$, вторая - представляя собой гладкое продолжение первой, а третья - вдоль линии KO , примыкая в ней сверху (снизу) при $C_* > 0$ ($C_* < 0$).

В аналогичной постановке построено решение кососимметричной задачи о двух отрезках. Его анализ показывает, что в случае $K_{II} < 0$ оба отрезка развиваются вдоль линии скольжения, примыкая к ней с двух сторон. Если же $K_{II} > 0$, то существует один отрезок, являющийся гладким продолжением линии скольжения.

В § 3.7 рассматривается задача класса N для кусочно-однородной плоскости, составленной из двух однородных полуплоскостей, содержащей на границе раздела сред полубесконечный разрез и линию скольжения, исходящую из вершины. Берега разреза свободны от напряжений, а взаимодействие берегов линии скольжения описывается законом сухого кулонова трения со сцеплением. На бесконечности глав-

ные члены разложений напряжений в ряды представляют собой решение канонической сингулярной задачи для аналогичной области без линии скольжения, отвечающее корням $-\frac{1}{2} \pm i/(2\lambda) \ln[(\alpha_1 + e)/(1 + e\alpha_2)]$ ее характеристического уравнения. Это решение определяется с точностью до двух произвольных действительных постоянных, которые считаются заданными.

Выводится уравнение Винера-Хопфа задачи. Его коэффициент $G_0(p)$ представляется в виде

$$G_0(p) = \frac{(1 + \alpha_1) \sqrt{e_*^2 + e_{**}^2}}{2(\alpha_1 + e)(1 + e\alpha_2)} S(p) G(p), \quad S(p) = \frac{\sin p\pi}{\sin(p + \lambda)\pi}$$

$$e_* = \alpha_1 + e + e\alpha_2 + 1, \quad e_{**} = K(\alpha_1 + e - e\alpha_2 - 1)$$

Здесь K - коэффициент трения; $\lambda = 1/\pi \arccos(e_{**}/\sqrt{e_*^2 + e_{**}^2}) - 1$ - степень сингулярности решения вблизи конца линии скольжения.

Функция $G(it)$ ($-\infty < t < \infty$) представляет собой действительную положительную четную функцию t , стремящуюся к единице при $t \rightarrow \infty$, что позволяет факторизовать $G(p)$ на мнимой оси по формуле Гахова.

Для функции $S(p)$ справедлива факторизация ($\Gamma(z)$ - гамма-функция)

$$\frac{\sin p\pi}{\sin(p + \lambda)\pi} = -\frac{p}{p + \lambda + 1} Q^+(p) Q^-(p), \quad Q^+(p) = \frac{\Gamma(-\lambda - p)}{\Gamma(1 - p)}, \quad Q^-(p) = \frac{\Gamma(2 + \lambda + p)}{\Gamma(1 + p)}$$

($Q^+(p)$ аналитична и не имеет нулей в полуплоскости $\text{Re } p < -\lambda$, а $Q^-(p)$ - в полуплоскости $\text{Re } p > -1$).

С использованием этих факторизаций строится решение функционального уравнения. Получена формула для коэффициента интенсивности напряжений в конце линии скольжения. Вблизи вершины разреза степень сингулярности решения равна $-\lambda - 1$.

В § 3.8 рассматривается задача, моделирующая один из основных механизмов зарождения трещин - механизм Билби-Коттрелла. Согласно этому механизму трещина образуется при столкновении линий скольжения.

Предполагается, что две линии скольжения сталкиваются в некоторой точке. Вследствие концентрации напряжений в данной точке возможно образование исходящей из нее трещины. Считая длину трещины малой по сравнению с длинами линий скольжения и размерами тела и ограничиваясь симметричным случаем, приходим к симметричной задаче класса N для плоскости, из некоторой точки которой исходят две полубесконечные прямые линии скольжения и разрез конечной длины со свободными от напряжений берегами. На бесконечности реализуется асимптотика, представляющая собой решение аналогичной задачи без разреза. Произвольная постоянная C , с точностью до которой определено последнее, считается заданной. Она характеризует интенсивность внешнего поля.

