

Азизов Т.Н., д.т.н., профессор (Уманский государственный педагогический университет имени Павла Тычины, Срибняк Н.Н., ассистент каф.(Сумский национальный аграрный университет)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРУТИЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ С НОРМАЛЬНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Приведена методика определения перемещений в сечении железобетонного элемента с нормальной трещиной, позволяющая определить крутильную жесткость этого элемента

Анализ публикаций и постановка задачи.

В железобетонных элементах при относительно небольших крутящих моментах пространственные трещины кручения не возникают. Например, в ребристых плитах перекрытия в момент, когда нормальные трещины раскрыты достаточно широко, пространственные трещины кручения отсутствуют. В то же время перераспределение нагрузки между смежными ребрами, а также между отдельными сборными элементами перекрытия зависят не только от изгибной, но и от крутильной жесткости ребер [2]

Известны экспериментальные исследования [4], в которых показано, что жесткость ребер сборных плит на кручение изменяется при трещинообразовании, хотя в отдаленных от опор участков вообще не возникают пространственные трещины кручения.

Существующие методики определения жесткости на кручение [5, 6] касаются только железобетонных элементов с пространственными (спиральными) трещинами.

В связи с этим **целью настоящей статьи** является разработка методики определения крутильной жесткости железобетонного элемента прямоугольного сечения с нормальными трещинами.

Изложение методики. Рассмотрим методику определения жесткости на кручение железобетонного элемента с нормальной трещиной, основанную на [1], но с изменениями, основанными на последних исследованиях.

Повороту блока, к которому приложен крутящий момент M_b , относительно смежного блока сопротивляется не только сжатая зона (не треснувший участок), но и арматура.

Схема взаимного поворота двух блоков, отделенных нормальными трещинами (после мысленного рассечения арматуры) при действии внешнего крутящего момента M , приведена на рис. 1.

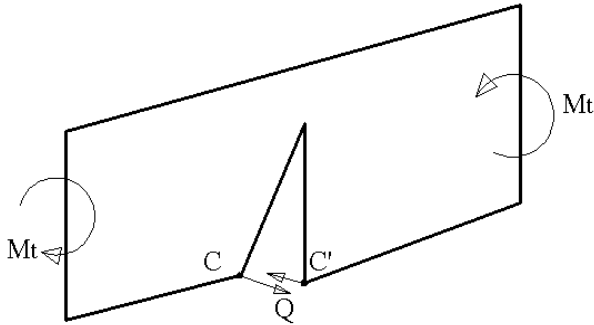


Рис. 1. Схема взаимного поворота двух блоков, отделенных трещиной

Для определения неизвестного поперечного усилия в арматуре Q нам следует мысленно разрезать арматурный стержень. После разреза по сути нам нужно определить перемещение точки C на рис. 1 относительно точки C' .

Если пренебречь стеснением при кручении, то схему по рис. 1 можно заменить схемой, приведенной на рис. 2.

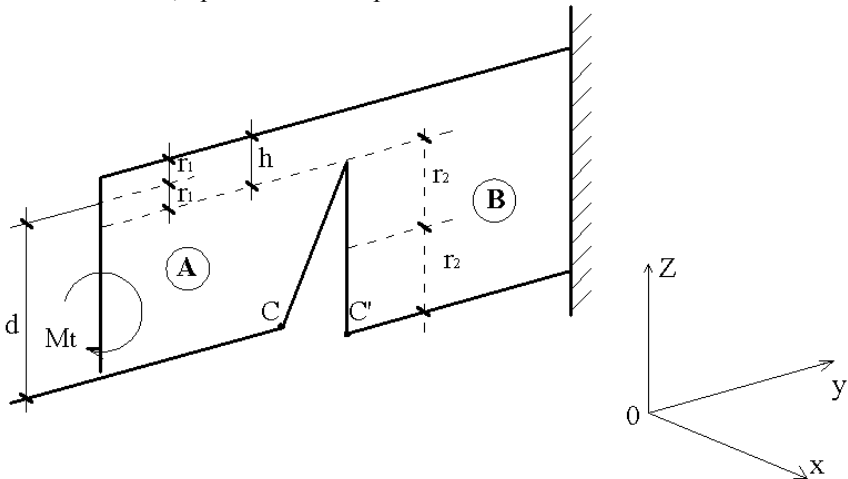


Рис. 2. Приведенная схема к определению перемещений блоков

Внешний крутящий момент M , с блока A к блоку B передается через сжатую зону высотой h . Тогда деформации блока B можно определить по схеме, показанной на рис. 3.

