

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРУТИЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ТРЕЩИНАМИ

д.т.н., с.н.с. Азизов Т.Н.

Уманский государственный педагогический университет имени Павла Тычины

Аннотация. В статье описывается методика аналитического определения перемещений железобетонных элементов с нормальными трещинами при их кручении. Методика позволяет рассчитывать усилия в продольных сечениях стержней, к которым приложены крутящие моменты, распределенные по части поперечного сечения.

Анализ исследований и постановка задачи. На работу статически неопределимых пространственных систем существенное влияние оказывают крутильные и изгибные жесткости их элементов. При достаточно глубокой изученности изгибной жесткости железобетонных элементов расчетное определение их крутильной жесткости (особенно при наличии нормальных трещин) остается весьма проблематичным.

Изучению жесткости стержневых железобетонных элементов с пространственными трещинами посвящены работы Н.И. Карпенко, Э.Г. Елагина [4,5]. Однако, в этих работах не рассматриваются вопросы жесткости элементов, в которых кроме пространственных имеются еще и нормальные трещины, хотя экспериментальные исследования свидетельствуют о весьма существенном влиянии этого фактора [3]. В связи с этим при расчетах в основном используются пространственные конечные элементы [6], что при решении задач с большим количеством элементов приводит к существенным сложностям в задании расчетной схемы и анализа полученных результатов.

В исследованиях автора показано, что нормальные трещины также оказывают влияние на крутильную жесткость железобетонных стержневых элементов. При этом жесткость элемента с нормальной трещиной определяется из рассмотрения деформации арматурного стержня в упругом пространстве и поворота блока, условно защемленного на участке, равном высоте сжатой зоны сечения с нормальной трещиной [1]. Однако, использования формул, основанных на численных расчетах по МКЭ, не всегда является удобным.

Целью настоящей статьи является разработка аналитической методики расчета деформаций от кручения блока железобетонной балки, отделенного нормальными трещинами, позволяющей без предварительных расчетов по МКЭ определять такие деформации и перемещения.

Изложение основного материала. Рассмотрим железобетонный элемент с нормальными трещинами, подверженный кручению (рис. 1). С блока В на блок А крутящий момент передается через площадку шириной b и высотой x , равной высоте сжатой зоны в нормальном сечении.

Ввиду того, что крутящий момент приложен только к части поперечного сечения, а длина блока l соизмерима с размерами сечения b и h , принцип Сен-Венана не может быть применен и крутильные деформации такого блока нельзя считать эквивалентными деформациям блока, касательные напряжения в котором распределены по всему поперечному сечению.

Для расчета применим метод линейных конечных элементов [2]. Рассечем блок параллельными плоскостями в плоскости XOY на n стержневых элементов. Чем большее количество элементов будет принято, тем большую точность получим в результате расчета.

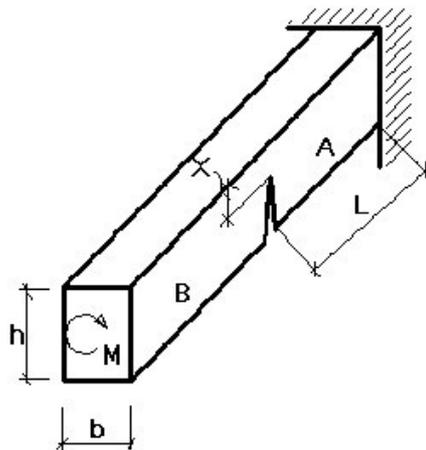


Рис. 1. Схема закручиваемого железобетонного элемента с нормальными трещинами

Для пояснения методики рассмотрим стержень, рассеченный на два линейных конечных элемента (две балки). По плоскости рассечения будут действовать неизвестные погонные касательные τ и вертикальные S силы (рис. 2).