В результате решения уравнения Винера-Хопфа задачи выводится следующая формула для коэффициента интенсивности напряжений в конце разреза ($\alpha \in]0; \pi/2[$ - угол между разрезом и линией скольжения):

$$K_I = \gamma(\alpha) (C + \tau_s / \sin 2\alpha) \sqrt{l}$$

α°	20	30	40	50	60	70	80
γ	1,725	1,831	1,908	1,958	1,976	1,963	1,923

В четвертой главе строятся точные аналитические решения некоторых плоских статических контактных задач теории упругости класса N для клина.

В § 4.1 рассматривается задача о вдавливании жесткого штампа в грань $\theta = 0$ объемлющего полуплоскость клина $0 \leq r < \infty$, $-\alpha \leq \theta \leq 0$. Вершина клина принадлежит линии контакта. Трение между штампом и поверхностью клина отсутствует. Вне линии контакта поверхность клина свободна от напряжений. На бесконечности напряжения стремятся к нулю таким образом, что главные члены их разложений в ряды представляют собой решения канонической сингулярной задачи

для клина со свободными от напряжений гранями, отвечающие корням $\lambda_j \in]-1/2; 0[$ ($j=1,2$) ее характеристического уравнения

$$\sin^2(\lambda+1)\alpha - (\lambda+1)^2 \sin^2 \alpha = 0$$

. Произвольные постоянные C_j , входящие в указанные решения, считаются заданными. Эти постоянные характеризуют интенсивность внешнего поля.

В отсутствие внешнего поля для линии контакта $\theta=0, a \leq r \leq b$ данная контактная задача, а также соответствующие задачи с иными условиями на грани $\theta = -\alpha$, исследовались в работах В.М.Александрова, В.М.Александрова и И.И.Воровича, В.М.Александрова и В.В.Копасенко, В.М.Александрова и Д.А.Пожарского, М.И.Бронштейна, С.А.Лутченко, С.А.Лутченко и Г.Я.Попова, М.Матчинского, В.С.Тонояна и других авторов.

Сформулированная задача сводится к уравнению Винера-Хопфа. На основе его решения получена асимптотическая формула для контактного напряжения вблизи вершины клина. В частности, в случае штампа с горизонтальным основанием, который может перемещаться лишь поступательно в вертикальном направлении

$$\sigma_{\theta} = \sum_{k=1}^n [S_y^{(k)} Y l^{-1} + S_{c_1}^{(k)} C_1 l^{\lambda_1} + S_{c_2}^{(k)} C_2 l^{\lambda_2}] \left(\frac{r}{l}\right)^{\lambda_k} + O(r^{\varepsilon})$$

$(\theta=0, r \rightarrow 0)$

Здесь $n=2$, если $\alpha \in]\pi; 3\pi/2[$; $n=3$, если $\alpha \in]3\pi/2; 2\pi[$; $(0; \pi)$ - заданный главный вектор внешних усилий на линии контакта длины l ;

$\lambda_1^0 \in]-2/3; -1/2[$, $\lambda_2^0 \in]-1/3; 0[$ - совокупность корней уравнения $\sin 2(\lambda+1)\alpha + (\lambda+1)\sin 2\alpha = 0$ в полосе $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$

при $\alpha \in]\pi; 3\pi/2[$, а $\lambda_1^0 \in]-3/4; -2/3[$, $\lambda_2^0 \in]-1/2; -1/3[$, $\lambda_3^0 \in]-1/4; 0[$ - их совокупность при $\alpha \in]3\pi/2; 2\pi[$; $\varepsilon \geq 0$ ($\varepsilon=0$ лишь при $\alpha=3\pi/2$).

Если $\alpha \in]\pi; 2\alpha_N]$ (α_N - единственный корень уравнения $2\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha = 0$ на интервале $]\pi/2; \pi[$ ($2\alpha_N \approx 257^\circ$), то плавающие, соответствующие C_2 , в данной формуле отсутствуют.

Ниже приведены некоторые значения $\lambda_{\kappa}^{\circ}(\alpha)$, $S_{\gamma}^{(\kappa)}(\alpha)$, $S_{c1}^{(\kappa)}(\alpha)$, $S_{c2}^{(\kappa)}(\alpha, \gamma)$ при $\gamma = 0,333$.