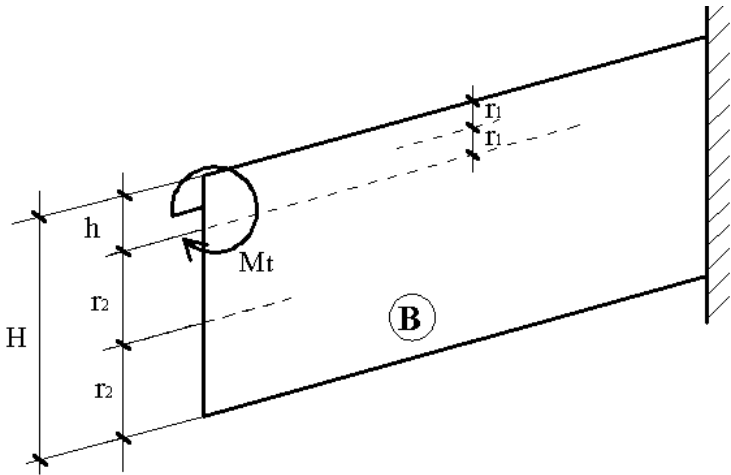


Рис. 3. Упрощенная схема приложения момента к блоку *B*

Для определения перемещений в консоли по схеме рис. 3 воспользуемся методикой [1], где выведена система дифференциальных уравнений для определения функций касательных $T(x)$ и поперечных $Qs(x)$ усилий для двухслойного стержня, к верхнему стержню которого приложен крутящий момент (рис. 4).

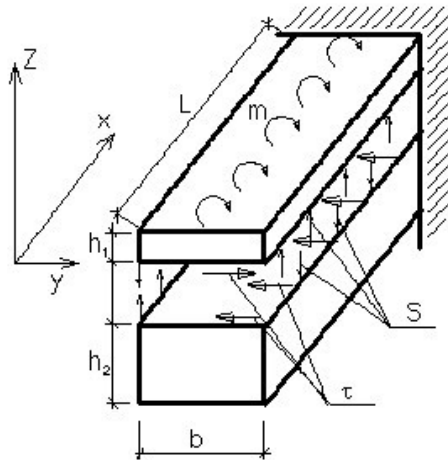


Рис. 4. Усилия, действующие по плоскости рассечения консольного стержня

При этом имеются зависимости: $T^I(x) = \tau(x)$; $Qs^I(x) = S(x)$.

Перемещение точки C (при вращении по часовой стрелке – знак плюс, против часовой – минус) будет определяться (см. рис. 2):

$$a_c = a_{Mt}^{ver} - a_{Q,ed}^{ver} Q - a_{ob,ed} Q - a_{sh,ed} Q \quad (1)$$

Перемещение точки C^l :

$$a_c^l = a_{Mt}^{nig} - a_{Q,ed}^{nig} Q + a_{ob,ed} Q + a_{sh,ed} Q + a_{cel,ed} Q, \quad (2)$$

В формулах (1) и (2) обозначено:

$a_{ob,ed}; a_{sh,ed}$ - перемещения от обмятия бетона и сдвига арматуры от действия единичной силы $\bar{Q} = 1$;

a_{Mt}^{ver} - перемещение точки C от кручения верхней консоли (см. рис. 4) внешним моментом M_i с учетом внутренних сил $Qs(x)$ и $T(x)$;

$a_{Q,ed}^{ver}$ - перемещение точки C от кручения верхней консоли (см. рис. 4) крутящим моментом, создаваемым единичной силой в арматуре $\bar{Q} = 1$;

a_{Mt}^{nig} - перемещение точки C^l , т.е. нижней консоли на рис. 4, от действия внутренних сил $Qs(x)$ и $T(x)$, возникающих в результате кручения внешним моментом M_i ;

$a_{Q,ed}^{nig}$ - перемещение точки C^l , т.е. нижней консоли на рис. 4, от действия внутренних сил $Qs(x)$ и $T(x)$, возникающих от кручения единичной силой $\bar{Q} = 1$;

$a_{cel,ed}$ - перемещение точки C^l от кручения единичной силой $\bar{Q} = 1$ стержня с полной высотой сечения (высотой H - см. рис. 3).