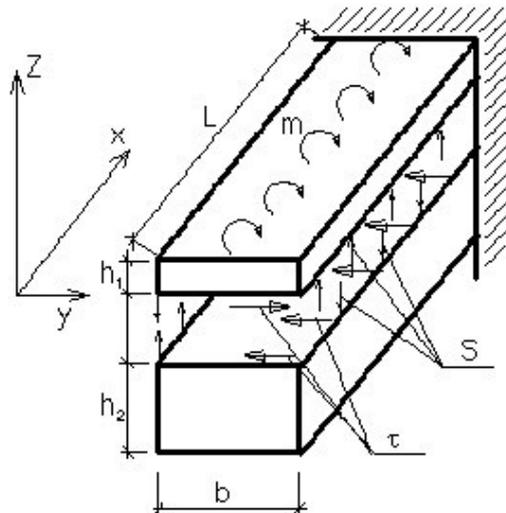


Рис. 2. Усилия, действующие по плоскости рассечения консольного стержня

Для определения неизвестных функций τ и S (имеется ввиду $\tau(x)$ и $S(x)$) можно использовать равенство горизонтальных и вертикальных перемещений вдоль плоскости рассечения для верхнего и нижнего стержней.

Рассмотрим деформации верхнего стержня от поворота (рис. 3). Из схемы на рис. 3 видно, что:

$$\Delta_{гор} = \varphi \cdot r_1 \quad \Delta_{верт} = \varphi \cdot C, \quad (1)$$

где φ – угол закручивания стержня. Дифференцируя один раз выражения (1) и учитывая, что по теории кручения

$$\varphi' = \frac{M_t}{GJ}, \quad (2)$$

где $M_t = M_t(x)$ – крутящий момент; GJ – крутильная жесткость, получим:

$$\begin{aligned}
 (\Delta_{гор})^I &= \frac{M_{t,1}}{GJ_1} r_1 = -\frac{M_{t,0}}{GJ_1} r_1 + \frac{T \cdot r_1}{GJ_1} r_1 + \frac{QS \cdot b}{GJ_1} r_1 \\
 (\Delta_{верт})^I &= \frac{M_{t,1}}{GJ_1} C = \frac{M_{t,0}}{GJ_1} C - \frac{T \cdot r_1}{GJ_1} C - \frac{QS \cdot b}{GJ_1} C .
 \end{aligned} \tag{3}$$

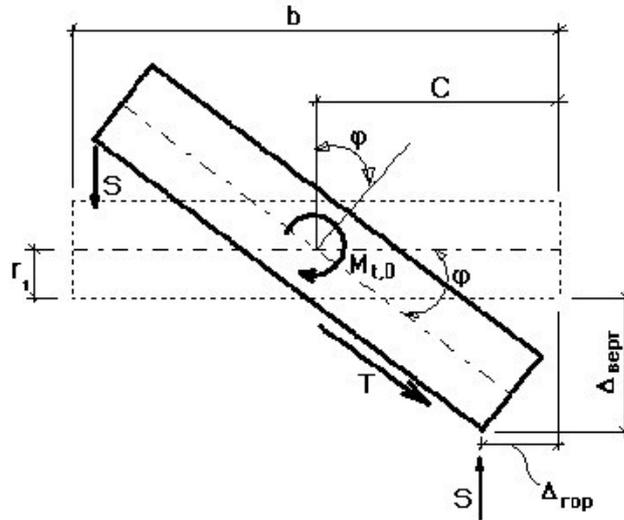


Рис. 3. Схема перемещений от поворота верхнего стержня

В выражениях (3) через $M_{t,0}$ обозначен внешний крутящий момент, действующий на стержень, связанный с погонным крутящим моментом m (см. рис. 2) выражением:

$$(M_{t,0})^I = m ; \tag{4}$$

$T=T(x)$ – суммарная касательная сила, связанная с погонными силами выражением

$$T^I = \tau ; \tag{5}$$

$QS=QS(x)$ – суммарная вертикальная поперечная сила, связанная с погонной поперечной силой выражением

$$QS^I = S \tag{6}$$

Знаки в выражениях (3) приняты из условия, что положительными являются горизонтальные перемещения вправо, а вертикальные – вниз.