α°	190	200	210	220	230	240	250
$-\lambda_1^{\circ}$	0,500	0,503	0,511	0,527	0,551	0,580	0,611
$-\lambda_2^{\circ}$	0,099	0,179	0,240	0,283	0,310	0,324	0,330

α°	260	270	280	290	300	310	320
$-\lambda_1^{\circ}$	0,640	0,666	0,689	0,708	0,723	0,734	0,741
$-\lambda_2^{\circ}$	0,333	0,333	0,333	0,335	0,342	0,355	0,378
$-\lambda_3^{\circ}$			0,068	0,127	0,175	0,211	0,232

α°	190	200	210	220	230	240	250
$S_{\gamma}^{(2)}$	0,318	0,316	0,310	0,294	0,270	0,246	0,224
$S_{\gamma}^{(3)}$	0,0002	0,001	0,005	0,016	0,032	0,048	0,059

α°	260	270	280	290	300	310	320
$S_{\gamma}^{(2)}$	0,208	0,195	0,185	0,177	0,171	0,166	0,162
$S_{\gamma}^{(3)}$	0,063	0,062	0,057	0,048	0,035	0,020	0,008
$S_{\gamma}^{(4)}$			0,014	0,027	0,042	0,058	0,071

α°	190	200	210	220	230	240	250
$S_{c1}^{(2)}$	0,089	0,185	0,284	0,363	0,396	0,385	0,355
$S_{c1}^{(3)}$	0,042	0,159	0,249	0,339	0,390	0,398	0,375

α°	260	270	280	290	300	310	320
$S_{c1}^{(2)}$	0,320	0,291	0,264	0,242	0,226	0,215	0,208
$S_{c1}^{(3)}$	0,350	0,315	0,279	0,237	0,179	0,109	0,049
$S_{c1}^{(4)}$			0,033	0,072	0,125	0,192	0,247

α°	260	270	280	290	300	310	320
K_{c1}	0,218	0,189	0,164	0,142	0,121	0,103	0,084
K_{c2}	0,241	0,285	0,328	0,364	0,371	0,336	0,231
			0,225	0,362	0,431	0,416	0,318

В этом же случае вблизи второго конца линии контакта для контактного напряжения имеет место асимптотика

$$\theta=0, r \rightarrow l-0, \sigma_\theta \sim \frac{K}{\sqrt{2\pi(l-r)}}$$

$$K = K_y y l^{-1/2} + \sum_{j=1}^2 K_{c_j} c_j l^{2j+1/2}, \quad K_y = \left(\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{\alpha^2 - \sin^2 \alpha} \right)^{1/2}$$

Некоторые значения $K_{c1}(\alpha), K_{c2}(\alpha, \gamma)$ приведены ниже ($\gamma = 0,333$).

α°	190	200	210	220	230	240	250
K_{c1}	0,179	0,301	0,389	0,454	0,504	0,543	0,576

α°	260	270	280	290	300	310	320
K_{c1}	0,602	0,626	0,645	0,662	0,676	0,687	0,695
K_{c2}	1,253	1,115	0,974	0,835	0,699	0,566	0,438

В общем случае выведено уравнение для определения длины линии контакта. В отсутствие внешнего поля в случаях штампа с прямолинейным наклонным основанием и параболического штампа, когда это уравнение является соответственно линейным и квадратным, длина линии контакта определена.

В § 4.2 в аналогичной постановке рассматривается задача для штампа с горизонтальным основанием и прямоугольного клина, грань $\theta = -\pi/2$ которого жестко закреплена. На бесконечности напряжения стремятся к нулю таким образом, что реализуется асимптотика, представляющая собой решение канонической сингулярной задачи для клина,

грань $\theta = 0$ которого свободна от напряжений, а грань $\theta = -\pi/2$ жестко заделана, отвечающее корню $\lambda(\gamma) \in]-1; 0[$ ее характеристического уравнения.

В заключении кратко изложены основные результаты и выводы.

Краткие выводы

1. Методом Винера-Хопфа построены точные аналитические решения ряда плоских статических задач теории упругости нового класса (класса N) для однородных и кусочно-однородных клиновидных областей с разрезами. Особенность рассмотренных задач состоит в том, что для них не выполняется классический принцип Сен-Венана и не имеет места классическая теорема единственности. В их решения входят некоторые произвольные постоянные. Корректная постановка задач включает в себя задание этих постоянных. Они характеризуют интенсивность внешнего поля и должны определяться из решений внешних задач.