Приравнивая по условиям совместности деформаций выражения (1) и (2), получим искомую величину поперечной силы в арматуре:

$$Q = \frac{a_{Mt}^{ver} - a_{Mt}^{nig}}{2 \cdot a_{ob,ed} + 2 \cdot a_{sh,ed} + a_{Q,ed}^{ver} - a_{Q,ed}^{nig} + a_{cel,ed}}. \quad (3)$$

Перейдем теперь к определению составляющих перемещений, входящих в выражение (3).

Величина $a_{sh,ed}$ определяется по известной формуле сопротивления материалов [8]:

$$a_{sh,ed} = \frac{\bar{Q} \cdot a_{crc}}{G_s \cdot A_s}, \quad (4)$$

где G_s, A_s – соответственно модуль сдвига и площадь сечения арматуры.

Величину $a_{ob,ed}$ определим как перемещение анкера закладной детали по нормам [7]:

$$a_{ob,ed} = \varphi_{cc} \left(1000 \frac{\bar{Q}^2}{d_s^3 E_b^2} + \frac{\bar{Q}}{d_s E_b} \right) \quad (5)$$

где $\varphi_{cc}=l$ при кратковременном действии нагрузки [7]; d_s – диаметр арматурного стержня; E_b – модуль упругости бетона.

В формуле (5) отсутствует часть, отражающая действие прижимающей закладную деталь силы N [7].

Для схемы, приведенной на рис. 4 в [1] выведена система дифференциальных уравнений относительно неизвестных касательных $T(x)$ и поперечных $Q_S(x)$ усилий двухслойного стержня:

$$\begin{aligned} T'' \frac{h_{sdv,1} + h_{sdv,2}}{G \cdot b} + T \left(\frac{r_1^2}{GJ_1} + \frac{r_2^2}{GJ_2} \right) + QS \left(\frac{b \cdot r_1}{GJ_1} - \frac{b \cdot r_2}{GJ_2} \right) &= \frac{M_{t,0} \cdot r_1}{GJ_1} \\ QS'' \frac{l_{st,1} + l_{st,2}}{EA} + QS \left(\frac{b \cdot C}{GJ_1} + \frac{b \cdot C}{GJ_2} \right) + T \left(\frac{C \cdot r_1}{GJ_1} - \frac{C \cdot r_2}{GJ_2} \right) &= \frac{M_{t,0} \cdot C}{GJ_1}, \quad (6) \end{aligned}$$

где $h_{sdv,1}$ и $h_{sdv,2}$ – высота сдвигаемой части соответственно верхнего (рис.4) и нижнего составляющих стержней;

r_1 и r_2 – половина высоты соответственно верхнего и нижнего составляющих стержней (см. рис. 2 и 3);

$C = b/2$ – половина ширины сечения стержня (см. рис. 4);

$l_{st,1}$ и $l_{st,2}$ – высота соответственно верхнего и нижнего вертикальных стерженьков [1], имитирующих деформации сжатия и растяжения волокон составляющих стержней в вертикальном направлении (в направлении оси Z на рис. 4); EA – осевая жесткость вышеназванных стерженьков;

GJ_1 и GJ_2 – крутильная жесткость соответственно верхнего и нижнего составляющих стержней (рис. 4).

Величины $h_{sdv,1}$, $h_{sdv,2}$, $l_{st,1}$, $l_{st,2}$ должны подбираться с учетом экспериментально-теоретических исследований, т.к. эти величины показывают какая часть волокон верхнего и нижнего составляющих стержней на рис. 4 сдвигается в горизонтальном и деформируется в вертикальном направлении. Предварительно принимаем эти величины равными половине соответственно верхнего и нижнего составляющих стержней.