Кроме перемещений от кручения будут присутствовать еще горизонтальные перемещения от сдвига полос единичной (в направлении оси x) толщины:

$$\Delta_{гор} = \frac{\tau \cdot r_1}{G \cdot b} = \frac{T^I \cdot r_1}{G \cdot b} ; \text{ тогда: } (\Delta_{гор})^I = \frac{T^{II} \cdot r_1}{G \cdot b} . \tag{7}$$

Кроме вертикальных перемещений от кручения присутствуют перемещения от сжатия слоев в вертикальном направлении усилиями $S(x)$. Для упрощения расчетов будем условно считать, что верхний стержень соединен с нижним вертикальными стержнями единичной ширины с эквивалентным сечением A , при котором их вертикальные перемещения будут равны реальным перемещениям от сжатия верхнего и нижнего стержней. Длина этих стержней принимается равной для верхнего стержня r_1 , для нижнего – r_2 . Тогда выражение для вертикальных перемещений от действия усилий S будет иметь вид:

$$\Delta_{\text{верт}} = -\frac{S \cdot r_1}{EA} = -\frac{QS' \cdot r_1}{EA}; \text{ тогда } (\Delta_{\text{верт}})' = -\frac{QS'' \cdot r_1}{EA}. \quad (8)$$

Из аналогичных рассуждений определяются горизонтальные и вертикальные перемещения и их производные для нижнего стержня.

Приравняв перемещения верхнего и нижнего стержней и приведя подобные, получим разрешающую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} T'' \frac{r_1 + r_2}{G \cdot b} + T \left(\frac{r_1^2}{GJ_1} + \frac{r_2^2}{GJ_2} \right) + QS \left(\frac{b \cdot r_1}{GJ_1} - \frac{b \cdot r_2}{GJ_2} \right) &= \frac{M_{i,0} \cdot r_1}{GJ_1} \\ QS'' \frac{r_1 + r_2}{EA} + QS \left(\frac{b \cdot c}{GJ_1} + \frac{b \cdot c}{GJ_2} \right) + T \left(\frac{C \cdot r_1}{GJ_1} - \frac{C \cdot r_2}{GJ_2} \right) &= \frac{M_{i,0} \cdot C}{GJ_1}, \end{aligned} \quad (9)$$

где EA – осевая жесткость вышеописанных вертикальных стержней.

Из системы (9) видно, что в случае симметричной схемы (при равенстве размеров и жесткостей верхнего и нижнего стержней) система уравнений (9) распадается на два независимых уравнения для определения T и QS .

Граничные условия для неизвестных функций будут иметь вид:

$$T(0) = T'(l) = 0; \quad QS(0) = QS'(l) = 0 \quad (10)$$

Решение системы (9) не представляет трудностей. Однако, если количество стержней будет более трех (при увеличении количества секущих плоскостей) систему следует решать численно. Применим следующий способ решения задачи. Консольный стержень длиной $l/2$ эквивалентен заземленному с двух сторон стержню длиной l , как показано на рис. 4 (это легко проверить).