2. Выведены удобные для практического использования формулы для коэффициентов интенсивности напряжений в концах разрезов и в угловых точках клиновидных областей.

3. На основе полученных в данной работе решений соответствующих задач класса N с помощью принципа выбора в симметричном случае установлены направления начального развития линий скольжения из угловой точки границы области, в окрестности которой граничные условия однородны.

Если грани угла жестко заделаны, а его растров ψ изменяется в диапазоне $]\pi; \varphi_0[$ ($\varphi_0 \approx 264^\circ$), то две развивающиеся из угловой точки линии скольжения наклонены к граням под углом, увеличивающимся с ростом ψ . При $\varphi_0 < \psi \leq 2\pi$ линии скольжения развивают-

ся вдоль граней. Если реализуется случай $\varphi = \varphi_0$, то из угловой точки исходят четыре линии скольжения, две из которых расположены вдоль граней, а две - под углом к ним.

Если грани угла свободны от напряжений или касательное напряжение и нормальное смещение на гранях равны нулю, то линии скольжения образуют с ними угол, увеличивающийся с ростом φ .

4. В результате решения задачи класса N о линии скольжения в вершине прямоугольного клина, одна из граней которого свободна от напряжений, а вторая жестко закреплена, с использованием принципа выбора показано, что линия скольжения составляет со свободной от напряжений гранью угол, равный 53° .

5. С целью определения направлений начального развития линий скольжения из угловой точки границы раздела двух различных сред в симметричном случае, построено решение симметричной задачи класса N о линиях скольжения в угловой точке области, представляющей собой кусочно-однородную плоскость с границей раздела сред в форме сторон угла. Анализ этого решения при $e_0 = E_1/E_2 > 1$; $\gamma_1 = 0,333$; $\gamma_2 = 0,250$ с привлечением принципа выбора показал, что линии скольжения расположены в области 2.

При фиксированном e_0 и $0 < \varphi < \varphi_1$ ($\varphi_n = \varphi_n(e_0)$, $n = 1, 2, 3$ - некоторые значения раствора φ угла 1) линии скольжения развиваются под углом к границе раздела сред, уменьшающимся с увеличением φ . При $\varphi_1 \leq \varphi < \varphi_2$ они развиваются вдоль границы раздела сред. Если реализуется случай $\varphi = \varphi_2$, то из угловой точки исходят четыре линии скольжения, две из которых расположены на границе раздела сред, а две - под углом к ней. При $\varphi_2 < \varphi < \pi$ и $\pi < \varphi < \varphi_3$ линии скольжения снова составляют с границей раздела сред уменьшающийся с увеличением φ угол, а при $\varphi_3 \leq \varphi < 2\pi$ - развиваются вдоль нее.

С возрастанием ϵ_0 область $]0; \psi_1[$ значений ψ , при которых имеет место начальное отклонение линий скольжения от границы раздела сред, уменьшается. При фиксированном ψ уменьшается угол начального отклонения линий скольжения от границы раздела сред. Уменьшается то значение ψ , начиная с которого линии скольжения не отклоняются от границы раздела сред.

6. Для установления числа и направлений начального развития вторичных линий скольжения от точки ветвления линии скольжения, развивающейся из вершины остrokонечного концентратора, решена задача класса N о плоскости, содержащей полубесконечную прямую линию скольжения с прямолинейным отростком, исходящим из вершины и также являющимся линией скольжения.

Применение к полученному решению принципа выбора позволило, в частности, сделать вывод о том, что в зависимости от областей, в которых лежат характеризующие интенсивность внешнего поля постоянные, число вторичных линий скольжения, одновременно исходящих из точки ветвления, равно двум или трем. При этом, в первом случае один из отростков составляет с линией скольжения угол, а другой - либо представляет собой гладкое ее продолжение, либо развивается вдоль линии скольжения, примыкая к ней сверху или снизу. Существуют значения постоянных, характеризующих интенсивность внешнего поля, при которых оба отростка развиваются вдоль линии скольжения, примыкая к ней с двух сторон. Во втором случае один из отростков развивается вдоль линии скольжения, примыкая к ней сверху или снизу, а два других составляют с линией скольжения углы, являясь гладким продолжением друг друга. Возможны случаи, когда ветвление линии скольжения не имеет места.