Граничные условия неизвестных функций $T(x)$ и $Q_S(x)$ системы (6) будут иметь вид (см. рис. 3 и 4):

$$T(0) = T'(l) = 0; \quad Q_S(0) = Q_S'(l) = 0 \quad (7)$$

Для упрощения решения системы (6) изменим схему по рис. 3 на эквивалентную (рис. 5)

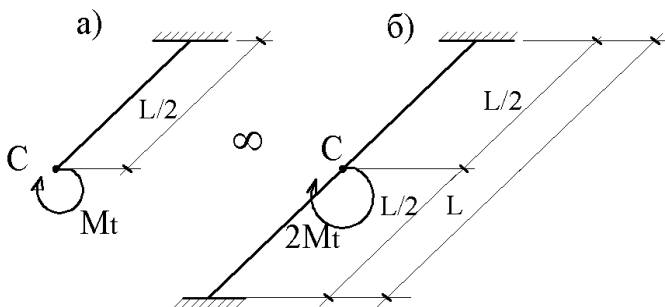


Рис. 5. Изменение схемы консоли (а) на эквивалентную (б)

Схема по рис. 5, а эквивалентна схеме по рис. 5, б. Это легко проверить. Угол поворота в точке C по схеме рис. 5, а и рис. 5, б одинаков. Граничные условия для схемы по рис. 5, б будут иметь вид:

$$T^I(0) = T^I(l) = 0; \quad QS^I(0) = QS^I(l) = 0 \quad (8)$$

Это позволяет принять решение в виде разложения неизвестных в тригонометрические ряды по косинусам:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cdot \text{Cos}(\alpha \cdot x); \quad QS = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cdot \text{Cos}(\alpha \cdot x), \quad (9)$$

при котором граничные условия (8) будут автоматически удовлетворены.

Обозначив коэффициенты при неизвестных в первой строке системы (6) соответственно A, B, C ; во второй строке – β, γ и ξ , подставив решения (9) в (6), произведя дифференцирование и сокращая на $\text{Cos}(\alpha x)$, получим:

$$\begin{aligned} T_n \alpha^2 A + T_n B + Q_n C &= D_n \\ T_n \xi + Q_n \alpha^2 \beta + Q_n \gamma &= \delta_n \end{aligned} \quad (10)$$

где неизвестными являются коэффициенты разложения T_n и Q_n .

Для решения системы (10) следует правые части также разложить в ряды по косинусам.

Эпюра крутящих моментов для схемы рис. 5, б будет иметь вид, показанный на рис. 6.

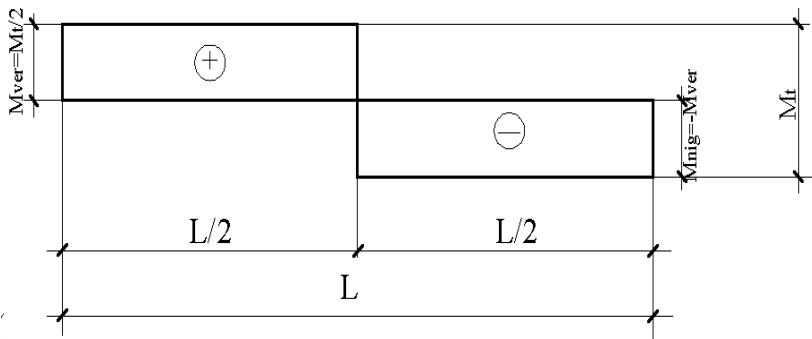


Рис. 6. Эпюра крутящих моментов для схемы по рис. 5, б

Функция $M_t(x)$ по рис. 6 раскладывается в ряд по формуле [3]:

$$M_t(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Cos}(\alpha \cdot x) \quad (11)$$

где обозначено $\alpha = \frac{\pi \cdot n}{l}$

Коэффициенты a_n вычисляются по формуле [3]:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l M_t(x) \cdot \text{Cos}(\alpha \cdot x) dx \quad (12)$$

После интегрирования и упрощения получим:

$$a_n = \frac{2M_t}{l \cdot \alpha} \text{Sin} \frac{\pi \cdot n}{2} \quad (13)$$

Тогда правые части D_n и δ_n в системе (10) будут иметь вид:

$$D_n = \frac{2M_t}{l \cdot \alpha} \frac{r_1}{GJ_1} \text{Sin} \frac{\pi \cdot n}{2}; \quad \delta_n = \frac{2M_t}{l \cdot \alpha} \frac{C}{GJ_1} \text{Sin} \frac{\pi \cdot n}{2} \quad (14)$$

Система (10) решается m раз, где m – верхний предел суммирования рядов (9) (достаточно 5-7 членов ряда для получения хорошей точности).