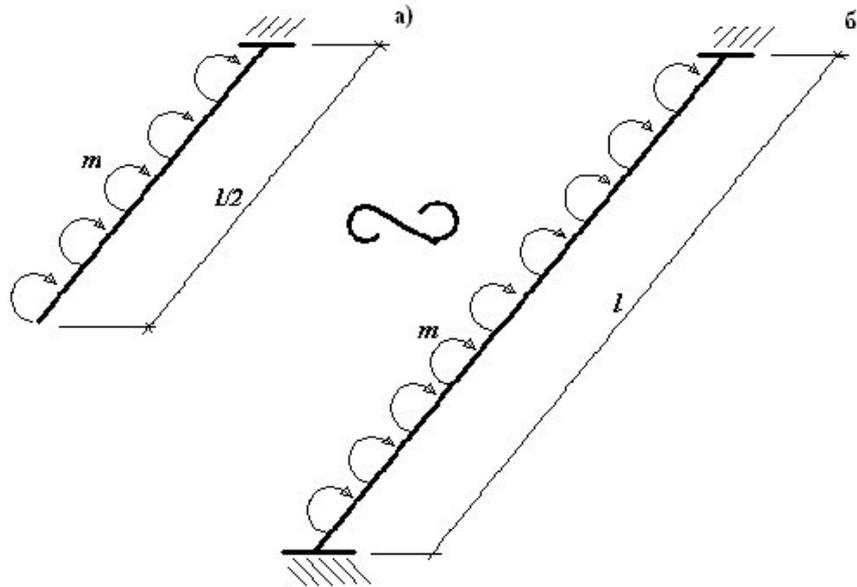


Рис. 4. Эквивалентная замена консольного стержня заземленным с двух сторон

Тогда для схемы по рис. 4,б граничные условия будут иметь вид:

$$T'(0) = T'(l) = 0; \quad QS'(0) = QS'(l) = 0 \quad (11)$$

Это позволяет принять решение в виде разложения неизвестных в тригонометрические ряды по косинусам:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cdot \text{Cos}(\alpha \cdot x); \quad QS = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cdot \text{Cos}(\alpha \cdot x), \quad (12)$$

при котором граничные условия (11) будут автоматически удовлетворены.

Раскладывая свободные члены $M_{i,0}$ также в ряды по косинусам, мы получим (подобно [2]) алгебраическую систему для определения коэффициентов Фурье T_n и Q_n . При большом количестве секущих плоскостей количество неизвестных в системе уравнений для определения $T_{n,i}$ и $Q_{n,i}$ будет равно $2m$, где m – количество секущих плоскостей.

Ряды (12) сходятся достаточно быстро и для практических расчетов вполне приемлемо принять 7-10 членов ряда (т.е. решить систему двух алгебраических уравнений 7-10 раз).

После определения неизвестных $T(x)$ и $QS(x)$ деформации стержней определяется как деформации от действия внешней нагрузки, действующей непосредственно на стержень, и определенных из решения задачи функций $T(x)$ и $QS(x)$. Затем жесткость железобетонного элемента с трещинами определяется по методике [1] с той разницей, что деформации бетонного блока вычисляются не на основе обработки данных численного расчета по МКЭ, а аналитически с использованием вышеописанного метода.

Выводы и перспективы исследований. Предложен новый метод определения деформаций железобетонного элемента, отделенного нормальными трещинами, от действия крутящих моментов, что позволяет аналитически определять крутильную жесткость таких элементов.

Перспективой исследований поставленной в настоящей статье проблемы является распространение метода на решение задачи с наклонными трещинами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азизов Т.Н. Пространственная работа железобетонных перекрытий. Теория и методы расчета: Дисс. ... докт. техн. наук: 05.23.01 / Полтавский национальный технический университет. – Полтава, 2006. – 406 с.
2. Азизов Т.Н. Теория пространственной работы перекрытий. – Киев: Науковий світ, 2001. – 276 с.
3. Горнов В.Н. Исследование прочности и жесткости промышленных конструкций жилых домов. – М.: Госстройиздат, 1954. – 240 с.
4. Елагин Э.Г. Расчет перемещений железобетонных стержней прямоугольного сечения на стадиях работы с трещинами при совместном кратковременном действии моментов и продольной силы // Строительная механика и расчет сооружений. – 1991. - № 4. – С. 26-31.
5. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
6. Клованич С.Ф. Расчет железобетонных конструкций методом конечных элементов при длительных воздействиях // Будівельні конструкції. Міжвідомчий науково-технічний збірник. Вип. 62, том 1. – Київ: НДІБК, 2005. – С. 518-523.