7. Решена симметричная задача класса N для плоскости, из некоторой точки которой исходят две полубесконечные прямые линии

скольжения и разрез конечной длины со свободными от напряжений берегами, моделирующая один из основных механизмов зарождения трещин - механизм Билби-Коттрелла.

8. Построены решения некоторых контактных задач класса N для клина. В частности, с учетом внешнего поля решена задача о вдавлении жесткого штампа в грань объемлющего полуплоскость клина с углом раствора α при условии, что вершина клина принадлежит линии контакта, трение между штампом и поверхностью клина отсутствует, а вне линии контакта она свободна от напряжений. Показано, что разложение контактного напряжения в ряд вблизи вершины клина при $\alpha \leq 3\pi/2$ имеет два сингулярных члена, а при $\alpha > 3\pi/2$ - три сингулярных члена. Каждый из этих членов при $\alpha \leq \alpha_0$ ($\alpha_0 \approx 257^\circ$) содержит одно слагаемое, в которое входит постоянная, характеризующая интенсивность внешнего поля, а при $\alpha > \alpha_0$ - два таких слагаемых.

9. В частных случаях полученные в работе результаты совпадают или достаточно хорошо согласуются с известными решениями Дж.Бентема и В.Койтера, Л.Т.Бережницкого и Н.М.Кундрата, А.Зака и М.Вильямса, В.Койтера, В.Д.Кулиова и Г.П.Черепанова, П.Париса и Дж.Си, М.Сталлибрасса, М.Тукера, А.А.Храпкова, Г.П.Черепанова.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Кипнис Л.А. Краевая трещина на границе различных сред // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 2. С. 350-354.
2. Кипнис Л.А. Упругое равновесие клина с трещиной // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 1. С. 153-159.
3. Кипнис Л.А. Трещина на продолжении грани объемлющего полупространства клина // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 911-915.
4. Кипнис Л.А. Равновесие полупространства с несимметричной трещиной // ПМ. 1980. Т. 16. № 8. С. 113-116.

5. Кипнис Л.А. Однородная задача для клина с симметричной трещиной в вершине // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 2. С. 396-400.
6. Кипнис Л.А. Кусочно-однородная плоскость с границей раздела в форме сторон угла и симметричным разрезом, исходящим из вершины // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 334-336.
7. Кипнис Л.А. Контактная задача для упругого клина с жестко заземленной гранью // Неосесимметричные задачи гидроаэромеханики и теории упругости. Днепропетровск: Изд-во Днепропетровского ун-та, 1987. С. 101-104.
8. Кипнис Л.А. Линия скольжения в вершине прямоугольного клина с жестко заземленной гранью // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 102-103.
9. Кипнис Л.А. Линии скольжения в угловой точке границы раздела различных сред // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 6. С. 1028-1033.
10. Кипнис Л.А. Плоскость с двумя полубесконечными разрезами, вершина одного из которых находится на продолжении другого // Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепропетровск: Изд-во Днепропетровского ун-та, 1990. С. 91-95.
11. Кипнис Л.А., Черепанов Г.П. Контактная задача теории упругости для клина // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 141-147.
12. Кипнис Л.А., Черепанов Г.П. К теории механизма Билби-Коттрелла зарождения трещин в металлах // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 3. С. 109-114.
13. Кипнис Л.А., Черепанов Г.П. Линии скольжения в вершине клиновидного выреза // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 1. С. 160-163.
14. Кипнис Л.А., Черепанов Г.П. О ветвлении линии скольжения // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 5. С. 61-64.
15. Кипнис Л.А., Черепанов Г.П. Применение принципа выбора к проблеме начального развития линий скольжения из угловой точки // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 159-164.

16. Cherepanov G.P., Kipnis L.A. Some problems on meeting, deviation and branching of slip-lines // Proceedings of VI Int. Conf. on Fracture (New Delhi, 1984). Oxford: Pergamon Press, 1984. P. 1263-1269.

J. J. J.
12.05.92