Решение системы (10) позволяет получить значения:

$$T_n = \frac{\eta}{\omega}; \quad Q_n = \frac{D_n - T_n(\alpha^2 A + B)}{C} \quad (15)$$

где обозначено:

$$\eta = \frac{D_n}{C} - \frac{\delta_n}{\alpha^2 \beta + \gamma}; \quad \omega = \frac{\alpha^2 A + B}{C} - \frac{\xi}{\alpha^2 \beta + \gamma} \quad (16)$$

Подставляя определенные по (15) T_n и Q_n в ряды (9), получим

неизвестные функции $T(x)$ и $Qs(x)$.

Однако, нас интересуют не сами функции $T(x)$ и $Qs(x)$, а углы поворота в конце консоли (см. рис. 2 и 4).

Угол поворота верхней части двухслойного стержня φ (рис. 4) будет складываться из угла от действия внешнего момента M_{t0} , от момента M_{ts} , создаваемого вертикальными усилиями $Qs(x)$ и от момента M_{tt} , создаваемого касательными силами $T(x)$. С учетом знаков направления усилий (см. рис. 4) будем иметь:

$$\varphi_{tot} = \varphi_{M_{t0}} - \varphi_{M_{ts}} - \varphi_{M_{tt}} \quad (17)$$

Составляющие (17) легко определяются по теории сопротивления материалов [8]:

$$\varphi_{M_{t0}} = \frac{M_{t0} \cdot \frac{l}{2}}{GJ_1}, \quad (18)$$

$$\varphi_{M_{ts}} = \int_0^{l/2} \frac{M_{ts}(x)}{GJ_1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \frac{b}{GJ_1 \cdot \alpha} \text{Sin} \frac{\pi \cdot n}{2} \quad (19)$$

Из аналогичных выкладок для φ_{mtt} получим:

$$\varphi_{M_{tt}} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \frac{r_1}{GJ_1 \cdot \alpha} \text{Sin} \frac{\pi \cdot n}{2} \quad (20)$$

Угол поворота нижней части складывается из углов от действия $T(x)$ и $Qs(x)$:

$$\varphi_{M_{ts}}^{nig} = - \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \frac{b}{GJ_2 \cdot \alpha} \text{Sin} \frac{\pi \cdot n}{2} \quad (21)$$

$$\varphi_{M_{tt}}^{nig} = - \sum_{n=1}^{\infty} T_n \frac{r_2}{GJ_2 \cdot \alpha} \text{Sin} \frac{\pi \cdot n}{2} \quad (22)$$

Здесь знак « - » стоит потому, что усилия $T(x)$ и $Qs(x)$ закручивают нижний стержень в обратном по сравнению с верхним направлении (см. рис. 4).

Суммарный поворот нижнего стержня:

$$\varphi_{tot}^{nig} = \varphi_{M_{ts}}^{nig} + \varphi_{M_{tt}}^{nig} \quad (23)$$

Перемещение точки C по горизонтали, т.е. величина a_{Mt}^{ver} :

$$a_{Mt}^{ver} = \left(\varphi_{tot,l}^{ver} + \varphi_{tot,r}^{ver} \right) \cdot d, \quad (24)$$

где d – см. обозначение на рис. 2;

$\varphi_{tot,l}^{ver}$ и $\varphi_{tot,r}^{ver}$ - суммарные углы поворота, определяемые по формуле (17) соответственно для блока слева (блока A на рис. 2) и блока справа (блока B на рис. 2). Это связано с тем, что перемещению точки C способствуют как деформации блока A , так и деформации блока B . Поворот блока A (рис. 2)

относительно блока B складывается из поворота верхней части блока B относительно его же нижней части (рис. 2) и поворота верхней части блока A относительно его же нижней части.

Перемещение точки C^l по горизонтали:

$$a_{Mt}^{nig} = \varphi_{tot}^{nig} \cdot r_2, \quad (25)$$

где φ_{tot}^{nig} определяется по (23);

r_2 – половина высоты сечения нижнего стержня (рис. 3 и 4).

Для определения составляющей $a_{Q,ed}^{ver}$ выражения (3) следует иметь в виду, что сила $\bar{Q} = 1$ создает крутящий момент:

$$M_{iQ} = \bar{Q} \cdot d \quad (26)$$

Следовательно, вышеприведенные формулы определения перемещений a_{Mt}^{ver} от действия момента M_i могут быть использованы для определения $a_{Q,ed}^{ver}$ по формуле (24) с той лишь разницей, что составляющие $\varphi_{tot,l}^{ver}$ и $\varphi_{tot,r}^{ver}$ определяются подставлением вместо M_{i0} величины M_{iQ} , определенной по (26).

Аналогично, величина $a_{Q,ed}^{nig}$ определяется по (25) с использованием вместо M_{i0} величины M_{iQ} по (26) при определении φ_{tot}^{nig} по (23).

Последнее из составляющих выражения (3) $a_{cel,ed}$ определится из выражения:

$$a_{cel,ed} = \varphi_{cel,ed} \frac{H}{2}, \quad (27)$$

где H - полная высота сечения стержня (см. рис. 3);

$\varphi_{cel,ed}$ - угол поворота стержня с полной высотой сечения H от действия единичной силы $\bar{Q} = 1$. Этот угол определяется по известной формуле сопротивления материалов [8]:

$$\varphi_{cel,ed} = \frac{\bar{Q} \cdot \frac{H}{2} \cdot l}{GJ_{tot}}, \quad (28)$$

где GJ_{tot} – крутильная жесткость целого сечения высотой H .

После определения всех составляющих выражения (3) и вычисления неизвестной величины Q можно определить реальное перемещение в трещине a_{tr} (см. рис. 1-3):

$$a_{tr} = a_{Mt}^{ver} - a_{Qt}^{ver} + (a_{ob} + a_{sh})2 - a_{Mt}^{nig} + a_{Qt}^{nig} - a_{cel}, \quad (29)$$

где a_{Mt}^{ver} и a_{Mt}^{nig} определяются соответственно по (24) и (25), а остальные составляющие определяются умножением соответствующих им единичных перемещений, определенных выше, на величину Q .

Полное перемещение точки C в трещине с учетом деформаций в трещине и поворота сплошного сечения определится из выражения:

$$a_{tot} = a_{tr} + \frac{M_t \cdot l}{GJ_{tot}} \cdot \frac{H}{2}. \quad (30)$$

Угол поворота условно сплошного (без трещин) элемента:

$$\varphi_{ekv} = \frac{a_{tot}}{H/2}. \quad (31)$$

Отношение угла поворота сплошного элемента без трещин к эквивалентному, определяемому по (31) дает нам отношение жесткости сплошного элемента к жесткости элемента с нормальной трещиной.

Выводы и перспективы исследований. Разработана методика определения перемещений в сечении с нормальной трещиной при действии крутящего момента, позволяющая определить крутильную жесткость железобетонного элемента с нормальными трещинами.

Перспективой является разработка программы для ЭВМ определения жесткостных характеристик железобетонных элементов прямоугольного сечения с нормальными трещинами.

1. Азизов Т.Н. Определение крутильной жесткости железобетонных элементов с трещинами//Дороги і мости. Збірник наукових праць. Вип. 7.Том 1. - Київ: ДерждорНДІ, 2007. - С. 3-8.
2. Азизов Т.Н. Просторова робота залізобетонних перекриттів. Теорія та методи розрахунку: Автореф. дисс. ... докт. техн. наук: 05.23.01 / Полтавський національний технічний університет. – Полтава, 2006. – 35 с.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. 13-е изд., исправл. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
4. Горнов В.Н. Исследование прочности и жесткости индустриальных конструкций жилых домов. – М.: Госстройиздат, 1954. – 240 с.
5. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
6. Карпенко Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами. – М.: Стройиздат, 1976. – 208 с.
7. Рекомендации по проектированию стальных закладных деталей для железобетонных конструкций / НИИЖБ. –М.: Стройиздат, 1984. – 87 с.
8. Феодосьев В.И. Сопроотивление материалов. – М.: Наука, 1970. – 544 с.